

Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г.Шевченка

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітнього ступеня «магістр»

на тему

**«Реалізація технології змішаного навчання на прикладі вивчення
тригонометрії у профільній школі»**

Виконала:

студентка 6 курсу, групи 61,
спеціальності

014 Середня освіта (математика)

Добридень Дар'я Валеріївна

Науковий керівник:

к.п.н., доцент Музиченко С.В.

Чернігів – 2023 рік

Роботу подано до розгляду « _____ » _____ 20__ року.

Студент _____

(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник _____

(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент _____

(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики.

Протокол № _____ від « _____ » _____ 20__ року.

Студента допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри _____

(підпис) (прізвище та ініціали)

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ	6
1.1. Сутність поняття «технологія навчання»	6
1.2. Методи навчання у сучасній методиці математики	8
1.2.1. Методи мотивації учнів до навчання	9
1.2.2. Методи ознайомлення учнів з новим матеріалом	14
1.2.3. Методи закріплення знань та вмінь	18
1.2.4. Методи контролю та оцінювання	20
1.3. Технологія змішаного навчання	24
1.3.1. Історія розвитку технології змішаного навчання	25
1.3.2. Моделі змішаного навчання	26
1.3.3. Недоліки змішаного навчання	31
1.3.4. Переваги змішаного навчання	33
РОЗДІЛ 2. ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ ТРИГОНОМЕТРІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕХНОЛОГІЇ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ	38
2.1. Методичні особливості навчання тригонометрії	38
2.2. Модель змішаного навчання тригонометрії	42
2.3. Система уроків до розділу «Тригонометричні функції» з використанням технологій дистанційного навчання	47
2.4. Педагогічний експеримент та його результати	61
ВИСНОВКИ	63
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	65
ДОДАТОК А	68
ДОДАТОК Б	69
ДОДАТОК В	70
ДОДАТОК Г	71

ВСТУП

У сучасних умовах освітнього процесу актуальним є питання підвищення ефективності навчання. Це вимагає пошуку нових методів і технологій навчання, які відповідають сучасним вимогам і дозволяють ефективно розвивати творчі здібності та критичне мислення учнів.

Одним із таких перспективних методів є технологія змішаного навчання, яка поєднує в собі традиційні методи навчання в аудиторії з використанням онлайн-ресурсів і технологій.

У 2020 році, під час пандемії COVID-19, змішане навчання було широко впроваджено в українських школах і університетах. Це дозволило забезпечити доступ до освіти для всіх учнів і студентів, незважаючи на обмеження, пов'язані з карантинном.

У 2022 році, після початку повномасштабного вторгнення росії в Україну, змішане навчання стало невід'ємною частиною освітнього процесу в багатьох українських регіонах. Це дозволило продовжити навчання для учнів і студентів, які були змушені покинути свої домівки і переїхати в інші регіони країни.

У сучасному світі спостерігається бурхливий розвиток інформаційних технологій, доступ до Інтернету є майже у кожного, що створює нові можливості для дистанційного навчання. Впровадження технології змішаного навчання дозволяє використовувати в навчальному процесі широкий спектр онлайн-ресурсів, таких як відеолекції, віртуальні лабораторії, онлайн-тести та інші. Це дозволяє створювати якісний контент, який може бути використаний в навчальному процесі.

Дослідження показали, що змішане навчання може бути таким же ефективним, як і традиційне навчання, а в деяких випадках навіть більш ефективним. Це пов'язано з тим, що воно дозволяє поєднати переваги традиційного навчання, такого як особисте спілкування з викладачем і однокласниками, з перевагами дистанційного навчання, такого як гнучкість і можливість індивідуального підходу.

Об'єктом дослідження є процес вивчення тригонометрії у профільній школі.

Предметом дослідження є реалізація технології змішаного навчання на прикладі вивчення тригонометрії у профільній школі.

Метою дослідження є розробка та апробація методичних рекомендацій щодо реалізації технології змішаного навчання на прикладі вивчення тригонометрії у профільній школі.

Для досягнення цієї мети необхідно вирішити такі **завдання**:

1. Проаналізувати теоретичні основи змішаного навчання.
2. Визначити основні принципи реалізації технології змішаного навчання.
3. Розробити методичні рекомендації щодо реалізації технології змішаного навчання на прикладі вивчення тригонометрії у профільній школі.
4. Апробувати розроблені методичні рекомендації.

Методи дослідження

У дослідженні використано такі методи:

Для виконання поставлених завдань використовували методи:

- емпіричні (бесіди з учителями та учнями, спостереження за навчальним процесом в школі);
- теоретичні (вивчення методичної літератури, аналіз чинних програм та шкільних підручників).

Практична значущість дослідження полягає в тому, що розроблені методичні рекомендації можуть бути використані для підвищення ефективності вивчення тригонометрії у профільній школі.

Дипломна робота складається з вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Сутність поняття «технологія навчання»

Для сучасної дидактики математики вже класичним є поняття методичної системи навчання, яке увів у науковий дискурс у другій половині минулого століття А. М. Пишкало. До методичної системи відносять п'ять взаємопов'язаних компонентів: цілі навчання, зміст, методи, засоби та форми організації навчання. Відповідно методика навчання конкретного курсу чи теми покликана конкретизувати ці компоненти, виявити оптимальні умови, за яких вони утворюють цілісну структуру, орієнтовану на досягнення освітніх цілей. Зокрема, завдання методики навчання математики З. І. Слєпкань вбачає у відповіді на запитання: 1) навіщо навчати математики (мета); 2) що треба вивчати (зміст); 3) як треба навчати (методи, організаційні форми і засоби) [26, с. 6].

У останні десятиліття у науково-методичній літературі поряд з поняттям «методика навчання» широко використовують термін «технологія навчання». Виникає питання, у чому відмінність цих термінів? Чи, можливо, вони є синонімічними?

Слово «технологія» грецького походження і перша його частина у перекладі означає «уміння», «майстерність». Словник іншомовних слів визначає технологію як сукупність способів переробки матеріалів, виготовлення виробів та процеси, що супроводжують ці види робіт. Тому застосування терміну «технологія» до педагогічних явищ є досить формальним. Лише умовно можна перенести дане поняття в освітню сферу, зберігаючи його загальний сенс, як послідовності дій, що забезпечують досягнення результату.

У психолого-педагогічній літературі існують різні визначення терміну «технологія навчання» або «педагогічна технологія». Фахівці стверджують,

що їх налічується кілька сотень. Усі вони більшою чи меншою мірою наголошують на тому, що істотними особливостями технології навчання є конкретність, чіткість, інструментальність та ефективність, тобто застосування технології має гарантувати певні результати. Автори [27] наводять порівняльний аналіз деяких поширених визначень та, підсумовуючи його, дають власне стисле тлумачення: технологія навчання – це «жорсткий алгоритм прийомів, методів, технік навчання, який гарантує досягнення мети».

Як і методика навчання, технологія навчання ґрунтується на педагогічних теоріях та дослідженнях, але включає в себе не просто рекомендації для організації та здійснення навчального процесу, а чітко визначену систему дій, процедура застосування яких гарантує засвоєння знань, умінь та навичок учнями. На відміну від технології, методика навчання допускає значно ширшу розмаїтість, варіативність способів реалізації теоретичних положень.

На перший погляд може видатись, що застосування технологій навчання у роботі вчителя усуває творчий компонент і наближає її до ремесла. Проте це не так. Адже завжди залишається простір для проектування нових ефективних технологій, а застосування існуючих передбачає їх наповнення конкретним дидактичним інструментарієм та адаптацію до умов навчального процесу.

Отже, у контексті нашого дослідження під технологією навчання будемо розуміти жорстко алгоритмізовану сукупність процесуально-методичних дій вчителя та дидактичного інструментарію, який він використовує, що забезпечує ефективну навчальну діяльність учня і досягнення проєктованого результату дидактичного циклу. При цьому технологія навчання включає такі компоненти методичної системи як методи й форми організації навчальної діяльності, засоби навчання, способи і засоби контролю, оцінювання та корекції.

Структура технологічного навчального процесу на думку авторів [27] має передбачати механізми:

- забезпечення уваги учнів;

- створення мотивації для вивчення матеріалу;
- пред'явлення цілей;
- залучення (пригадування) всього необхідного матеріалу;
- стимулювання і керівництво навчальною діяльністю;
- мотивування досягнення намічених навчальних результатів;
- перевірка правильності досягнутих результатів;
- забезпечення зворотного зв'язку і необхідної корекції;
- підсумкове критеріальне оцінювання результатів.

Як бачимо, це ті ж самі щоденні професійні задачі, які вирішує кожен учитель на кожному уроці. Але якщо у звичайному режимі вчитель здійснює поточний вибір способів вирішення даних задач, то реалізація певної технології передбачає завчасно спроектовані рішення, обумовлені особливостями даної технології.

Технології навчання можна класифікувати за різними ознаками. Залежно від того, які засоби навчання використовуються, технології навчання можуть бути традиційними та інноваційними. Традиційні технології навчання використовують такі засоби навчання, як підручники, посібники, дошки, плакати тощо. Інноваційні технології навчання використовують такі засоби навчання, як комп'ютери, інтерактивні дошки, віртуальні лабораторії тощо.

Ступінь алгоритмізації технології навчання може бути різною. Найбільш жорсткими є технології, в яких алгоритм дій учня або педагога повністю визначений. Такі технології називають програмованими. Найбільш гнучкими є технології, які дозволяють педагогу самостійно визначати шляхи досягнення мети навчання. Такі технології називаються непрограмованими.

1.2. Методи навчання у сучасній методиці математики

Методи і технології навчання тісно взаємопов'язані. Методи навчання є складовою частиною технології навчання. Технологія навчання визначає, які

методи будуть застосовуватися в навчальному процесі, а також як вони будуть взаємодіяти між собою.

Методи навчання – це узгоджені способи взаємодії вчителя та учнів, спрямовані на досягнення навчальних і виховних цілей. Правильний вибір методів навчання відповідно до цілей, змісту навчання та вікових особливостей учнів сприяє розвитку пізнавальних здібностей учнів, формуванню вмінь та навичок використовувати набуті знання на практиці, підготовці учнів до самостійного навчання та формуванню їхнього світогляду [5].

Різні методи навчання можуть бути ефективними для різних груп учнів. Наприклад, для великих груп підходять лекції, демонстрації та командне викладання. Для малих груп – семінари, лабораторні заняття, ділові ігри та інші інтерактивні методи. Для індивідуального навчання – метод проектів, індивідуальні консультації та дистанційне навчання [27].

1.2.1. Методи мотивації учнів до навчання

Формування особистості школяра під час навчання математиці є комплексним і поступовим процесом, що включає залучення учнів до соціального досвіду та освоєння ними різних форм і видів діяльності, які вже існують у суспільстві. Вивчення математики в школі вимагає не лише засвоєння математичних знань і вмінь аналізу та мислення, але й акцентує увагу на формуванні особистості учня. Це означає розвиток унікальності, індивідуальності, творчого потенціалу та прихованих можливостей дитини, а також виявлення та розширення її талантів.

Для досягнення цих цілей надзвичайно важливо стимулювати позитивне ставлення до навчання та формувати правильну мотивацію вивчення математики. Проблема дослідження мотивації навчальної діяльності, як засобу розвитку пізнавальної активності учнів, викликала значний інтерес серед науковців, методистів та вчителів-практиків.

Наукова праця Є. Ільїна "Мотив як складне психологічне утворення" надає глибокий огляд мотивації як ключового елементу освітнього процесу, а також пропонує науково обґрунтовані методи підвищення внутрішньої мотивації в навчальному процесі. Ефективність навчального процесу визначається усвідомленим бажанням учнів засвоювати матеріал та їхньою нахиленістю до самоосвіти на основі стійкої мотивації до навчання.

Г. Бевз підкреслює значення формування дієвих мотивів учіння під час вивчення математики. Він вважає, що учні повинні усвідомлювати, що матеріал, вивчений на уроках математики, корисний не лише для розвитку загальної культури, але й має практичне застосування у реальній діяльності. . «Навіть той, хто не пов'язує своє майбутнє з математикою, повинен розуміти, що без знання даного матеріалу він не зможе отримати атестат зрілості і продовжити навчання у вищому навчальному закладі» [2]

Методи стимулювання й мотивації навчально-пізнавальної діяльності учнів займають важливе місце серед методів навчання. Серед них виділяються такі:

1. Методи стимулювання інтересу до навчання:

- Створення ситуацій інтересу під час викладання матеріалу для активізації навчання та полегшення засвоєння знань.

- Використання пізнавальних ігор, таких як ігри-подорожі та вікторини, як засобу формування інтересу до знань. Рольові ігри можуть бути особливо ефективними для старшокласників.

- Впровадження на уроках пізнавальних ігор, навчальних дискусій і створення емоційно насичених ситуацій для стимулювання пізнавальної діяльності та підвищення працездатності учнів.

- Використання гри, комп'ютерного та мультимедійного обладнання для підсилення ефективності навчального процесу. Комп'ютерні презентації особливо корисні для демонстрації динаміки процесів та ілюстрації геометричних задач.

2. Методи стимулювання обов'язку й відповідальності:

- Запровадження ідеї ідеального навчання, що базується на інтересі без оцінок та щоденного оцінювання, як запропоновано грузинським педагогом Ш. Амонашвілі.

- Підкреслення важливості виховання у дітей не лише інтересу, але й обов'язку та відповідальності.

- Введення принципу "Це згодиться в житті", "Без цього не можна бути освіченою та культурною людиною", "У майбутньому це стане тобі необхідним" для формування у учнів усвідомлення необхідності цих аспектів у їхньому житті.

Успіх та похвала є ключовими факторами у формуванні позитивного ставлення до математики. Успішне вивчення цього предмету стає основним джерелом мотивації для учня. Похвала, у свою чергу, виступає як форма винагороди, яка підвищує почуття гідності та додає позитивний імпульс для подальшого успіху.

Для ефективного використання інноваційних підходів у навчанні математики необхідно стежити за ретельним плануванням роботи вчителя. Це включає в себе передачу завдань для передрівневої підготовки, вибір технологій, які допоможуть учням зрозуміти тему, і забезпечення достатнього часу для роздумів над завданням.

Надмірне використання інноваційних вправ на одному занятті не є доцільним. Важливо проводити швидкі опитування та самостійні роботи для перевірки різних аспектів теми, не пов'язаних із інтерактивними вправами. Після інноваційних вправ важливо провести глибоке обговорення результатів, акцентуючи увагу на інших аспектах теми.

Для ефективного контролю за процесом використання інноваційних технологій, вчитель повинен добре підготуватися, вивчивши матеріал, ретельно спланувавши заняття та встановивши критерії оцінки. Мотивація учнів до вивчення може бути досягнута за допомогою цікавих випадків та проблем, а також попереднього оголошення очікуваних результатів та критеріїв оцінювання. Різноманітні методи, такі як вправи-розминки та

розподіл ролей у групах, можуть допомогти залучити увагу та забезпечити необхідну дисципліну.

Оцінка навчальних досягнень учнів при застосуванні інноваційних технологій передбачає позитивний підхід до будь-яких, навіть малих, успіхів та зусиль учнів. Коментарі стосовно їхніх дій, навіть критичні, повинні починатися з позитивних зауважень. Коригування невірних відповідей можливе лише через пропозиції діяти інакше, наприклад, "Можлива інша відповідь...", "Існує інша точка зору..." або "Можна сказати інакше...".

Практика показує, що регулярне застосування стандартних методів на уроках призводить до байдужості до навчання, зниження якості сприйняття і зменшення ефективності розвитку творчого мислення та продуктивності праці. Використання інноваційних методів, таких як урок-вікторина, проблемний урок, урок-подорож, урок-конференція, урок-розв'язування задач тощо, захоплює учнів активною навчально-пізнавальною діяльністю, розкриває їх творчий потенціал, стимулює самостійний пошук інформації та створює комфортні умови. Це дозволяє кожному учневі відчути свою важливість та інтелектуальну спроможність [21].

Під час вивчення будь-якої теми шкільного курсу математики неможливо обійтись без задач прикладного характеру. Прикладні задачі у математиці включають умови, які містять нематематичні поняття. Використання таких задач спрямоване на формування у школярів системи знань, умінь і навичок. Розв'язання цих задач розвиває вміння осмислювати поняття та застосовувати знання на практиці, аналізувати результати, робити узагальнення, порівняння, висновки та розширює кругозір учнів. Крім того, прикладні задачі є необхідним елементом життя, ставлять практичні завдання перед учнями, що зумовлює потребу у вивченні теоретичного матеріалу.

Зараз особливо актуальна проблема підвищення рівня математичних знань. Недоліки у системі шкільної освіти та соціальні умови призвели до того, що багато школярів уникають вивчення математики. Деякі вважають, що це завдання надто складне, інші вважають, що математичні знання не будуть

корисні в житті. Вчителю доручено переконати учнів у тому, що навіть базовий рівень математичних знань підвищує їх рівень культури спілкування. Вивчення математики може бути важким завданням, але воно формує розсудливість, гнучкість розуму, логічність думки і здатність прогнозувати ситуації наперед.

Один з ефективних методів полегшення вивчення математики - це використання усних вправ. Ці вправи сприяють розвитку уваги, спостережливості та ініціативи, підвищують дисципліну і зацікавленість учнів у навчанні. Вчитель, використовуючи усні вправи, створює зв'язок на уроці, що дозволяє ефективно контролювати процес засвоєння конкретних знань і навичок. Усні вправи дозволяють ефективно вивчати типові ситуації та прийоми спілкування, розвивати логічну та мовну культуру учнів, особливо під час повторення навчального матеріалу.

Навички усної лічби є важливим етапом успішного навчання в старших класах, і вони можуть бути розвинуті за допомогою усних вправ. На сучасному етапі, коли кожен учень має мікрокалькулятор, усна лічба залишається актуальною проблемою, оскільки діти можуть використовувати калькулятор удома, навіть якщо вчитель забороняє його використання на уроці.

Також важливим є вплив особистості вчителя на мотивацію учнів. Стиль педагогічної діяльності вчителя формує різні мотиви учіння. Наприклад, авторитарний стиль може стимулювати "зовнішню" мотивацію, тоді як демократичний сприяє "внутрішній" мотивації. Важливо, щоб вчитель володів глибокими знаннями з предмету, будував логічний та доступний виклад матеріалу, створював позитивний психологічний настрій для стимулювання інтелектуальних інтересів учнів.

Загалом, для підвищення інтересу до навчання математики в учнів можна використовувати наступні підходи та методи:

1. Враховувати індивідуальні запити, інтереси і прагнення учнів під час навчання.

2. Забезпечити, щоб основними переживаннями школяра були інтерес і радість від навчання.
3. Експериментувати та змінювати методи і прийоми навчання.
4. Залучати учнів до колективної діяльності.
5. Використовувати гру як потужний стимул для інтересу до навчання.
6. Представляти матеріал у незвичайний спосіб.
7. Використовувати позитивний підхід, нагороджуючи учнів за досягнення.
8. Визнавати та відзначати позитивні зрушення кожного учня.
9. Не карати за невдачу, оскільки сама невдача є вже своєрідним покаранням.
10. Активно звертатися до кожного учня і надавати постійний "зворотний зв'язок".
11. Інтегрувати знання, пов'язуючи їх з іншими предметами.
12. Створювати позитивну атмосферу довіри і співробітництва на уроці.
13. Розвивати в учнів віру в себе.
14. Застосовувати рефлексію через оцінку власної діяльності та діяльності інших.

Узагальнюючи, мотивація навчання математики - це система пізнавальних спонукань, і вчителі повинні активно працювати над створенням умов для формування глибоких мотивів учнів. Цей творчий підхід учителя спрямований на те, щоб забезпечити ефективне та задовільне навчання для кожної дитини.

1.2.2. Методи ознайомлення учнів з новим матеріалом

Викладання нового матеріалу – основний елемент переважної більшості уроків. Саме від того, як учитель подає новий матеріал, значною мірою залежить якість знань учнів[3].

Викладати матеріал можна різними методами. На уроках математики в школі найчастіше використовують пояснення.

Необхідно розуміти, що не кожен учень може запам'ятати всі пояснення вчителя, і деякі деталі можуть вибути з пам'яті. Проте основні ідеї, поняття і методи, які є важливими для подальшого навчання, повинні бути засвоєні всіма учнями.

Важливо починати пояснення з основного матеріалу і переконатися, що учні розуміють його, перед тим як переходити до менш важливих питань. Особливу увагу до цього повинні приділяти вчителі початкових класів, де час для вивчення програмного матеріалу обмежений, і де доводиться відмовлятися від деяких деталей. Однак основи мають бути вивчені детально, без економії часу чи зусиль.

Це не означає, що треба витратити багато часу на вивчення нового матеріалу. Існує думка, що на уроці, присвяченому викладанню нового матеріалу, необхідно виділяти більше часу (приблизно 25-30 хвилин) на пояснення. Проте важливо уникати додавання зайвих деталей, які можуть відволікти увагу від основного.

У різні етапи розвитку шкільної системи використовувалися різноманітні методи навчання. До середини XIX століття математику викладали переважно за догматичним методом, що базувався на механічному запам'ятовуванні. Пояснення принципів чи правил не надавалися учням, і їм просто доручалося вивчити матеріал. Навчання передбачало запам'ятовування не лише визначень і правил, але й вирішення прикладів та задач. Кожен урок вимагав від учнів "уректи" (виголошення) того, що вчитель пропонував вивчити. Термін "урок" у попередньому значенні вживався для позначення "домашнього завдання", і в цьому випадку відбувалося вивчення матеріалу [3].

Деякі педагоги висловлювали свою неприязнь до такого методу навчання, але не всі вчителі вислуховували їхніх думок. Тільки в XIX столітті почали повільно відмовлятися від механічного методу запам'ятовування. Натомість на його місце прийшли методи свідомого освоєння, вимагаючи від учнів розуміння суті вивченого матеріалу, виявлення його походження та розуміння його практичного застосування.

Один з ранніх методів осмисленого вивчення математики був розроблений наприкінці XIX століття відомим методистом С.І. Шохор-Троцьким і відомий як метод доцільних задач. Згідно з цим методом, навчання будь-якого розділу шкільної математики починалося з постановки задачі в центрі уроку. Задача слугувала вихідним пунктом, при цьому учні зверталися до нових арифметичних уявлень чи концепцій, таких як множення одноцифрового числа на одноцифрове, домовленість про зміст множення на дріб тощо. Головною метою було виробляти необхідні уявлення та стимулювати розумову діяльність учнів через розв'язання простих задач.

Спочатку метод доцільних задач використовували лише в навчанні арифметики, а потім його застосували й в геометрії. Книга С.І. Шохор-Троцького "Геометрія на задачах" (М., 1909) містить цікавий матеріал для сучасних вчителів математики. Автор пропонував учням вирішувати завдання в основному, залишаючи доведення теорем лише для невідомих або неочевидних випадків. Однак в подальшій практиці виявилось, що роль методу доцільних задач може бути перебільшеною, і не завжди логічно починати пояснення нового матеріалу з розв'язання задачі. Виявилось важливим також вчити визначення та доводити теореми частіше.

З часом метод доцільних задач втратив свою популярність, але сучасні методисти математики знову звертають увагу вчителів на цей метод, називаючи його "навчанням через задачі".

Природним розвитком та розширенням методів доцільного навчання математики є конкретно-індуктивний метод. Залежно від того, як учитель вводить учнів у новий матеріал і як саме він пояснює його, виділяють абстрактно-дедуктивний і конкретно-індуктивний методи навчання. Абстрактно-дедуктивний метод передбачає, що вчитель, пояснюючи новий матеріал, відразу надає учням загальне визначення, формулює теорему, доводить її, а тільки потім розглядає конкретні приклади та їх застосування. Цей метод означає перехід від абстрактних узагальнень і тверджень до конкретних прикладів та їх застосувань.

Конкретно-індуктивний метод навчання математики є протилежним абстрактно-дедуктивному. Він полягає в тому, що при поясненні певного поняття чи твердження учитель спочатку розглядає конкретні приклади з учнями, на яких вони ґрунтують дане поняття чи твердження, і лише потім висуває загальне визначення чи доведення. Введення цієї розрізненості вперше запропонував К.Ф. Лебединцев. Після докладного аналізу він зробив висновок, що "для сучасної школи є придатним лише конкретно-індуктивний метод, який базується на вивченні математичних істин за допомогою конкретних задач і зразків з навколишнього життя, ініційованого активною учнівською діяльністю та їхніми самостійними узагальненнями та висновками під керівництвом вчителя" [3].

Зміст проблемного методу полягає в тому, що вчитель не викладає теореми або твердження безпосередньо, а створює ситуацію, що викликає зацікавленість та одночасно утруднює завдання, тим самим стимулюючи учнів вирішувати поставлені завдання для отримання знань. Зазвичай метод включає такі етапи: 1) створення проблемної ситуації; 2) висування гіпотез (ідеї учнів); 3) обговорення гіпотез; 4) вирішення проблеми; 5) висновки [3].

Хоча проблемний метод є ефективним для розвитку учнів, не для кожного нового теми можна легко створити відповідну проблемну ситуацію. Зокрема, не для кожної теми шкільної програми може бути знайдений матеріал для ефективної проблематики. Крім того, у багатьох випадках створення та розв'язання проблемної ситуації може займати надто багато часу. Тому, хоча проблемний метод є корисним, його важливо поєднувати з репродуктивним та іншими традиційними методами пояснення, оскільки він не завжди є універсальним.

Термін "програмоване навчання" виник від слова "програма" через те, що цей метод навчання ґрунтується на передбачуваній програмі, де до дрібниць продумано, в якому порядку, якими частинами і яким методом надавати учням новий матеріал. В програмованому підручнику міститься теоретичний матеріал, різні завдання та вправи, розділені на короткі порції, приблизно по

20-50 слів, з контрольними та самоконтрольними запитаннями. Учень самостійно читає порцію, відповідає на запитання, а система вказує, що читати далі або де була помилка [3].

Програмоване навчання сприяє індивідуальному підходу до учнів і взаємодії між учнем і вчителем чи навчальним матеріалом. Однак, навіть із якісними програмованими підручниками і комп'ютерами, його можна застосовувати лише частково, оскільки учень мовчить під час навчання, тоді як школа має розвивати його вміння говорити. Також можуть виникати питання, які не передбачені в програмі, і потребують індивідуального вирішення вчителем. Крім того, важливі фактори, такі як стимулювання, втома та різноманітність, можуть впливати на ефективність програмованого навчання.

Очевидно, що програмоване навчання є зручним, коли учневі дуже цікаво швидко опанувати конкретні знання (наприклад, технічний мінімум для робітника чи правила дорожнього руху для водія). В учнів може бракувати стимулу до навчання, а сам метод не завжди є універсальним. Вчителеві важливо вибирати методи навчання відповідно до конкретних умов, змісту матеріалу та індивідуальних особливостей учнів.

1.2.3. Методи закріплення знань та вмінь

Необхідно розширювати зміст уроків математики, а не обмежуватися лише представленням нового матеріалу. Для того щоб знання учнів стало міцнішим, важливо закріплювати вивчений матеріал, відводячи для цього кілька хвилин після його пояснення. Це необхідно здійснювати передусім з метою поліпшення запам'ятовування нової інформації учнями. Однією з особливостей людської пам'яті є її вибірковість, яка спрямована на фіксацію переважно того, що має для людини важливий сенс. Таким чином, під час пояснення матеріалу бажано демонструвати учням, яка саме частина інформації є ключовою для запам'ятовування. Відомо також, що при одноразовому показі людині багатьох предметів її короточасна пам'ять

утримує лише 5-9 з них, при цьому вона більш обмежена кількістю об'єктів, ніж їх інформаційною місткістю. Тому пам'ять учнів краще поповнювати порівняно великими одиницями [2].

Спостереження свідчать, що деякі старшокласники вважають непотрібним запам'ятовувати теореми, правила і формули, оскільки цю інформацію можна знайти у довідниках. Навіть деякі вчителі та методисти пропонують не навантажувати пам'ять учнів формулами, а навчити їх знаходити ці формули в довідниках. Звісно, важливо навчити учнів користуватися довідниками, але не слід обмежуватися лише цим. Аналогічно до того, як кожна людина повинна пам'ятати таблицю множення, кожному, хто займається математикою, зокрема тим, хто планує вступити в технікум або вищий навчальний заклад, важливо пам'ятати різні теореми і формули. Це передбачає не лише розуміння, але й запам'ятовування цих матеріалів.

Закріплення матеріалу на уроках математики не обмежується лише запам'ятовуванням, але також включає поглиблення знань, уточнення і встановлення нових зв'язків. Часто новий матеріал закріплюється через вирішення задач. Розв'язуючи задачі, учні застосовують вивчені формули, що сприяє кращому запам'ятовуванню та розумінню. Однак важливо пам'ятати, що це сприяє лише закріпленню самої формули, а не її доведенню. Таким чином, необхідно розглядати не лише вирішення задач, але і закріплення методів виведення формул для повного розуміння матеріалу.

Зміцненню (і контролю) знань учнів сприяють короткочасні математичні диктанти, особливо коли необхідно закріпити математичні поняття та визначення. Наприклад, учитель може диктувати визначення, при цьому не називаючи сам термін; учні, після прослуховування вчителя, самостійно записують термін (або навіть весь визначення). Такі диктанти не вимагають багато часу, але вони приносять велику користь [2].

Одним з методів зміцнення є повторення. Якщо дати одному-двом учням завдання повторити матеріал, пояснений вчителем, а іншим слухати, виправляти та доповнювати, то цим самим учні повторюють навчальний

матеріал і закріплюють його в своїй пам'яті. Іноді різницю між цими поняттями можна вбачати лише в тому, що повторення стосується матеріалу, вивченого протягом тижнів, місяців і навіть років, тоді як закріплення має забезпечити краще засвоєння матеріалу лише одного або кількох уроків. Проте це не зовсім вірно. Навіщо повторюють? З метою того, щоб найважливіший матеріал краще закріпився в пам'яті учнів. Проте ніхто не стверджує, що його закріплюють для того, щоб його потім лише повторювати.

Повторення і закріплення – різні поняття. Повторення – тільки один з прийомів закріплення. Прийомами закріплення є і розв'язування задач, і аналіз деяких моментів у доведенні теореми або у виведенні правила тощо [2].

Повторення грає важливу роль у процесі навчання. В математиці часто недостатньо просто пояснити новий матеріал; необхідно також повторювати раніше вивчений. Цей процес починається і завершується на початку та кінці навчального року. Початкове повторення допомагає учням освіжити пам'ять із того, що вони можуть забути протягом літніх канікул, і готує їх до вивчення нового матеріалу. Завершальне повторення спрямоване на систематизацію вивчених тем і узагальнення отриманого досвіду. У математичних програмах передбачено декілька годин для повторення матеріалу, вивченого протягом року. Зрозуміло, що повторювати необхідно не лише в кінці чи на початку навчального року.

1.2.4. Методи контролю та оцінювання

Оцінювання знань, умінь і навичок учнів – дуже важлива складова частина навчального процесу. Для учнів оцінки виступають суттєвим стимулом для активності в навчанні, спонукаючи їх систематично та максимально ефективно залучатися до навчальних завдань. Батькам оцінки дозволяють відстежувати успішність дітей і своєчасно вживати заходів для підвищення їхнього навчального досягнення. Вчителям оцінки надають можливість ефективніше адаптувати навчання до потреб кожного учня, визначати розділи програми, які засвоєні краще або гірше. З точки зору

державних органів, оцінювання знань учнів важливе, оскільки дозволяє оцінювати ефективність роботи різних шкіл, узагальнювати досвід успішних вчителів та вчасно виправляти виявлені недоліки.

Існує поділ на поточне та підсумкове оцінювання знань учнів. Поточне включає в себе оцінювання усних відповідей, письмових та практичних завдань. Це перше етап оцінювання, яке здійснюється безпосередньо під час перевірки знань.

До підсумкового оцінювання відносять виставлення оцінок за чверть, за рік, екзаменаційних і перевідних. Підсумкове оцінювання – вторинне; його (крім оцінок екзаменаційних) здійснюють на основі поточних оцінок.

Кожного разу слід прагнути забезпечити, щоб оцінки, які встановлює вчитель, дійсно служили стимулом для навчання, а не поглиблювали у учнів відчуття відсутності бажання вчитися. Вчителю надається право утримати виставлення оцінки за відповідь, якщо він вважає це необхідним, і навпаки, в певних випадках, надавати учневі високу оцінку навіть без відповіді, наприклад, за успішний виступ на математичному гуртку або успішне розв'язання завдань на олімпіаді.

Більшість вчителів надає оцінки в журналі відразу після відповіді: питає одного учня - виставляє оцінку, питає іншого - оцінює його відповідь і так далі. Іноді оцінка за урок виставляється в кінці заняття. Однак це ускладнює роботу вчителя, оскільки йому потрібно пам'ятати, як відповідав кожен учень на кожне запитання, як вирішував завдання та працював самостійно.

Дослідження показують, що деякі вчителі задоволені таким підходом до оцінювання, тоді як інші ні. Примусове введення правила виставляти оцінки тільки в кінці уроку для всіх виявляється нерозумним. Молодим педагогам рекомендується випробувувати різні методи оцінювання знань учнів та вибирати той, який найкраще відповідає їхнім потребам [2].

Багато вчителів в школах використовують тематичний облік знань. Після завершення певної теми вони проводять підсумкову контрольну роботу або спеціальний залік, щоб кожен учень отримав оцінку за дану тему. Заліки,

також відомі як контрольні-залікові кроки, зазвичай організуються для старшокласників, часто на подовжених уроках. Вчителі готують відповідні матеріали, такі як картки, таблиці, та інші, а також повідомляють учням теоретичні питання і типи задач для підготовки до заліку. Деякі учні можуть бути залучені як асистенти для швидшої перевірки робіт. Оцінки збираються в одну відомість заздалегідь.

Такий підхід до контролю допустимий, якщо він не перевантажує учнів, але, подібно до тематичного планування, не є обов'язковим для всіх вчителів. Великий затрат часу може вплинути на інші аспекти навчальної роботи або вільний час учнів і вчителів. Вимагати від кожного вчителя такого підходу не доцільно, оскільки це суперечить принципам раціональної організації праці.

Головне завдання вчителя - не лише контроль знань, але і сам процес навчання учнів. Хоча деякі вчителі вважають, що інтенсивний контроль стимулює систематичне вивчення, це справедливо лише в певних межах. Навчальний час не слід витратити виключно на «накопичення оцінок», але повинен бути розумно розподілений для ефективного навчання [2].

Оцінювання знань учнів у математиці також включає в себе аналіз їхніх результатів на контрольних роботах, які організуються для оцінки рівня їхніх знань у різних темах. Ці контрольні роботи зазвичай є письмовими і проводяться приблизно двічі на місяць для кожного математичного предмета.

Зазвичай час, відведений на проведення контрольної роботи з математики, становить весь урок або 15-20 хвилин, але в старших класах цей час іноді може збільшуватися до 2 годин. Контрольні завдання зазвичай включають в себе розв'язання задач або прикладів, іноді також можуть містити теоретичні питання, доведення теорем, виведення формул і таке інше [2].

Щоб ефективно оцінити контрольну роботу з математики, бажано провести перевірку і встановити оцінки в той самий або наступний день. Це дозволяє вчителю аналізувати результати наступного уроку. Оцінювання

повинно враховувати кількість правильно розв'язаних завдань, їхню якість, а також кількість серйозних помилок та недоліків.

При оцінці письмових робіт важливо враховувати не лише кількість помилок чи недоліків, але й якість виконання, особливо при розв'язуванні задач. Зниження оцінки за неакуратне виконання контрольної роботи має виховний характер і спрямоване на розвиток навичок ретельності учнів. Також важливо враховувати, що одне акуратно закреслене місце не враховується при оцінці, але якщо таких випадків декілька, це може свідчити про непевність знань та вмінь учня, особливо якщо він використовував чернетку, тому таку роботу не можна розглядати як відмінно виконану.

Оцінка "відмінно" присуджується, якщо письмова контрольна робота виконана без помилок у логічних міркуваннях та обґрунтуваннях розв'язань, а також без математичних помилок (з винятком однієї допустимої неточності чи описки, які не виникають з невідомості або непорозуміння навчального матеріалу).

Оцінка "добре" встановлюється у випадку, коли робота виконана повністю, але обґрунтування кроків розв'язання є недостатнім (за умови, що вміння обґрунтовувати міркування не перевірялося окремо), або коли допущено одну помилку чи два-три недоліки у викладках, малюнках, кресленнях або графіках (якщо ці аспекти не перевірялися окремо).

Оцінка "задовільно" виставляється, якщо допущено більше однієї помилки або більше двох-трьох недоліків у викладках, малюнках, кресленнях або графіках, але учень володіє обов'язковими знаннями з теми, що перевіряється.

Оцінка "достатньо" присуджується, якщо допущено істотні помилки, які свідчать про те, що учень не володіє обов'язковими вміннями в повному обсязі з даної теми.

Оцінка "не задовільно" встановлюється, якщо робота показала повну відсутність у учня обов'язкових знань та вмінь з теми або значну частину роботи виконано не самостійно [2].

1.3. Технологія змішаного навчання

У сучасному суспільстві відбуваються зміни у глобальному, політичному та соціальному середовищі. Насамперед вони виявляються у поглибленому вивченні різних сфер діяльності.

Сучасне інформаційне суспільство, розвивається великими темпами. Насамперед розроблюються різні поєднання сфер діяльності, що формує розвиток інформації на поєднанні сфер діяльності.

Такий розвиток нових сфер діяльності та науки безпосередньо впливає і на освітній процес, вимагаючи радикальної зміни учбового процесу. Насамперед розвивається замішана форма навчання.

Отже, найбільший вплив на трансформацію освітньої сфери здійснює розвиток технологічних засобів, які допомагають більш швидкому засвоєнню знань та вмінь учнів.

У сучасній ситуації у сфері навчання в Україні домінує застосування нових прогресивних концепцій. Вони полягають у застосуванні нових технологій і науково-методичних досліджень в освітньому процесі. Тому у сучасних методах навчання застосовують технологію дистанційного та змішаного навчання.

Теперішнє становище країни та пандемія сприяли розвитку мережевого навчання. Воно у свою чергу розвиває дистанційне навчання, електронне навчання, модульне навчання. Ці методики навчання використовуються в різних закладах освіти. Застосування інформаційних технологій в навчанні призводить до використання під час занять сучасних онлайн-сервісів, навчальних платформ, хмарних сервісів, мультимедійних цифрових платформ, навчально-розвиваючих проектів.

З розвитком нових технологій з'явилася нова форма навчання – змішана. Основою змішаного навчання є денна та електронна форма навчання.

Денна форма навчання дає можливість для розвитку знань, вмінь та навичок та прискорює зворотній зв'язок у процесі навчання. Електронне –

прискорює процес отримання знань та є у теперішній час більш поширеним у системі навчання.

Учень отримує знання, вміння та навички у різні способи. Тобто з застосуванням очної та самостійної методики.

Самостійна методика навчання полягає в застосуванні дистанційної форми навчання. Вона у свою чергу дає можливість використовувати електронні сервіси.

Згідно з листом Міністерства освіти й науки України на 2023–2024 навчальний рік, освітній процес може бути організований у трьох формах: очній, дистанційній та їх комбінацією (змішаним режимом). Моделі змішаного режиму навчання не визначені законодавством, тому заклади освіти можуть самостійно визначати формати та пропорції поєднання. На практиці, це включає навчання в різні зміни, чергування очної та дистанційної форм, синхронне навчання в класі та онлайн.

Змішаний режим навчання не є окремою формою освіти в законодавстві, оскільки передбачає поєднання очної та дистанційної форм. Останні визначені законами "Про освіту" і "Про повну загальну середню освіту".

Міністерство освіти і науки наголошує, що обрана форма організації освітнього процесу повинна дозволити досягти результатів державних стандартів освіти. Початкова школа рекомендується проводити в очній формі для соціалізації дітей.

Міністерство не визначає конкретних моделей змішаного навчання, залишаючи вибір у закладах освіти. Державна служба якості освіти раніше пропонувала кілька варіантів, таких як поєднання очної та дистанційної форм, різних форматів навчання в межах одного класу, самостійне навчання та робота в класі, а також змішування основного навчального контенту з зовнішніми ресурсами.

Найбільш популярним в Україні є поєднання очної та дистанційної форм. Основні моделі змішаного навчання включають ротаційну, гнучку,

самостійного змішування та модель поглибленого віртуального середовища, кожна з яких має свої переваги й недоліки [10].

1.3.1. Історія розвитку технології змішаного навчання

Ідея змішаного навчання існувала вже давно. Ще в ХІХ столітті деякі університети пропонували дистанційні уроки, які дозволяли студентам вивчати уроки вдома за допомогою підручників, листів та інших матеріалів. У ХХ столітті розвиток технологій призвів до створення нових форм дистанційного навчання, таких як телебачення та комп'ютерні мережі.

Однак саме в ХХІ столітті змішане навчання стало набирати популярності. Це було пов'язано з рядом факторів, зокрема:

- Розвиток Інтернету та інших технологій, які зробили дистанційне навчання більш доступним і ефективним.
- Зростаюча потреба в навчанні дорослих, які хочуть підвищити свою кваліфікацію або змінити професію.
- Зміна підходів до освіти, які стали більш орієнтованими на учнів і їхні індивідуальні потреби.

Перші експерименти з змішаним навчанням проводилися в США в 1990-х роках. У 1995 році університет штату Пенсільванія запровадив програму змішаного навчання для студентів-медиків. Ця програма поєднувала традиційні лекції в класі з онлайн-уроками, що дозволяло студентам вивчати матеріал в зручному для них темпі.

У 1997 році компанія Blackboard, яка розробляла програмне забезпечення для дистанційного навчання, запропонувала концепцію «інтегрованого навчання», яка також була схожа на змішане навчання.

У 2000-х роках змішане навчання стало набирати популярності в усьому світі. У 2002 році Національний центр дистанційного навчання США провів дослідження, яке показало, що змішане навчання може бути ефективнішим за традиційний підхід до навчання.

У 2005 році компанія Pearson Education запропонувала концепцію «індивідуалізованого навчання», яка також була схожа на змішане навчання.

У 2008 році університет Карнегі-Меллон запровадив програму змішаного навчання для студентів-бакалаврів. Ця програма стала однією з найбільших і найуспішніших програм змішаного навчання у світі.

Сьогодні змішане навчання є одним із найпопулярніших підходів до навчання. Воно використовується в школах, університетах, бізнес-школах та інших навчальних закладах у всьому світі.

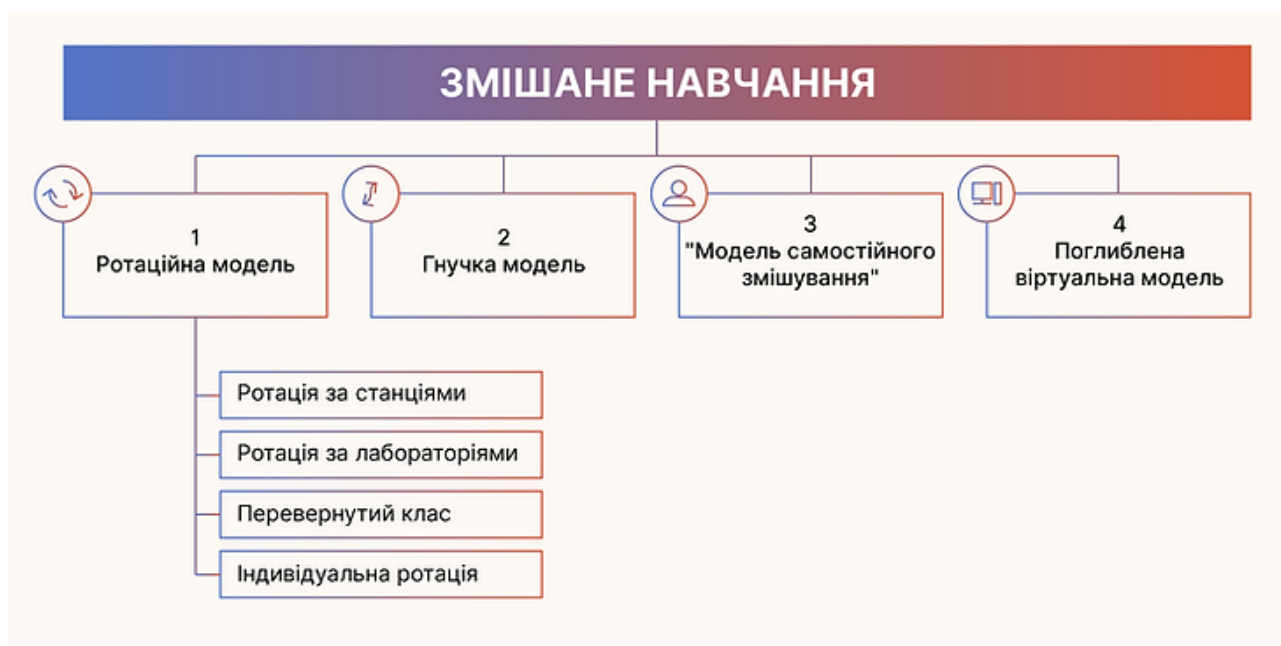
За оцінками, до 2025 року більше половини всіх студентів у США будуть навчатися за допомогою змішаного навчання.

Змішане навчання є відносно новим підходом до навчання, який продовжує розвиватися. У майбутньому воно, ймовірно, стане ще більш поширеним і ефективним.

1.3.2. Моделі змішаного навчання

Під час розробки уроків з використанням технології змішаного навчання матеріал гнучко розподіляється між онлайн- та офлайн-частинами. Важливо відзначити, що немає однозначної формули успіху. Якість уроку залежить від його цілей, активностей та взаємодії між його складовими елементами. Таким чином, учені в галузі освіти різним чином тлумачать термін "змішане навчання" та його моделі.

Звернемо увагу на класифікацію, запропоновану Стейкером та Хорном. Ця класифікація була розроблена у 2012 році, і дотепер більшість дослідників і ресурсів використовують її як основу. Вона групує моделі за основними навчальними характеристиками, ґрунтуючись на практичному досвіді, і може бути розширена у майбутньому.



1. Ротаційна модель: У цьому підході учні чергуються між онлайн і офлайн заняттями відповідно до заданого графіку або інструкцій вчителя. Ці етапи можуть включати роботу в невеликих групах або в цілому класі, групові проекти, індивідуальну взаємодію з вчителем та виконання письмових завдань.

Ротаційна модель складається з чотирьох варіантів.

а) Ротація за станціями: У цьому форматі учні працюють у класі та періодично переміщуються між визначеними станціями відповідно до графіка. Тобто вони взаємодіють з різними видами завдань, такими як групова робота, проектна діяльність та взаємодія з вчителем. Деякі завдання обов'язково виконуються онлайн. Станції можуть включати як індивідуальну, так і групову роботу, а також взаємодію з усім класом.

Одна з важливих особливостей цієї моделі полягає в тому, що всі учні повинні пройти всі станції. Групи та індивідуальне ведення вчителем є дуже гнучкими, що дозволяє змінювати склад груп протягом навчального року в залежності від потреб учнів.

За інформацією Інституту Крістенсена, "ротація за станціями" є найбільш популярною моделлю серед шкіл США. Головною перевагою є можливість

мінімізації витрат на обладнання, оскільки електронні пристрої використовуються частинами учнів по черзі, а не всім класом.

Робота в невеликих групах з вчителем надає глибше розуміння предмету, а подальша онлайн-робота допомагає закріпити нові знання та повторити попередні уроки.

б) Ротація за лабораторіями

Нова модель подібна до попередньої, але відрізняється тим, що переміщення учнів відбувається не всередині класу, а всередині навчального закладу. Однією зі станцій є не лише онлайн заняття, але і робота у відокремленому приміщенні – лабораторії. Цю модель інститут Крінстенсена визначає як найпопулярнішу у Бразилії, Малайзії та Південній Африці, де простіше обладнати окрему кімнату комп'ютерами, ніж забезпечити кожного учня планшетом чи смартфоном.

Однією з переваг цієї моделі є можливість вчителю надавати інструкції всьому класу одночасно. Якщо конкретна група учнів має труднощі, вчитель може взаємодіяти з ними окремо. Таким чином, ця модель найбільше нагадує традиційний підхід до навчання, коли вчитель працює з усім класом водночас.

Для допомоги учням у класі часто необхідний додатковий вчитель чи асистент. Однак це не є обов'язковою умовою, і все залежить від структури уроку та можливостей навчального закладу.

Така модель дозволяє вчителю легше виявляти, як учні засвоюють новий матеріал завдяки швидкому зворотному зв'язку. Якщо результати тестування вказують на труднощі у когось, вчитель працює із цими учнями індивідуально.

в) Перевернутий клас

Учні, застосовуючи дану концепцію, регулярно перемикаються між онлайн-та офлайн-частинами навчання відповідно до зазначеного графіку. На дому вони освоюють теоретичний матеріал та переглядають лекції, тоді як у класі співпрацюють з вчителем чи у групах над вирішенням практичних завдань та проектів. Значною частиною цієї моделі є практичний компонент. У

випадку, якщо лекція залишилася непереглянутою чи незрозумілою, виконання практичних вправ дозволяє виявити прогалини у знаннях та більш ефективно пояснити матеріал.

Перевагою такого підходу є відсутність необхідності додаткового обладнання для навчального закладу, оскільки учні використовують свої власні ресурси вдома. Крім того, вчителі можуть самостійно створювати навчальні відео, враховуючи рівень та індивідуальні потреби своїх учнів.

Запровадження цієї моделі суттєво підвищує успішність учнів і надає вчителям можливість приділяти більше уваги розв'язанню труднощів.

г) Індивідуальна ротація в класі передбачає, що учні працюють за індивідуальним графіком, проходячи окремі станції. Відмінність цього підходу від "ротації за станціями" полягає в тому, що не всі учні обов'язково проходять кожну станцію.

Перевагою такої моделі є можливість адаптації графіків та методів роботи під індивідуальні потреби кожного учня. Якщо деяким учням зручніше працювати онлайн, а інші досягають кращих результатів у групових завданнях, цей підхід враховує такі особливості. В той же час учні мають спланований графік, який є системою, передбачуваною і зрозумілою для всіх.

Однак для ефективного впровадження цієї моделі потрібні додаткові кошти на технічне забезпечення, такі як комп'ютери та інші електронні пристрої. Крім того, для деяких учнів запланований графік може бути не зручним і менше ефективним.

2. Модель гнучкого навчання

Це концепція, за якої учні отримують особисті інструкції в основному через мережу Інтернет. Учні користуються гнучким графіком, який змінюється відповідно до їхніх потреб у конкретних темах та уроках. Кількість та роль вчителів в цьому підході може коливатися: від інтенсивних групових вправ та обговорень до індивідуальної роботи учнів онлайн та консультування за потребою.

Згідно з даними Інституту Крістенсена, цей підхід є найбільш популярним серед старшокласників у США, на другому місці серед середньої школи і кілька позицій нижче в початковій школі.

Перевага та водночас виклик цієї системи полягає в індивідуалізованому графіку. Учні повинні вміти самостійно структурувати свою роботу. Старшокласники та учні середніх класів можуть краще оцінювати свій прогрес. У старшій школі "гнучка модель" нагадує більше процес навчання в університеті за індивідуальним розкладом, ніж традиційні уроки в класі.

3. Метод самостійного комбінування (або "самозмішування")

У цьому підході учні можуть повністю вивчати конкретний урок онлайн та слухати лекції вдома чи в школі для закріплення базового матеріалу. При цьому вчитель(ка) також працює з учнями в онлайн-режимі. Відмінність цієї моделі від звичайного онлайн-навчання полягає в тому, що онлайн вивчається лише один конкретний предмет, тоді як інші предмети учні здобувають у школі.

Цей підхід може вирішувати відсутність глибоких уроків у школі або дозволяти обирати дисципліни за власним вибором. Учні проходять додаткові уроки онлайн, що дозволяє навчальному закладу зменшити витрати на них.

Оскільки метод "самостійного комбінування" вимагає високого рівня самодисципліни, аналогічно до "гнучкої моделі", його застосовують переважно у старшій школі.

4. Поглиблена віртуальна модель

У даній моделі учні самостійно розподіляють уроки між онлайн і офлайн частинами. Онлайн-компонент можна слухати як у навчальному закладі, так і поза його межами. Багато онлайн-курсів пристосувалися до цієї моделі, щоб забезпечити учням враження від особистого спілкування. Це відрізняється від моделі "самостійного змішування" тим, що охоплює всі курси, а не є вибірковою. Від "перевернутого класу" вона відрізняється тим, що учні не обов'язково відвідують школу щодня.

"Поглиблена віртуальна модель" займає друге місце серед моделей змішаного навчання для старших класів. Аналогічно до "гнучкої моделі" та моделі "самостійного змішування", вона передбачає вищий рівень навичок самоорганізації та дисципліни учнів. Однією з переваг такої моделі є гнучкість розкладу та розподілу навантажень.

Важливо розуміти, що описані моделі змішаного навчання використовуються не тільки в школах, але й в університетах чи на окремих професійних курсах. Вищі навчальні заклади розглядають змішане навчання як найкращий спосіб підвищити ефективність навчального процесу. Так само, як і у випадку розподілу між різними класами, організація навчання буде відрізнятися відповідно до віку учнів, їхньої самостійності, складності матеріалу і т. д.

1.3.3. Недоліки змішаного навчання

Недоліками змішаного навчання є залежність від технічних засобів, які повинні бути надійними, простими у використанні та сучасними, інакше досягнення бажаних результатів буде ускладненим завданням. Таким чином, важливим стає питання технічної підтримки. Також слід враховувати нерегулярний графік лекцій, що може викликати відставання учнів. Крім того, комп'ютерна неграмотність може ускладнити доступ до навчальних матеріалів. Однак необхідність в оволодінні комп'ютерною наукою для успішної роботи може слугувати стимулом, що підвищить мотивацію індивіда.

Також до недоліків змішаного навчання можна віднести наступні фактори:

Зменшення особистісної взаємодії: Змішане навчання може призвести до зменшення особистісної взаємодії між вчителями та учнями, а також між самими учнями. Це може бути особливо проблемою для учнів, які потребують додаткової підтримки або мотивації.

Особиста взаємодія між учителями та учнями є важливою для розвитку стосунків довіри та підтримки. Вона також важлива для мотивації учнів та створення позитивного освітнього середовища. Змішане навчання може зменшити кількість часу, який учні проводять у класі з учителем, що може призвести до зменшення особистісної взаємодії.

Для мінімізації цього недоліку школи можуть розробити плани, які забезпечують достатню кількість часу для особистої взаємодії в класі. Наприклад, вчителі можуть використовувати онлайн-платформи для створення груп для обговорення або для проведення онлайн-занять.

Недостатня підготовка учнів: Змішане навчання вимагає від учнів певного ступеня самодисципліни та навичок роботи з цифровими технологіями. Учні, які не мають цих навичок, можуть мати труднощі з успішним виконанням завдань змішаного навчання.

Навички самодисципліни необхідні учням для самостійного планування часу та виконання завдань. Навички роботи з цифровими технологіями необхідні учням для доступу до онлайн-ресурсів та виконання онлайн-завдань.

Для мінімізації цього недоліку школи можуть забезпечити підготовку учнів до змішаного навчання. Наприклад, школи можуть пропонувати курси з розвитку самодисципліни та навичок роботи з цифровими технологіями.

Високий рівень витрат: Змішане навчання може бути дорогим для шкіл, оскільки вимагає інвестицій у технології та підготовку персоналу. Школи повинні мати достатні ресурси, щоб забезпечити успішне впровадження змішаного навчання.

Для мінімізації цього недоліку школи можуть шукати гранти та інші джерела фінансування. Вони також можуть співпрацювати з місцевими підприємствами та організаціями, щоб отримати доступ до технологій та ресурсів.

Складність реалізації: Змішане навчання може бути складним для реалізації, оскільки вимагає ретельного планування та співпраці між вчителями, адміністрацією та батьками.

Для мінімізації цього недоліку школи повинні розробити план впровадження змішаного навчання, який враховує потреби всіх учасників освітнього процесу. План повинен бути реалістичним і керованим.

Слід також відзначити негативні сторони змішаного навчання, включаючи необхідність витрати часу вчителя на розміщення матеріалів в мережі, потребу в підготовці вчителів до використання цього методу, необхідність навчання здобувачів використанню технологій і їх очікування, а також витрату вільного часу учнів на навчання [30].

1.3.4. Переваги змішаного навчання

Однією з основних переваг змішаного навчання є його гнучкість. Учні можуть навчатися в будь-який час і в будь-якому місці, яке їм зручно. Це може бути особливо корисно для учнів, які мають додаткові зобов'язання, такі як робота або догляд за дітьми.

Змішане навчання дозволяє вчителям надавати індивідуальну увагу кожному учневі. Це можна зробити, використовуючи різні навчальні матеріали та ресурси, а також надавши учням можливість працювати в своєму власному темпі. Воно може допомогти учням залишатися в курсі останніх тенденцій і технологій. Це можна зробити, використовуючи онлайн-ресурси, які регулярно оновлюються.

Змішане навчання може бути більш захоплюючим для учнів, ніж традиційне навчання у класі. Це можна зробити, використовуючи різноманітні навчальні методи та ресурси, а також надавши учням можливість брати активну участь у процесі навчання.

Дослідження показують, що змішане навчання може мати ряд переваг для учнів, включаючи:

- Покращення навчальних результатів

Учні, які навчаються за допомогою змішаного навчання, можуть досягати кращих навчальних результатів, ніж учні, які навчаються лише у класі. Це

пов'язано з тим, що змішане навчання дозволяє учням навчатися у власному темпі та за допомогою методів, які найкраще підходять для них.

- Збільшення участі учнів

Дослідження показують, що учні, які навчаються за допомогою змішаного навчання, можуть бути більш залученими до процесу навчання. Це пов'язано з тим, що змішане навчання пропонує різноманітні навчальні активності, які можуть зацікавити учнів.

- Розвиток критичного мислення

Змішане навчання може допомогти учням розвинути критичне мислення. Це пов'язано з тим, що змішане навчання вимагає від учнів самостійного навчання та вирішення проблем.

- Підвищена готовність до роботи

Змішане навчання може допомогти учням підготуватися до роботи в сучасному світі. Це пов'язано з тим, що змішане навчання навчає учнів працювати самостійно та в команді, а також вирішувати проблеми.

Змішане навчання може бути ефективним способом навчання для учнів різного віку та з різними навчальними потребами. Цей підхід може допомогти учням досягти кращих навчальних результатів, стати більш залученими до процесу навчання та розвинути критичне мислення.

Ось кілька конкретних прикладів того, як змішане навчання може бути використано для підвищення ефективності навчання:

- Учні можуть використовувати онлайн-ресурси для вивчення нового матеріалу до уроку. Це може допомогти їм краще зрозуміти матеріал, який буде обговорюватися на уроці.

- Учні можуть використовувати онлайн-ресурси для виконання завдань та проектів. Це може допомогти їм закріпити отримані знання та навички.

- Учні можуть використовувати онлайн-ресурси для взаємодії з іншими учнями та вчителями. Це може допомогти їм розвивати критичне мислення та навички вирішення проблем.

Переваги змішаного навчання також включають можливість аналізу та адаптації навчання та оцінювання відповідно до індивідуальних особливостей кожного учня. Крім того, цей підхід дозволяє отримати позитивний досвід як при індивідуальній роботі, так і у віртуальному класі, що збільшує відчуття успіху. Загалом, переваги змішаного навчання включають індивідуалізацію процесу, можливість саморозвитку, стимулювання мотивації учнів та можливість негайного зворотного зв'язку через тестування. Цей підхід також сприяє збільшенню часу для навчання, використанню різноманітних матеріалів, ефективному залученню великої аудиторії та покращенню умов роботи завдяки участі висококваліфікованих вчителів. Плюси також включають економію ресурсів, боротьбу з комп'ютерною неграмотністю, сприяння соціальній взаємодії у командному середовищі та можливість виконання роботи в комфортних умовах [30].

Отже, можна відзначити, що суть змішаного навчання полягає в поєднанні найкращих традиційних та інноваційних (електронних і мобільних) методів навчання. Це створює можливість для учнів самостійно вивчати матеріал, контролювати свій темп, обирати час і місце навчання. Змішане навчання визнається однією з найвражаючих інновацій останніх років. Навіть без масштабних досліджень, написання дисертацій або тривалих соціологічних вимірювань, воно стає реальністю в школах та вузах. Скромний метод перетворюється на новий педагогічний погляд.

Можливо вести дискусію щодо масштабів поширення змішаного навчання та його значущості для різних педагогічних практик, але важко заперечити проти того, що вплив інформаційних технологій на освіту стрімко зростає. Ми стоїмо на порозі значущих якісних змін, і змішане навчання є своєрідним втіленням цього тренду. Це передбачає постійне зростання цифрових компетенцій у вчителів та педагогів у використанні ІКТ, електронних та мобільних ресурсів, а також розвиток у них професійних умінь і навичок у сфері дизайну змішаного навчання. Змішане навчання базується на

трьох складових: дистанційне навчання, навчання в аудиторії та онлайн-навчання.

Ідеальною ситуацією є те, коли учні періодично відвідують навчальні заходи в аудиторії, отримують завдання для виконання на конкретному програмному забезпеченні, якщо це онлайн-платформа чи хмарний сервіс, використовують медіатеку та тестові модулі. Робота над окремими темами у віддаленому режимі може відбуватися як у групах, так і індивідуально. У той же час вчитель відслідковує процес та, за потреби, надає консультації. Це сприяє розширенню освіти серед дорослого населення, пошуку додаткових ресурсів для забезпечення освіти дітей з особливими потребами, усвідомленню перспективності інвестицій у людський капітал, інтенсивному розвитку дистанційних форм навчання учнів та створенню освітнього простору, що сприяє формуванню міжнародного освітнього середовища.

Змішане навчання представляє собою передовий прорив у сучасному суспільстві. Цей метод освіти в першу чергу відповідає гуманістичному принципу, який передбачає можливість отримання освіти для кожного індивіда, незалежно від його соціального статусу, місця проживання, соціальної уразливості або обставин, які можуть ускладнити доступ до навчання (таких, як фізичні обмеження чи зайнятість виробничими чи особистими справами).

Отже, змішаний підхід до навчання є однією з найбільш актуальних освітніх стратегій сучасності, оскільки він поєднує гнучкість та зручність дистанційних курсів з перевагами традиційних класів. Підсумовуючи, змішане навчання — це не просто додавання сучасних інтерактивних технологій до традиційних методів, але й якісно новий підхід, який перетворює структуру та зміст навчання, переосмислює традиційні ролі вчителя та учня, а також змінює навчальне середовище. Змішане навчання завжди існувало у вигляді лекцій, лабораторій та підручників, але сучасні навчальні заклади використовують різні підходи до навчання, включаючи синхронні та асинхронні формати в онлайн-середовищі.

РОЗДІЛ 2

ОРГАНІЗАЦІЯ НАВЧАННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ ТРИГОНОМЕТРІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕХНОЛОГІЇ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ

2.1. Методичні особливості навчання тригонометрії

У 10 класі на уроках алгебри та початків аналізу вивчається тема «Тригонометричні функції числового аргументу». Ця тема спирається на знання учнів про функції взагалі та синус, косинус, тангенс і котангенс зокрема.

Спочатку розглядається поняття «радіанної міри кутів». Радіанна міра кута дорівнює довжині дуги кола, яка відповідає цьому куту, поділеній на радіус кола. Радіанна міра кута є більш зручним і практичним способом вимірювання кутів, ніж градусна міра.

Для ознайомлення з радіанною мірою кутів учні розв'язують геометричні задачі на знаходження довжини дуги кола. Зокрема, вони знаходять довжину дуги половини кола, його чверті та третини. На основі цих задач учні переконуються в тому, що коло одиничного радіуса є найбільш зручним для вивчення тригонометричних функцій.

Також учні ознайомлюються з поняттям «кут повороту». Кутом повороту називають кут, який утворює початковий радіус з кінцевим радіусом при повороті кінцевого радіуса навколо початку координат.

При цьому важливо підкреслити, що додатним вважається рух початкового радіуса проти годинникової стрілки, а від'ємним – за годинниковою стрілкою.

У процесі вивчення одиничного кола учні повинні навчитися: знаходити точки на колі, які відповідають заданим кутам або радіальним відстаням; записувати дуги кола в аналітичному вигляді; визначати координатну чверть точки на колі; знаходити координати точки на колі за її кутовою або радіальною координатою; визначати знаки тригонометричних функцій у

різних координатних чвертях [8]. В учнів не повинно виникати особливих труднощів у застосуванні формул переходу від градусної міри до радіанної і навпаки.

Після визначення тригонометричного кола, як самостійного об'єкта, учні починають вивчати тригонометричні функції. Спочатку тригонометричні функції визначалися за допомогою прямокутного трикутника. Тому їх означення за допомогою тригонометричного кола може бути складним для розуміння учнів.

Вивчення тригонометричних функцій числового аргументу починається з повторення означення тригонометричних функцій гострих кутів прямокутного трикутника. Потім учні дізнаються, що існує відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок одиничного кола.

Означення тригонометричних функцій довільного аргументу визначається поетапно. Першочергово повторюють визначення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180° за допомогою одиничного півкола. Потім означення тригонометричних функцій поширюється на кути будь-якої градусної міри за допомогою одиничного кола довільного радіуса.

Для кращого засвоєння матеріалу учням пропонується знайти значення тригонометричних функцій для деяких кутів вручну. Для цього використовують означення тригонометричних функцій або відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок одиничного кола. Значення тригонометричних функцій довільних кутів зазвичай знаходять за допомогою чотиризначних таблиць або калькулятора.

Періодичність тригонометричних функцій доводиться за допомогою методу від супротивного. Для побудови графіків тригонометричних функцій виду: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ використовуються означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса. Також виконуються певні перетворення даних графіків та визначають властивості тригонометричних функцій: області визначення та значення, парність та непарність, період, нулі функції;

проміжки знакосталості, зростання та спадання функції; найбільше та найменше значення функції.

Щоб закріпити вивчені властивості тригонометричних функцій, учням можна запропонувати такі завдання:

1. знайти область значень і область визначення складних функцій, до складу яких входять тригонометричні функції;
2. порівняти числові значення тригонометричних виразів;
3. побудувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків.

Після цього учні повинні згадати основні тригонометричні тотожності та наслідки з них та зрозуміти, що ці тотожності справедливі для будь-яких кутів.

Щоб легше запам'ятати формули зведення, можна скористатися таким правилом:

«У правій частині формули зведення записуємо той знак (+ або -), який має ліва частина формули за умови, що кут α – гострий, при цьому для кутів $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ назву тригонометричної функції не змінюємо, а для кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ – назву змінюємо на конфункцію» [11, 202].

Обернені тригонометричні функції дозволяють розв'язувати тригонометричні рівняння. При цьому слід враховувати, що тригонометричні рівняння відрізняються від алгебраїчних тим, що вони можуть мати або жодного розв'язку, або нескінченну кількість розв'язків. Це пов'язано з періодичністю тригонометричних функцій.

Учні повинні розуміти, чому одержуються формули загального розв'язку тригонометричних рівнянь, а не просто запам'ятовувати їх. Це допоможе їм уникнути помилок при розв'язанні складніших рівнянь.

Розв'язування тригонометричних рівнянь можна розділити на два основні типи: найпростіші та складні. Найпростіші рівняння можна розв'язати двома

способами: графічним і за допомогою одиничного кола. Складні рівняння розв'язуються за допомогою таких методів:

- Заміни змінних. Цей метод полягає в заміні тригонометричних функцій іншими функціями, які легше піддаються розв'язанню.
- Зведення до однієї тригонометричної функції. Цей метод полягає в об'єднанні всіх тригонометричних функцій в одну функцію.
- Розкладання на множники. Цей метод полягає в розкладанні рівняння на множники, які містять тригонометричні функції.
- Розв'язування однорідних рівнянь. Цей метод полягає в перетворенні рівняння до виду, в якому всі тригонометричні функції мають однаковий аргумент.
- Введення допоміжного аргументу. Цей метод полягає в заміні аргументу тригонометричних функцій на інший аргумент.

Учні повинні бути обережні при розв'язуванні тригонометричних рівнянь, оскільки при деяких операціях можуть виникнути сторонні корені або втрата коренів.

Такі помилки можуть виникнути при наступних діях:

1. Піднесенні обох частин рівняння до квадрату. Це може призвести до появи сторонніх коренів, оскільки квадрат тригонометричної функції може дорівнювати нулю для кількох значень аргументу.

2. Діленні обох частин рівняння на вираз, що містить невідому. Це може призвести до втрати коренів, якщо вираз у знаменнику дорівнює нулю для деяких значень аргументу.

3. Застосуванні підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Це може призвести до втрати коренів, оскільки функція $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не визначена для деяких значень аргументу.

4. Застосуванні теорем додавання тригонометричних функцій. Це може призвести до втрати коренів, якщо в рівнянні присутні функції, що не сумісні за значеннями.

2.2. Модель змішаного навчання тригонометрії

Проектування навчального процесу – це надважливе завдання, з вирішення якого розпочинається впровадження конкретної технології змішаного вивчення курсу або окремого розділу (як у нашому випадку). У пункті 1.1. ми навели структурні компоненти технологічного процесу навчання. Візьмемо цей перелік за основу для проектування технології вивчення тригонометрії з елементами змішаного навчання. При цьому насамперед необхідно оптимально розподілити навчальний матеріал розділу, тобто чітко визначити, що саме учням доцільно запропонувати для самостійного вивчення, а що має розглядатися колективно; передбачити завдання для індивідуальної роботи та для групової тощо. Будемо виходити з того, що дистанційний компонент обов'язково має містити:

- довідкові матеріали;
- посилання на освітні ресурси з необхідними відомостями;
- тести для проміжної перевірки знань;
- проекти для роботи у групі, творчі практичні завдання.

Перевірка знань обов'язково має проводитися не лише онлайн або на платформі, але й у вигляді традиційних тематичних контрольних робіт.

Щоб мотивувати учнів до вивчення розділу, доцільно запропонувати їм виконати проект «Тригонометрія навколо нас» (додаток Б). Результати роботи над проектом учні можуть презентувати на заключному уроці з теми або можна присвятити цьому позакласний захід.

На початку вивчення теми учнів варто ознайомити із загальним планом її опрацювання. Звичайно, на цей момент учням окремі питання теми ні про що не говорять. Але це дозволить окреслити перспективи і продемонструвати внутрішньо-предметні зв'язки навчального матеріалу. Для цього на основі навчальної програми можна скласти своєрідний «маршрутний лист». Цей план можна зробити інтерактивним і на кожному уроці фіксувати, наприклад за допомогою зміни кольору або прапорців, пройдений шлях.

Щоб мотивувати учнів до досягнення вказаних у програмі очікуваних результатів навчально-пізнавальної діяльності, варто пов'язати їх із прикладами відповідних завдань, які пропонувалися на ЗНО або НМТ попередніх років. У додатку В наведено систематизацію цих завдань за темами розділу.

Перед вивченням нової теми необхідно здійснювати актуалізацію опорних знань. Зазвичай це роблять на початку уроку за допомогою системи усних вправ та бесіди. На нашу думку, саме цей етап доцільно реалізувати у дистанційному форматі. Вчитель відповідно до теми має підібрати у мережі (або створити власний) відеоролик і включити його перегляд до домашнього завдання, що передує вивченню теми. Наприклад, перед вивченням першої теми розділу «Синус, косинус, тангенс і котангенс кута» необхідно пригадати відомості за 8-й клас (синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника) та за 9-й клас (тригонометричні функції кутів $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$). Для цього учням можна запропонувати, готуючись до даного уроку, переглянути відеоролики з відомого освітнього ресурсу «Всеукраїнська школа онлайн»:

https://www.youtube.com/watch?v=PzRZrr8XgV0&list=PLsWyMT6uUTres_G0EOZJdbbhLj_3PNGO2&index=9

<https://www.youtube.com/watch?v=lmyDrRx8o2w&list=PLsWyMT6uUTrfmJ4v2yi2GQrLsXDbx8wDq&index=27>

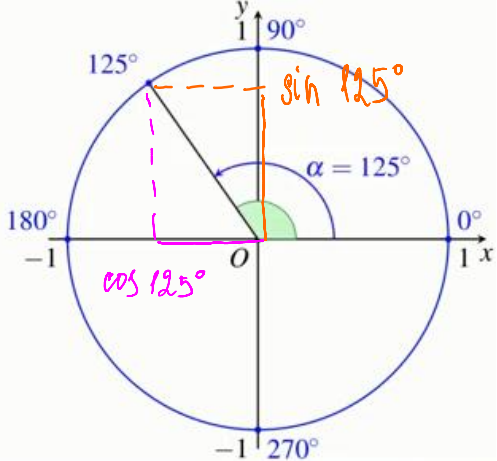
Щоб перевірити, як учні підготувалися до засвоєння нової теми, вже на уроці доцільно запропонувати їм пройти коротке онлайн-тестування. Завдання такого тесту мають бути типові, прості, придатні для усного розв'язування. На сьогодні у мережі у вільному доступі вже існує достатньо розробок тестів та інтерактивних вправ на різних освітніх веб-сервісах. Наприклад, для даного уроку можна використати тести за посиланнями: <https://learningapps.org/3131885> (вправа, яка дозволяє перевірити володіння учнями означеннями тригонометричних функцій гострих кутів прямокутних трикутників), <https://learningapps.org/18760115> (вправа на розв'язування прямокутних трикутників), <https://learningapps.org/5495638> (вправа на знання

тригонометричних функцій прямого та розгорнутого кутів) та інші. Проте ми розробили власну вправу, яка дозволяє комплексно перевірити усі основні базові знання та вміння.

Пояснення нового матеріалу вчитель здійснює у традиційний спосіб. Проте важливо, щоб у підсумку учні мали опорний конспект основних фактів та інструкції для виконання типових завдань, які відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень. Саме ця категорія учнів, як свідчить наш досвід, найбільше потребує таких інструкцій, адже для них характерна переважно репродуктивна навчальна діяльність. Учні з достатнім та високим рівнем навчальних досягнень з математики зазвичай тільки на початку діють за зразком, а згодом здатні самостійно міркувати і знаходити шлях розв'язування більш складних напівалгоритмічних або й евристичних задач.

Наприклад, для теми «Синус, косинус, тангенс і котангенс кута» основне завдання – навчити учнів визначати тригонометричні функції кутів за означенням, тобто на одиничному колі. Тому опорний конспект має такий зміст.

Синус, косинус, тангенс і котангенс кута	
	$\sin \alpha = y$ — ордината точки P_α $\cos \alpha = x$ — абсциса точки P_α $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
<p>Приклад 1. Зобразіть на одиничному колі $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$, якщо $\alpha = 125^\circ$.</p>	

	<p>1) Від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки відкласти кут $\alpha = 125^\circ$. На колі позначити відповідну точку.</p> <p>2) Визначити координати цієї точки (опустити з точки перпендикуляри на осі координат): $\cos \alpha$ – абсциса, $\sin \alpha$ – ордината точки.</p>
<p>Приклад 2. Знайдіть $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо куту α на одиничному колі відповідає точка $M(0,36; -0,72)$.</p>	
<p>1) Абсциса точки M дорівнює $0,36$. Отже, $\cos \alpha = 0,36$.</p> <p>2) Ордината точки M дорівнює $-0,72$. Отже, $\sin \alpha = -0,72$.</p> <p>3) Тангенс і котангенс обчислити за формулами:</p> $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,72}{0,36} = -2; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{0,36}{-0,72} = -\frac{1}{2}.$	

Формулювання інструкцій для розв'язування типових алгоритмічних задач відповідає етапу первинного закріплення нового навчального матеріалу, який доцільно провести фронтально. Далі можна організувати самостійну роботу учнів за індивідуальними завданнями. На цьому етапі вчитель виконує роль консультанта.

На завершення уроку вчитель надає зворотний зв'язок стосовно якості виконаної роботи, аналізує помилки. Учні також висловлюють своє враження від уроку. Підбиття підсумків можна здійснити за допомогою одного з інтерактивних прийомів.

Важливо вислуховувати відгуки учнів та враховувати їх у подальшому плануванні змішаного навчання.

Домашнє завдання доцільно також запропонувати учням диференційоване. Крім того, учням варто надати посилання на навчальні відео відповідного змісту, щоб за потреби вони могли ще раз повторити тему уроку.

Наприклад, для даного уроку домашнє завдання може містити такі вправи.

1) Знайдіть $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо куту α на одиничному колі відповідає точка: а) $A\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; б) з абсцисою 0,6.

2) Що більше: а) $\sin 20^\circ$ чи $\sin 50^\circ$; б) $\sin 10^\circ$ чи $\cos 10^\circ$; в) $\sin 25^\circ$ чи $\cos 115^\circ$?

3) Визначте знак добутку: а) $\cos 120^\circ \sin 200^\circ$; б) $\sin(-15^\circ) \sin 115^\circ$.

Істотну допомогу, у разі потреби, учні можуть отримати, переглянувши, наприклад, ролики курсу «Тригонометрія» на освітньому каналі ongradient:

[https://www.youtube.com/watch?v=lOXz-](https://www.youtube.com/watch?v=lOXz-VpagTg&list=PL7EFACEA4996B1DC8&index=9)

[VpagTg&list=PL7EFACEA4996B1DC8&index=9](https://www.youtube.com/watch?v=lOXz-VpagTg&list=PL7EFACEA4996B1DC8&index=9)

[https://www.youtube.com/watch?v=VWDsiFHQSHk&list=PL7EFACEA4996B](https://www.youtube.com/watch?v=VWDsiFHQSHk&list=PL7EFACEA4996B1DC8&index=9)

[1DC8&index=9](https://www.youtube.com/watch?v=VWDsiFHQSHk&list=PL7EFACEA4996B1DC8&index=9)

Наступний урок варто розпочати з онлайн тестування, побудованого на основі завдань домашньої роботи.

Зазначимо, що на етапі формування вмій та навичок альтернативою до індивідуальної самотійної роботи є групова форма роботи. Групова робота стимулює комунікацію, співпрацю та обмін ідеями. Якщо учнів об'єднувати у гетерогенні групи, то сильніші учні можуть допомагати іншим у своїх групах опанувати тему уроку.

Змішане навчання є потужним інструментом для покращення освітнього процесу. Чіткий алгоритм дій для вчителів та учнів, орієнтований на оволодіння учнями навчальним матеріалом, забезпечує ефективне використання як традиційних, так і інноваційних методів. Впровадження цього підходу створює сприятливу обстановку для навчання та розвитку критичного самотійного мислення учнів, що є важливою складовою успішної освіти в сучасному світі.

2.3. Система уроків до розділу «Тригонометричні функції» з використанням технологій дистанційного навчання

Урок № 1

Тема уроку: Синус, косинус, тангенс кута

Мета уроку: засвоєння понять синуса, косинуса, тангенса та котангенса кута та формування вмінь розв'язувати нескладні типові вправи на знаходження та порівняння тригонометричних функцій кута з використанням одиничного кола

Хід уроку

1. Мотивація вивчення розділу.

1) Вступне слово вчителя про роль тригонометрії в житті людини. Презентація проекту (додаток Б).

2) Ознайомлення учнів із спектром завдань з тригонометрії на ЗНО/НМТ (додаток Г).

3) Окреслення перспектив вивчення теми (додаток В)
<https://www.spiderscribe.net/app/?628b5ef110bde75a37c37323696e9289>.

2. Актуалізація опорних знань.

1) Повторення знань про синус, косинус, тангенс кута прямокутного трикутника та кутів (попереднє самостійне опрацювання навчальних відео

https://www.youtube.com/watch?v=PzRZrr8XgV0&list=PLsWyMT6uUTres_G0EOZJdbbhLj_3PNGO2&index=9

<https://www.youtube.com/watch?v=lmyDrRx8o2w&list=PLsWyMT6uUTrfmJ4v2yi2GQrLsXDbx8wDq&index=27>)

2) Перевірка готовності учнів до сприйняття нового матеріалу за допомогою інтерактивної вправи <https://learningapps.org/3131885>

3. Повідомлення теми уроку та визначення завдань.

4. Пояснення нового матеріалу.

1) Синус (косинус) гострого або тупого кута α , α – це ордината (абсциса) точки одиничного півкола, яка відповідає куту α . Кожному значенню кута α відповідає єдине значення $\sin \alpha$ (мал. 1).

Синусом кута α називають ординату точки одиничного кола, яка відповідає куту α .

Косинусом кута α називають абсцису точки одиничного кола, яка відповідає куту α .

Тангенсом кута α називають відношення синуса кута α до його косинуса.

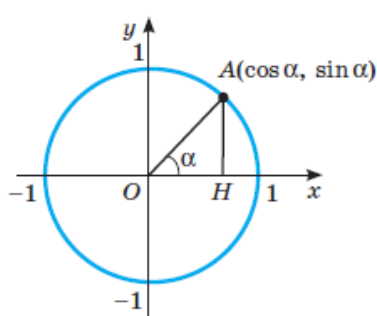
Котангенсом кута α називають відношення косинуса кута α до його синуса.

2) Історична довідка про тригонометричні функції [19].

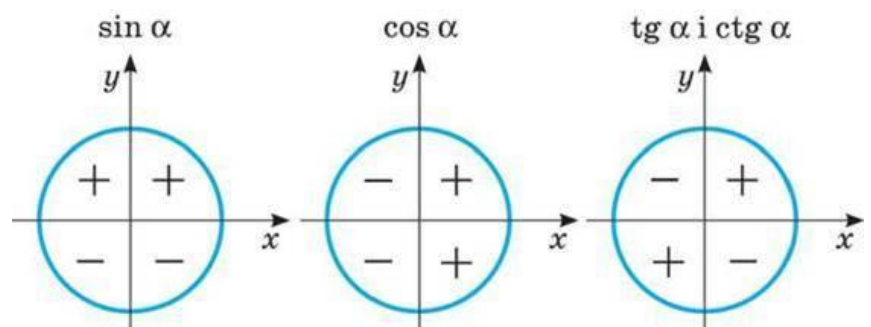
Синус (лат. *sinus* – «випуклість») – тригонометрична функція кута. *Косинус* – це скорочення латинського виразу *complementy sinus*, тобто «додатковий синус». Назва *тангенс* походить від латинського *tanger* (дотикатися), лінія тангенсів – це дотична до одиничного кола.

3) Знаки тригонометричних функцій (мал. 2). Перевірка правильності рівностей:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$



Мал. 2.1



Мал. 2.2

4) Таблиця значень тригонометричних функцій

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5. Колективне розв'язування типових вправ.

1) № 230 [1, с. 57]. Обчислити значення виразу: $\sin 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ + \sin 120^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи таблицю значень тригонометричних функцій і той факт, що куту 120° на одиничному колі відповідає точка з

ординатою $\frac{\sqrt{3}}{2}$, одержимо:

$$\sin 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ + \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}.$$

2) № 231 [1, с. 57]. Визначити знак добутку $\sin 120^\circ \cdot \cos 155^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ$.

Розв'язання. $\sin 120^\circ \cdot \cos 155^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ < 0$, бо $\sin 120^\circ > 0$, $\cos 155^\circ < 0$, $\operatorname{tg} 85^\circ > 0$.

3) Встановити знак виразу $\sin 789^\circ$.

Розв'язання. Запишемо $\sin 789^\circ$ у вигляді: $\sin 789^\circ = \sin (360^\circ \cdot 2 + 69^\circ) = \cos 69^\circ > 0$.

4) № 226 [1, с. 57]. Що більше: $\sin 20^\circ$ чи $\sin 50^\circ$?

Розв'язання. З одиничного кола бачимо, що ордината точки, яка відповідає куту 50° більша за ординату точки, яка відповідає куту 20° , тому $\sin 20^\circ < \sin 50^\circ$.

6. Самостійне розв'язування вправ за індивідуальними завданнями.

<i>Рівень навчальних досягнень учня/учениці</i>	<i>Індивідуальне завдання (за підручником [1, с. 56–58])</i>
Початковий	№ 221, 223
Середній	№ 221, 222, 223
Достатній	№ 224, 227, 229
Високий	№ 224, 235, 249

7. Підбиття підсумків уроку.

- 1) Розв'язування завдань ЗНО/НМТ, що ґрунтуються на темі уроку (див. додаток Г).
- 2) Застосування інтерактивного прийому *Знали/Дізналися/Хочемо дізнатись*.

8. Домашнє завдання.

- 1) Закріпити вивчене на уроці за відеофрагментом «Синус, косинус, тангенс і котангенс кута» URL: <https://www.youtube.com/watch?v=0ah04nkqTF8> (за необхідності).
- 2) Опрацювати § 6. Розв'язати письмово вправи №№ 236, 237 [1].
- 3) Підготуватися до сприйняття навчального матеріалу наступного уроку: перегляд навчального відео «Пропорція та її властивості» URL: <https://www.youtube.com/watch?v=LPWNJszhpT4>.

Урок № 2

Тема уроку: Радіанне вимірювання кутів

Мета уроку: засвоєння поняття радіанного вимірювання кутів, формування вмінь переходу від градусної міри кутів до радіанної і навпаки.

Хід уроку

1. Перевірка домашнього завдання.

2. Актуалізація опорних знань.

1) Повторення знань про пропорції та довжину круга (попереднє самостійне опрацювання вдома навчального відео).

2) Перевірка готовності учнів до сприйняття нового матеріалу за допомогою інтерактивної вправи <https://learningapps.org/31310172>.

3. Запис теми уроку та визначення завдань.

4. Пояснення нового матеріалу

1) Кут в 1 радіан – це такий центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола (мал. 1). Радіан є безрозмірною одиницею та має міжнародне позначення *rad*, походить від латинського *radius* – промінь, радіус [23].

2) Залежності між градусною і радіанною міри кутів.

$$360^\circ = 2\pi \text{ рад. } 1 \text{ рад} = 360^\circ/2\pi \approx 57^\circ. 1^\circ = \pi/180^\circ \text{ рад.}$$

$$n^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot n \text{ радіанів; } \alpha \text{ радіанів} = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha$$

3) Таблиця відповідностей між мірами деяких кутів

$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°

5. Колективне розв'язування типових вправ.

1) № 262 [1, с. 63]. Записати в радіанній мірі кути 15°, 135°.

$$\text{Розв'язання. } 15^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 15 = \frac{\pi}{12} \text{ (рад), } 135^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 135 = \frac{3\pi}{4} \text{ (рад)}$$

2) № 264 [1, с. 64]. Виразити в градусах кути $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{6}$.

$$\text{Розв'язання. } \frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180}{3} = 120^\circ, \frac{\pi}{5} = \frac{180}{5} = 36^\circ, \frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180}{6} = 150^\circ.$$

3) № 281 [1, с. 65]. Які з чисел $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/5$, $\pi/6$, $3\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, а) менші за 1; б) більші за 2?

Вказівка до розв'язання: використати методику розв'язання вправи 2.

6. Групове розв'язування вправ.

Учні класу об'єднуються в гетерогенні групи та працюють над завданнями з підручника [1, с. 64–65]. Кожна група має аналогічний набір завдань.

<i>Група</i>	<i>Завдання</i>
1	№ 263 (а, б), 269 (б), 270 (а), 276 (а)
2	№ 263 (в, г), 269 (б), 270 (б), 276 (б)
3	№ 263 (г, д), 269 (б), 270 (в), 276 (в)
4	№ 263 (е, є), 269 (б), 270 (г), 276 (г)

7. Підбиття підсумків уроку.

Інтерактивна технологія «Мікрофон»: Як я оцінюю свою роботу на уроці?

8. Домашнє завдання.

1) Закріпити вивчене на уроці за презентацією «Радіанне вимірювання кутів». URL: <https://vseosvita.ua/library/prezentacia-do-uroku-radianne-vimiruvanna-kutiv-9995.html>.

2) Розв'язати письмово вправи №№ 267, 268 [1, с. 64].

Урок № 3

Тема уроку: Тригонометричні функції числового аргументу

Мета уроку: розгляд означення і вивчення властивостей тригонометричних функцій числового аргументу.

Хід уроку

1. Перевірка домашнього завдання.

2. Актуалізація опорних знань.

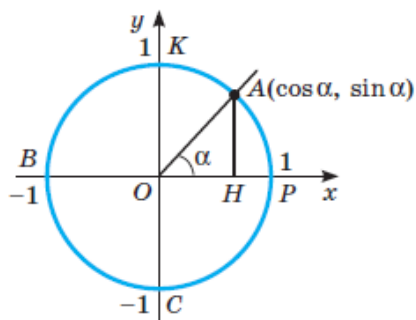
1) Повторення знань про радіанне вимірювання кутів.

2) Перевірка готовності учнів до сприйняття нового матеріалу за допомогою інтерактивної вправи <https://learningapps.org/28631332>.

3. Запис теми уроку та визначення завдань.

4. Пояснення нового матеріалу.

1) Означення тригонометричних функцій числа α і відповідного кута α радіанів (див. мал. 2.3).



Синусом числа α називають ординату точки одиничного кола, яка відповідає числу α . *Косинусом* числа α називають абсцису точки одиничного кола, яка відповідає числу α . Відношення синуса числа до косинуса того самого числа називають *тангенсом* цього числа, а обернене відношення – його *котангенсом*.

2) Властивості тригонометричних функцій числового аргументу.

Областю визначення функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ є множина дійсних чисел, областю значень – проміжок $[-1; 1]$. Областю визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ множина дійсних чисел, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi k$, де k – ціле, областю значень – множина дійсних чисел.

Функції періодичні: $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$, $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ парні, $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ - непарні.

3) Історична довідка.

Тригонометричні функції мають давні латинські витоки: синус від лат. *sinus* «згин, кривизна», «косинус» від лат. *complementy sinus* «додатковий синус», тангенс від лат. *tangens* – той, що дотикається, *tango* – дотикаюсь.

В Європі перші таблиці синусів склав Г. Пурбах, а в першій половині XVII століття символ *sin* використовував у своїх наукових працях А. Жірар. Графік тангенса для першої чверті кола зобразили Дж. Грегорі (1668) і І. Барроу (1674), для двох обертів – Р. Котс.

До системного наукового обігу позначення тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ ввів у «Вступі до аналізу нескінченно малих» (1748 р.), швейцарський за походженням, математик Л. Ейлер. У цій же праці він систематизував відомі тригонометричні знання, почав розглядати

тригонометричні функції довільного кута, вивів ряд невідомих до тих пір тригонометричних формул, зокрема – формули зведення [12, с. 99].

4) Прикладне застосування.

Тригонометричні функції мають широке застосування в науці і повсякденному житті. Вони використовуються: для дослідження періодичних функцій і багатьох реальних явищ та об'єктів; для запису періодично змінних фізичних, економічних, медичних та ін. величин; для налагодження зв'язку за допомогою електромагнітних коливань; для побудови графіків біоритмів людини; для планування ефективної діяльності людини, складання графіків гармоніки у житті людини тощо.

5. Колективне розв'язування типових вправ.

- 1) Визначити знаки $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, якщо α дорівнює $\frac{\pi}{5}$, $1,2\pi$, $\frac{7}{16}\pi$, $\frac{16}{5}\pi$
- 2) Визначити знак виразу $\sin 2 \cdot \cos 3$, $\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \pi$.
- 3) Знайти значення виразу $\sin x + \cos x$, якщо $x = \frac{\pi}{4}$.

6. Групове розв'язування вправ.

Учні класу об'єднуються в гетерогенні групи та працюють над завданнями з підручника [1, с. 64–65]. Кожна група має аналогічний набір завдань.

Група	Завдання
1	№ 271 (а), 277 (а, б), 279 (а), 281
2	№ 271 (б), 277 (в, г), 279 (б), 281
3	№ 271 (в), 278 (а, б), 279 (а), 281
4	№ 271 (г), 278 (в, г), 279 (б), 281

7. Підбиття підсумків уроку

Інтерактивна технологія «Мікрофон»: оцінити свою навчальну діяльність на уроці з питань засвоєння означення і властивостей тригонометричних функцій числового аргументу.

8. Домашнє завдання

1) Закріплення вивчене на уроці за відеофрагментом «Тригонометричні функції числового аргументу» URL: https://www.youtube.com/watch?v=ADS_RRUYe2s.

2) Розв'язати письмово вправи №№ 272, 283 [1, с. 64–65].

Урок № 4

Тема уроку: Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

Мета уроку: засвоєння основних співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу та використання їх до перетворення нескладних тригонометричних виразів.

Хід уроку

1. Перевірка домашнього завдання.

2. Актуалізація опорних знань.

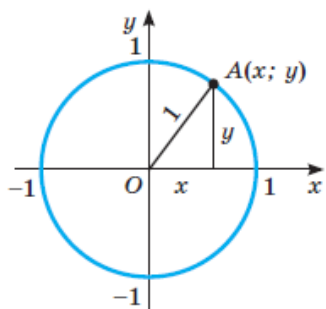
1) Повторення знань про тригонометричні функції числового аргумента.
2) Перевірка готовності учнів до сприйняття нового матеріалу за допомогою інтерактивної вправи <https://learningapps.org/9392620>.

3. Повідомлення теми уроку та визначення завдань.

4. Пояснення нового матеріалу.

1. Для деякої точки одиничного кола $A(x;y)$, маємо $y = \sin \alpha$, $x = \cos \alpha$.
Неважко вивести основні тригонометричні формули: 1) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$; 2)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad 3) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$



4) $\operatorname{tga} \cdot \operatorname{ctga} = 1$ для всіх значень α , крім $\alpha = \frac{\pi}{2}, k$,

$$k \in \mathbb{Z};$$

5) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, де $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

6) $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ де $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2. Розв'язування типових вправ.

1) Знайти $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Розв'язання. Враховуючи, що кут знаходиться у другій чверті, з основної тригонометричної тотожності одержимо: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8$.

Від'ємні значення тангенса і котангенса знаходимо за формулами:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{0,8}{0,6} = -1\frac{1}{3}.$$

2) Спростити вираз $\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha} &= \\ &= \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

3) Довести тотожність $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Розв'язання. Використавши основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу, перетворимо ліву частину тотожності:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 = \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \text{ Тотожність доведена.}$$

5. Колективне розв'язування типових вправ.

1) Знайти $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

2) Спростити вираз а) $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; б) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \sin^2 \alpha$;

3) Довести тотожність а) $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$;

б) $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + 2\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$;

6. Групове розв'язування вправ.

Учні класу об'єднуються в гетерогенні групи та працюють над завданнями з підручника [1, с. 68–70]. Кожна група має аналогічний набір завдань.

<i>Група</i>	<i>Завдання</i>
1	№ 297 (а), 298 (а, г), 299 (б, д), 301 (б), 307 (а), 309 (а, б)
2	№ 297 (б), 298 (б, г), 299 (а, г), 301 (а), 307 (б), 310 (а, б)

7. Підбиття підсумків уроку

Інтерактивна технологія «Мікрофон»: оцінити свою навчальну діяльність на уроці з питань засвоєння і використання основних співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу.

8. Домашнє завдання

- 1) Закріплення вивченого на уроці за відеофрагментом «Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу» URL: <https://www.youtube.com/watch?v=LZXwZvm6vqs>.
- 2) Розв'язати письмово вправи №№ 296 (а), 302 (а), 306 (а) [1].

Урок № 5

Тема уроку: Формули зведення

Мета уроку: засвоєння формул зведення та використання їх до перетворення нескладних тригонометричних виразів.

Хід уроку

1. Перевірка домашнього завдання.

2. Актуалізація опорних знань.

- 1) Повторення знань про основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.
- 2) Перевірка готовності учнів до сприйняття нового матеріалу за допомогою інтерактивної вправи <https://learningapps.org/23600017>.

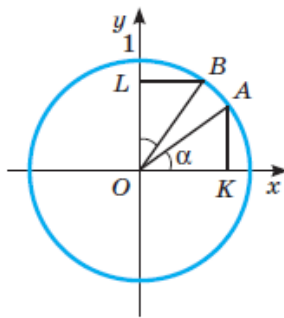
3. Повідомлення теми кроку та визначення завдань.

4. Пояснення нового матеріалу.

1. Запис таблиці: Формули зведення [24, с. 39].

Функція	Аргумент t							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

2. Виведення, для прикладу, однієї з формул:



$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ з рівності трикутників ОКА і ОВК за

мал. 62 підручника [1, с. 71].

Правило зведення: якщо кут даної тригонометричної функції відкладається від вертикального діаметра, то її замінюють кофункцією,

якщо ж – від горизонтального діаметра, то її назву не змінюють. Знак ставлять такий, який має значення даної функції за умови, що кут α гострий.

3. Колективне розв'язування типових вправ.

1) Обчислити $\sin 400^\circ$. Розв'язання.

$$\sin 400^\circ = \sin(360^\circ \cdot 1 + 40^\circ) = \sin 40^\circ.$$

2) Знайти значення $\sin \frac{8\pi}{3}$.

$$\text{Розв'язання. } \sin \frac{8\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) Спростити вираз $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$.

$$\text{Розв'язання. } \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha - \cos \alpha}{-\cos \alpha} = 1.$$

5. Самостійне розв'язування вправ за індивідуальними завданнями.

<i>Рівень навчальних досягнень учня/учениці</i>	<i>Індивідуальне завдання (за підручником [1, с. 74–76])</i>
Початковий	№ 322, 324
Середній	№ 323, 325, 326
Достатній	№ 327, 333
Високий	№ 327, 236, 347

6. Підбиття підсумків уроку

Інтерактивна технологія «Мікрофон»: як я оцінюю свою роботу на уроці?

7. Домашнє завдання

1) Закріплення вивченого на уроці за відеофрагментом «Основні задачі на формули зведення.» URL: <https://www.youtube.com/watch?v=kyizoEPag3E>.

2) Розв'язати письмово вправи №№ 335, 343 [1, с. 75–76].

Урок № 6

Тема уроку: Розв'язування вправ. Самостійна робота.

Мета уроку: закріплення здобутих знань.

Хід уроку

1. Перевірка домашнього завдання.

2. Актуалізація опорних знань.

1. Записати в радіанній мірі кути 10° , 135° , 180° .

2. Знайти градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює $\frac{\pi}{5}$; $-\frac{3\pi}{10}$; 3π .

3. Визначити знак виразу: $\sin 118^\circ \cdot \cos 118^\circ \cdot \operatorname{tg} 118^\circ$.

4. Спростити вираз: $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$.

5. Довести тотожність: $\sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \sin(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

3. Проведення самостійної роботи.

Самостійна робота.

1. Записати в радіанній мірі кути 15° , 120° , 270° (II варіант 36° , 150° , 360°).

2. Знайти градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{4\pi}{10}$; 4π

(II варіант $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{4\pi}{5}$; 5π).

3. Визначити знак виразу: $\sin 98^\circ \cdot \cos 98^\circ \cdot \operatorname{tg} 98^\circ$ (II варіант $\sin 178^\circ \cdot \cos 178^\circ \cdot \operatorname{tg} 178^\circ$).

4. Спростити вираз: $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ (II варіант $\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$)

5. Довести тотожність: $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ (II варіант

$$\sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = \sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha).$$

4. Домашнє завдання:

Розв'язати письмово вправи №№ 329, 332 [1, с. 75].

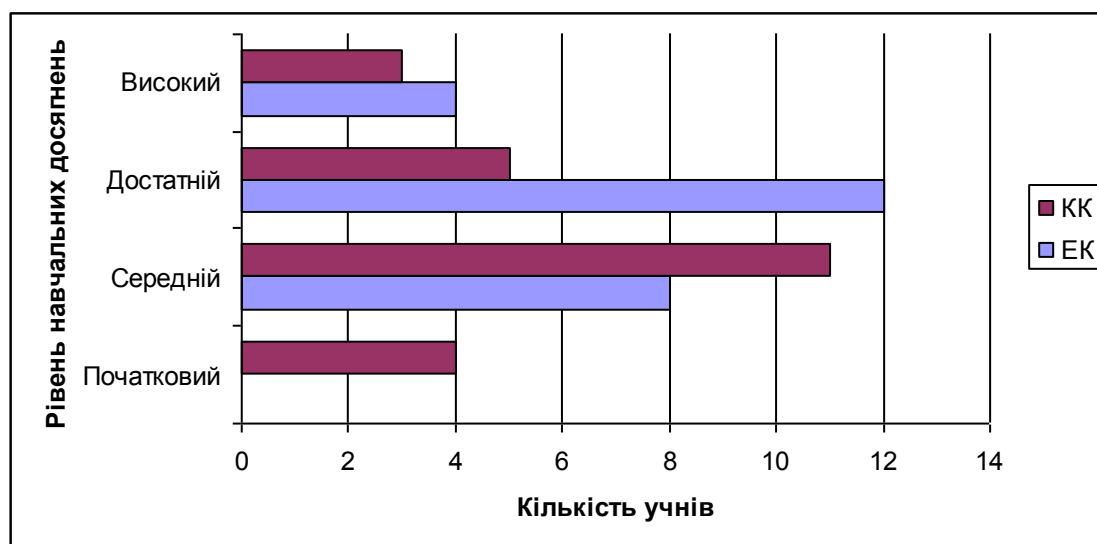
2.4. Педагогічний експеримент та його результати

Наведена у попередньому пункті система уроків до першого тематичного блоку розділу «Тригонометричні функції» була випробувана у Менському опорному закладі загальної середньої освіти І-ІІІ ступенів ім. Т.Г.Шевченка.

У експерименті взяли участь два 10-ті класи, учні яких вивчають математику на рівні стандарту. У кожному з цих класів є учні, які перебувають за кордоном, тому навчаються виключно дистанційно. Інші учні відвідують школу і навчаються загалом очно. Проте у разі повітряної тривоги вимушені процес навчання переривати, оскільки в укритті немає належних умов для його продовження. За таких умов самостійне опрацювання навчального матеріалу становить значну частину навчального процесу. Тому від організації самостійної роботи учнів істотно залежать результати навчання.

У експериментальному 10-Б класі вчителька математики Смаль Ольга Михайлівна організувала роботу відповідно до розроблених нами методичних рекомендацій. У випадку необхідності організації самостійної роботи учнів поза навчальним закладом учні отримували в електронному вигляді опорні конспекти, інструкції для розв'язування типових вправ, різнорівневі завдання для самостійного розв'язування та посилання на відео уроки. Учні контрольного 10-В класу з вчителем математики Кулагіним Віктором Олександровичем навчалися традиційно: на очних уроках переважала фронтальна робота в класі, самостійна робота базувалася на опрацюванні підручника, завдання пропонувалися однакові для всіх учнів, якість самопідготовки перевірялася за допомогою онлайн тестів.

По завершенні вивчення першого тематичного блоку учні відповідно до календарно-тематичного плану (додаток 1) написали самостійну роботу. Результати цієї роботи засвідчили ефективність розробленої нами технології навчання: у експериментальному класі, на відміну від контрольного, жоден учень не отримав менше 6-ти балів, більшість учнів класу виявили достатній рівень навчальних досягнень. Порівняльну діаграму наведено на малюнку 2.6.



Мал. 2.6

Також у безпосередніх бесідах з учнями було встановлено їх позитивне ставлення до випробуваної технології навчання. Більшість учнів відзначила зростання мотивації до вивчення математики. Учні визнавали запропоновані матеріали корисними для себе і висловлювали бажання і надалі їх отримувати.

Слід зауважити, що використання елементів технології змішаного навчання дозволяє зменшити або й усунути відставання учнів, які мусять пропустити заняття через хворобу. Це пояснюється тим, що вона дозволяє поєднувати аудиторні заняття з самостійною роботою вдома. У разі відсутності учня в школі він може продовжувати навчання вдома. Завдяки цьому учень 10-Б класу Стальниченко Павло, який був відсутній у школі через хворобу, не відставав від однокласників і міг успішно засвоїти навчальний матеріал.

ВИСНОВКИ

У ході дослідження було вивчено теоретичні основи змішаного навчання, а також досвід його впровадження у вітчизняній та зарубіжній освіті. Було проведено аналіз сучасних методів та засобів навчання тригонометрії, що використовуються у профільних школах. На основі цього було розроблено модель навчання тригонометрії з елементами змішаного навчання, яка включає в себе аудиторні та дистанційні форми навчання.

У результаті експериментального дослідження було встановлено, що використання технології змішаного навчання дозволяє підвищити ефективність вивчення тригонометрії у профільних школах. Зокрема, було виявлено, що учні, які навчалися за змішаною моделлю, краще засвоювали теоретичний матеріал, мали більш високий рівень сформованості практичних навичок і вмінь, а також були більш задоволені навчальним процесом.

На основі отриманих результатів дослідження можна зробити наступні висновки.

- Технологія змішаного навчання є ефективним інструментом для підвищення якості навчання тригонометрії у профільних школах. Це пов'язано з тим, що вона дозволяє поєднати в собі переваги аудиторного та дистанційного навчання. У аудиторних заняттях учні мають можливість отримувати індивідуальну допомогу від вчителя, а також брати участь у колективних дискусіях та обговореннях. Дистанційне навчання дозволяє учням самостійно вивчати матеріал у зручному для них темпі, а також отримувати додаткові ресурси та матеріали.

- Використання змішаного навчання дозволяє задовольнити індивідуальні потреби учнів, підвищити мотивацію до навчання та активізувати навчальний процес. Це пов'язано з тим, що учні мають можливість самостійно обирати найбільш ефективні для них форми і методи навчання. Змішане навчання також дозволяє задіяти різні види діяльності учнів, що сприяє підвищенню їхньої мотивації до навчання.

- Для успішного впровадження технології змішаного навчання в освітній процес необхідно забезпечити належну матеріально-технічну базу та підготовку педагогічних працівників. Матеріально-технічна база повинна включати в себе комп'ютери, інтерактивні дошки, електронні ресурси та інші засоби навчання. Педагогічні працівники повинні пройти навчання з питань використання технології змішаного навчання.

Отримані результати дослідження можуть бути використані для подальшого вдосконалення технології змішаного навчання тригонометрії у профільних школах. Зокрема, можна розробити більш ефективні методи і засоби навчання, а також удосконалити систему оцінки ефективності навчання. Також доцільним є створення бази ресурсів для змішаного навчання тригонометрії. Ця база повинна містити теоретичний матеріал, практичні завдання та інші ресурси, які можна використовувати для навчання за змішаною моделлю.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту. : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
2. Бевз Г.П. Методи навчання математики. – К.: Генеза, 2010. – 116 с.
3. Берестова А. Інноваційні технології та методи навчання у професійній освіті [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://nadoest.com/innovacijni-tehnologiyi-ta-metodi-navchannya-u-profesijnij-osv>
4. Годованюк Т., Васильєва Д. Деякі аспекти організації змішаного навчання математики в закладах середньої освіти. *Український Педагогічний журнал*. 2 (Чер 2022), 105–115. <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2022-2-105-115>
5. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. К.: «Либідь», 1997. 374 с.
6. Дидактика / М.А. Данилов, Б.П. Есипов. – Москва : Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1957. – 520 с.
7. Євсєєва О. Г. Використання схем орієнтовної основи дії при навчанні вищої математики. / О. Г. Євсєєва // Проблеми сучасної педагогічної освіти. Сер.: Педагогіка і психологія: Зб. статей. - 2009. – Вип. 24. – Ч.1. – С.106-113.
8. Житарюк І. В. Методичні особливості викладання теми "тригонометричні функції" у старшій школі / І. В. Житарюк // Наука і освіта. - 2014. - № 1. - С. 127-131. [Електронний ресурс] Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/NiO_2014_1_29.
9. Закон України "Про освіту" від 05.09.2017 № 2145-VIII
10. Змішане навчання: чи передбачено законодавством та які види практикують школи. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://nus.org.ua/articles/zmishane-navchannya-chy-peredbacheno-zakonodavstvom-ta-yaki-vydy-praktykuyut-shkoly/>

11. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіль. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер, О.В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2018. – 448 с.

12. Кравчук В. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2006. 320 с.

13. Лов'янова І.В. Дидактичні основи навчання математики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / Лов'янова Ірина Василівна. – Кривий Ріг: КДПУ, 2009. – 237 с.

14. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г.Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.В.Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 256 с.

15. Морміль І. С. Самостійна робота № 3 на тему «Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь». *Всеосвіта*. URL: <https://vseosvita.ua/library/samostijna-robota-no3-na-temu-rozvazuvanna-najprostisih-trigonometricnih-rivnan-80589.html>.

16. Навчальна програма з математики для учнів 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів Профільний рівень. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

17. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

18. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

19. Петрова Л. А. Позакласний захід «Конференція з тригонометрії». URL: <https://naurok.com.ua/pozaklasniy-zahid-konferenciya-z-trigonometri-4109.html>.
20. Перетворення графіків тригонометричних функцій / Амеліна Л. І URL: <https://naurok.com.ua/prezentaciya-peretvorennya-grafikov-trigonometricnih-funkciy-83261.html> .
21. Пометун О. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід. Київ, 2002
22. Пометун О. І. Енциклопедія інтерактивного навчання. Київ, 2007. 144 с.
23. Радіан. URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Радіан>
24. Роганін О. М. Алгебра і початки аналізу в означеннях, таблицях і схемах. 7—11 класи. Харків : Видавництво «Ранок», 2006. 112 с.
25. Семенова І. М., Слепухін А. В. Визначення та дидактична конструкція методики використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі. Педагогічна освіта в Україні. 2012. № 2. С. 184–189.
26. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2000.- 512с.
27. Сучасні технології навчання і методики викладання дисциплін [Текст]: Навчально-методичний посібник для слухачів курсів підвищення кваліфікації педагогічних працівників закладів середньої, професійної (професійно-технічної), фахової передвищої та вищої освіти / Л. В. Лебедик, В. Ю. Стрельніков, М. В. Стрельніков. – Полтава : АСМІ, 2020. – 303 с.
28. Теорія та методика навчання математики: загальна методика: навч. посібник / за ред. Є. А. Суховієнко, З. П. Самігулліна, С. А. Севостьянова, Є. М. Ерентраут. Тернопіль : Вид-во «Освіта», 2010. 65 с.
29. Терешковець Н. В. Використання можливостей месенджерів у досягненні нової якості освіти. Методист. 2018. № 10. С. 28–31
30. Чугай О.Ю. Змішане або гібридне навчання як трансформація традиційної освітньої моделі / О.Ю.Чугай // Новітні освітні технології в контексті Євроінтеграції: Матеріали X Міжнар. наук.-пр. конференції. 14 січня 2015 р. – К. : ЦУЛ. – С. 154-158.

ДОДАТОК А

Календарно-тематичний план розділу «Тригонометричні функції»

(за підручником **Бевз Г.П.** Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підуч. для 10 кл. ЗЗСО, 2018)

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ		
№	Тема навчального заняття	К-ть год.
1	Синус, косинус, тангенс і котангенс кута	1
2	Радіанне вимірювання кутів	1
3	Тригонометричні функції числового аргументу	1
4	Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу	1
5	Формули зведення	1
6	Розв'язання вправ. Самостійна робота	1
7	Періодичність функції. Властивості і графіки тригонометричних функцій	1
8	Властивості і графіки тригонометричних функцій	1
9	Формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них	1
10	Формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них. Розв'язування вправ.	1
11	Розв'язування завдань. Самостійна робота	1
12	Найпростіші тригонометричні рівняння	1
13	Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь	1
14	Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь. Самостійна робота	1
15	Узагальнення і систематизація компетенцій. Розв'язування вправ	1
16	Контрольна робота	1
17	Аналіз контрольної роботи.	1

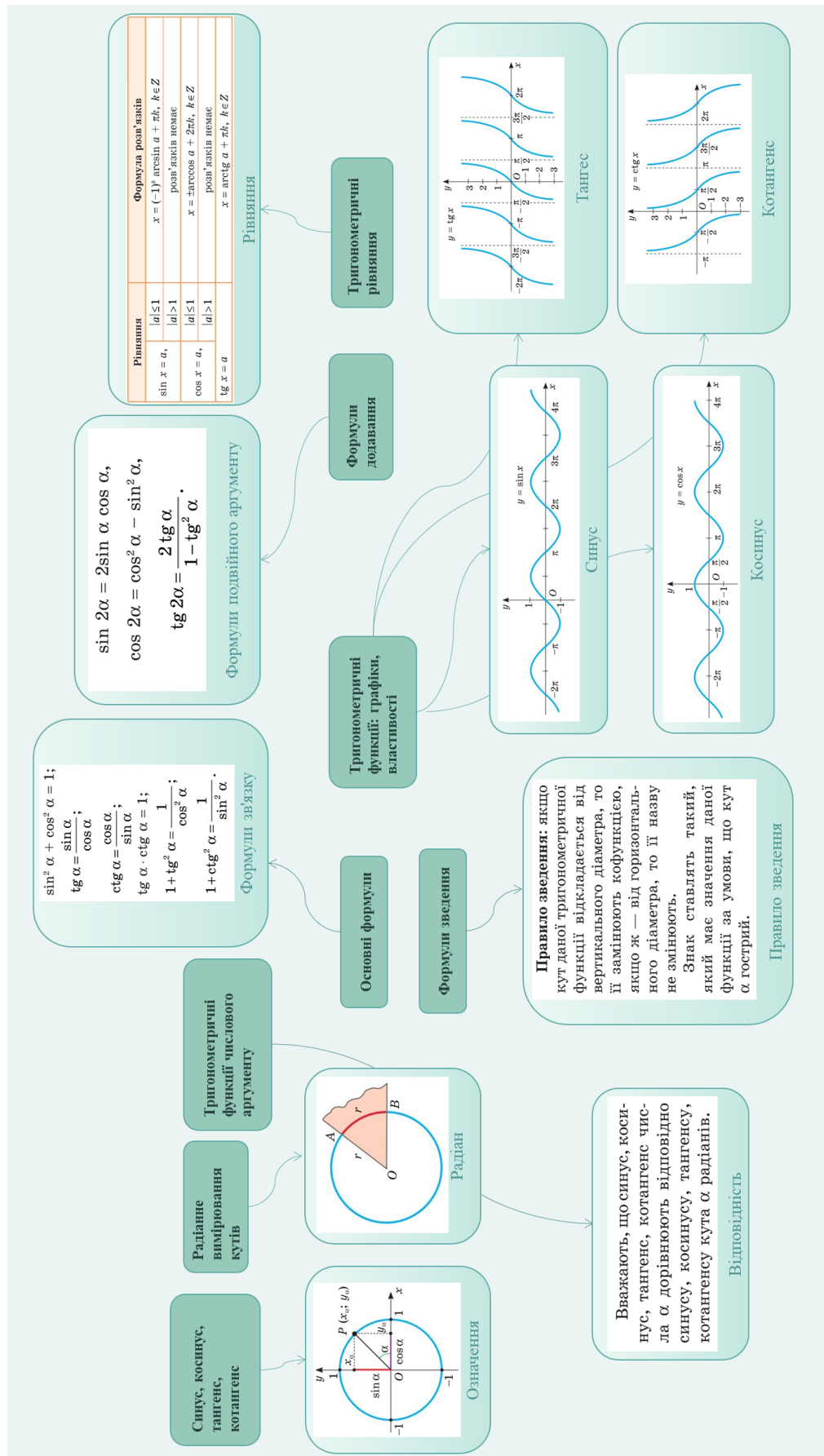
ДОДАТОК Б

Навчальний проект "Тригонометрія навколо нас"

1. Формулювання тем для груп:
 - Застосування тригонометрії в архітектурі та конструкціях.
 - Тригонометрія у мистецтві та дизайні.
 - Тригонометрія в фізиці та інженерії.
 - Тригонометрія у географії та навігації.
2. Організація роботи:
 - Учні формують групи та вибирають тему для дослідження.
 - Проведення самостійного ознайомлення з теорією тригонометрії.
 - Розподіл обов'язків у групі: дослідник, учитель, дизайнер, доповідач.
3. Підготовка відомостей:
 - Кожна група підготовлює короткі відомості про використання тригонометрії у вибраній галузі.
 - Дослідник вивчає теоретичні аспекти.
 - Учитель визначає практичні використання тригонометрії.
 - Дизайнер створює графічні матеріали та ілюстрації.
 - Доповідач готує коротку презентацію результатів.
4. Груповий портфоліо:
 - Результати роботи оформляються у вигляді групового портфоліо.
 - Включає комп'ютерну презентацію з ілюстраціями, графіками, та коротким викладом основних відомостей.
5. Захист проєктів:
 - Захист проєктів відбувається після вивчення теми на позакласному заході.
 - Запрошення учнів інших класів, учителів і батьків на захист проєктів.
 - Оцінювання здійснюється з урахуванням якості презентації, розуміння теорії та практичного застосування тригонометрії.

ДОДАТОК В

Схема вивчення розділу «Тригонометричні функції»



ДОДАТОК Г
Завдання з тригонометрії,
які пропонувалися на ЗНО та НМТ минулих років
Синус, косинус, тангенс і котангенс кута

Приклад 1 (ЗНО-2015).

Якому проміжку належить значення виразу $\sin 415^\circ$?

А	Б	В	Г	Д
$(-1; -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$

Приклад 2 (ЗНО – 2014).

Відомо, що $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$. Яке значення може приймати $\sin \alpha$?

А	Б	В	Г	Д
-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Приклад 3 (ЗНО-2007).

Обчисліть $\sqrt{(2\sin^2 45^\circ + 1)^2} - \sqrt{(1 - 2\sin^2 45^\circ)^2}$.

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	2

Приклад 4 (ЗНО-2012).

Укажіть проміжок, якому належить значення виразу $\operatorname{ctg} 25^\circ$?

А	Б	В	Г	Д
$(0; \frac{1}{\sqrt{3}})$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$	$(1; \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}; +\infty)$

Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

Приклад 5 (ЗНО-2009).

Обчисліть $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Приклад 6 (пробне ЗНО-2015).

Яка з вказаних рівностей є тотожністю ?

- А) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1$;
 Б) $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$;
 В) $1 + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$;
 Г) $\sin^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha$;
 Д) $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

Приклад 7 (ЗНО-2015).

Спростіть вираз $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha$	$\operatorname{tg}^2 \alpha$	$\operatorname{ctg}^2 \alpha$	1

Приклад 8 (ЗНО – 2013).

Вкажіть нерівність, яка виконується для $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

А	Б	В	Г	Д
$1 - \sin^2 \alpha < 0$	$\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha < 0$	$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha < 0$	$1 - \cos^2 \alpha < 0$	$\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha < 0$

Приклад 9 (ЗНО-2013).

Спростіть вираз $\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 2 \alpha$	$\operatorname{tg}^2 \alpha$	1	$\operatorname{ctg}^2 \alpha$	$-\cos 2 \alpha$

Приклад 10 (НМТ 2022).

Обчисліть значення виразу $4 \sin^2 \alpha$, якщо $4 \cos^2 \alpha = 1$.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	4

Формули зведення

Приклад 11 (ЗНО-2010).

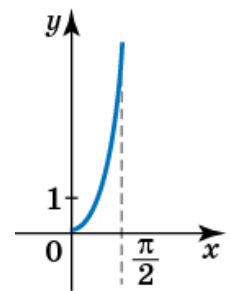
Обчисліть значення виразу $\sin 210^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Властивості і графіки тригонометричних функцій

Приклад 12 (ЗНО – 2015).

На рисунку зображено фрагмент однієї з вказаних функцій на проміжку $[0; \frac{\pi}{2})$. Укажіть цю функцію.



А	Б	В	Г	Д
$y = \operatorname{ctg} x$	$y = 2^x$	$y = x^2$	$y = \frac{\pi}{2} x$	$y = \operatorname{tg} x$

Приклад 13 (ЗНО-2009).

Вкажіть найменший додатний період функції $y = 2 \operatorname{ctg} (3x)$.

А	Б	В	Г	Д
2π	π	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Приклад 14 (ЗНО-2006).

Знайдіть множину значень функції $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.

А	Б	В	Г	Д
---	---	---	---	---

[1; 2]	[0; 2]	$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$	[0; 1]	інша відповідь
--------	--------	-------------------------	--------	-------------------

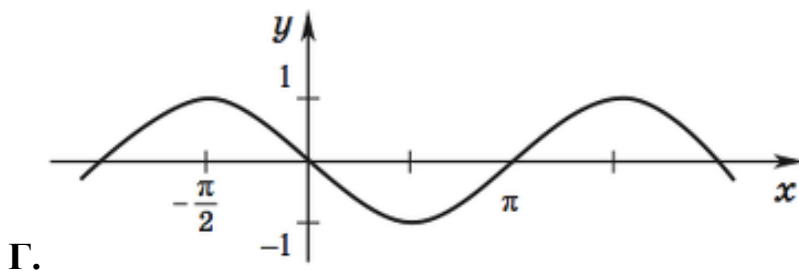
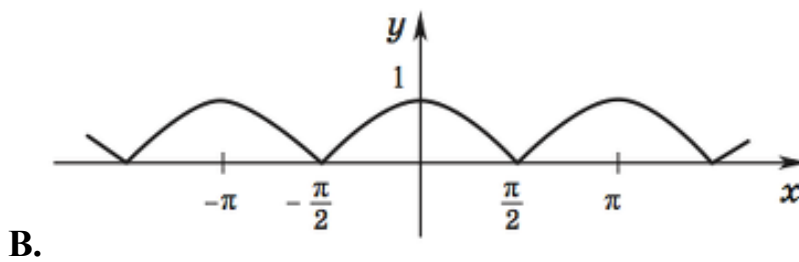
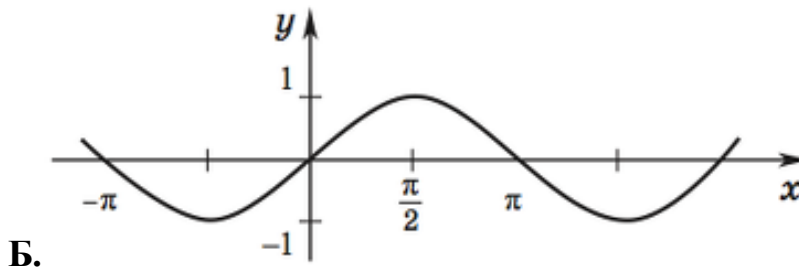
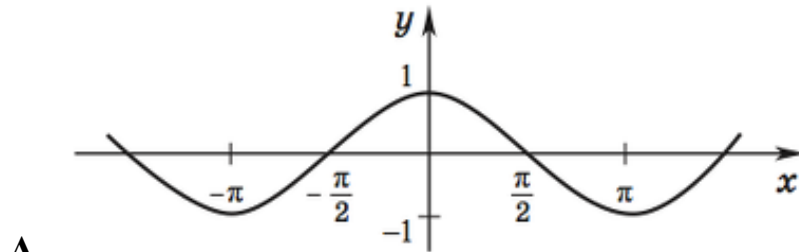
Приклад 15 (пробне ЗНО-2015).

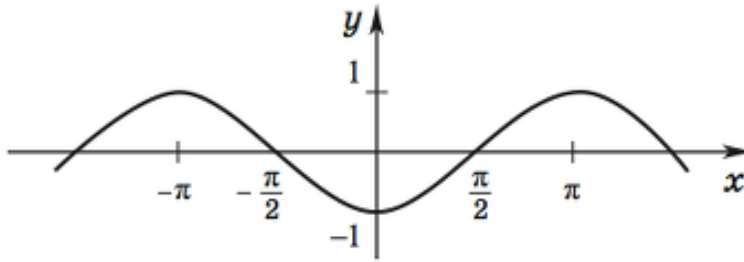
Установіть відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

Функція

1. $y = \sin x$; 2. $y = -\cos x$; 3. $y = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$; 4. $y = -\cos|x|$.

Графік функції





Д.

Приклад 16 (пробне ЗНО-2010) .

Установіть відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції $y = \cos \alpha$ (1 – 4) і функціями, отриманими в результаті цих перетворень (А-Д)

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1. графік функції $y = \cos \alpha$ паралельно перенесли вздовж вісі Ox на дві одиниці вліво | А. $y = \cos 2x$ |
| 2. графік функції $y = \cos \alpha$ паралельно перенесли вздовж вісі Oy на дві одиниці вниз | Б. $y = \frac{1}{2} \cos x$ |
| 3. графік функції $y = \cos \alpha$ стисли до вісі Ox в два рази | В. $y = \cos(x - 2)$ |
| 4. графік функції $y = \cos \alpha$ стисли до вісі Oy в два рази | Г. $y = \cos(x + 2)$ |
| | Д. $y = \cos x - 2$ |

Приклад 17 (ЗНО-2010) .

Установіть відповідність між функціями, заданими формулами (1 – 4), та їхніми властивостями (А-Д) .

- | Функція | Властивості функції |
|-----------------|---|
| 1. $y = x^3$ | А. областю визначення функції є проміжок $[0; +\infty)$ |
| 2. $y = \cos x$ | Б. функція спадає на інтервалі $(0; +\infty)$ |

3. $y = \operatorname{tg} x$

В. функція зростає на інтервалі

$(-\infty; +\infty)$

4. $y = \log_{0,2} x$

Г. парна функція

Д. періодична функція з найменшим періодом $T = \pi$ Приклад 18 (ЗНО-2013).Знайдіть найбільше значення функції $y = \frac{(1 - 2 \cos x)^4}{2}$ **Формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них**Приклад 19 (НМТ 2023).Укажіть вираз, тотожно рівний виразу $(\cos x - \sin x)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 2x$	$\cos 2x - \sin 2x$	$\cos 2x - 1$	$1 - \sin 2x$	1

Приклад 20 (ЗНО-2009).Обчисліть $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$.

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	інша відповідь

Приклад 21 (пробне ЗНО-2015).

Установіть відповідність між виразом (1 – 4) та тотожно рівним йому виразом (А-Д).

1. $1 - \cos^2 \alpha$

А. $\cos^2 \alpha$

2. $2 \sin \alpha \cos \alpha$

Б. $\cos 2\alpha$

3. $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

В. $\sin 2\alpha$

4. $\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

Г. $-\cos 2\alpha$

Д. $\sin^2 \alpha$

Приклад 22 (ЗНО-2007) .

Обчисліть $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.

Приклад 23 (ЗНО-2006) .

Обчисліть значення виразу $\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$. Відповідь запишіть десятковим дробом .

Найпростіші тригонометричні рівняння

Приклад 24 (ЗНО – 2014) .

Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}(3x) = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{9} + \pi n,$ $n \in Z$

Приклад 25 (ЗНО-2008) .

Розв'яжіть рівняння $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,$	$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$

Приклад 26 (ЗНО-2010) .

Розв'яжіть систему
$$\begin{cases} 5 \cos \frac{\pi y}{2} = x^2 - 8x + 21, \\ y + 5x - 4 = 0 \end{cases}$$
 .

Приклад 27 (ЗНО-2010) .

Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{2x^2 + 7x - 9} + |\sin(\pi x) + 1| = 0 .$$

Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь . Якщо рівняння

має більше ніж один корінь, то запишіть у відповідь суму всіх коренів .

Приклад 28 (ЗНО-2014) .

Знайдіть найменше значення параметра a , при якому рівняння

$$2^{\sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13} \text{ має додатній корінь .}$$