Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г.Шевченка

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики та економіки

Кваліфікаційна робота

освітнього ступеня «магістр»

на тему

«Методика навчання учнів розв’язування нестандартних рівнянь та нерівностей в курсі математики закладів середньої освіти»

Виконала:

студентка 6 курсу, групи 61

спеціальності

014 Середня освіта (Математика)

Молодша Юлія Юріївна

Науковий керівник: к. п. н., доцент

Соколенко Лілія Олександріва

м. Чернігів - 2019 рік

Роботу подано до розгляду «____» _________________2019 року.

Студентка _________________ __________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник _________________ __________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент _________________ __________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри ____

(назва кафедри)

протокол № _____від «______» ______________2019 року.

Студент(ка) допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри ______________ ___________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Зміст

Вступ

Змістова лінія «Рівняння та нерівності» є складовою шкільного курсу математики основної та старшої школи та має важливе практичне значення. Обсяг змісту лінії, численність методів та способів розв’язання рівнянь та нерівностей відкриває широкі можливості для її застосування не лише під час вивчення ряду інших тем шкільних курсів алгебри основної школи та алгебри та початків аналізу старшої школи, а й різних розділів математики. За допомогою рівнянь, нерівностей та їх систем розв’язуються також прикладні задачі, зокрема задачі суміжних дисциплін фізики, хімії, біології.

Перше знайомство з рівняннями відбувається в початковій школі. В 1-6 класах учні розв’язують найпростіші лінійні рівняння, використовуючи залежності між компонентами і результатами арифметичних дій.

Ознайомлення з основними властивостями рівнянь надає можливість учням 6-го класу розв’язувати рівняння з використанням правил, що ґрунтуються на цих властивостях. У кожному з класів основної та старшої школи учні вчаться розв’язувати певні класи рівнянь (лінійні; квадратичні; дробово-раціональні рівняння, які зводяться до квадратних; біквадратні; ірраціональні; трансцендентні (тригонометричні, показникові, логарифмічні)) відповідними методами.

Нерівності зі змінними, лінійні нерівності з однією змінною та їх системи є предметом вивчення курсу алгебри 9 класу. Ірраціональні та трансцендентні нерівності та відповідні методи і способи їх розв’язання є складовою курсу алгебри і початків аналізу старшої школи.

Рівень сформованості універсальних навчальних дій (УНД) значною мірою визначає успішність в знаходженні розв’язків, яку можуть досягти учні навчаючись розв’язувати рівняння та нерівності.

До УНД, що стосуються поняття рівняння (нерівність) відносять:

1) розпізнавання різних класів рівнянь (нерівностей);

2) виведення наслідків із фату належності рівняння до вказаного класу рівнянь;

3) застосування загальних методів та прийомів до розв’язування рівнянь (нерівностей);

4) розв’язання задач, які моделюються за допомогою рівнянь (нерівностей) та їх систем.

Участь випускників закладів середньої освіти в олімпіадах, складання ЗНО з математики потребують належної підготовки розв’язування відповідних завдань, серед яких розв’язування нестандартних рівнянь та нерівностей.

Аналіз навчально-методичної літератури свідчить про існування рівнянь та нерівностей, які не можуть бути віднесені до згаданих вище типів – це так звані комбіновані рівняння (нерівності), або розв’язання яких елементарними прийомами є неможливим, а потребує використання різних властивостей функцій (обмеженості, монотонності, опуклості), або містять зайві змінні та інше. Завдання таких типів зустрічаються в підручниках курсу алгебри і початків аналізу, що вивчається на профільному рівні Мерзляка А. Г. та ін. «Алгебра і початки аналізу: профільний рівень» [16], [17], [19], [20], Неліна Є. П. «Алгебра і початки аналізу» [24] та в класах з поглибленим вивченням математики [25], [26], [27], посібниках Сарани О. А. «Математичні олімпіади» [31], Лось В.М. «Математика: Навчаємо міркувати.» [12] , Хохлова Л.Г. «Ірраціональні рівняння і нерівності» [34]. Ці завдання викликають в учнів певні труднощі під час їх розв’язування, а, отже, існує необхідність у створенні методики навчання учнів розв’язування нестандартних рівнянь та нерівностей.

Об’єкт дослідження: процес навчання змістової лінії «Рівняння та нерівності курсу математики закладів середньої освіти.

Предмет дослідження: методика навчання учнів розв’язування нестандартних рівнянь та нерівностей.

Мета дослідження: розкрити зміст поняття «нестандартні рівняння», «нестандартні нерівності» та розробити ефективну методику навчання учнів розв’язування нестандартних рівнянь та нерівностей в курсі математики закладів середньої освіти.

Завдання дослідження:

1) проаналізувати наукову, навчально-методичну літературу з теми дослідження;
2) розкрити зміст понять «нестандартне рівняння» та «нестандартна нерівність»; з’ясувати, які рівняння (нерівності) відносять до комбінованих;
3) розглянути теорію формування в учнів універсальних навчальних дій та конкретизації її застосування під час навчання розв’язування нестандартних рівнянь (нерівностей) в шкільному курсі математики;
4) підібрати систему нестандартних рівнянь та нерівностей, призначену для навчання курсу алгебри і початків аналізу старшої школи;
5) охарактеризувати методичні особливості навчання розв’язування рівнянь та нерівностей запропонованої в роботі системи, використовуючи властивості функцій, застосовуючи похідну та штучні прийоми розв’язування;
6) запропонувати методику навчання учнів розв’язування нестандартних рівнянь (нерівностей) на факультативних заняттях з математики;
7) здійснити експериментальну перевірку окремих результатів дослідження.

Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаної літератури, додатків. У вступі обґрунтована актуальність теми дослідження, визначено його об’єкт, предмет, мету, завдання, методологічну основу.

У першому розділі «Теоретичні основи дослідження» проаналізовано генезис понять нестандартні рівняння та нестандартні нерівності, здійснено аналіз стану проблеми дослідження в науковій, навчально-методичній літературі, досліджено теорію формування в учнів універсальних навчальних дій під час навчання розв’язування нестандартних рівнянь (нерівностей) в шкільному курсі математики.

У другому розділі «Система нестандартних рівнянь та нерівностей курсу алгебри і початків аналізу старшої школи та методика навчання учнів їх розв’язання» створено систему нестандартних рівнянь та нерівностей курсу алгебри і початків аналізу старшої школи та розроблено методику навчання учнів розв’язування нестандартних рівнянь та нерівностей створеної нами системи.

В останньому параграфі розділу представлені результати експериментальної перевірки результатів дослідження проведеного нами на базі закладу середньої освіти №20 м. Чернігова. Робота містить два додатки. У першому представлені результати анкетування з виявлення рівня сформованості УНД учнів, у другому результати експерименту, який було проведено з учнями 10 класу у вигляді факультативу, метою якого є формування універсальних навчальних дій в учнів.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Стан проблеми дослідження в науковій, навчально-методичній літературі та шкільній практиці

Практика показує, що рівень математичної освіти школярів має велике значення і вимагає систематичної, цілеспрямованої роботи гуртків, факультативів, індивідуальної роботи з учнями, які цікавляться математикою.

Кожний вчитель має за мету вдосконалити в учнів вміння розв'язування рівнянь і нерівностей . Рівняння та нерівності є однією з провідних змістових ліній шкільного курсу математики.

За навчальною програмою для загальноосвітніх навчальних закладів [23] в курсі математики у 5-6 класів учні знайомляться з розв'язуванням рівнянь використовуючи залежностей між компонентами арифметичних дій, а згодом розв'язують рівняння використовуючи основні властивості рівнянь.

В курсі алгебри в 7-9 класах істотного розвитку набуває змістова лінія рівнянь та нерівностей. Процес розв'язування рівняння трактується як послідовна заміна даного рівняння рівносильними йому рівняннями. На основі узагальнення відомостей про рівняння, здобутих у попередні роки, вводиться поняття лінійного рівняння з однією змінною. Курс передбачає вивчення лінійних рівнянь, квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до лінійних або квадратних.

Елементарні відомості про числові нерівності доповнюються і розширюються за рахунок вивчення властивостей числових нерівностей, лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей. Учні розв'язують рівняння з використанням правил, що ґрунтуються на основних властивостях рівняння. Під час розв'язування квадратних використовується декілька способів, серед яких використання формул, що містять дискримінант, виділення повного квадрату, використання теореми оберненої до теореми Вієта.

Під час розв’язування рівнянь учні виконують дії над многочленами, такі як: винесення множника за дужки, групування, використовують формули скороченого множення.

За навчальною програмою з математики для учнів 10-11 класів [21] вивчаючи алгебру і початки аналізу, учні продовжують удосконалювати вміння розв’язування рівнянь та нерівностей, використовуючи рівносильні перетворення, рівняння-наслідки, властивості функцій та многочленів. Під час розв’язування ірраціональних рівнянь (нерівностей) виконуються додавання до (віднімання від) обох частин рівняння одного і того ж числа; множення (ділення) на одне й теж число; піднесення обох частин рівняння до парного (непарного) степеня. Розв’язуючи тригонометричні, показникові та логарифмічні рівняння (нерівності) учні використовують тригонометричні формули та співвідношення, властивості степенів та логарифмів, застосовують похідну. Учні також вчаться розв’язувати рівняння (нерівності), що містіть знак модуля.

З нестандартними рівняннями та нерівностями учні знайомляться в старшій школі. Наприклад, готуючись до олімпіад з математики або до зовнішнього незалежного оцінювання учні зустрічаються зі значним обсягом рівнянь, розв’язування яких стандартними способами важке та громістке або і зовсім неможливе. Тоді можна спробувати використати інший підхід, наприклад, використати властивості функцій, які є складовими рівняння: скінченна область допустимих значень рівняння, обмеженість множини значень функції, монотонність функції або функцій, інколи ефективно використовувати тригонометричну підстановку.

З’ясування властивостей функцій відбувається використовуючи елементарні прийоми, а в ряді випадків використовуючи похідну. Похідна застосовується, коли елементарні прийоми неефективні, зокрема під час визначення найбільшого та найменшого значень функцій, обґрунтовування монотонності функцій, знаходження екстремумів функцій.

Не менш важливими є штучні прийоми розв’язування нерівностей: введення допоміжного невідомого, доповнення до повного квадрату та введення спряжених виразів.

Ці прийоми тісно пов'язані з матеріалом , що вивчається в школі, але, крім того, їх не традиційність привчає школярів, не задовольнятися шаблонами, алгоритмами, а вдумливо підходити до пошуку оригінальних розв'язань, тобто сприяє формуванню в учнів універсальних навчальних дій, що є дуже важливим і необхідним. Велику кількість рівнянь можна розв’язати використовуючи не один метод або спосіб. Зазвичай стандартний метод розв’язування може бути досить громіздким і займає багато часу, нетрадиційний же підхід найчастіше за все приводить до простого і раціонального розв’язування.

Методи розв’язання нестандартних рівнянь розглядаються в курсі алгебри 10-11 класу. У 10-му класі учні узагальнюють поняття степеня, вивчають тригонометричні функції та їх властивості, ознайомлюються з поняттям похідної та навчаються застосовувати її до розв’язання рівнянь та нерівностей. В 11 класі формуються вміння розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння та нерівності.

За підручником Мерзляка А. Г. «Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл.» [19] учні мають можливість ознайомитися з традиційними методами розв’язування тригонометричних рівнянь, що відрізняються від найпростіших, а саме:

1) зведення тригонометричних рівнянь до алгебраїчних;

2) способами розв’язуання однорідних тригонометричних рівнянь;

3) розв’язування рівнянь методом розкладання на множники.

Тут досить добре розглянуто метод заміни змінних, але не достатньо приділено уваги методу розв’язування рівнянь використовуючи властивості функцій. У підручнику Неліна Є. П. «Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)» [26] , більш детально розглядається даний метод та наводиться досить багато прикладів розв’язування рівнянь та нерівностей. В підручниках для 11 класу Мерзляка «А. Г. Алгебра і початки аналізу» [18], Неліна Є.П. «Алгебра і початки аналізу» [27] відбувається узагальнення та систематизація знання з розв'язування нестандартних рівнянь та нерівностей, які набуті учнями в 10-му класі. В 11 класі вчать розв'язувати логарифмічні та показникові рівняння та нерівності використовуючи властивості показника, логарифма та застосовуючи властивості функції.

На факультативних заняттях, готуючись до олімпіад з математики або до зовнішнього незалежного оцінювання учні знайомляться з штучними методами розв'язання рівнянь та нерівностей.

Приходячи в старшу школу учень має певний рівень знань та вмінь, що стосуються розв'язуванню рівнянь та нерівностей [23]. За результатами проведеного нами експериментального дослідження в 10-А класі ЗСО №20 м. Чернігова можемо констатувати наступне: переважна більшість учнів класу розпізнає різні види рівнянь, відомі їм з курсу математики основної школи; здійснює пошук інформації, необхідної для розв'язування рівнянь; виявляє зацікавленість в отриманні нових знань.

Але необхідно продовжувати роботу по формуванню УНД, що стосуються поняття рівняння, зокрема навчати учнів застосувати загальні методи розв'язування рівнянь, удосконалювати здатність відокремлювати істотні властивості функцій, формувати вміння самостійно вибудовувати алгоритм дій під час розв'язання рівнянь, які потребують нетрадиційного, творчого підходу.

1.2. Поняття «нестандартне рівняння» та «нестандартна нерівність» та їх трактування в навчально-методичній літературі.

Означаючи поняття «нестандартне рівняння», «нестандартна нерівність» слід розпочати з поняття «рівняння» («нерівність») та підходів які використовуються під час їх означення в математиці та шкільному курсі математики. Аналізуючи шкільні підручники з математики, можна констатувати як розкривається зміст поняття «рівняння» («нерівність»). Наприклад, у підручнику Істера О.С. «Математика. 5 кл.» [9, с. 60] поняття означається так: «Рівність, що містить невідоме число називається рівнянням». В 7 класі учні ознайомлюються з іншим означенням «Рівнянням називається рівність зі змінною, значення якої треба знайти», яке представлено у підручнику Тарасенкова Н. А. Математика: підруч. для 7 кл. [33, с. 187] .

У підручнику Неліна Є. П. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 кл. [24, с. 66] представлений загальний вигляд рівняння з однією змінною x : $f(x) = g(x)$ «Рівність зі змінною називається рівнянням» так означає поняття

В навчально-методичній літературі до *нестандартних рівнянь* відносять рівняння з двома, трьома змінними, які після більш-менш оригінальних міркувань приводять до цілком визначених розв'язків [11, с.310]. Наприклад, рівняння $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$, під час розв'язування якого використовується виділення повних квадратів.

У 9 класі елементарні відомості про нерівності доповнюються і розширюються за рахунок вивчення властивостей числових нерівностей, лінійних нерівностей з однією змінною та квадратних нерівностей.

Нестандартні рівняння та нерівності зустрічаються у навчально-методичних посібниках: Сарани О.А. «Математичні олімпіади: просте і складне поруч» [31], Лося В.М., Тихієнка В.П. «Математика: Навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач» [12], Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. «Ірраціональні рівняння і нерівності» [34].

1.3. Комбіновані рівняння, нерівності

Кобінованим називають рівняння яке не може бути віднесено до певного типу (тригонометричне, показникове, ірраціональне , логарифмічне та ін.). До них відносять: показниково-тригонометричні; степенево-показникові; логарифмічно-показникові; логарифмічно-тригонометричні та ін.. [11]

З'ясуємо, що означає слово «стандарт». Під « стандартом» розуміють:

1) загальноприйнятний взірець у мові;

2) єдину типову форму організації, проведення, здійснення чого-небудь;

3) норму, шаблон, трафарет [29].

Говорячи про рівняння та нерівності виокремлюють ті, що відносяться до певних класів рівнянь (нерівностей) шкільного курсу математики. Ті рівняння (нерівності), що до цих класів не відносяться вважають нестандартними – серед них виділяють і комбіновані.

У підручнику Істера О. С. «Математика 5 кл.» [9, с.60] означається, що «Розв’язати рівняння означає знайти всі його корені або показати, що їх не існує». Успіх у розв’язуванні залежить від вибору методу чи способу розв’язання. Основною ідеєю розв’язування рівнянь в школі є ідея рівносильності рівнянь. У шкільному курсі математики рівняння розв’язуються використовуючи метод рівносильних перетворень та за допомогою рівнянь – наслідків. Розглянемо ці методи детальніше. «Рівняння (нерівності) називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні і ті ж самі розв’язки» таке означання надає Нелін Є. П. «Алгебра і початки аналізу» [26, с.35] .

Також у підручнику Неліна Є. П. виокремлюються теореми, які доцільно використовувати під час розв’язування рівнянь [26, с.35] :

1. Якщо з однієї частини рівняння (нерівності) перенести в другу доданки з протилежним знаком, одержимо рівняння (нерівність), рівносильне заданному (на будь-якій множині).

2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне і те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого)

Для знаходження розв’язків рівняння використовуються рівняння-наслідки («Якщо всі корені першого рівняння є коренями другого рівняння, то друге рівняння називається наслідком першого» так трактує поняття Нелін Є. П. «Алгебра і початки аналізу» [26, с.35]) та при цьому можлива поява сторонніх коренів. Щоб цього не сталося, слід пам’ятати, що, якщо при розв’язуванні рівняння застосовують рівняння-наслідки, то перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.

Серед спеціальних методів є такі, що увійшли до чинних програм з математики та підручників нового покоління, а саме: використання скінченності ОДЗ рівняння, використання множини значень функції, оцінка лівої та правої частини рівняння(нерівності), застосування похідної до розв'язання рівнянь. Існують менш відомі прийоми розв'язування рівнянь, які називаються спеціальними, такі як введення допоміжного невідомого, доповнення до повного квадрата, уведення спряжених виразів.

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10} = 2$.

Розв'язання

Розглядаємо комбіноване рівняння. Помічаємо, що рівняння містить квадратний корінь та логарифм, у нас немає формул, через які можна виразити логарифм через корінь або навпаки, тому такого виду задачі розв'язуються шляхом дослідження, в даному випадку шляхом знаходження множини значень самого кореня та логарифма. Для того, щоб оцінити вираз під коренем потрібно виділити повний квадрат. Проводимо дослідження:

$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1;$ $\qquad \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 1;$

$x^2 - 2x + 10 = (x-9)^2 + 9 \geq 9;$ $\qquad \sqrt{x^2 - 2x + 10} \geq 9;$

$\log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10} \geq \log_3 3$;

Ми отримали, що $\log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10} \geq 1$ та $\sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 1$.

З умови бачимо, що їх сума дорівнює 2, отже, для того, щоб виконувалась рівність необхідно, щоб перший доданок і другий доданок набували мінімального значення, тобто дорівнювали одиниці. Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 1 \\ \log_3 \sqrt{x^2 - 2x + 10} = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases};$$

Отже корінь рівняння $x = 1$.

Відповідь: 1.

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння $5\sqrt{1+|x^2-1|} = 3+|5x+3|$

Розв'язання.

В рівнянні змінна присутня як під знаком кореня, так і під знаком модуля. Під час розв'язання внесемо число 5 під корінь: $\sqrt{25+|25x^2-25|} = 3+|5x+3|$. Потім виконаємо заміну $t = 5x$.

Після заміни отримаємо рівняння $\sqrt{25+|t^2-25|} = 3+|t+3|$ (1).

При розкритті модуля вирази, які стоять під знаком модуля, прирівнюємо до нуля. Знаходимо, що $t = \pm 5$ і $t = -3$. Отримані значення розбивають числову пряму на чотири проміжки. Встановимо знаки функції на кожному із отриманих проміжків встановимо. Якщо підмодульна функція додатна, то модулі розкривають без змін. Якщо від'ємна, то розкриваючи модуль функцію беруть зі знаком мінус.

Відповідно, розглядаємо чотири проміжки.

1. Якщо $t \le -5$, то ліва частина рівняння дорівнює $\sqrt{t^2} = |t| = -t$, і рівняння приймає вид $-t = 3 - t - 3,\ 0 = 0$.

Отримали вірну числову рівність, яка означає, що всі значення t ≤ -5 є розв'язком рівняння (1).

2. Якщо $-5 \le t \le -3$, то рівняння (1) приймає вигляд $\sqrt{50-t^2} = -t$

Легко побачити, що це рівняння має єдиний корінь $t = -5$, який ми вже отримали вище.

3. Якщо $-3 \le t \le 5$, то рівняння (1) приймає вигляд $\sqrt{50-t^2} = t+6$. Права частина отриманого рівняння є додатною при розглянутих t, тому воно рівносильне рівнянню $50 - t^2 = (t+6)^2$. Піднесемо до степеня та зведемо подібні доданки отримаємо рівняння $t^2 + 6t - 7 = 0$ з коренями 1 і -7, з яких лише $t = 1$ належить даному проміжку і тому є розв'язком рівняння (1).

4. Якщо $t > 5$, то рівняння (1) набуде вигляду $t = 3 + t + 3$, а таке рівняння не має розв'язку.

Отже, розв'язком рівняння (1) є значення $t \leq -5$ $і$ $t = 1$. Залишається виконати обернену заміну $x = \frac{t}{5}$ і записати відповідь.

Відповідь: (-∞; -1] ∪ $\{\frac{1}{5}\}$.

Отже, під нестандартними рівняннями (нерівностями) ми будемо розуміти:

1) рівняння (нерівності), які не можна віднести до певного програмного типу рівнянь (нерівностей) курсу математики закладів середньої освіти;

2) комбіновані рівняння (нерівності);

3) рівняння 9нерівності) метод чи спосіб розв'язування яких не є традиційним для шкільного курсу, або методика використання якого у школі потребує певного вдосконалення;

4) рівняння (нерівність), яке в результаті не громіздкого ланцюга перетворень не може бути зведене до такого рівняння (нерівності), для якого існує певний алгоритм розв'язання.

1.4. Формування в учнів універсальних навчальних дій при розв'язанні нестандартних рівнянь (нерівностей)

4.1. Розпізнавання різних типів рівнянь (нерівностей)

Оволодіння учнями універсальними начальними діями відбувається в процесі вивчення різних навчальних предметів. Кожний навчальний предмет надає різні можливості для формування УНД. Як ми уже зазначали раніше до дій, що стосуються поняття рівняння (нерівності) в кусі алгебри і початків аналізу відноситься розпізнавання різних типів рівнянь (нерівностей).

Приходячи в школу учень має певний рівень сформованості універсальних навчальних дій (УНД), що стосуються поняття рівнянь та нерівностей [28, с. 10]. Учні розпізнають різні типи рівнянь, відомі їм з курсу математики основної школи, здійснюють пошук інформації, необхідної для розв'язування рівнянь.

Наприклад, рівняння виду $y = ax + b$, де $a \neq 0$, a, b – деякі числа, y, x – невідомі, учні відносять його до лінійних рівнянь, так як степінь рівняння дорівнює одиниці. Коли невідоме в рівнянні входить до показника степеня – це показникові рівняння. Учні розуміють який вигляд мають ірраціональні рівняння, тригонометричні, логарифмічні, рівняння з модулем та вміють застосовувати стандартні методи та способи до їх розв'язування.

Як правило, в підручниках алгебри і початків аналізу учням пропонуються приклади з зразками розв'язання завдань , а учні уже повинні самостійно навчитися розв'язувати аналогічні завдання. При цьому учень повинен самостійно виконати систематизацію та узагальнення способів дій, орієнтуючись на запропоновані зразки. Але участь випускників закладів середньої освіти в олімпіадах, складання ЗНО з математики потребує ширшої обізнаності учнів у питаннях пов'язаних з рівнянням (нерівністю) та методами і способами їх розв'язування. Мова йде про рівняння(нерівності), які відносять до нестандартних. Нестандартними називають рівняння (нерівності), які не можна віднести до певного програмного виду рівнянь (нерівностей) курсу математики закладів середньої освіти, серед них виокремлюють комбіновані.

Розпізнавання типу рівнянь (нерівностей) є складовою частиною для успішного його розв'язування. Як правило, дії які виконує учень під час розв'язування нестандартних рівнянь (нерівностей) не завжди є повними та правильними, крім того учень не завжди може пояснити, чому він виконав саме ці перетворення рівняння (нерівності) під час розв'язування, а не інші. З цієї причини одним із принципів формування в учнів універсальних навчальних дій під час розв'язання нестандартних рівнянь (нерівностей) є вміння розпізнавати різні типи рівнянь (нерівностей).

1.4.2. Розпізнавання та застосування методу розв’язання певного рівняння (нерівності)

Після того як учні успішно віднесли рівняння до деякого типу, наступним кроком буде розпізнавання саме методу розв’язування певного рівняння. Отримання правильної відповіді залежить від вибору найбільш раціонального методу розв’язування виходячи з конкретних умов. Говорячи про вибір найбільш ефективних методів та способів розв’язування рівнянь слід звернути увагу учнів на те, що на різних етапах вивчення математики в школі використовують різні методи розв’язування рівнянь та нерівностей. Зокрема для розв’язування рівнянь використовують залежності між компонентами та результатами дій (5 кл.),рівносильні рівняння, рівняння наслідки (6-11 кл.), застосовують способи, ефективні під час розв’язування окремих видів та типів рівнянь (10, 11 кл.) (розв’язування рівнянь з модулем за означенням, використовуючи геометричний зміст модуля, використовуючи спеціальні співвідношення), використовують властивості функції (скінченна ОДЗ рівняння, обмеженість множини значень функції, зростання та спадання функцій).

Для успішного використання методів розв’язування рівнянь доцільно запропонувати учням загальні орієнтири, які дозволяють на їх основі правильно виконувати рівносильні перетворення рівнянь та одержувати рівняння наслідки. Виконуючи рівносильні перетворення рівнянь(нерівностей), необхідно врахувати ОДЗ заданого рівняння . За означенням рівносильності рівнянь потрібно гарантувати, щоб кожен корінь першого рівняння був коренем другого і, навпаки, кожен корінь другого рівняння був коренем першого. Виділення таких орієнтирів, сприяє формуванню в учнів універсальних навчальних дій по розпізнаванню методу розв’язування певного рівняння (нерівності) та по складанню алгоритмів для його розв’язування.

Наприклад, для формування УНД по розпізнанню методу розв’язування нестандартних рівнянь, використовуючи властивості функції, доцільно доповнити запропоновану систему завдань з альтернативних підручників завданнями в яких, перед безпосереднім розв’язуванням рівнянь учням пропонується спочатку провести аналіз та систематизувати рівняння за найбільш раціональними методами їх розв’язування, а вже тільки потім скласти алгоритм розв’язування рівняння (нерівності). Наведемо приклад.

Серед заданих нестандартних рівнянь укажіть:

1) рівняння, які містять скінченну ОДЗ;

2) рівняння, які можна розв’язати, використовуючи оцінкку лівої та правої частини рівнянь;

3) рівняння, які розв’язуються, спираючись на властивість монотонності функції.

Для кожного з рівнянь складіть алгоритм розв’язування.

1) $x^4 + |x-1| = 2x^2 - 1$

2) $\sqrt{x^2-1} + x = 1 + \sqrt{2-2x^2}$

3) $2x + \sqrt{x^2-9} = x^2 + \sqrt{18-2x^2} - 3$

4) $x^3 + x = \frac{2}{x}$.

5) $|x^2 - 7x + 12| + |x^2 - 9| + |6 - 2x| = 0$

6) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-2x} = 3x - 6$

7) $\sqrt{x-2} + x^2 = \sqrt{4-2x} + x + 2$

8) $\sqrt{x-2} + |x^2 - 2x| + (x^2-4)^2 = 0$.

9) $x + \sqrt{x} + x^9 = 3$.

Виконуючи завдання учні виділяють: до рівнянь типу 1) відноситься рівняння під номерами 2, 3, 6, 7; до рівнянь типу 2) відноситься рівняння під номерами 1, 5, 8, 10; до рівнянь типу 3) відноситься рівняння під номерами 4, 9.

Для реалізації планів розв’язування доцільно запропонувати уточнення орієнтованої основи діяльності, під час розв’язування рівнянь, в яких використовуються властивості спадної чи зростаючої функції: 1) підбираємо один або декілька коренів рівняння. 2)доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння). Для формування навчальних дій з передбаченням результатів своєї діяльності та її планування необхідно наголосити на тому, що під час розв’язування рівнянь, які містіть скінченну ОДЗ, ми не можемо гарантувати, що всі ці значення будуть коренями рівняння, тому перевірка підстановкою отриманих значень в початкове рівняння є невід’ємною складовою розв’язування.

Для формування пізнавальних навчальних дій з рефлексії способів та умов дій та вибору найбільш ефективних способів розв’язування завдань в залежності від конкретних умов при розв’язання нерівностей слід звернути увагу учнів на те, що під час розв’язування нерівностей, ми не маємо можливості користуватися нерівностями-наслідками, оскільки не зможемо перевірити всі розв’язки, а можемо користуватися тільки рівносильними перетвореннями (або розв’язувати цю нерівність за допомогою методу інтервалів).

Таким чином, формування універсальних навчальних дій при навчанні алгебри і початків аналізу забезпечує можливість учнів самостійно здійснювати діяльність навчання, ставити навчальні цілі, шукати і використовувати необхідні засоби і способи досягнення цілей, планувати, контролювати й оцінювати процес і результати навчальної діяльності.

РОЗДІЛ 2. СИСТЕМА НЕСТАНДАРТНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ СТАРШОЇ ШКОЛИ ТА МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1. Методичні особливості розв'язування нестандартних рівнянь, використовуючи властивості функцій

2.1.1. Використання скінченності ОДЗ

Розв'язати рівняння або нерівність можна використавши область визначення та область значення функції. У випадку, коли задано рівняння $f(x)=g(x)$, спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається *областю допустимих значень (ОДЗ)* цього рівняння.

Зрозуміло, що кожен корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$. Отже, *кожен корінь рівняння обов'язково входить до ОДЗ цього рівняння*. Це дозволяє в деяких випадках за рахунок аналізу ОДЗ одержати розв'язки рівняння. Наприклад, якщо *область допустимих значень (ОДЗ) рівняння складається із скінченного числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення*.

У тому випадку, коли ОДЗ – порожня множина (не містить жодного числа), ми можемо зразу дати відповідь, що задане рівняння не має коренів.

Проілюструємо сказане вище на прикладах.

Приклад 1.

Розв'язати рівняння $\sqrt{3-x} = \log_5(x-3)$

Розв'язання.

ОДЗ рівняння складається з усіх x , які задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} x-3>0 \\ 3-x\geq 0 \end{cases}$. Ця система не має розв'язків, отже, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

Відповідь. не має розв'язків.

Приклад 2.

Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2} + x^2 = \sqrt{4-2x} + x + 2$.

Розв'язання.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-2x \geq 0 \end{cases}$, звідки $\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$. Отримуємо $x = 2$.

Область допустимих значень для змінної x складається тільки з числа 2. Легко перевірити, що $x=2$ – корінь рівняння.

Перевірка

$\sqrt{x-2} + x^2 = \sqrt{2-2} + 2^2 = 4.$

$\sqrt{4-2x} + x + 2 = \sqrt{4-4} + 2 + 2 = 4.$

Отже, $x = 2$ – корінь рівняння.

Відповідь. 2.

Отже, врахування області визначення передбачає наступний алгоритм:

1) знайти ОДЗ рівняння
2) якщо ОДЗ не містить жодного числа, то рівняння розв'язків не має;
3) якщо ОДЗ скінчення, то перевірити всі її значення;
4) зробити висновок, щодо розв'язків рівняння.

Цей алгоритм допомагає учням під час розв'язування рівнянь (нерівностей).

Приклад 3.

Розв'язати нерівність $\log_5 x < \sqrt{1-x^4}$.

Розв'язання.

ОДЗ нерівності це всі значення невідомої для яких виконується нерівність $0 < x \leq 1$.

Зрозуміло, що $x = 1$ не є розв'язком нерівності. Для всіх x, які належать проміжку $0 < x \leq 1$ маємо, що $\log_5 x < 0$, а $\log_5 x > 0$.

Звідси отримуємо, що всі значення x які належать $0 < x < 1$ будуть розв'язком нашої нерівності.

Відповідь. (0; 1).

Приклад 4.

Розв'язати нерівність $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$.

Розв'язання.

ОДЗ нерівності складається із всіх значень x із проміжку $-3 \le x \le 9$. Розділимо цю множину на два проміжки $-3 \le x \le 0$ та $0 \le x \le 9$.

Для всіх значень x , які належать проміжку $-3 \le x \le 0$ отримаємо $\sqrt{x+3} \ge 0$, $\sqrt[4]{9-x} \ge \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$.

Нерівність на цьому проміжку не має розв'язку, так як $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \ge \sqrt{3}$.

Нехай x належить проміжку $0 \le x \le 9$, тоді $\sqrt{x+3} > \sqrt{3}$ та $\sqrt[4]{9-x} \ge 0$. Звідси $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$ для всіх x, і це означає, що на цьому проміжку нерівність також не має розв'язку.

Отже, задана нерівність не має розв'язку.

Відповідь. нерівність немає розв'язку.

Доцільно зробити наступні зауваження:

Зауваження 1.

Під час розв'язування рівняння необов'язково знаходити ОДЗ. Інколи зручно перейти до рівняння-наслідку та перевірити знайдені корені.

Зауваження 2.

Під час розв'язування нерівності інколи можна не знаходити ОДЗ, а розв'язувати її, перейшовши до рівносильної системи нерівностей.

Приклад 5.

Розв'яжіть нерівність $\log_2(2^x + 1 - x^2) > \log_2(2^{x-1} + 1 - x) + 1$.

Розв'язання.

Знайти ОДЗ даної нерівності буде досить складно, тому скористаємося зауваженням. Дана нерівність рівносильна системі нерівностей.

$$\begin{cases} 2^x + 1 - x^2 > 0, \\ 2^{x-1} + 1 - x > 0, \\ 2^x + 1 - x^2 > 2(2^{x-1} + 1 - x) \end{cases}$$

Третя нерівність даної системи рівносильна нерівності $x^2 - 2x + 1 < 0$, яка не має розв'язку. Звідси, система нерівностей не має розв'язку, а це і означає, що початкова нерівність не має розв'язку.

Відповідь. нерівність немає розв'язку.

2.1.2. Використання множини значень функції

Одним з ефективних методів розв’язування рівнянь є метод, що ґрунтується на використанні обмеженості функцій. До найбільш відомих обмежених функцій належать тригонометричні функції; функції, що містять модуль, степінь, корінь парного степеня.

Теоретичне обґрунтування даного методу дають наступні теореми [1].

Теорема 1. Якщо на деякій множині M дійсних чисел справджуються нерівності $f(x) \le a$, $\varphi(x) \le b$, то на множині M рівняння $f(x) + \varphi(x) = a + b$ рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} f(x) = a, \\ \varphi(x) = b. \end{cases}$

Теорема 2. $f^2(x) + \varphi^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$

Теорема 3. Якщо $\mathrm{f}(x) \ge a$, $\varphi(x) \le a$, то $\mathrm{f}(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ \varphi(x) = a. \end{cases}$

Приклад 1.

Розв’яжіть рівняння : $1 + |x^5 + 3x| = \sqrt{1 - x^2}$.

Розв’язання.

Знаходимо ОДЗ рівняння.

ОДЗ: $1 - x^2 \ge 0, x^2 \le 1, \ \ -1 \le x \le 1.$

Область значення функції $f(x) = 1 + |x^5 + 3x|$ проміжок $[1;+\infty)$. Оскільки $x^5 + 3x \ge 0$, для всіх значень x .

Область значень функції $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ проміжок $[0;1]$. Оскільки $1 - x^2 \ge 0$, для всіх значень x .

Маємо; $\begin{cases} 1 + |x^5 + 3x| = 1 \\ \sqrt{1 - x^2} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x(x^4 + 3) = 0 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases}$; $x = 0.$

Відповідь. $x = 0.$

Приклад 2.

Розв’яжіть рівняння : $\sqrt{x - 2} + |x^2 - 2x| + (x^2 - 4)^2 = 0$.

Розв’язання.

Маємо, що $f_1(x) = \sqrt{x - 2} \ge 0$, $f_2(x) = |x^2 - 2x| \ge 0$, $f_3(x) = (x^2 - 4)^2 \ge 0.$

Отже, задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0, \\ |x^2 - 2x| = 0, \\ (x^2-4)^2 = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння одержуємо $x = 2$, що задовольняє всій системі.

Відповідь. 2.

Приклад 3.

Розв’яжіть рівняння : $log_2(5 + 3\, cos\, 4x) = sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв’язання.

Оцінимо множину значень функцій, записаних у лівій і правій частинах рівняння.

$-1 \leq cos4x \leq 1, \qquad 2 \leq 5 + 3cos4x \leq 8, \qquad 1 \leq log_2(5 + 3cos4x) \leq 3;$

$0 \leq sin^2(x + \frac{\pi}{4}) \leq 1.$

Звідси $log_2(5 + 3cos4x) \geq 1, \; sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1,$

тоді $\begin{cases} log_2(5 + 3cos4x) = 1, \\ sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$

$$\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = 1, \qquad 1 + sin2x = 2, \qquad sin2x = 1,$$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \epsilon Z.$

Ці розв’язки задовольняють і перше рівняння системи:

$log_2(5 + 3\cos(\pi + 4\pi n)) = 1, \qquad (1 = 1).$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \epsilon Z.$

Приклад 4.

Розв’яжіть рівняння : $\sqrt{2x^2 + 3x - 14} + |sin(\pi x) - 1| = 0$

Розв’язання

Оскільки ліва частина рівняння – сума двох невід’ємних чисел, то дане рівняння рівносильне системі

$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 3x - 14} = 0 \\ |sin(\pi x) - 1| = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 2x^2 + 3x - 14 = 0 \\ sin(\pi x) = 1 \end{cases}.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\frac{7}{2}, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x = \frac{1}{2} + 2n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Друге рівняння задовольняє корінь $x = -\frac{7}{2}$

Відповідь: -3,5.

2.1.3. Використання обмеженості функцій. Оцінка лівої і правої частини рівняння

Деякі рівняння можна розв’язати за допомогою оцінки лівої та правої частин рівняння. Даний прийом базується на такій властивості: нехай потрібно розв’язати рівняння виду *f(x)* = *g(x)* і з’ясувалося, що $f(x) \geq a, \ \varphi(x) \leq a,$ то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли *f(x)* і *g(x)* одночасно дорівнюють *a.*

Тобто якщо $\begin{cases} f(x) \geq a, \\ \varphi(x) \leq a, \end{cases}$ то $\begin{cases} f(x) = a, \\ \varphi(x) = a \end{cases}$.

Під час розв’язання рівнянь та нерівностей властивості обмеженості зверху чи знизу функції на деякій множині часто виконують ключову роль.

Наприклад, якщо для всіх *x,* які належать деякій множині *M* справедливі нерівності *f(x) > A* і *g(x) < A,* де *A* – деяке число, то на множині *M* рівняння *f(x) = g(x)* і нерівність *f(x) < g(x)* не мають розв’язку.

Приклад 1.

Розв’яжіть рівняння $x^4 + |x-1| = 2x^2 - 1$

Розв’язання

Для розв’язання достатньо перенести всі члени в один бік, записати рівняння у вигляді $(x^2-1)^2 + |x-1| = 0$ і взяти до уваги, що $(x^2-1)^2$ і $|x-1|$ - невід’ємні функції.

Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} (x^2-1)^2 = 0 \\ |x-1| = 0. \end{cases}$

З другого рівняння одержуємо *x = 1,* що задовольняє всій системі, тобто задане рівняння має єдиний корінь *x = 1.*

Відповідь. 1

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$.

Розв'язання.

Для будь-якого дійсного числа x маємо

$$\sin(x^3 + 2x^2 + 1) \leq 1,\ x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2.$$

Оскільки для будь-якого значення x ліва частина рівняння не більша за одиницю, а права частина завжди неменша двох, то отримали, що дане рівняння не має розв'язку.

Відповідь. не має розв'язку.

Приклад 3.

Розв'яжіть нерівність $\frac{1-x}{1+x} < 2^x$.

Розв'язання.

ОДЗ нерівності є всі дійсні числа, крім значення $x = -1$.

Розіб'ємо ОДЗ на три проміжки: $-\infty < x < -1$, $-1 < x \leq 0$, $0 < x < +\infty$ і розглянемо нерівність на кожному з цих проміжків.

Розглядаємо $-\infty < x < -1$, для кожного значення x з проміжку маємо $g(x)= \frac{1-x}{1+x} < 0$, а для $f(x) = 2^x > 0$. Звідси отримуємо, що всі значення x з обраного проміжку є розв'язком нерівності.

Розглядаємо $1 < x \leq 0$, для кожного значення x з проміжку маємо $g(x) = \frac{1-x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x} \geq 1$, а для $f(x) = 2^x \leq 1$. Звідси отримуємо, що всі значення x з обраного проміжку не є розв'язком нерівності.

Розглядаємо $0 < x < +\infty$, для кожного значення x з проміжку маємо $g(x) = \frac{1-x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1$, а для $f(x) = 2^x > 1$.

Звідси отримуємо, що всі значення x з обраного проміжку є розв'язком нерівності.

Відповідь. $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Приклад 4.

Розв’яжіть рівняння $4x^2 + 4x + 17 = \frac{12}{x^2-x+1}$.

Розв’язання.

Перепишемо рівняння у вигляді $4x^2 + 4x + 1 + 16 = \frac{12}{x^2-x+1}$.

Поділимо ліву та праву частину рівняння на 4 та виділимо квадрати.

Отримаємо $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

Для будь-яких дійсних значень x маємо

$$g(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \ge 4, \qquad f(x) = \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \le 4.$$

Звідси початкове рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = 4, \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Отримана система рівнянь розв’язку не має, а звідси слідує, що і початкове рівняння не має розв’язків.

Відповідь. не має розв’язків.

Приклад 5.

Розв’язати рівняння $1 - x^2 = \sqrt{1+\sqrt{|x|}}$

Розв'язання

$f(x) = 1 - x^2 \le 1,\ g(x) = \sqrt{1+\sqrt{|x|}} \ge 1,$ тому що $\sqrt{x} \ge 0$.

Отже, задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 1, \\ \sqrt{1+\sqrt{|x|}} = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x^2 = 0, \\ 1+\sqrt{|x|} = 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{|x|} = 0 \end{cases}.$$

Звідси отримуємо, що $x = 0$.

Відповідь. 0.

Приклад 6.

Розв’яжіть рівняння $\cos(x\sin x)^2 = 1 + \left(\log_5\sqrt{x^2+x+1}\right)^2$.

Розв’язання.

ОДЗ рівняння є всі дійсні значення. Для будь-яких x маємо $\cos(x\sin x)^2 \le 1,\quad 1 + \log_5\sqrt{x^2+x+1}^{\,2} \ge 1$

Звідси, початкове рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \cos(x\sin x)^2 = 1 \\ \log_5\sqrt{x^2+x+1}^{\,2} = 0. \end{cases}$$

Розв’язком другого рівняння системи є $x = 0$ і $x = -1$.

Із цих значень перше рівняння задовольняє тільки $x = 0$, яке і є єдиним розв’язком рівняння.

Відповідь. $x = 0$.

2.1.4. Використання монотонності функцій

Під час розв’язання також є можливість використовувати властивості монотонності функцій. В даному випадку доцільно запропонувати учням такий орієнтир:

- підбираємо один чи кілька коренів рівняння;
- доводимо, що інших коренів немає, при цьому використовуючи теореми про корені рівнянь або оцінку значень лівої та правої частини рівнянь.

Теореми про корені рівняння

Теорема 1 [26, с. 42]. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Теорема 2 [26, с. 42]. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Справді , якщо функція $f(x)$ монотонна, то таке рівняння має лише один корінь, бо для монотонної функції нерівним значенням аргументу відповідають нерівні значення функції. Графічно це означає, що пряма лінія, паралельна осі абсцис (графік функції – константи), не може перетинати графік монотонної функції більше, ніж в одній точці.

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння $x^3 + x = \frac{2}{x}$.

Розв'язання

Спочатку слід урахувати його ОДЗ: $x \neq 0$ і згадати, що функція $y = \frac{2}{x}$ на всій області визначення не є ні спадною, ні зростаючою , але вона спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Тому розглянемо кожен проміжок окремо.

1) При $x > 0$ задане рівняння має корінь $x = 1$.

Перевірка ($1^3 + 1 = \frac{2}{1}, 2 = 2$).

Функція $f(x) = x^3 + x$ зростає при $x > 0$, а функція $g(x) = \frac{2}{x}$ спадє на проміжку $x > 0$. Отже, задане рівняння $f(x) = g(x)$ при $x > 0$ має єдиний корінь $x = 1$ (використали теорему : Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.)

Відповідь. 1.

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння $x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64$.

Розв'язання

Відразу можемо сказати, що $x \leq 0$ не може бути розв'язком рівняння, так як отримаємо $x \cdot 2^{x^2+2x+3} \leq 0$. Для $x > 0$ функція $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ неперервна і зростає, як добуток двох додатних зростаючих для даних значень x функцій $f = x$ і $g = 2^{x^2+2x+3}$.

Це означає, що на проміжку $x > 0$ функція $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ приймає кожне своє значення рівно в одній точці. Легко побачити, що $x = 1$ є єдиним розв'язком рівняння.

Відповідь. *1.*

Приклад 3.

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{18-x} - \sqrt[8]{x-2} = 2$.

Розв'язання

ОДЗ даного рівняння проміжок $2 \le x \le 18$.

На ОДЗ функція $f(x) = -\sqrt[8]{x-2}$ і $g(x) = \sqrt[4]{18-x}$ неперервні і спадні, звідси отримуємо що неперервна і спадна функція $h(x) = \sqrt[4]{18-x} - \sqrt[8]{x-2}$.

Тому, кожне своє значення функція $h(x)$ приймає тільки в одній точці. Так як $h(2) = 2$, то $x = 2$ – єдиний корінь початкового рівняння.

Відповідь. *2.*

Приклад 4.

Розв'яжіть нерівність $2^x + 3^x + 4^x < 3$.

Розв'язання

Кожна з функцій $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$ неперервана і зростаюча на всій осі. Це означає, зростаюча і функція $y = 2^x + 3^x + 4^x$.

Легко побачити, що при $x = 0$ функція $y = 2^x + 3^x + 4^x$ дорівнює 3.

Використовуючи неперервність і строгу монотонність даної функції при $x > 0$ маємо $2^x + 3^x + 4^x > 3$, при $x < 0$ маємо $2^x + 3^x + 4^x < 3$.

Отже, розв'язком нерівності будуть всі значення $x < 0$.

Відповідь. $(-\infty\ ;\ 0)$.

Приклад 5.

Розв'яжіть нерівність $\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} < 4$.

Розв'язання

ОДЗ нерівності є проміжок $0 \le x \le 1$.

На ОДЗ функція $f(x) = \sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x}$ є неперервної і зростаючою. Бачимо, що $f(1) = 4$, то всі значення $x \in [0;1)$ задовольняють нашу нерівність.

Відповідь. $[0;1)$.

2.1.5. Використання властивостей взаємно обернених функцій

Перед розв'язування нестандартних рівнянь, використовуючи властивості взаємно обернених функцій, доцільно буде нагадати ці властивості учням [1]:

1) Якщо $f(x)$ та $g(x)$ взаємно обернені функції, то їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$.

2) Якщо графіки взаємно обернених функцій $f(x)$ та $g(x)$ перетинаються, то точки їх перетину лежать на прямій $y = x$.

3) Якщо $f(x)$ та $g(x)$ взаємно обернені функції, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = x$ або рівнянню $g(x) = x$.

Приклад 1.

Розв'язати рівняння: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

Розв'язання

Позначимо $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$, тоді $g(x) = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Функції $f(x)$ та $g(x)$ взаємно обернені.

За властивістю 3, рівняння $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ рівносильне рівнянню

$\frac{x^3+1}{2} = x, \quad x^3 - 2x + 1 = 0$,

Яке, у свою чергу, рівносильне рівнянню

$(x-1)(x^2 + x - 1) = 0.$

Коренями останнього рівняння будуть числа 1, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ці самі корені матиме і початкове рівняння .

Відповідь. 1, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2.1.6. Використання властивостей синуса і косинуса

Розв'язання великої кількості рівнянь можна звести до розв'язку системи рівнянь. Для прикладу це можуть бути такі рівняння:

$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \pm 1$,

$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \pm 1$,

$A\,(\sin \alpha x)^m + B\,(\cos \beta x)^n = \pm\,(|A| + |B|)$,

$A\,(\sin \alpha x)^m + B\,(\sin \beta x)^n = \pm\,(|A| + |B|)$.

Де α, β, A і B – дані дійсні числа, n , m - дані натуральні числа.

Під час розв'язання такого типу рівнянь використовується наступна властивість синуса : якщо для деякого числа x_0 справедлива строга нерівність $|\sin \alpha x_0| < 1$, то число x_0 не може бути коренем не одного із вище наведених рівнянь.

Аналогічно використовують властивість косинуса: якщо для деякого числа x_0 справедлива нерівність $|\cos \alpha x_0| < 1$, то таке число x_0 не може бути коренем не одного із наведених вище рівнянь.

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння $\sin x \cdot \cos 4x = 1$.

Розв'язання.

Якщо x_0 – розв'язок рівняння, то або $\sin x_0 = -1$, або $\sin x_0 = 1$. Дійсно, якщо б $|\sin x_0| < 1$, то з рівняння слідувало , що $|\cos 4x_0| > 1$, а це є неможливим.

Але якщо $x_0 = 1$, то з рівняння слідує, що $\cos 4x_0 = 1$, якщо ж $\sin x_0 = -1$, то $\cos 4x_0 = -1$.

Звідси слідує, що коренем рівняння є розв'язок однієї з наступних двох систем рівняння:

$\begin{cases} \sin x_0 = 1 \\ \cos 4x_0 = 1 \end{cases}$, (1) $\qquad \begin{cases} \sin x_0 = -1 \\ \cos 4x_0 = -1 \end{cases}$. (2)

Легко побачити, що будь-який розв'язок першої системи і будь-який розв'язок другої системи є розв'язком початкового рівняння.

Звідси і слідує, що початкове рівняння рівносильне сукупності даних систем рівнянь. Знайдемо розв’язки цих системи.

Перше рівняння системи (1) має розв’язок $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Всі значення задовольняють друге рівняння даної системи , тобто є її розв’язком.

Перше рівняння системи (2) має розв’язок $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$.

Жодне з отриманих значень не задовольняє друге рівняння цієї системи. Тому система (2) не має розв’язку. Отже, розв’язок початкового рівняння співпадає з розв’язком системи (1).

Відповідь. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Приклад 2.

Розв’яжіть рівняння $3(\cos 2x)^4 - 2(\sin x)^5 = 5$.

Розв’язання.

Якщо x_0 – розв’язок рівняння, то $|\cos 2x_0| = 1$, в протилежному випадку була справедлива нерівність $\sin x_0 > 1$, що є неможливим. Але якщо $|\cos 2x_0| = 1$, то з початкового рівняння слідує, що $\sin x_0 = -1$.

Тому будь-який розв’язок початкового рівняння є розв’язком системи рівнянь $\begin{cases} \sin x = -1 \\ |\cos 2x| = 1 \end{cases}$.

Легко побачити, що будь-який розв’язок системи є розв’язком початкового рівняння. Звідси і слідує, що початкове рівняння рівносильне системі рівнянь.

Перше рівняння системи має розв’язок $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$.

Всі значення задовольняють друге рівняння системи, тобто отриманий розв’язок є коренем початкового рівняння.

Відповідь. $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$.

Приклад 3.

Розв’яжіть рівняння $(\cos 3x)^3 + (\cos 7x)^{11} = -2$.

Розв’язання.

Якщо x_0 – розв’язок рівняння, то $\cos 3x_0 = -1$, (в протилежному випадку була справедлива нерівність $\cos 7x_0 < -1$, що є неможливим). Але якщо $\cos 3x_0 = -1$, то з початкового рівняння слідує, що $\cos 7x_0 = -1$. Тому будь-який розвязок початкового рівняння є розв’язком системи рівнянь

$$\begin{cases}\cos 3x = -1\\ \cos 7x = -1\end{cases}. \ (*)$$

Легко побачити, що будь-який розв’язок системи є розв’язком початкового рівняння. Звідси і слідує, що початкове рівняння рівносильне системі рівнянь.

Перше рівняння системи має розв’язок $x_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$.

Знайдемо, ті значення, які будуть задовольнять друге рівняння системи. Тобто такі значення x_k, для яких знайдеться таке число $m \in Z$ таке, що виконується рівність $\frac{7\pi}{3} + \frac{14\pi k}{3} = \pi + 2\pi m$.

Перепишемо рівність $k = \frac{3m-2}{7}$.

Оскільки k і m цілі числа, то остання рівність виконується тільки тоді, коли $m = 7t + 3$, $t \in Z$, але тоді $k = 3t + 1$, $t \in Z$.

Отже розв’язком системи (*) будуть значення x_k, де $k = 3t + 1$, $t \in Z$, тобто $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi t$, $t \in Z$.

Відповідь. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi t$, $t \in Z$.

2.1.7. Використання властивостей числових нерівностей

Використовуючи ту або іншу числову нерівність до одної з частин рівняння або нерівності, її можна замінити рівносильній їй системі рівнянь. Прикладом такої нерівності стає нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де a і b – додатні числа, причому рівність можлива тільки тоді, коли $a = b$.

Досить часто корисно використовувати наслідки з нерівності, наприклад, $a + \frac{1}{a} \geq 2$, при $a > 0$. Причому $a + \frac{1}{a} = 2$ тоді і тільки тоді, коли

$a = 1$. Або, наприклад, $a + \frac{1}{a} \leq -2$, при $a < 0$. Причому $a + \frac{1}{a} = -2$ тоді і тільки тоді, коли $a = -1$

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}} = 4 - (\log_3 x^2 + x^4 + 1)^4$

Розв'язання.

ОДЗ даного рівняння всі дійсні числа. Перепишемо ліву частину рівняння у вигляді $2\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)$.

Помітимо, що вона не менша чотирьох, як сума двох взаємно обернених величин $2\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right) \geq 4$.

Рівність виконується тільки при $x = 0$. Права частина початкового рівняння при $x = 0$ також дорівнює чотирьом, а при $x \neq 0$, виконується нерівність $4 - (\log_3 x^2 + x^4 + 1)^4 \leq 4$.

Звідси слідує, що $x = 0$ єдиний розв'язок рівняння.

Відповідь. $x = 0$.

2.2. Застосування похідної.

2.2.1. Використання монотонності

У багатьох задачах дослідження функції елементарними прийомами на монотонність, обмеженість, наявність максимумів і мінімумів є досить трудомістким, а інколи і зовсім не можливим. Та це дослідження суттєво спрощується при використанні похідної.

Використовуючи монотонність функції можна спростити розв'язання рівняння або нерівності, тому досить необхідними є дані твердження:

1. Якщо функція *f(x)* має додатну похідну на проміжку *F((a,b),(a,∞), (-∞,a),(-∞,+∞)),* то ця функція зростає на цьому проміжку.

2. Якщо функція *f(x)* неперервна на проміжку *F([a,b], [a,b), (a,b], [a,+∞), (-∞,a))* та має від'ємну похідну на цьому проміжку, то ця функція спадає на проміжку *F.*

3. Якщо похідна функції *f(x)* на інтервалі *(a, b)* має похідну яка тотожно дорівнює нулю, то ця функція *f(x)* є постійною на цьому інтервалі [30].

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$.

Розв'язання.

1. Розглянемо функцію $y = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$.

2. $D(y) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

3. $y' = 5x^4 + 3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{1-3x}}$.

4. Отримана похідна вище приймає тільки додатні значення на всій області визначення, отже функція $y = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$ зростає. Звідси слідує, що вона приймає своє значення тільки в одній точці.

Це означає, що дане рівняння має не більше одного кореня.

Легко отримати підбором, що $x = -1$.

Відповідь. -1.

Приклад 2.

Розв'яжіть нерівність $20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x > 0$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $y = 20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x$.

Оскільки на проміжку $D(y) = (-\infty; +\infty)$ існує похідна $y' = 140x^6 + 140x^4 + 210 + 70\cos 2x$, яка є додатною на цьому проміжку, отже функція y зростає на проміжку *D(y)* і тому приймає кожне своє значення тільки в одній точці.

Звідси слідує, що $y = 0$ може мати не більше одного кореня. Легко побачити, що коренем рівняння $x = 0$.

Оскільки функція y є постійною на всій прямій і неперервна на ній, то для $x < 0$ маємо $y < 0$, а при $x > 0$ маємо $y > 0$. Отже розв'язком нашої початкової нерівності будуть всі значення x з проміжку $(0; +\infty)$.

Відповідь. $0 < x < +\infty$.

2.2.2. Використання найбільшого і найменшого значення функції

Під час розв'язування нестандартних рівнянь та нерівносте використовуючи найбільше та найменше значення функції необхідним будуть наступні твердження [30].

1 Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку $[a;b]$ функції, яка має інтервалі *(a;b)* скінченне число критичних точок, достатньо обчислити значення функцій в усіх критичних точках, які належать інтервалу *(a;b),* а також на кінцях відрізка і із отриманих чисел обрати найбільше і найменше.

2. Найбільше (найменше) значення яке приймає функції на інтервалі *I:* $(a;b)$ $((-\infty;+\infty), (a;+\infty), (-\infty;b))$ може досягатися в тих точках інтервалу *I,* в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує (кожна така точка називається критичною точкою)

3. Якщо критична точка x_0 функції неперервна, а її похідна, проходячи через цю точку змінює знак з мінуса на плюс, то точка x_0 – точка мінімуму, а якщо її похідна змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 – точка максимуму.

4. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку I, де I або $[a;b]$, або $[a;b)$, або $[a;+\infty)$, та має на I похідну та ($f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на I, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на I.

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$.

Розв'язання.

ОДЗ рівняння являє собою проміжок $2 \leq x \leq 4$. Розглянемо неперервну функцію $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$ на відрізку $[2;4]$. Функція $f(x)$ має на відрізку $(2;4)$ похідну $f'(x) = \frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}(4-x)^{-\frac{3}{4}}$, яка дорівнює нулю тільки при $x = 3$. Так як функціє $f(x)$ є неперервною на відрізку $[2;4]$, то її найбільше та найменше значення знаходяться серед чисел $f(3)$, $f(2)$ та $f(4)$.

Так як $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2} < 2$, то найбільше значення функція набуває при $f(3) = 2$. Звідси слідує, що рівняння має єдиний корінь $x = 3$.

Відповідь. 3.

Приклад 2.

Розв'яжіть нерівність $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.

Розв'язання.

ОДЗ даної нерівності є проміжок $I = (-1;+\infty)$. Розглянемо функцію $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

Ця функція на проміжку I має похідну $f'(x) = \frac{x^2}{1+x}$, яка дорівнює нулю в точці $x_0 = 0$. Розглянемо функцію $f(x)$ спочатку на проміжку $I_1 = (-1;0]$. Так як функціє $f(x)$ є неперервною на проміжку I_1 і для будь-якої точки $x \epsilon (-1;0]$ має $f'(x) > 0$, то $f(x)$ зростає на проміжку I_1. Оскільки $f(0) = 0$, то $f(x) < 0$, для будь-якого значення x яке належить проміжку I_1, тобто ні один x з проміжку I_1 не є розв'язком нерівності.

На проміжку $I_2 = [0;+\infty)$ функція $f(x)$ є неперервною на проміжку I_2 і для будь-якої точки $x \epsilon I_2$ має $f'(x) > 0$, тому $f(x)$ зростає на проміжку I_2. Оскільки $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$, для будь-якого значення x яке належить проміжку I_2, тобто ні одне значення x з проміжку I_2 не є розв'язком нерівності.

Відповідь. $0 < x < +\infty$.

2.2.3. Застосування теореми Лагранжа.

Перед безпосереднім розв'язування рівнянь та нерівностей розглянемо теорему Лагранжа.

Теорема(Лагранжа).

Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$ та має похідну на інтервалі $(a;b)$, то знайдеться така точка c з інтервалу $(a;b)$, така що виконується наступне $f(b) - f(\text{a}) = f(x)(b - \text{a})$.

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння $3 \cdot 2^{x+2} - 7x = 17$.

Розв'язання.

Підбором знаходимо, що $x = 1$ та $x = -2$. Доведемо, що інших коренів рівняння не має. Нехай рівняння має три корені $x_1 < x_2 < x_3$.

Розглянемо функцію $f(x) = 3 \cdot 2^{x+2} - 7x - 17$, функція $f(x)$ є неперервною на всій числовій прямій. Знайдемо її похідну $f'(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \ln 2 - 7$. Похідна функції $f'(x)$ також є неперервною на всій числовій прямій. Використовуючи теорему Лагранжа отримуємо:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c_1)(x_2 - x_1) = 0, x_1 < c_1 < x_2,$

$f(x_3) - f(x_2) = f'(c_2)(x_3 - x_2) = 0, x_2 < c_2 < x_3,$

Звідси слідує, що існує принаймні дві точки c_1 та c_2, в яких похідна функції $f'(x)$ дорівнює нулю. Проте функція $f'(x) = 3 \cdot 2^{x+2} \ln 2 - 7$ має тільки один корінь.

Цим і доводиться, що початкове рівняння має тільки два корені: $x = 1$ та $x = -2$.

Відповідь. -2, 1.

Приклад 2.

Розв'яжіть нерівність $20x^7 + 28x^5 + 210x - 35 \sin 2x > 0$.

Розв’язання.

Розглянемо функцію $f(x) = 20x^7 + 28x^5 + 210x - 35 \sin 2x$.

$D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо похідну $f'(x) = 140x^6 + 140x^4 + 210 - 70 \cos 2x$.

$D(f) = (-\infty; +\infty)$. $f'(x) > 0$ на області визначення, це означає, що функція $f(x)$ зростає на своїй області визначення і приймає своє значення рівно в одній точці. Тоді рівняння $f(x) = 0$ може мати не більше одного кореня і таким коренем є $x = 0$. Визначимо знаки функції: так як функція визначена та неперервна на всій числовій прямій, то для $x < 0$ маємо, що $f(x) < 0$, а для $x > 0$ маємо, що $f(x) > 0$.

Отже, розв’язком початкової нерівності будуть всі x із проміжку $(0; +\infty)$.

Відповідь. $(0; +\infty)$.

2.3. Штучні прийоми розв'я зування нерівностей курсу алгебри і початків аналізу старшої школи

2.3.1. Введення допоміжного невідомого

У деяких випадках замінюючи вираз *f(x),* яких входить до многочлена $P_n(x)$, через y в результаті можна отримати многочлен відносно y, який розкласти на множники виявляється набагато простіше. Потім після заміни y на *f(x)* отримуємо розклад на множники многочлена $P_n(x)$.

Приклад 1.

Розв'язати рівняння: $x\sqrt{3-x} - 5x = 1 + \sqrt{3-x}$.

Розв'язання:

Позначимо $y = \sqrt{3-x}$, тоді очевидно, що $y \geq 0$, $x = 3 - y^2$.

З урахуванням заміни вихідне рівняння набуде вигляду:

$(3 - y^2) \cdot y - 5 \cdot (3 - y^2) = 1 + y$, або $y^3 - 5y^2 - 2y + 16 = 0$.

Розкладемо ліву частину отриманого кубічного рівняння на множники.

Ми знаємо, що раціональний корінь многочлена лівої частини рівняння (якщо він є) є дільником його вільного члена.

Тому, підставляючи числа $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$, замість y в ліву частину рівняння знайдемо корінь $y_1 = 2$. Отже, ліва частина рівняння розкладається на множники, один з яких дорівнює $y - 2$.

Отримуємо рівносильне рівняння: $(y - 2) \cdot (y^2 - 3y - 8) = 0$.

Знайдемо два інші корені рівняння: $y_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Зробимо зворотну заміну:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3-x} = 2 \\ \sqrt{3-x} = \frac{3+\sqrt{41}}{2} \\ \sqrt{3-x} = \frac{3-\sqrt{41}}{2} \end{array}\right.$$

З першого рівняння сукупності маємо розв'язок вихідного рівняння: $x_1 = -1$, з другого: $x_2 = -\frac{19+3\sqrt{41}}{2}$, третє рівняння сукупності розв'язків не має, так як $\frac{3-\sqrt{41}}{2} < 0$.

Відповідь. $-1, -\frac{19+3\sqrt{41}}{2}$.

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння $4^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} + 3 \cdot 6^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = 4 \cdot 9^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}}$.

Розв'язання.

Розділивши дві частини рівняння на $9^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}}$, отримаємо рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} + 3\cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = 4$ (1), рівносильне попередньому рівнянню. Зробивши заміну невідомої $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = y$, перепишемо рівняння (1), у вигляді $y^2 + 3y - 4 = 0$.

Рівняння $y^2 + 3y - 4 = 0$ має два корені $y_1 = 1$ і $y_2 = -4$.

Відповідно рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} + 3\cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = 4$, а значить і рівносильне йому рівняння $4^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} + 3 \cdot 6^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = 4 \cdot 9^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}}$ рівносильні сукупності рівнянь $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = 1$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = -4$

Розв'язком першого рівняння цієї сукупності є $x_1 = 1$ і $x_2 = -1$. Друге рівняння розв'язку не має.

Відповідь: $1, -1$.

Приклад 3.

Розв'язати нерівність $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$.

Розв'язання.

Нехай $\sqrt{2-x} = t > 0$. Тоді $\frac{4}{t} - t - 2 < 0$, $\frac{t^2+2t-4}{t} > 0$.

Враховуючи $t > 0$, маємо $t^2 + 2t - 4 > 0$.

Розв'язуючи рівняння $t^2 + 2t - 4 = 0$, знайдемо корені

$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$. Тоді $t - (-1 + \sqrt{5}))\,(t - (-1 - \sqrt{5})) > 0$,

$(t + 1 - \sqrt{5})\,(t + 1 + \sqrt{5}) > 0$.

Оскільки $t > 0$, то $t + 1 + \sqrt{5} > 0$.

Звідси маємо: $t + 1 - \sqrt{5} > 0$; $t > \sqrt{5} - 1$.

Тоді $\sqrt{2 - x} > \sqrt{5} - 1$, $2 - x > (\sqrt{5} - 1)^2$, $x < 2 - (5 - 2\sqrt{5} + 1)$,

$x < 2\sqrt{5} - 4$.

Відповідь: $\left(-\infty;\ 2\sqrt{5} - 4\right)$.

2.3.1. Доповнення до повного квадрата

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$.

Розв'язання.

Виконаємо перетворення, виділивши повні квадрати

$$x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{y} + 2^2$$

$$= (x - 3)^2 + \left(\sqrt{y} - 2\right)^2$$

Після виконаних перетворень рівняння набуде вигляду

$$(x - 3)^2 + \left(\sqrt{y} - 2\right)^2 = 0.$$

Для подальшого розв'язування потрібно взяти до уваги, що $(x - 3)^2$ і $\left(\sqrt{y} - 2\right)^2$ - невід'ємні функції. Тому, отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ \sqrt{y} - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Звідси ми отримуємо, що пара чисел (3; 4) є розв'язком нашого рівняння.

Відповідь. (3, 4).

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння $x^4 - 8x^2 + y + 4\sqrt{y} + 20 = 0$.

Розв'язання.

Виконаємо перетворення, виділивши повні квадрати

$$x^4 - 8x^2 + y + -4\sqrt{y} + 20 = \ x^{2^2} - 2 \cdot 4x^2 + 4^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{y} + 2^2$$
$$= \ (x^2 - 4)^2 + \left(\sqrt{y} - 2\right)^2$$

Після виконаних перетворень рівняння набуде вигляду

$$(x^2 - 4)^2 + \left(\sqrt{y} - 2\right)^2 = 0.$$

Для подальшого розв'язування потрібно взяти до уваги, що $(x^2 - 4)^2$ і $\left(\sqrt{y} - 2\right)^2$ - невід'ємні функції. Тому, отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{y} - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Звідси ми отримуємо, що пара чисел (3; 4) є розв'язком нашого рівняння.

Відповідь. (-2, 4); (2, 4).

Приклад 3.

Розв'яжіть рівняння $\sin x^4 + \cos y^4 + 2 = 4 \sin x \cos y$.

Розв'язання.

$$\sin x^4 - 2 \sin x^2 \cos y^2 + \cos y^4 + 2 \sin x^2 \cos y^2 + \ 2 - 4 \sin x \cos y = 0$$
$$(\sin x^2 - \cos y^2)^2 + 2(\sin x \cos y - 1)^2 = 0.$$

Для подальшого розв'язування потрібно взяти до уваги, що $(\sin x^2 -$ $\cos y22$ і $\sin x \cos y - 12$ - невід'ємні функції.

Тому, отримане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sin x^2 = \cos y^2 \\ \sin x \cos y = 1 \end{cases}$

Для подальшого розв'язування виконаємо заміну $u = \sin x$ та $v = \cos y$ отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} u^2 = v^2 \\ uv = 1 \end{cases}$, звідки знаходимо, що $\begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} u_2 = -1 \\ v_2 = -1 \end{cases}$. Тобто, $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases}$ або $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos y = -1 \end{cases}$. Із першої системи отримуємо $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \ 2\pi n \\ y = 2\pi k \end{cases}$, із другої $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \ 2\pi n \\ y = \pi + 2\pi k \end{cases}$.

Відповідь. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \ 2\pi n \\ y = 2\pi k \end{cases}$, $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \ 2\pi n \\ y = \pi + 2\pi k \end{cases}$, де $n, k \ \in Z$.

2.3.3. Введення спряжених виразів.

Деякі рівняння найбільш раціонально розв'язувати використовуючи спряжені вирази, після введення якого отримуємо простіше рівняння за початкове.

Приклад 1.

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$ *(*).*

Розв'язання.

Помножимо дві частини заданого рівняння на вираз $\varphi(x)=\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}$, який рівнозначний виразу $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}$. Так як

$(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5})\cdot(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})=(2x^2+3x+5)-(2x^2-3x+5)=6x$, то рівняння *(*)* має вигляд $6x=3x\,(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})$ або $x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}-2)=0$.

Як легко бачити, $x_1=0$ є коренем цього рівняння. Залишається розв'язати рівняння $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2$. *(**)*

Додавши *(*)* та *(**)* перейдемо до рівняння $2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$.

Розв'язуючи рівняння $2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$ методом піднесення до квадрату, отримаємо $8x^2+12x+20=9x^2+12x+4$ і далі $x^2=16$, звідки $x_2=4$, $x_3=-4$.

Перевірка: По черзі підставляємо знайдені значення $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=-4$ в рівнянні $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$, упевнюємося в тому, що йому підходить тільки значення $x_2=4$. Таким чином $x=4$ є єдиним коренем рівняння.

Відповідь. 1.

2.4. Експериментальна перевірка окремих результатів дослідження

Так як формування універсальних навчальних дій при навчанні алгебри і початків аналізу забезпечує можливість учнів самостійно здійснювати діяльність навчання, ставити навчальні цілі, шукати і використовувати необхідні засоби і способи досягнення цілей, планувати, контролювати й оцінювати процес і результати навчальної діяльності. Тому основною метою нашого експериментального дослідження стало визначення рівня сформованості в учнів універсальних навчальних дій, що стосуються поняття рівняння та при необхідності його підвищення.

При проведенні дослідження було використано такі емпіричні методи:

8) Спостереження. («Анкета з виявлення рівня сформованості УНД учнів»)

9) Експеримент («Розв'язання нестандартних рівнянь, використовуючи властивості функцій», як спосіб формування, розвитку універсальних навчальних дій під час вивчення теми «Рівняння і нерівності» в курсі алгебри та початків аналізу 10 класу).

Анкета призначена для визначення рівнів сформованості УНД, якою може скористатися вчитель. В основі якої лежить безпосереднє спостереження за учнями в процесі навчання, що є не менш цінним джерелом інформації, ніж стандартні методики. Дані анкетування дозволяють побачити ті УНД, які необхідно розвивати і формувати в першу чергу, що має на увазі коригування програм і вибір пріоритетної позаурочної діяльності. Результати анкетування представлено в Додатку 1.

Другий метод дослідження - експеримент, який було проведено з учнями 10 класу у вигляді факультативу. На занятті ми розв'язували нестандартні рівняння, використовуючи властивості функції.

В ході експерименту перед безпосереднім розв'язанням рівнянь було запропоновано учням спочатку провести аналіз та класифікувати рівняння за найбільш раціональними методами їх розв'язання, а вже потім скласти план розв'язання і приступити до розв'язання. Як показує практика, не всі учні здійснювали вибір найбільш ефективного способу розв'язування рівнянь виходячи з конкретних умов.

Проводивши позаурочні заняття в такому форматі можна організувати контроль рівня успішності особистісного, регулятивного і пізнавального розвитку учнів під час вивчення теми «Рівняння і нерівності» в курсі алгебри і початків аналізу середньої школи. Результати експеримент представлено в Додатку 2.

За результатами проведеного нами дослідження в 10-А класі ЗСО №20 м. Чернігова можемо констатувати наступне: переважна більшість учнів класу розпізнає різні види рівнянь, відомі їм з курсу математики основної школи; здійснює пошук інформації, необхідної для розв'язування рівнянь; виявляє зацікавленість в отриманні нових знань. Під час проведеного нами констатуючого етапу дослідження виявилось, що 80% учнів мають середній рівень сформованості УНД. Для його підвищення ми проводили заняття, метою яких було навчання учнів розв'язування нестандартних рівнянь, використовуючи властивості функцій. Як показує практика, не всі учні здійснювали вибір найбільш ефективного способу розв'язування рівнянь виходячи з конкретних умов.

На уроках алгебри і початків аналізу ми продовжували роботу по формуванню УНД, що стосуються поняття рівняння, зокрема навчали учнів застосуванню загальних методів розв'язування рівнянь, удосконалювали здатність відокремлювати істотні властивості функцій, формували вміння самостійно вибудовувати алгоритм дій під час розв'язання рівнянь, які потребують нетрадиційного, творчого підходу.

Для успішної реалізації програми універсальних навчальних дій в старшій школі нами підібрана система нестандартних рівнянь та розроблена методика навчання учнів їх розв'язування. Окремі рівняння цієї системи були використані нами для проведення уроків та факультативних занять.

Висновки

Кваліфікаційна робота присвячена методиці навчання учнів розв'язування нестандартних рівнянь та нерівностей в курсі математики закладів середньої освіти. В процесі розв'язування нестандартних рівнянь та нерівностей ми помітили, що всі вони зводяться до розв'язування рівнянь та нерівностей вже за відомими алгоритмами. Опанування цих алгоритмів є важливим завдання для кожного учня та не менш важливим є підвищення рівня сформованості універсальних навчальних дій (УНД), які значною мірою визначають успішність в знаходженні розв'язків, яку можуть досягти учні навчаючись розв'язувати рівняння та нерівності.

Під час написання кваліфікаційної роботи було виконано такі завдання:

1) розкрити зміст поняття «нестандартне рівняння» та «нестандартна нерівність».
2) розглянути теорію формування в учнів універсальних навчальних дій та конкретизації її застосування під час навчання розв'язування нестандартних рівнянь (нерівностей) в шкільному курсі математики;
3) підібрати систему нестандартних рівнянь та нерівностей, призначену для навчання курсу алгебри і початків аналізу старшої школи;
4) охарактеризувати методичні особливості навчання розв'язування рівнянь та нерівностей запропонованої в роботі системи, використовуючи властивості функцій, застосовуючи похідну та штучні прийоми розв'язування;
5) запропонувати методику навчання учнів розв'язування нестандартних рівнянь (нерівностей) на факультативних заняттях з математики;
6) здійснити експериментальну перевірку окремих результатів дослідження.

Під час проведеного нами констатуючого етапу дослідження в 10-А класі ЗСО №20 м. Чернігова виявилось, що 80% учнів мають середній рівень сформованості УНД. Як показує практика недостатній є рівень вміння учнів самостійно вибудовувати послідовність операцій під час розв'язання рівнянь, які потребують нетрадиційного, творчого підходу. Для успішної реалізації програми універсальних навчальних дій в старшій школі нами підібрана система нестандартних рівнянь (нерівностей) та розроблена методика навчання учнів їх розв'язування.

Створена технологія навчання нестандартних рівнянь та нерівностей в курсі математики закладів середньої освіти містить у собі методи, що стимулюють формування інтелектуального потенціалу учнів, розвиток їхніх пізнавальних інтересів і творчої активності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Барановська Г. Г., Ясінський В. В. Практикум з математики: Алгебра.- К.:ФДП НТТУ „КПІ”,1997.

2. Вишенський, В. А. Збірник задач з математики [Текст] : навч. посібник для підготовчих відділень вузів. / В. А. Вишенський, М. О. Перестюк, А. М. Самойленко. — 2-е вид., доп. — К. : Либідь, 1993. — 344 с.

3. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв’язування алгебраїчних задач: Посібн. для вчителя. –К.: Рад.шк., 1991.-221с.

4. Гайшрут О.Г., Ушаков Р.П. Збірник задач з математики з прикладами розв’язань. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2002.

5. Державний стандарт базової та повної загальної середньої освіти// Математика в школі.-2012.-№3.-С.2-8.

6. Завало С.Т. Рівняння і нерівності. – К.: Рад. школа, 1973.

7. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука. Гл. ред. физико-математической литературы, 1987. – 240 с.

8. Збірник задач з матаматики для вступників у вузи/ Під ред. М. І. Сканаві.- К.;Каннон, 1997. – 445 с.

9. Істер О.С. Математика. 5 кл. : підруч. для закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер – 2-ге вид., доопрац. - Київ : Генеза, 2018. – 288 с.

10. Корнієнко Т.Л. Алгебра. 10-11 класи. Методи розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем: Розробки занять/ Т.Л. Корнієнко, В.І. Фіготіна. –Х.: Вид-во ”Ранок”, 2009.-272с.

11. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физико-мат. спец.пед.ин-тов.-М.: Просвещение, 1991.-352с.

12. Лось В.М., Тихієнко В.П. Математика: Навчаємо міркувати. Розв’язування нестандартних задач: Навч. посібник. – К.: Кондер, 2005. –312с.

13. Математика. Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи : практикум / уклад. : Н.П. Муранова, Л.А. Харченко, Г.В. Шевченко, О.С. Муранов. – 2-е вид., стер. – К. : НАУ, 2012. – 96 с.

14. Математика : навч. посіб. для факульт. занять у 8 кл. / М. І. Антоненко, В. Н. Боровик, І. В. Зайченко, Г. О. Корінь. — Ніжин : Ніжин. держ. ун-т ім. М. Гоголя, 2006. — 312 с.

15. Мерзляк А. Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебраический тренажер: Пособие для школьников и абитуриентов / Под ред.. Мерзляк А.Г., Полонский В. Б., Якир М. С. – М.: Илекса, 2007, - 320 с.

16. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: профільний рівень/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. –Х.: Гімназія,2010.- 416с.

17. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф.. рівень/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. –Х.: Гімназія,2011.— 431 с.

18. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 304 с

19. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М.С.Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с.

20. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 352 с.

21. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // https: mon.gov.ua / … programi / navchalni-programi- dlya – 10-11…2018

22. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням

математики) // https: mon.gov.ua / … programi / navchalni-programi- dlya – 10-11…2018

23. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. Затверджено Міністерством освіти і науки України, 2017 // www.mon.gov.ua.

24. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальоосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень / Є. П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 426с. : іл.

25. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень/ Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. –Х.: Гімназія, 2011.-448с.

26. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 272 с.

27. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал, серед, освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019. — 240 с

28. Нелін Є. Формування універсальних навчальних дій у курсі алгебри і початків аналізу в умовах компетентнісного підходу до навчання / Є. Нелін, З. Кравченко // Математика в рідній школі.-2016. -№6.- С. 7-13.

29. Новий тлумачний словник української мови в 3-х т. : 200000 слів. Т.3. П-Я / уклад. В. Яременко, О. Сліпушко. — 2-е вид., випр. — Київ : Вид-во "Аконіт", 2007. — 864 с.

30. Олехник С.Н., Пасиченко М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: Справочник.-М.: Изд-во МГУ, 1991.-144 с.

31. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібник. – К.: Вид-во А.С.К., 2004. – 344 с.

32. Сверчевська, І. А. (2015) Методи розв'язування рівнянь в історичних задачах. Математика в рідній школі. (11). pp. 43-47.

33. Тарасенкова Н. А. Математика: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, З. О. Сердюк. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. – 288 с.

34. Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Ірраціональні рівняння і нерівності: Навчальний посібник.-Тернопіль: — «Тайп», 2018.-72с.

35. Шунда Н.М. Функції та їх графіки. – К.: Рад. школа, 1983. – 190 с.

36. Молодша Ю. Ю., Єгорова О. Л., Соколенко Л. О. З досвіду навчання учнів розв’язування нестандартних рівнянь // Крок у науку: дослідження в галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених (27 листопада 2019 р., м. Чернігів). Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2019. 112с. – С. 87-88.

ДОДАТКИ

Додаток 1.

У складі основних видів УНД, відповідних ключовим цілям загальної освіти, можна виділити чотири блоки: особистісний, регулятивний, пізнавальний і комунікативний.

Для спостереження було обрано 20 учнів.

Дані таблиці було отримано із спостереження за учнями в школі під час проходження педагогічної практики. Проводилось спостереження за тим, як учні поводили себе по відношенню до вчителів та однокласників, їхнє бажання вчитися, бажання проявити себе, вміння слухати та сприймати нову інформацію; як учні спілкуються з учнями старшого і молодшого віку. Під час підготовки до свята дня вчителя було оцінено їх вміння працювати в групі, досліджено рівень сформованості моральних норм та етичних почуттів.

+ Високий рівень (3 бали)

+ \ - середній рівень (2 бали)

- низький рівень (1 бал)

<u>Обробка результатів</u> <u>(по кожній сфері):</u>

Низький рівень: менше 16 балів

Середній рівень: 16 - 23 бали

Високий рівень: 24 - 27 балів

Отримали такі результати. Серед 20 учнів за якими проводилось спостереження низький рівень розвитку регулятивних УНД має три учня , середній – шістнадцять, тільки один учень має високий рівень. Низький рівень сформованості пізнавальних УНД мають три учня, середній – п'ятнадцять учнів, високий – два учні . Рівень розвитку комунікативних УНД не містить учнів які мають низький рівень сформованості, п'ятнадцять учнів мають середній рівень, п’ять учнів з високим рівнем. Низький рівень сформованості особистісних УНД мають два учні, шістнадцять учнів мають середній рівень, два – високий.

За результатами проведеного нами дослідження в 10-А класі ЗСО №20 м. Чернігова виявилось, що 80% учнів мають середній рівень сформованості УНД.

Додаток 2.

В ході експерименту перед учнями було поставлено таке завдання .

Серед заданих рівнянь укажіть:

1) рівняння, які містять скінченну ОДЗ;

2) рівняння, які можна розв’язати, використовуючи оцінку лівої та правої частини рівнянь;

3) рівняння, які розв’язуються, спираючись на властивість монотонності функції.

Для кожного з рівнянь складіть алгоритм розв’язування.

1) $x^4 + |x-1| = 2x^2 - 1$

2) $\sqrt{x^2-1} + x = 1 + \sqrt{2-2x^2}$

3) $2x + \sqrt{x^2-9} = x^2 + \sqrt{18-2x^2} - 3$

4) $x^3 + x = \frac{2}{x}$.

5) $|x^2 - 7x + 12| + |x^2 - 9| + |6 - 2x| = 0$

6) $\sqrt{x-2} + x^2 = \sqrt{4-2x} + x + 2$

7) $\sqrt{x-2} + |x^2 - 2x| + (x^2-4)^2 = 0$.

8) $x + \sqrt{x} + x^9 = 3$.

9) $1 + |x^5 + 3x| = \sqrt{1-x^2}$

Виконуючи завдання учні виділяють: до рівнянь типу 1) відноситься рівняння під номерами 2, 3, 6, 7; до рівнянь типу 2) відноситься рівняння під номерами 1, 5, 8, 10; до рівнянь типу 3) відноситься рівняння під номерами 4, 9.

Для кожного пункту учні складають алгоритм розв’язування.

1) $x^4 + |x-1| = 2x^2 - 1$

Розв’язання.

Для розв’язання достатньо перенести всі члени в один бік, записати рівняння у вигляді $(x^2-1)^2 + |x-1| = 0$ і взяти до уваги, що $(x^2-1)^2$ і $|x-1|$ - невід’ємні функції.

Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}(x^2-1)^2 = 0 \\ |x-1| = 0\end{cases}$.

З другого рівняння одержуємо *x = 1*, що задовольняє всій системі, тобто задане рівняння має єдиний корінь *x = 1*.

Відповідь. 1

2) $\sqrt{x^2-1} + x = 1 + \sqrt{2-2x^2}$.

Розв'язання.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 2-2x^2 \geq 0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 \leq 1\end{cases} \leftrightarrow x^2 = 1 \leftrightarrow x = \pm 1$.

Область допустимих значень для змінної *x* складається тільки з чисел ± 1. Легко перевірити, що *x=1* – корінь рівняння.

Перевірка

x= 1 ($\sqrt{0} + 1 = 1 + \sqrt{0}, 1 = 1$.

x= - 1 ($\sqrt{0} - 1 = 1 + \sqrt{0},\ -1 \neq 1$ – не є коренем рівняння

Отже, *x= 1* – корінь рівняння.

3) $2x + \sqrt{x^2-9} = x^2 + \sqrt{18-2x^2} - 3$.

Розв'язання.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ 18-2x^2 \geq 0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \\ x^2 \leq 9\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \\ -3 \leq x \leq 3\end{cases} \leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$.

Область допустимих значень для змінної *x* складається тільки з чисел ± 3. Легко перевірити, що *x= 3* – корінь рівняння, *x= 3* – сторонній корінь.

Відповідь. 3

4) $x^3 + x = \frac{2}{x}$.

Розв'язання

Спочатку слід урахувати його ОДЗ: $x \neq 0$ і згадати, що функція $y = \frac{2}{x}$ на всій області визначення не є ні спадною, ні зростаючою , але вона спадає на кожному з проміжків (-∞; 0) і (0; +∞). Тому розглянемо кожен проміжок окремо.

1) При $x > 0$ задане рівняння має корінь *x = 1* ($1^3 + 1 = \frac{2}{1}$, *2 = 2).*

Функція $f(x) = x^3 + x$ зростає при $x > 0$, а функція $g(x) = \frac{2}{x}$ спадє на проміжку $x > 0$. Отже, задане рівняння $f(x) = g(x)$ при $x > 0$ має єдиний корінь $x = 1$ (використали теорему : Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку).

Відповідь. 1

5) $|x^2 - 7x + 12| + |x^2 - 9| + |6 - 2x| = 0.$

Розв'язання.

Оскільки $f_1(x) = |x^2 - 7x + 12| \geq 0,$ $f_2(x) = |x^2 - 9| \geq 0,$ $f_3(x) = |6 - 2x| \geq 0.$

Отже, задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} |x^2 - 7x + 12| = 0, \\ |x^2 - 9| = 0, \\ |6 - 2x| = 0. \end{cases} \qquad 6 - 2x = 0; \quad x = 3.$$

Отриманий корінь задовольняє всю систему.

Відповідь. $x = 3$.

6) $\sqrt{x-2} + x^2 = \sqrt{4-2x} + x + 2.$

Розв'язання.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4 - 2x \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x \leq 4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \leftrightarrow x = 2.$$

Область допустимих значень для змінної x складається тільки з числа 2. Легко перевірити, що $x = 2$ – корінь рівняння.

Відповідь. 2.

7) $\sqrt{x-2} + |x^2 - 2x| + (x^2 - 4)^2 = 0$.

Розв'язання.

$f_1(x) = \sqrt{x-2} \geq 0$, $f_2(x) = |x^2 - 2x| \geq 0$, $f_3(x) = (x^2 - 4)^2 \geq 0$.

Отже, задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0, \\ |x^2 - 2x| = 0, \\ (x^2-4)^2 = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння одержуємо $x = 2$, що задовольняє всій системі.

Відповідь. 2

8) $x + \sqrt{x} + x^9 = 3$.

Розв'язання.

Функція $f(x) = x + \sqrt{x} + x^9$ зростаюча для $x \geq 0$, як сума зростаючих функцій, тому рівняння має один корінь: $x = 1$.

Відповідь: 1.

9) $1 + |x^5 + 3x| = \sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання.

Знаходимо ОДЗ рівняння.

ОДЗ: $1 - x^2 \geq 0, x^2 \leq 0, \quad -1 \leq x \leq 1$.

Область значення функції: $f(x) = 1 + |x^5 + 3x|$, $f(x) \geq 0$.

Область значень $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq g(x) \leq 1$. Маємо; $\begin{cases} 1 + |x^5 + 3x| = 1 \\ \sqrt{1-x^2} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x(x^4+3) = 0 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases}$; $x = 0$.

Учням було складно здійснити вибір найбільш ефективного способу розв'язування рівнянь виходячи з конкретних умов, найшвидше виокремили рівняння, які містять скінченне ОДЗ.

Виділивши спосіб розв'язання рівнянь учні удосконалюють пізнавальні УНД. Для реалізації планів розв'язування доцільно запропонувати уточнення орієнтованої основи діяльності, під час розв'язування рівнянь, в яких використовуються властивості спадної чи зростаючої функції: 1) підбираємо один або декілька коренів рівняння. 2)доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння). Для формування навчальних дій з передбаченням результатів своєї діяльності та її планування необхідно наголосити на тому, що під час розв'язування рівнянь, які містіть скінченну ОДЗ, ми не можемо гарантувати, що всі ці значення будуть коренями рівняння, тому перевірка підстановкою отриманих значень в початкове рівняння є невід'ємною складовою розв'язування.

Складності не викликало розв'язання рівнянь під номерами 2,3, 4, 5, 7 .

Також учні досить добре змогли обґрунтувати виконані дії та отримані результати.

Під час розв'язування в учнів виникли питання стосовно розв'язування рівнянь під номерами 8, 9, 10, так як ці рівняння мають і під модульний, і підкореневий вирази, і невідому в степені і це збивало їх з пантелику.

Як показує практика рівень сформованості УНД в учнів не найвищому рівні і потребує розвитку. Тому в закладах середньої освіти просто необхідно виділяти більше уваги для занять, в результаті проведення яких будуть розвиватись УНД в учнів.

Результатом формування пізнавальних УНД на даному занятті буде вміння учня:

- Виділяти тип рівнянь і способи їх вирішення.
- Здійснювати пошук необхідної інформації, яка потрібна для вирішення завдань.
- Обґрунтовувати етапи розв'язання навчального завдання.
- Проводити аналіз і перетворення інформації.
- Проводити основні розумові операції (аналіз, синтез, класифікації, порівняння, аналогія і т.д.)
- Здійснювати вибір найбільш ефективного способу розв'язання рівнянь виходячи з конкретних умов.

Додаток 3.

Молодша Ю.Ю.,

Єгорова О.Л.,

Соколенко Л.О.

З ДОСВІДУ НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ РІВНЯНЬ

Змістова лінія «Рівняння та нерівності» є однією з провідних в шкільному курсі математики. Поповнення запасу видів рівнянь і методів їх розв'язування відбувається з 5-го класу основної школи до 11-го класу старшої профільної школи.

Згідно з чинними програмами з математики для 10-11 класів учні вчаться розв'язувати рівняння за допомогою: рівносильних перетворень; рівнянь наслідків; застосовуючи спільні методи (введення нової змінної, розкладання на множники, перехід від рівності функцій до рівності аргументів, графічний); застосовуючи способи, ефективні під час розв'язування окремих видів та типів рівнянь (наприклад, розв'язування рівнянь з модулем за означенням, за геометричним змістом модуля, з використанням спеціальних співвідношень); застосовуючи властивості функцій (скінченна ОДЗ, оцінка значень лівої та правої частини рівняння, використання зростання та спадання функцій).

Участь випускників ЗСО в олімпіадах, складання ЗНО з математики потребує ширшої обізнаності учнів у питаннях, пов'язаних з рівняннями та методами і способами їх розв'язування. Мова йде про рівняння, які відносять до нестандартних.

В навчально-методичній літературі до *нестандартних рівнянь* відносять рівняння з двома, трьома змінними, які після більш-менш оригінальних міркувань приводять до цілком визначених розв'язків [11, с.310]. Наприклад, рівняння $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$, під час розв'язування якого використовується виділення повних квадратів.

Приходячи в старшу школу учень має певний рівень сформованості універсальних навчальних дій (УНД), що стосуються поняття рівняння [28, с. 10]. За результатами проведенного нами дослідження в 10-А класі ЗСО №20 м. Чернігова можемо констатувати наступне: переважна більшість учнів класу розпізнає різні види рівнянь, відомі їм з курсу математики основної школи; здійснює пошук інформації, необхідної для розв'язування рівнянь; виявляє зацікавленість в отриманні нових знань. Під час проведеного нами констатуючого етапу дослідження виявилось, що 80% учнів мають середній рівень сформованості УНД. Для його підвищення ми проводили заняття, метою яких було навчання учнів розв'язування нестандартних рівнянь, використовуючи властивості функцій. Як показує практика, не всі учні здійснювали вибір найбільш ефективного способу розв'язування рівнянь виходячи з конкретних умов.

На уроках алгебри і початків аналізу ми продовжували роботу по формуванню УНД, що стосуються поняття рівняння, зокрема навчали учнів застосуванню загальних методів розв'язування рівнянь, удосконалювали здатність відокремлювати істотні властивості функцій, формували вміння самостійно вибудовувати алгоритм дій під час розв'язання рівнянь, які потребують нетрадиційного, творчого підходу.

Для успішної реалізації програми універсальних навчальних дій в старшій школі нами підібрана система нестандартних рівнянь та розроблена методика навчання учнів їх розв'язування. Окремі рівняння цієї системи були використані нами для проведення уроків та факультативних занять.