Національний університет “Чернігівський колегіум” імені Т.Г. Шевченка

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики та економіки

Кваліфікаційна робота

Освітнього ступеня «магістр»

на тему

Формування дослідницької компетентності учнів під час навчання розв’язування задач з параметрами

Виконала:

студентка 2 курсу, групи 61

спеціальності

014 Середня освіта (Математика)

Тонкаль Н. Ю.

Науковий керівник:

доцент, к. п. н. Філон Л. Г.

Чернігів − 2019

Роботу подано до розгляду «____» _________________20___року.

Студент (ка) ________________ ______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник ________________ ______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент ________________ ______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики та економіки

протокол №_____від «____» __________________ 20___ року.

Студент (ка) допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри _____________ ______________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Зміст

Вступ

Сучасне суспільство потребує спеціалістів високого рівня, всебічно розвинених, з високим інтелектом, творчими здібностями. Основа таких якостей закладається в закладах загальної середньої освіти. Підготовка молоді до творчої праці неможлива без впровадження в навчальний процес сучасної школи навчально-дослідницької праці як важливого засобу формування в учнів стійкого інтересу й готовності до творчої діяльності. Сформовані на ранніх етапах навчання пізнавальний інтерес, творчі здібності, дослідницькі вміння є міцним фундаментом формування майбутніх кваліфікованих фахівців.

Метою шкіл є всебічний розвиток індивідуальності дитини на основі виявлення її нахилів і здібностей, формування інтересів і потреб, формування вміння й бажання вчитися, уміння практичного використання своїх знань. Орієнтація освіти на особистісний розвиток, варіативність школи вимагає переусвідомлення всіх чинників, в тому числі змісту, методів, форм і засобів навчання, від яких залежить якість навчально-виховного процесу. Реалізацію цієї мети ми бачимо у збагаченні шкільного курсу математики таким навчальним матеріалом, який міг би забезпечити учням можливість активно залучатися до дослідницької діяльності, у процесі якої в нього відбувалося б формування дослідницьких умінь. На наш погляд, таким матеріалом можуть стати системи задач із параметрами.

Нині перед школою постає важливе завдання – сучасний випускник, в першу чергу, має володіти дослідницькою компетентністю, адже саме вона є основою для продовження навчання протягом усього життя, успішної професійної діяльності у будь-якій сфері, побудови власної траєкторії самореалізації, розвитку та суспільного визнання. Вирішення цього завдання зумовлює необхідність пошуку нових підходів, методів, прийомів навчання, а також розвитку методик викладання окремих предметів, поширення передового досвіду, розробки практичних рекомендацій застосування новітніх технологій при вивченні окремих предметів Саме тому формування дослідницької компетентності школярів під час навчання математики є дуже важливою в наш час.

Основу дослідницької компетентності складають уміння виявляти проблему, формулювати гіпотезу, здійснювати добір й аналіз необхідних даних для дослідження, підбирати відповідні методи проведення дослідження та обробки даних, фіксувати проміжні та остаточні результати дослідження, проводити обговорення та інтерпретацію результатів дослідження, використовувати їх на практиці.

Реалізація компетентнісного підходу до навчання математики спирається на наукові розвідки, присвячені загальним методичним аспектам упровадження цього підходу в освіті як засобу організації особистісно орієнтованого навчання (праці Н. М. Бібік [8], С. А. Раков [43], О. В. Овчарук [37], М. С. Головань [15], О. І. Пометун [39], Дж. Равена [41], А. В. Хуторского [54] та ін.), та на праці, присвячені питанням реалізації компетентнісного підходу в математичній освіті (С. А. Раков [42], І. А. Акуленко [1], Н. В. Рашевська [45], В. В. Ачкана [4], М. С. Головань [13], Г. В. Бібік [7], Г. В. Гоменюк [16], Р. М. Войцех, Н. Г. Ходирєва та О. В. Шавальова [55]).

У цих роботах роботах розглянуті питання, пов’язані із визначенням основних математичних компетентностей та напрямів їх набуття, формуванням математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу з використанням інформаційних технологій; підготовкою майбутніх учителів до формування математичних компетентностей учнів. Проте питання реалізації компетентнісного підходу при вивченні окремих розділів чи змістових ліній шкільного курсу математики досі є мало дослідженим.

Завдання, у яких є параметри, традиційно вважаються одними із найскладніших для розв’язування в курсі математики як у закладах загальної середньої освіти, так і у закладах вищої освіти. Вміння розв’язувати такі вправи цілком справедливо вважаються показником рівня математичної компетентності учнів, студентів, оскільки демонструють ступінь засвоєння як теорії з математики, так і практичного її застосовування у нестандартних ситуаціях. Однак розв’язування таких задач не є окремою складовою шкільного курсу математики, і розглядають їх тільки на факультативних заняттях чи гуртках. Можливо, тому вчителі рідко приділяють належну увагу вмінню розв’язувати такі завдання.

Залучення до навчального процесу задач із параметрами дозволяє природно й педагогічно доцільно імітувати повний процес прикладного математичного дослідження або окремих його етапів, що сприяє розвитку в учнів глибокого стійкого інтересу до дослідження. Зазначимо, що в процесі розв’язування задач із параметрами учні знайомляться з великою кількістю евристичних прийомів.

Протягом тривалого часу задачі з параметрами використовувалися на вступних іспитах, зокрема від початку проведення вступних випробувань з математики у форматі зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО). Кожного року серед завдань є рівняння, нерівності або система рівнянь (нерівностей). Результати ЗНО свідчать про те, що великій кількості студентів завдання такого типу є недосяжними. І лише малий відсоток абітурієнтів розв’язує завдання з параметрами. Тому таким завданням необхідно приділяти належну увагу у шкільному курсі математики.

Питання щодо задач з параметрами та навчання учнів методів їх розв’язування розглянуто у праці А. Ю Карлащук [25], Г. В. Апостолова [3], В. В. Ясінський [58], А. В. Прус, В. О. Швець [40], Л. Г. Філон [52], Г. О. Грищенко [20], П. І. Горнштейн, В. Б. Полонський [17], В. В. Амелькин , В.Л. Рабцевич [2], Г. А. Ястребинецький [59], В. Л. Натяганов, Л. М. Лужина [36], В. К. Репета [46], С. А. Яценко, О. Є. Зернов [60,61], О.В. Пліско [38] та ін. У зазначених посібниках розглянуто широкий клас задач з параметрами та різні методи їх розв’язування.

Роль розв’язування задач із параметрами та їх місце в змісті шкільної математичної освіти підлягає аналізу з урахуванням реалізації диференційованого та особистісно-орієнтованого, компетентнісного підходів у навчанні. Таким чином, проблема формування й розвитку дослідницької компетентності учнів у процесі розв’язування математичних задач з параметрами є актуальною з точки зору розвитку творчої особистості школярів в умовах впровадження нової парадигми освіти.

Такий стан справ обумовив вибір теми кваліфікаційної роботи.

Результати дослідження були апробовані на: Регіональній науково-практичний конференції студентів, аспірантів і молодих учених (28 листопада 2018 р., м. Чернігів); Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів і молодих учених (27 листопада 2019 р., м. Чернігів). Опублікували тези доповідей [50], [51].

Об’єкт дослідження – процес навчання алгебри і початків аналізу учнів профільної середньої школи.

Предмет дослідження – система задач із параметрами як засіб розвитку дослідницької компетентності учнів і методика навчання їх розв’язування.

Мета дослідження – розробити систему задач із параметрами і методичні рекомендації її використання в процесі навчання математики з метою реалізації етапів формування дослідницької компетентності учнів.

Відповідно до мети дослідження були поставлені такі **завдання**:

1) проаналізувати психолого-педагогічну й методичну літературу з проблеми дослідження.

2) з’ясувати особливості і сутність дослідницької компетентності. Встановити роль і місце дослідницької діяльності в процесі навчання математики, а також виявити структуру дослідницьких умінь;

3) виокремити етапи формування дослідницької компетентності під час навчання учнів розв’язуванню задач з параметрами;

4) розробити систему задач із параметрами, що сприяють формуванню дослідницької компетентності;

5) розробити методичні рекомендації навчання розв’язування систем задач із параметрами для формування дослідницької компетентності учнів;

6) експериментально перевірити ефективність розробленої методики.

Гіпотеза дослідження – якщо проводити системну роботу по формуванню дослідницької компетентності учнів, то це буде сприяти інтелектуальному розвитку учнів, підвищенню їх інтересу до математики як навчального предмета, розвитку дослідницьких умінь і загального рівня математичної підготовки.

Розділ1. Теоретичні основи дослідження

1.1. Сутність компетентнісного підходу в навчанні математики

Компетентнісний підхід в наш час розглядається як один з провідних напрямів удосконалення системи освіти.

К. Юр'єва розглядає компетентність як здатність особистості кваліфіковано виконувати діяльність чи розв'язувати завдання в різних сферах життя – професійні, соціальні, побутові тощо [57].

І. Радигіна розглядає компетентність як психолого-соціальну якість, котра означає силу й упевненість, джерелом яких є відчуття власної успішності та корисності. Компетентність сприяє усвідомленню особистісно власної здатності ефективно взаємодіяти з оточенням [44].

Велика кількість науковців стверджує, що необхідно розрізняти поняття «компетенція» та «компетентність». Так, М. Головань розглядає конпетенцію як певну норму, досягнення якої може свідчити про можливість правильного розв'язання якого-небудь завдання, а компетентність – як оцінку досягнення (або недосягнення) цієї норми [15].

У Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти [21] зазначено, що компетентність – це набута у процесі навчання інтегрована здатність учня, що складається із знань, умінь, досвіду, цінностей і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці.

Система компетентностей середньої освіти України має ієрархічну структуру, рівні якої складають:

– ключові компетентності – відносяться до загального міжпредметного змісту освіти і являють собою здатність людини здійснювати складні полі функціональні та поліпредметні види діяльності, ефективно розв'язуючи актуальні індивідуальні та соціальні проблеми;

– загально-галузеві компетентності – компетентності, які формуються учнем впродовж засвоєння змісту тієї чи іншої освітньої галузі у всіх класах середньої школи і які відбиваються у розумінні "способу існування" відповідної галузі, тобто того місця, яке ця галузь посідає в суспільстві, а також вміння застосовувати їх на практиці у рамках культурнодоцільної діяльності для розв'язку індивідуальних та соціальних проблем;

– предметні компетентності – складова загально-галузевих компетентностей, що стосується конкретного предмету; мають конкретний опис і можливість формування в рамках навчальних предметів.

На думку С. Ракова, компететностей можна набути лише своєю особистою продуктивною та активною діяльністю, особистою творчістю, особистим досвідом через пізнання соціального досвіду, його критичне осмислення, через своє неповторне особисте буття. У понятті набуття знайшли своє відображення погляди сучасної педагогіки та психології, які визнають неповторність індивідуального досвіду кожної особистості, індивідуальну особистість кожного учня, які визнають продуктивною тільки освіту співробітництва, освіту, яка забезпечує індивідуальне творче буття кожного учня і кожного вчителя [42].

Справжній інноваційний розвиток неможливий без значного покращення вивчення дисциплін фізико-математичного циклу в середній школі. Водночас в Україні спостерігається погіршення якості викладання математики та фізики, втрата суспільного престижу цих основоположних наук, а це може мати згубні наслідки для інноваційного розвитку країни.

Розглянемо поняття математичної компетентності.

Математична компетентність (як предметна). За С.А. Раковим − математична компетентність (як предметна) – «це спроможність особистості бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень» [43].

Математична компетентність (як ключова). Принциповою для компетентнісного підходу є ідея про нерозривну єдність, цілісність знань, умінь і особистісних якостей людини. У зазначеному контексті навчання математики має включати такі аспекти, які є загальними для багатьох, якщо не всіх, шкільних навчальних предметів. Серед них, у першу чергу, слід назвати аксіологічний, мотиваційний, когнітивний, інформаційний, інтелектуальний, загальнокультурний, комунікативний, світоглядний компоненти навчання математики. Всі названі компоненти входять до складу математичної та ключових компетентностей, які безпосередньо чи опосередковано формуються при вивченні шкільного курсу математики. [12]

У посібнику [12] автори дають коротку змістову характеристику зазначених компонентів.

Ціннісно-мотиваційний (аксіологічний) компонент включає ціннісні ставлення учнів до інформації, пізнавальну активність, ініціативність, відповідальність, прагнення до удосконалення результатів своєї праці. Реалізація мотиваційної складової має пробудити й закріпити в учнів стійке позитивне ставлення до навчальної діяльності, викликати допитливість, пізнавальний інтерес, закріпити особистісно значущий сенс навчальних дій, сформувати в учнів внутрішню потребу самостійно навчатися.

Загальнокультурний компонент передбачає формування та розвиток у школярів уявлень про математику як невід'ємну частину загальнолюдської культури, про історію її розвитку, про її місце в системі інших наук, про значення математики в історичному минулому та в сучасному суспільстві.

Навчально-пізнавальний (когнітивний) компонент передбачає оволодіння кожним учнем базовими математичними знаннями, уміннями, навичками, способами діяльності, достатніми для вивчення суміжних навчальних предметів на сучасному рівні, а також для продовження освіти, різноманітними способами організації та здійснення учіння (уміння, дії, операції, пізнавальні процеси) на різних рівнях пізнавальної самостійності (репродуктивна, частково пошукова, творча).

Інформаційний компонент віддзеркалює здатність особистості до визначення інформаційної потреби, пошуку інформації та ефективної роботи з нею в усіх її формах та представленнях, опанування навичками діяльності стосовно інформації в навчальних предметах і освітніх галузях, а також у навколишньому світі, пошуку, аналізу та відбору необхідної інформації, її перетворення, збереження й передачі, володіння сучасними інформаційними засобами та інформаційними технологіями.

Інтелектуальний компонент. Істотними якостями інтелекту людини є логічність мислення (чітка послідовність міркувань, врахування усіх істотних сторін у досліджуваному об'єкті, всіх можливих його взаємозв'язків), доказовість (здатність використовувати в потрібний момент такі факти, закономірності, які переконують у правильності суджень і висновків), критичність (вміння оцінювати результати розумової діяльності, піддавати їх критичній оцінці, відкидати неправильне розв'язання, відмовлятися від розпочатих дій, якщо вони суперечать вимогам завдання), глибина (здатність відокремлювати головне від другорядного, необхідне від випадкового), володіння телекомунікаціями для організації спілкування з віддаленими співрозмовниками; уміння працювати в групі, шукати й знаходити компроміси.

Світоглядний компонент. Під світоглядним компонентом результату навчання математики розуміється поінформованість учнів про систему основних математичних понять, про математичну мову як засобу виразу математичних законів, закономірностей тощо, про математику як форму опису та методу пізнання дійсності. Реалізується цей компонент у процесі вивчення історії виникнення математичних понять, у процесі встановлення зв'язків математики з іншими навчальними предметами, у процесі складання математичних моделей тощо.

Таким чином, компетентнісний підхід розглядають як засіб розвитку та виховання особистості учня. Виховують лише ті знання, які мають для учня суб'єктивну цінність. Тому акцент у цілепокладанні при компетентнісному навчанні зміщується з того, чого хоче досягти вчитель, на те, що потрібно учневі. Крім того, вчитель має пам'ятати, що він готує, не математиків-професіоналів, а насамперед, всебічно розвинену особистість, і цю роботу він виконує не один, а в тісному єднанні із учителями усіх шкільних предметів.

Саме це є важливим кроком на шляху досягнення нової якості математичної освіти.

С. Раков [42] виділяє такі предметно-галузеві математичні компетентності:

- процедурна компетентність – уміння розв'язувати типові математичні задачі;
- логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень;
- технологічна компетентність – володіння сучасними математичними пакетами;
- дослідницька компетентність – володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами;
- методологічна компетентність – уміння оцінювати використання математичних методів для розв'язування індивідуально й суспільно значущих задач.

Однією із предметно-галузевих компетентностей є дослідницька компетентність і формування її у процесі навчання є однією із найважливіших цілей системи освіти України.

1.2. Поняття дослідницької компетентності

Проаналізувавши поняття «дослідницької компетентності» в різних науково-методичних джерелах, нами складена систематизуюча таблиця:

Табл.1

Дослідник	**Трактування**
О. А. Нестерова	дослідницька компетентність – це здатність особистості застосовувати в дослідницькій діяльності сукупність особистісних новоутворень, що відображають розвиток усіх сфер свідомості як умови становлення культури

	особистості
М. Ю. Гармашов	дослідницька компетентність учнів є результатом засвоєння досвіду дослідницької діяльності і включає систему методологічних знань, дослідницьких умінь, досвід постановки і вирішення дослідницьких завдань з різними умовами
А. В. Хуторський	дослідницька компетентність – складова частина пізнавальної компетентності, яка включає “елементи методологічної, надпредметної, логічної діяльності, способи організації цілепокладання, планування, аналізу, рефлексії”, вона слугує компонентом компетентності особистісного самовдосконалення, спрямованого на освоєння способів інтелектуального й духовного розвитку
Н. В. Рашевська	дослідницька компетентність – це здатність особистості до цілеспрямованої навчальної дослідницької діяльності з метою набуття ґрунтовних математичних знань, умінням використовувати ці знання для розв’язання практичних та теоретичних завдань методами математичного моделювання, шляхом використання у процесі дослідження систем комп’ютерної математики
М. С. Головань	Дослідницька компетентність – це інтегративна якість особистості, що поєднує в собі знання, уміння, навички, досвід діяльності дослідника, ціннісні ставлення та особистісні якості й виявляється в готовності і здатності здійснювати дослідницьку діяльність з метою отримання нових знань шляхом застосування методів наукового пізнання, застосування творчого підходу в цілепокладанні, плануванні, прийнятті рішень, аналізі та

	оцінці результатів дослідницької діяльності
С. А. Раков	дослідницька компетентність – це здатність формулювати (ставити) математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих задач (ідеалізація, узагальнення, специфікація); здатність будувати аналітичні та алгоритмічні (комп'ютерні) моделі задач; здатність висувати та емпірично перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення, а також на власний досвід досліджень; здатність інтерпретувати результати, отримані за формальними методами, у термінах вихідної предметної області задачі; здатність систематизувати отримані результати: досліджувати межі застосування отриманих результатів, установлювати зв'язки з попередніми результатами, модифікувати вихідну задачу, шукати аналогії в інших розділах математики та інших галузях знань і т.п.
С. І. Осипова	дослідницька компетентність – це інтегральна особистісна якість, що виражається в готовності та здатності самостійно освоювати і отримувати системи нових знань в результаті перенесення смислового контексту від функціональної діяльності до перетворювальної, базуючись на наявних знаннях, уміннях навичках і способах діяльності
Н. О. Федотова	дослідницька компетентність – це інтегративна особистісна властивість, яка проявляється в усвідомленій готовності та здатності учня займатися навчальним дослідженням

Ж. В. Шабанова	дослідницька компетентність – це інтегративна особистісна властивість, що виражається в усвідомленій готовності та здатності самостійно опановувати та отримувати системи нових знань, умінь, навичок і способів діяльності
О. А. Ушаков	дослідницька компетентність – це інтегральна якість особистості, що виражається в готовності і здатності до самостійної діяльності з розв’язання дослідницьких задач і творчого перетворення дійсності на основі сукупності особистісно осмислених знань, умінь, навичок, ціннісних відносин. У структурі дослідницької компетентності учнів визначаються взаємопов’язані компоненти: мотиваційний, ціннісно-смисловий, когнітивний, діяльнісний та емоційно-вольовий
Л. В. Форкунова	дослідницька компетентність – це інтегративна якість особистості, що передбачає готовність і здатність до здійснення в тій чи іншій формі та з тим чи іншим ступенем самостійності науково-дослідної діяльності в предметній галузі
Ж. В. Рассказова	дослідницька компетентність – інтегральна характер-ристики особистості учня, яка виявляється в готовності зайняти активну дослідницьку позицію по відношенню до своєї діяльності і себе як її суб'єкту, самостійно і творчо вирішувати дослідницькі завдання на основі наявних знань і умінь
О. В. Ушакова	дослідницька компетентність – це сукупність знань у певній галузі, наявність дослідницьких умінь (бачити і вирішувати проблеми на основі висування і обґрунтування гіпотез, ставити мету і планувати

	діяльність, здійснювати збір та аналіз необхідної інформації, вибирати найбільш оптимальні методи, виконувати експеримент, представляти результати дослідження), наявність здатності застосовувати ці знання та вміння в конкретній діяльності

Ми дотримуємося трактування поняття «дослідницька компетентність» за М. С. Головань [14], а саме: « Дослідницька компетентність – це інтегративна якість особистості, що поєднує в собі знання, уміння, навички, досвід діяльності дослідника, ціннісні ставлення та особистісні якості й виявляється в готовності і здатності здійснювати дослідницьку діяльність з метою отримання нових знань шляхом застосування методів наукового пізнання, застосування творчого підходу в цілепокладанні, плануванні, прийнятті рішень, аналізі та оцінці результатів дослідницької діяльності.

Таким чином, самостійно освоїти і побудувати системи нових знань учень може лише тоді, коли є суб'єктом своєї освіти, чітко усвідомлює сенс і значення дослідницької компетентності в навчальній діяльності, є зацікавленим в отриманні дослідницьких результатів. При цьому ініціативне, самостійне, дослідницьке ставлення учнів до дійсності є одним з найважливіших елементів свідомого підходу до необхідності формування його дослідницької компетентності.

1.3. Етапи формування дослідницької компетентності учнів на уроках математики

Дослідницька компетентність є цілісною системою, і виділяють такі компоненти: мотиваційний, інформаційний, когнітивний, комунікативний, рефлексивний, особистісний.

Що стосується *етапів* формування дослідницької компетентності, виділяють такі [25]:

1) спостереження та вивчення факті, явищ, їх зв'язків і відношень; усвідомлення дослідницької задачі;
2) аналіз фактів, явищ, їх зв'язків і відношень;
3) формулювання кінцевої і проміжної цілей у розв’язуванні дослідницької задачі;
4) висунення припущення, гіпотези дослідницької задачі;
5) розв’язування дослідницької задачі шляхом теоретичного обґрунтування й доведення гіпотези;
6) практична перевірка правильності розв’язку дослідницької задачі, формулювання висновків.

На кожному етапі формування дослідницької компетентності відбувається формування певних навчальних дослідницьких умінь.

На першому етапі формуються уміння, до складу яких входять такі компоненти: спостереження явищ; виділення математичного аспекту при сприйнятті цих явищ; визначення кола об’єктів, з якими пов'язана дослідницька задача; абстрагування предмету вивчення, виділення його з ряду інших, з ним пов'язаних.

На другому етапі формуються учбові дослідницькі вміння, до складу яких входять такі компоненти: аналіз фактів, їх відношень; виявлення фактів, виходячи з проблеми дослідження; виділення об'єктів, важливих для дослідницької задачі; облік і співвіднесення всіх даних задачі між собою і з вимогою задачі; виявлення надмірних і недостатніх даних; усвідомлення мети дослідницької задачі.

На третьому етапі формуються дослідницькі уміння, до складу яких входять такі компоненти: визначення і формулювання мети дослідницької задачі; планування послідовності дій у розв’язуванні дослідницької задачі.

Четвертий етап дослідницької діяльності дозволяє сформувати учбові дослідницькі вміння, до складу яких входять наступні компоненти: висунення різних припущень (гіпотез); передбачення результатів;

формулювання узагальненого принципу, що пояснює суть задачі; з'ясування узагальненого принципу дії; математичне формулювання проблеми.

На п'ятому етапі формуються відповідні дослідницькі вміння: переформулювання ідей у різних варіантах; побудова плану дії, розв’язування; співвіднесення кроків пошуку розв’язування між собою і з питанням задачі; комбінування відомих прийомів і способів з іншими; формулювання висновків; прагнення до вичерпання всіх можливих висновків відповідно до питання дослідницької задачі.

На шостому етапі до складу умінь входять такі компоненти: співвіднесення результату дослідницької діяльності з метою; перевірка розв’язку та його відповідність умові дослідницької задачі; перевірка правильності виконаних дій; перевірка повноти і достатності доказів.

Будемо виділять такі рівні сформованості учбових дослідницьких умінь: низький, середній і високий.

На низькому рівні учні за допомогою учителя проводять аналіз дослідницької задачі, аналіз умови, фактів, планують її розв’язування і проводять його за програмою поетапних дій. Використовуючи при цьому розумові операції: аналіз, синтез, порівняння.

На середньому рівні учні самостійно аналізують умову дослідницької задачі. На основі сформульованої проблеми роблять спробу висунути різні припущення (гіпотези). За рекомендацією вчителя планують розв’язування дослідницької задачі і проводять його, здійснюють перевірку та аналіз отриманих результатів за допомогою вчителя. На цьому етапі проводять аналогії, роблять узагальнення.

На високому рівні учні самостійно здійснюють аналіз дослідницької задачі, самостійно формулюють проблему, висувають гіпотези, здійснюють перевірку й аналізують отримані результати. Всі розумові операції використовуються раціонально.

1.4. Шляхи формування дослідницької компетентності

Формування дослідницької компетентності базується на ідеї поєднання та інтеграції, цілісності подання змісту дослідницької діяльності, дає змогу проводити дослідження і відпрацьовувати технології з виділенням компетентності цієї дослідницької діяльності: 1) цілепокладання; 2) цілевиконання; 3) рефлексія границь і результат дослідницької діяльності [10].

С. Раков [43] пропонує наступні напрями набуття дослідницької компетентності школярів при вивченні математики:

– формулювати математичні задачі на основі аналізу суспільно та індивідуально значущих задач;
– будувати аналітичні моделі задач;
– висувати та перевіряти справедливість гіпотез, спираючись на відомі методи (індукція, аналогія, узагальнення, тощо), а також на власний досвід досліджень;
– інтерпретувати результати, отримані формальними методами, у термінах вихідної предметної області;
– систематизувати отримані результати: досліджувати межі застосування отриманих результатів, встановлювати зв'язки з попередніми результатами, а також модифікувати вихідну задачу, шукати аналогії в інших розділах математики, інформатики, тощо.

З метою формування дослідницьких умінь та навичок в процесі навчання математики необхідно:

– здійснювати раціональне чергування репродуктивного, пояснювально-ілюстративного, частково-пошукового та дослідницького методів навчання;

– використовувати оптимальне співвідношення фронтальної, групової та індивідуальної форм роботи з урахуванням диференціації навчання;

– поєднувати традиційні засоби навчання та сучасні засоби інформаційно-комунікаційних технологій;

– організовувати самоосвітню діяльність учнів.

Реалізація дослідницької діяльності передбачає організацію навчальних досліджень не лише на уроці, а й у позакласній та гуртковій роботі.

Доцільно заохочувати учнів до участі у предметних олімпіадах, наукових конференціях, у підготовці наукових публікацій.

У процесі організації дослідницької діяльності учнів педагогу слід орієнтуватися не лише на розвиток дослідницької мотивації учнів, а й визначити зміст і рівень сформованості їхніх дослідницьких умінь і навичок.

Необхідно врахувати паралельність (відповідно до змісту навчальних предметів) і послідовність (відповідно до періоду навчання і характеру засвоєння навчальної програми) формування дослідницьких орієнтирів, умінь і навичок.

У процесі формування в учнів творчих навчально-дослідницьких здібностей необхідно використовувати засоби інформаційно-комунікаційних технологій (мультимедійні засоби, інтерактивні комп'ютерні моделі, педагогічні програмні засоби GRAN, GRAN 1, GRAN 2, Advanced Grapher; програми динамічної математики GeoGebra, GeoGebra 5.0, ресурси Web 2.0), які забезпечують:

– комп'ютерну підтримку навчально-дослідницької діяльності учнів;

– унаочнення складного, абстрактного математичного матеріалу;

– створення комп'ютерних моделей математичних об'єктів та проведення експериментів з ними;

– розв'язування творчих, нестандартних задач;

– дослідження різноманітних математичних проблем.

Формування та розвиток творчих дослідницьких здібностей учнів у процесі навчання математики доцільно здійснювати в процесі розв'язування дослідницьких завдань та задач:

– на прогнозування (задачі на безпосереднє висування гіпотез) ;

– на виявлення протиріччя та формулювання проблем (задачі прихованого питання, задачі на конструювання проблемних ситуацій, задачі на викриття уявних протиріч, задачі на формулювання проблем);

– на моделювання (задачі з несформульованою вимогою до розв'язування; задачі з неповною умовою; задачі з надлишковими умовами; задачі із трансформацією з конкретного в абстрактний план; задачі із трансформацією з абстрактного в конкретний план);

– на винахід (завдання на відкриття нових способів дій);

– дослідницькі експериментальні завдання;

– дослідницькі графічні задачі.

Доцільно використовувати різні форми організації навчання (лекції, тематичні семінари, навчальні дослідження, навчальні конференції, консультації), що спрямовані на формування навчально-дослідницьких умінь учнів і сприяють:

– оволодінню школярами методами творчої діяльності;

– розвитку уміння працювати самостійно та у співпраці з іншими;

– формуванню життєвої позиції «дослідника» («вивчаю, прагну зрозуміти, сам вирішую проблеми»);

– підвищенню інтересу до вивчення математики.

Розділ 2. Методика навчання учнів розв'язування задач з параметрами, що сприяють формуванню дослідницьких компетентностей під час навчання курсу математики

2.1. Поняття "задача з параметром" в математиці та основні методи розв'язування задач з параметрами

Термін «параметр» − це термін грецького походження, у перекладі означає «відміряти». Під поняттям параметра розуміють величину, якою характеризують певну властивість, стан, розмір або форму об'єкта, робочого тіла, явища, системи та ін. [40].

Параметр як математична величина входить до формул і виразів, до рівнянь та нерівностей, до систем рівнянь, нерівностей, до формулювань умови та вимоги у задачах. Як правило, значення цієї величини є постійним у межах задачі, яка розглядається.

Параметр дає можливість виділити певний елемент з множини елементів того ж роду. Наприклад, у формулі $y = ax^2 + bx + c,\ (a \neq 0)$, якою можна задати квадратичну функцію, величини a, b, c є параметрами, певні значення яких виділяють одну квадратичну функцію з множини всіх квадратичних функцій, які задані цією формулою. Можна також сказати, що параметр − це величина, яка у певному завданні (рівнянні, нерівності, системі, текстовій задачі) не виражена конкретним числом.

Розглянемо поняття параметра у рівняннях, нерівностях або їх системах. Параметр у рівняннях або нерівностях може приймати різні значення. Тому з математичної точки зору, параметр − це змінна величина. Цю змінну величину в ході розв'язування часто фіксують для того, щоб мати змогу здійснювати розв'язування відносно іншої змінної.

У посібнику [40] автори пропонують означення рівняння та нерівності із параметром з функціональної точки зору.

Рівняння $f(x,\ a) = g(x, a)$ з двома змінними a, x, де $f(x,\ a)\ і\ g(x, a)$ − аналітично задані функції, будемо називати рівнянням зі змінною x та параметром a, якщо у рівнянні задача ставиться так: 1) або для кожного значення a із деякої множини розв'язати рівняння відносно x ; 2) або знайти значення a, для яких виконується певна вимога, що сформульована для розв'язків рівняння відносно x. Тобто надання одній із змінних статусу параметра пов'язане зі зміною вимоги у рівнянні.

Нерівності виду $f(x,\ a) > g(x, a)$, $f(x,\ a)g(x, a)$, $f(x,\ a) \geq g(x, a)$, $f(x,\ a) \leq g(x, a)$з двома змінними a, x, де $f(x,\ a)\ i\ g(x, a)$ − аналітично задані функції, будемо називати нерівностями зі змінною x та параметром а, якщо у нерівності задача ставиться так: 1) або для кожного значення a із деякої множини розв'язати нерівність відносно x; 2) або знайти значення a, для яких виконуються певна вимога, що сформульована для розв'язків нерівності відносно x.

У роботі [32] автори трактують поняття «задачі з параметрами» наступним чином:

Якщо рівняння (нерівність, система рівнянь, система нерівностей) містить параметр і треба знайти його корені (розв'язки) залежно від параметра, то таке завдання відносять до задач з параметрами.

Існують завдання, в яких треба знайти всі значення параметра, при яких корені рівняння (розв'язки нерівності або системи) задовольняють певну умову. Такі завдання теж вважають задачами з параметрами.

Розв'язати рівняння (нерівність, система рівнянь, система нерівностей) з параметрами означає знайти всі розв'язки для кожної системи допустимих значень параметрів.

За вимогою задачі завдання з параметрами поділяють на види [40]:

1. Розв'язати рівняння (нерівність, систему, задачу тощо) для кожного значення параметра.

2. Знайти значення параметра, при яких виконується певна умова чи умови. Це може бути вимога, яка сформульована так: «Знайти значення параметра (параметрів),

– при яких рівняння (нерівність, система, задача тощо) має задану кількість розв’язків;

– при яких множина розв’язків рівняння (нерівності, системи тощо) буде розташована певним чином на числовій осі (більша за деяке число, менша за деяке число, міститься між деякими числами та ін.);

– рівняння (нерівність) справджується для будь-якого дійсного значення змінної;

– рівняння (нерівність) справджується для будь-якого дійсного значення змінної, яке належить заданому проміжку;

– з одного рівняння (нерівності) випливає інше рівняння (нерівність);

– одне рівняння (одна нерівність) є наслідком іншого (іншої нерівності);

– рівняння (нерівності) рівносильні.

Універсального методу розв’язування задач із параметрами не існує. Часто користуються аналітичним (із використанням формул, властивостей функцій) та графічними методами.

Якщо завдання з параметром є типовим, то у процесі його розв’язування доцільно здійснювати ту ж саму послідовність дій, як і під час вирішення завдання, де б замість параметра було цілком визначене число. Але параметр буде впливати на хід розв’язування, на кількість розглядуваних випадків.

Рекомендації щодо розв’язування типових завдань із параметром.

1. Визначити, до якого розділу алгебри відноситься рівняння (нерівність, система). Для цього потрібно відновити у пам’яті або знайти у відповідній літературі означення лінійного, квадратного, ірраціонального, показникового, логарифмічного, тригонометричного тощо рівняння (нерівності, системи). Джерелами такої інформації є діючі підручники, довідники.

2. Встановити вид рівняння (нерівності, системи). Для цього треба записати рівняння (нерівність, систему) у стандартному вигляді, порівняти знайдену форму з означенням цього виду рівняння. У ряді випадків для

здійснення такого кроку необхідно провести відповідні тотожні перетворення.

3. Обрати, залежно від виду, спосіб розв'язування та здійснити орієнтовний план розв'язування [40].

Основні методи розв'язування задач з параметрами

Для розв'язування завдань із параметрами використовують аналітичний та графічний методи розв'язування.

Аналітичний метод − це спосіб так званого прямого розв'язання , що повторює стандартні процедури знаходження відповіді в задачах без параметра. Аналітичний метод розв'язання задач із параметром вимагає високої грамотності та найбільших зусиль в оволодінні ним.

Розглянемо приклад.

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння $ax(a-1) = a-1$

Розв'язання.

1. Перед нами лінійне рівняння з параметром, що має зміст при всіх допустимих значеннях *a*. Будемо розв'язувати його «як звичайно»: ділимо обидві частини рівняння на коефіцієнт при невідомому.

2. Чи завжди можливе ділення? Ні. Ділити на нуль не можна. Доведеться розглянути окремо випадок, коли коефіцієнт при невідомому дорівнює 0.

1. $a = 1$, тоді рівняння буде мати вигляд: $0x = 0$. У такому випадку $x \in R$.
2. $a = 0$, тоді рівняння буде мати вигляд $0x = 1$. У такому випадку рівняння не має коренів.
3. $a \neq 0$, $a \neq 1$, тоді рівняння буде мати вигляд $a(a-1)x = a-1$. Звідси
$x = \frac{(a-1)}{a(a-1)}$, тоді $x = \frac{1}{a}$.

Відповідь: Якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x = \frac{1}{a}$; якщо $a = 1$, то $x \in R$; якщо $a = 0$, то коренів немає.

Загальна схема розв'язання будь-якого рівняння $F(a;x) = 0$ з параметром a (для випадку двох параметрів схема аналогічна):

· визначається область допустимих значень параметра та область визначення;

· визначаються контрольні значення параметра, що розбивають область допустимих значень параметра на області однорідності окремих рівнянь;

· для контрольних значень параметра відповідні рівняння досліджуються окремо;

· знаходяться загальні розв'язки $x = f_1(a), \dots, f_k(a)$ рівняння $F(a;x) = 0$ на відповідних множинах $A_{f_1}, \dots, A_{f_k}$ значень параметра;

· складається модель загальних розв'язків, контрольних значень параметра в наступному вигляді;

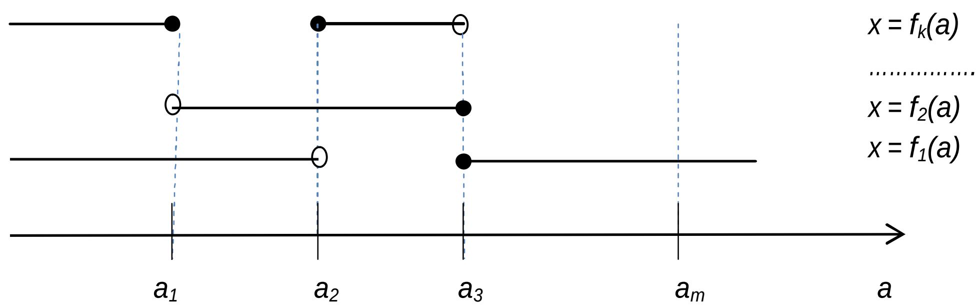


Рис.1

· на моделі виділяються проміжки значень параметра з однаковими розв'язками (області однорідності);

· для контрольних значень параметра та виділених областей однорідності записуються характеристики всіх типів окремих розв'язків.

Графічний метод

Дістати вичерпну інформацію про кожний з параметрів проміжку $(-\infty; +\infty)$ при розв’язуванні рівнянь з параметрами можна, використовуючи графічний метод.

На графіку видно, при яких значеннях параметра рівняння має розв’язки (і скільки), при яких – не має.

Залежно від задачі (із змінною x і параметром a) розглядають графіки або в координатній площині xOy, або в координатній площині xOa. Можна виділити два різновиди застосування графічного методу при розв'язанні рівняння $f(x) = f(a)$:

1) На площині xOy розглядають графік $y = f(x)$ і множина графіків $y = f(a)$. Сюди ж відносять задачі, що розв'язують за допомогою «пучка прямих». Цей спосіб виявляється зручним у задачах із двома невідомими й одним параметром.

2) На площині xOa (яку називають також фазовою) розглядають графіки, у яких x – аргумент, а a – значення функції. Цей спосіб зазвичай застосовують у задачах, де фігурують лише одна змінна та один параметр (або, що зводяться до таких).

У роботі [32] виокремлено такі етапи розв'язування рівнянь графічним методом:

1. Знаходимо область допустимих значень невідомого і параметрів, що входять до рівняння (область визначення рівняння).
2. Виражаємо параметр a як функцію від x.
3. У системі координат xOa будуємо графік функції $a = f(x)$ для тих значень x, які входять в область визначення рівняння.
4. Знаходимо точки перетину $a = c$, де c належить проміжку $(-\infty; +\infty)$ з графіком $a = f(x)$. Можливі такі випадки:

4.1. Пряма $a = c$ не перетинає графік функції $a = f(x)$. При цьому значенні a рівняння коренів не має.

4.2. Пряма $a = c$ перетинає графік функції $a = f(x)$. Тоді визначаємо абсциси точок перетину. Для цього достатньо розв'язати рівняння $a = f(x)$ відносно x.

5. Записуємо відповідь.

Розглянемо приклади використання графічного методу.

Приклад 2.2.

При яких значеннях параметра a рівняння

$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ має рівно три корені?

Розв'язання

Задане рівняння $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 4x + 1, \\ a = |x - 2| - 1. \end{array}\right.$$

На координатній площині xOa побудуємо графіки функцій $a = x^2 - 4x + 1$ і $a = |x - 2| - 1$.

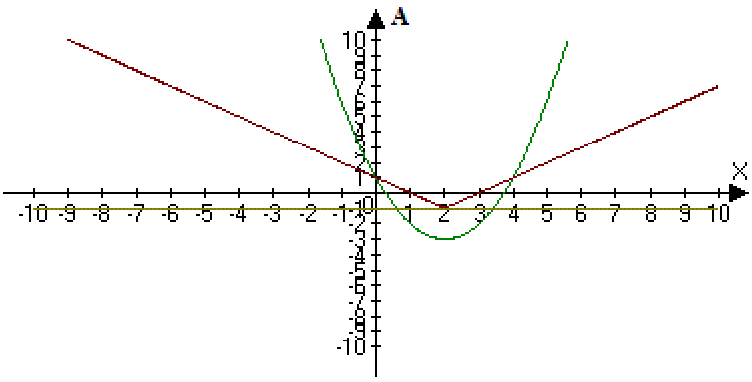


Рис.2

Пряма $a = c$ має з графіками функцій рівно три точки перетину, якщо $a = -1$.

Відповідь. $a = -1$.

Приклад 2.3.

Розв'яжіть рівняння для всіх дійсних значень параметра a

$$\big||x - 1| - 4\big| = a$$

Розв'язання

Розглянемо дві функції $f(x) = \big||x - 1| - 4\big|$ і $g(x) = a$.

Пробудуємо графік функції $f(x) = \big||x - 1| - 4\big|$ за допомогою геометричних перетворень:

$$x - 1 \to |x - 1| \to |x - 1| - 4 \to \big||x - 1| - 4\big|$$

Графік $g(x) = a$ – горизонтальна пряма, що рухається вгору – вниз по осі Oy.

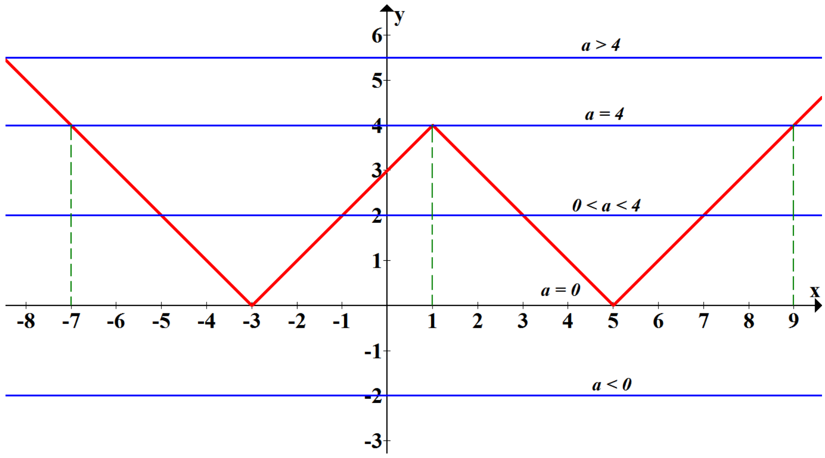


Рис.3

Відповідь: якщо $a < 0$, то $x \in \emptyset$;

якщо $a = 0$ – 2 розв'язки: $x = -3$, $x = 5$;

якщо $0 < a < 4$ – 4 розв'язки: $x = 5 \pm a$; $x = -3 \pm a$;

якщо $a = 4$ – 3 розв'язки: $x = -7$, $x = 1$, $x = 9$;

якщо $a > 4$ – 2 розв'язки: $x = 5 + a$; $x = -3 - a$.

Приклад 2.4.

Скільки розв'язків має система $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ y = a + \sqrt{x} \end{cases}$ в залежності від параметра a?

Розв'язання

Виконаємо перетворення і запишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} y = 1 - 2x, \\ y = a + \sqrt{x}. \end{cases}$$

Побудуємо графік першого рівняння і схематично зобразимо графік другого.

$y = a + \sqrt{x}$ це графік $y = \sqrt{x}$, який рухається вгору-вниз вздовж осі Оy.

Очевидно, що при $a \in (-\infty; 1]$ – графіки перетинаються в одній точці, а при $a \in (1; +\infty)$ – графіки не перетинатимуться.

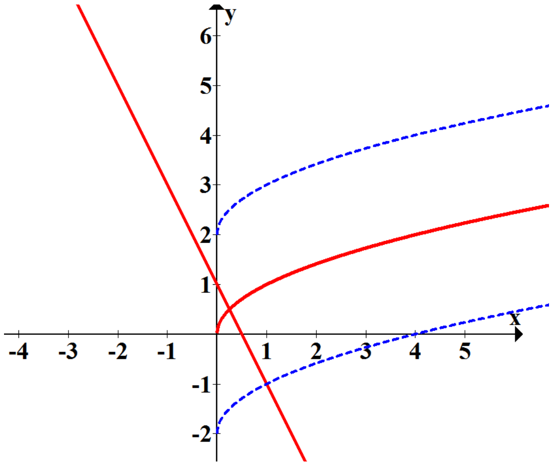


Рис.4

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 1]$ – система має 1 розв'язок;

якщо $a \in (1; +\infty)$ – система розв'язків не має.

2.2. Стан проблеми дослідження у шкільному курсі математики. Аналіз чинної програми з математики на предмет дослідження

Аналіз шкільних програм з математики для різних класів і різних рівнів навчання математики показав, що на рівні стандарту на завдання з параметрами час не виділяється.

У програмі [33] для 8 – 9 класу поглибленого рівня приділено увагу задачам з параметрами дослідницького характеру та задачам, які дають змогу сформувати в учнів поняття про те, яким чином значення параметру впливає на множину розв'язків рівняння.

Також вагомим елементом математичної культури є застосування графічних методів та інтерпретацій у розв'язуванні задач з параметрами.

Задачі з параметрами зустрічаються під час вивчення таких тем:«Лінійні рівняння», «Раціональні вирази», «Нерівності», «Квадратична функція» «Квадратні рівняння», «Нерівності», «Квадратні корені. Дійсні числа»

У програмі [34], [35] зазначено, що у 10-11 класах профільного і поглибленого рівня вивчення математики значне місце приділяється розв'язуванню задач з параметрами. У процесі розв'язування таких задач до арсеналу прийомів та методів мислення школярів природно включаються аналіз, індукція та дедукція, узагальнення та конкретизація, класифікація та систематизація, аналогія. Ці задачі дозволяють перевірити рівень знання основних розділів шкільного курсу математики, рівень логічного мислення учнів, початкові навички дослідницької діяльності.

Задачі з параметрами зустрічаються при вивченні таких тем: «Степенева функція», «Тригонометричні рівняння та нерівності», «Похідна та її застосування» «Показникова та логарифмічна функція».

Аналіз підручників, посібників та методичних статей на предмет дослідження

Проаналізуємо діючі підручники з алгебри і початків аналізу основної та старшої школи на наявність задач з параметрами.

Зауважимо, що в жодному з розглянутих підручників [27], [28], [29], [30], [31] не дається чіткого означення параметра, а всі наведені завдання − однотипні. Водночас рівняння, нерівності, текстові задачі, що містять параметр, широко представлені як у зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, так і в завданнях математичних олімпіад тощо.

У підручниках алгебри і початків аналізу для поглиблених класів під час вивчення тем, зазначених у попередньому пункті, наводиться значна кількість задач з параметрами.

Так у підручнику [28] задачі з параметрами зустрічаються під час вивчення теми «Нерівності». Наведемо приклади таких завдань.

№28.34.

Чи існує таке значення параметра a, при якому будь-яке число є розв’язком нерівності (у разі ствердної відповіді вкажіть це значення):

1) $ax > -1 - 7x$; 2) $(a^2 - 16)x \leq a + 4$?

№28.37.

Для кожного значення параметра a розв’яжіть нерівність:

1) $a^2x \leq 0$; 2) $(a + 4)x > 1$; 3)$a + x < 2 - ax$.

При вивченні теми «Теорема Вієта» автори пропонують такі номери: №39.34 − №39.42.

№39.34.

При яких значеннях параметра a сума коренів рівняння $x^2 + (a^2 + 2a - 3)x + a = 0$ дорівнює нулю?

№39.39.

При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 4x + a = 0$ дорівнює: 1) 12; 2) 6?

У підручнику [29] задачі з параметрами зустрічаються під час вивчення теми «Квадратична функція, її графік та властивості». Автори пропонують наступні номери: №8.25 − №8.35, №8.41 − №8.42, №8.55 − №8.56, №8.62 − №8.63, №8.67 − №8.71.

№8.26.

При якому значенні параметра b проміжок $(-\infty;2]$ є проміжком зростання функції $y = -4x^2 - bx + 5$?

№8.55.

Установіть, скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $|x^2 - 4|x| + 3| = a$; 2) $x^2 + 3|x - 1| - 1 = a$.

Під час вивчення теми «Квадратні нерівності» приділяється значна увага завданням з параметрами. Наведемо приклади таких завдань.

№9.31.

При яких значеннях параметра a не має розв'язків нерівність:

1) $-x^2 + 6x - a > 0$; 3) $ax^2 + (a + 1)x + (a - 1) < 0$;

2) $x^2 - (a + 1)x + 3a - 5 < 0$; 4) $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$?

№9.40.

При яких значеннях параметра a з нерівності $x^2 + x < 0$ випливає нерівність $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a \leq 0$?

Під час вивчення розділу «Рівняння з двома змінними та їх системи» зустрічаються задачі з параметрами, в яких необхідно систему розв'язати графічним методом.

№13.11.

При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases}(a-2)x+27y=4{,}5,\\ 2x+(a+1)y=-1\end{cases}$ має безліч розв'язків?

№13.14.

Визначте, при яких значеннях параметра a система $\begin{cases}x^2+y^2=2(1+a),\\ (x+y)^2=14\end{cases}$ рівнянь має рівно два розв'язки.

У підручнику [30] задачі з параметрами зустрічаються під час вивчення теми «Ірраціональні рівняння» та «Ірраціональні нерівності». Наведемо приклади деяких номерів.

№7.22.

При яких значеннях параметра a рівняння $ax-1=\sqrt{8x-x^2-15}$ має єдиний розв'язок?

№9.16.

При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $\sqrt{1-(x+2a)^2}\geq\frac{4}{3}x$ є проміжок завдовжки $\frac{9}{5}$?

При вивченні розділу «Тригонометричні функції» автори наводять велику кількість завдань, що містять параметр. Наведемо приклади таких завдань.

№21.15.

При яких значеннях параметра a рівняння $(a^2-4)\cos x=a+2$ має розв'язки?

№22.20.

При яких від'ємних значеннях параметра a проміжок $[a;0]$ містить не менше ніж три корені рівняння $\sin x=-\frac{1}{2}$?

№23.16.

При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)(\operatorname{tg}x+1)=0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}0\right)$ має єдиний корінь?

Під час вивчення розділу «Похідна та її застосування» у підручнику [30] автори пропонують завдання з параметрами на знаходження найбільшого та найменшого значення функції, на знаходження точок екстремуму та на монотонність функції. Наведемо приклади деяких завдань.

№48.40.

Знайдіть усі значення параметра b, при кожному з яких функція $f(x) = \sin 2x - 8(b + 2)\cos x - (4b^2 + 16b + 6)\,x$ спадає на R.

№49.37.

При яких значеннях параметра a функція

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3a + 1}{2}x^2 + (2a^2 + 2a)x - 17$$

має додатну точку мінімуму?

№50.36.

Знайдіть усі значення параметра a, при яких найменше значення функції $y = x^3 - 2ax^2 + 1$ на відрізку $[0; 1]$ досягається в точці $x = 1$.

У підручнику [31] задачі з параметрами зустрічаються під час вивчення теми «Показникові рівняння». Наведемо приклади таких завдань.

№2.24.

При яких значеннях параметра a рівняння $9^x - (a + 1)3^x + 3a - 6 = 0$ має єдиний корінь?

№2.29.

При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\sqrt{x} - a\right)(3^{2x} - 4 \times 3^x + 3) = 0$ має два різні корені?

Під час вивчення теми «Логарифмічні рівняння» автори пропонують наступні номери: №6.42 – №6.45.

№6.42.

Скільки розв'язків має рівняння $(\log_2(x + 1) - 3)\sqrt{x - a} = 0$ залежно від значень параметра a.

№6.45.

При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)\log_3(2x-5)=0$ має єдиний розв'язок?

Задачі з параметрами зустрічаються й під час вивчення теми «Логарифмічні нерівності» та «Показникові нерівності». Наведемо приклади таких завдань.

№3.32.

Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність

$(x-a)\sqrt{3\times 2^x-2\times 3^x}\geq 0.$

№7.29.

Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність

$(2^x-a)\sqrt{x-3}\geq 0.$

Аналіз ЗНО на наявність завдань з параметрами та статистичні дані

Зовнішнє незалежне оцінювання(ЗНО) з математики проводилось з 2004 року. В 2004-2007 роках таке оцінювання проводилось вибірково. З 2008 року проходження ЗНО є обов'язковою умовою вступу до вищого навчального закладу вже для всіх абітурієнтів.

З часу введення в систему оцінювання знань випускників навчальних закладів ЗНО в тестах з математики майже кожного року були завдання з параметрами. Не мали таких завдань лише тести 2009, 2010 (окрім пробного) років.

Метою таких завдань є забезпечення якісного розподілу учасників тестування з достатнім та високим рівнем навчальних досягнень. Завдання із параметрами вимагають не тільки глибоких знань програмного матеріалу та їх систематизації, а й вмінь використовувати ці знання у нестандартних задачах, навичок робити логічні креативні міркування, які в деяких завданнях допоможуть прийти до висновку, що розв'язувати завдання зовсім не потрібно, а достатньо лише проаналізувати умову і дати відповідь.

Ці завдання виявилися достатньо складними для випускників. Розглянемо умови завдань та статистичні характеристики ЗНО (2008-2019 років). Статистичні характеристики тестових завдань визначаються окремо для кожного типу тестових завдань.

ЗНО 2008 (1 сесія)

31. Використовуючи графік рівняння $|x-12|+|y|=1$ (рис.) знайдіть усі значення параметра a, при яких система $\begin{cases}|x-12|+|y|=1,\\(x-a)^2+y^2=4\end{cases}$ має єдиний розв'язок. У відповідь запишіть їх суму.

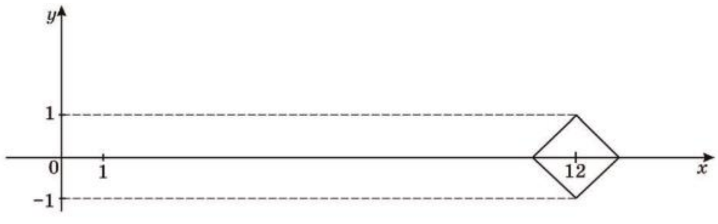


Рис.5

36. Задано функцію $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$.

1. Знайдіть проміжки зростання, спадання функції, екстремуми функцій.

2. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$.

3. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x)=a$, де $a\in R$, залежно від значень параметра a.

У відповідь запишіть найбільше ціле a, при якому рівняння не має коренів. Якщо такого значення не існує, у відповідь запишіть 100.

ЗНО 2011

35. Знайдіть найменше значення параметра a, рівняння

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=6-5a-2a^2$$

ЗНО 2012 (1сесія)

32. При якому найменшому значені параметра a рівняння має лише два різні корені?

$\sqrt{2x+15}\left(\sqrt{x^2+18x+81}-\sqrt{x^2-10x+25}\right)=a\sqrt{2x+15}$.

ЗНО 2012 (2 сесія)

32. При якому найменшому значені параметра a рівняння має хоча б один корінь?

$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+(14-2a)\sqrt[4]{x-3}+32=6a.$

ЗНО 2013 (1 сесія)

33. Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння $\lg(\sin 5\pi x)=\sqrt{16+a-x}$ належить проміжку $(1{,}5;2)$.

ЗНО 2013 (2 сесія)

33. При якому найбільшому невід'ємному значенні параметра a рівняння $\sqrt[4]{|x|-1}-2x=a$ має один корінь?

ЗНО 2014

34. Знайдіть усі від'ємні значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} 2\sqrt{y^2-4y+4}+3|x|=11-y, \\ 25x^2-20ax=y^2-4a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповіді. Якщо таких значень кілька, то у відповідь запишіть їхню суму.

ЗНО 2015

36. При яких значеннях параметра a рівняння на проміжку $[0;1]$ має рівно два різні корені?

$$\frac{(x^2-2(a+1)x+6a-3)(tg\pi x-1)}{\sqrt[4]{49x^2-84xa+36a^2}}=0$$

ЗНО 2016

33. Розв'яжіть рівняння залежно від параметра a.

$$\frac{\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}}{5\times 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x}=0$$

ЗНО 2017

33. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x-y|=|x-a|, \\ \lg(y-a)=\lg(4a^2+x-x^2) \end{cases}$ залежно від значень параметра a.

ЗНО 2018

33. Розв’яжіть нерівність залежно від параметра a.

$$\frac{\log_a x}{x^2 + (a-4)x + 4 - 3a} \leq 0$$

ЗНО 2019

33. Задано систему нерівностей $\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \geq 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2sin^2(\pi a)+\cos(2\pi a)+x} > a \end{cases}$, де x – змінна, a – стала.

1. Розв’яжіть першу нерівність цієї системи.

2. Визначте множину розв’язків другої нерівності системи залежно від значень a.

3. Визначте всі розв’язки системи залежно від значень a.

Результати тестових завдань із параметрами різних років подано в таблиці:

Табл.2

Рік	**№ завдання**	**відсотковий розподіл учасників за кількістю набраних балів**							**складність**	**дискримінація**	**Кореляція**
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**			
2008 (1 сесія)	31	98,24	-	1,76	-	-	-	-	1,76	5,65	0,28
	36	87,65	5,15	2,97	1,78	1,05	0,66	0,74	4,73	17,52	0,65
2009	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2010	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2011	35	97,80	-	2.20	-	-	-	-	2,20	7,81	0,37
2012 (1 сесія)	32	99,29	-	0,17	-	-	-	-	0,71	2,51	0,20

2012 (2сесія)	32	97,83	-	2,17	-	-	-	-	2,17	7,79	0,31
2013 (1 сесія)	33	98,78	-	1,24	-	-	-	-	1,24	4,57	0,31
2013 (2 сесія)	33	99,90	-	0,10	-	-	-	-	0,10	0,37	0,10
2014	34	98,85	-	0,15	-	-	-	-	0,15	0,54	0,11
2015	36	86,06	7,78	2,12	1,41	1,24	1,14	0,25	4,73	16,61	0,36
2016	33	94,25	4,47	0,56	0,39	0,17	0,05	0,11	1,39	5,08	0,42
2017	33	89,3	6,8	2,9	0,4	0,1	0,1	0,3	2,8	9,9	0,5
2018	33	87,8	7,9	3,1	0,7	0,2	0,1	0,2	3,1	11,1	0,5
2019	33	84,3	11,7	3,2	0,3	0,2	0,1	0,2	3,6	12,3	0,6

Можна зробити наступні висновки:

1) Кількість учасників ЗНО, які не набрали жодного балу в завданні із параметром, залишається щороку достатньо великою.

2) Висока розподільна здатність тестових завдань, яка збільшувалась щороку, дає змогу виявити учасників з високим рівнем навчальних досягнень, підготовлених до подальшого навчання у ЗВО. Такі завдання спонукають до ґрунтовного вивчення математики, дають змогу перевірити ті предметні вміння й навички, які складно перевірити за допомогою інших форм тестових завдань.

2.3. Система задач з параметрами на формування дослідницької компетентності учнів та методичні рекомендації до її використання у навчальному процесі.

На першому етапі формування дослідницької компетентності в учнів формуються уміння: спостереження й вивчення фактів, явищ, їх зв’язків і відношень; усвідомлення суті дослідницької задачі. На цьому етапі пропонуємо учням розв’язувати задачі використовуючи репродуктивний метод, тобто розв’язувати задачі за зразком, за відомим алгоритмом. Пропонуємо розглянути приклади 2.5-2.9.

Формувати дослідницьку компетентність необхідно, починаючи з 7 класу під час вивчення теми «Лінійні рівняння».

Приклад 2.5.

Розв’яжіть рівняння $(a^2 - 9)x = a - 3$.

Розв’язання

Задане рівняння учні мають співвіднести до відповідного типу. У нашому випадку – це лінійне рівняння. Для розв’язання заданого рівняння необхідно повторити схему розв’язання лінійних рівнянь виду $ax = b$.

Тобто, слід розглянути випадки, коли $a^2 - 9 = 0$ і коли $a^2 - 9 \neq 0$.

Отже:

1. $a = 3$, тоді рівняння матиме вигляд $0x = 0$, звідси x –будь-яке число;
2. $a = -3$, рівняння матиме вигляд $0x = -6$, в цьому випадку рівняння не має розв’язків.
3. $a \neq 3$, $a \neq -3$, рівняння матиме вигляд $x = \frac{a-3}{a^2-9}$, $x = \frac{a-3}{(a-3)(a+3)}$, $x = \frac{1}{a+3}$.

Відповідь. Якщо $a = 3$, то x –будь-яке число.

Якщо $a = -3$, то рівняння не має розв’язку.

Якщо $a \neq 3$, $a \neq -3$, то $x = \frac{1}{a+3}$.

Наступний приклад пропонуємо розв’язати учням самостійно, аналогічно до попереднього.

Приклад 2.6.

Розв’яжіть рівняння $(a - 1)(a - 5)x = a - 1$ з параметром a.

Розв’язання

Учні помічають, що це лінійне рівняння схоже на попереднє. Хоча і коефіцієнт біля шуканої змінної є складнішим за виглядом, аналогічно, складнішим є і вираз, що визначає добуток, але хід розв’язування не змінюється. Тобто учні розглядають два випадки: коли коефіцієнт біля змінної не нуль і коли він є нулем.

Отже:

1. $(a-1)(a-5)=0$, тобто: якщо $a=1$, то $0x=0$, $x\in R$; якщо $a=5$, то $0x=4$, рівняння не має розв'язків.
2. $(a-1)(a-5)\neq 0$, тобто $a\neq 1$, $a\neq 5$, то $x=\frac{(a-1)}{(a-1)(a-5)}$;

Тобто $x=\frac{1}{a-5}$.

Відповідь. Якщо $a=1$, то $x\in R$.

Якщо $a=5$, то рівняння не має коренів.

Якщо $a\neq 1$ і $a\neq 5$, то $x=\frac{1}{a-5}$.

Продовжують формування дослідницької компетентності у 8 класі під час вивчення теми «Квадратні рівняння». Формування умінь розв'язування квадратних рівнянь з параметрами необхідно розпочати з відтворення знань учнів з 8 класу про залежність кількості розв'язків квадратного рівняння від значення першого коефіцієнта та дискримінанта.

Приклад 2.7.

У квадратному рівнянні $x^2-x+a=0$ визначте такі значення параметра a, при яких $x_1^2+x_2^2=25$, де x_1, x_2 – корені даного квадратного рівняння.

Розв'язання

Учені зазначають, що це квадратне рівняння. Далі необхідно з'ясувати при яких значеннях параметра існують корені даного квадратного рівняння, тобто $D\geq 0$:

$D=(-1)^2-4a\geq 0$, звідки $1-4a\geq 0$, $a\leq\frac{1}{4}$.

Учні мають зазначити, що для виконання всіх умов завдання зручно скористатися теоремою Вієта.

Подамо рівність $x_1^2 + x_2^2 = 25$ так, щоб корені x_1, x_2 поєднувались між собою через суму або добуток: $x_1^2 + x_2^2 = 25$, $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25$ (*). Це дає можливість використати теорему Вієта:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b, \\ x_1x_2 = c \end{cases}$. Тобто $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1x_2 = a \end{cases}$, підставимо це у рівність (*):

$(1)^2 - 2a = 25$, $-2a = 24$, звідки $a = -12$. Оскільки $a = -12 \leq \frac{1}{4}$, то це є розв'язок задачі.

Відповідь. $a = -12$.

Наступні приклади можна запропонувати учням під час вивчення теми «Нерівності» у 9 класі. Наведені приклади також пропонуємо розв'язувати, використовуючи репродуктивний метод.

Приклад 2.8.

Розв'яжіть нерівність $ax < 1$ з параметром a.

Розв'язання

Учень має пригадати, як розв'язуються лінійні нерівності даного типу.

Щоб розв'язати задану нерівність, треба розглянути випадки: 1) $a = 0$; 2) $a > 0$; 3) $a < 0$.

Отже:

1. Якщо $a = 0$, $0x$ <1, то $x \epsilon R$.
2. Якщо $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$.
3. Якщо $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $x \epsilon \left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$.

Якщо $a = 0$, то $x \epsilon R$.

Якщо $a \in (0; +\infty)$, то $x \epsilon \left(-\infty; \frac{1}{a}\right)$.

Для відпрацювання навичок розв'язування лінійних нерівностей з параметрами такого типу можна запропонувати кожному учню розв'язати наступний приклад самостійно, а результати порівняти.

Приклад 2.9.

Розв'яжіть нерівність $(a-1)x < 5a$ з параметром a.

Розв'язання

Задана лінійна нерівність є аналогічною до попередньої.

Для розв'язання даної нерівності необхідно розглянути всі можливі випадки: 1) $a-1>0$; 2) $a-1=0$; 3) $a-1<0$.

Розглянемо кожен із випадків:

1. Якщо $a-1>0$, $a>1$, $a\epsilon(1:+\infty)$, то $x<\frac{5a}{a-1}$, $x\epsilon\left(-\infty;\frac{5a}{a-1}\right)$.
2. Якщо $a-1=0$, $a=1$, то $0x<5$, $0<5$, $x\epsilon R$.
3. Якщо $a-1<0$, $a<1$, $a\epsilon(-\infty:1)$, то $x>\frac{5a}{a-1}$, $x\epsilon\left(\frac{5a}{a-1};+\infty\right)$.

Відповідь. Якщо $a\epsilon(-\infty:1)$, то $x\epsilon\left(\frac{5a}{a-1};+\infty\right)$.

Якщо $a=1$, то $x\epsilon R$.

Якщо $a\epsilon(1:+\infty)$, то $x\epsilon\left(-\infty;\frac{5a}{a-1}\right)$.

На наступному етапі можна формувати такі дослідницькі уміння, як: аналіз фактів, явищ; визначення і формулювання мети дослідницької задачі; планування послідовності дій у розв'язуванні дослідницької задачі. На цьому етапі пропонуємо учням розв'язувати задачі здійснюючи чергування репродуктивного, дослідницького та пояснювально-ілюстративного методів. Прикладами таких завдань можуть бути: Приклади 2.10-2.17.

Наступні приклади можна запропонувати учням у 8 класі під час вивчення теми «Квадратні рівняння» та «Квадратний тричлен».

Приклад 2.10.

Розв'яжіть рівняння $ax^2-2x-1=0$.

Розв'язання

Учень має проаналізувати, за яких умов рівняння є квадратним, лінійним.

Якщо параметр $a=0$, то матимемо лінійне рівняння, якщо ж $a\neq 0$, то квадратне.

Розглянемо ці випадки:

1. $a = 0$; $-2x - 1 = 0$; $x = -0{,}5$.
2. $a \neq 0$, знаходимо дискримінант рівняння $D = b^2 - 4ac$, $D = 4 + 4a$

На наступному етапі навчальна дослідницька діяльність учня пов'язана з врахуванням випадків, за яких виконується вимога задачі. Таких випадків три: $D > 0$, $D = 0$ та $D < 0$.

Розглянемо ці випадки:

Якщо $D > 0$, тобто $4 + 4a > 0$; $a > -1$, то рівняння матиме два кореня (за умови, що $a \neq 0$), різні або однакові:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(1+a)}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{4(1+a)}}{a}.$$

Якщо $D = 0$, тобто $a = -1$, то рівняння буде мати два корені:

$$x_{1,2} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a} = -1.$$

Якщо ж $D < 0$, тобто $4 + 4a < 0$, тобто $a < -1$, то рівняння не матиме дійсних коренів.

Відповідь. Якщо $a = 0$, то $x = -0{,}5$.

Якщо $a < -1$, то рівняння розв'язків не має.

Якщо $a \neq 0$ і $a > -1$, то $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4(1+a)}}{a}$.

Якщо $a = -1$, то $x = -1$.

Приклад 2.11.

При яких значеннях параметра a корені рівняння $(2a - 2)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ будуть більші від -2 і менші від 0?

Розв'язання

Першим кроком учень аналізує, за яких умов задане рівняння є квадратним, а за яких умов – лінійне. Тобто необхідно розглянути випадки: $2a - 2 = 0$, $2a - 2 \neq 0$.

Розглянемо кожен із випадків:

1. Нехай $2a - 2 = 0$, $a = 1$. Тоді рівняння є лінійним і має вигляд: $2x + 1 = 0$, звідки $x = -\frac{1}{2}$. Оскільки $-2 < -\frac{1}{2} < 0$, то значення параметра $a = 1$ задовольняє вимогу задачі.
2. Нехай $2a - 2 \neq 0$, $a \neq 1$. Тоді рівняння є квадратним.

Далі учень з'ясовує взаємне розташування на числовій осі коренів квадратного тричлена. Покажемо це використовуючи пояснювально-ілюстративний метод (рис.5, рис.6).

За вимогою завдання корені квадратного рівняння повинні міститись між числами -2 та 0.

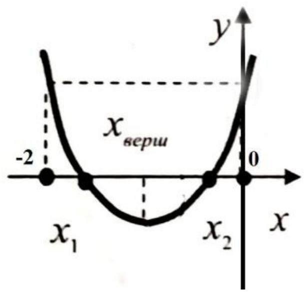


Рис.5

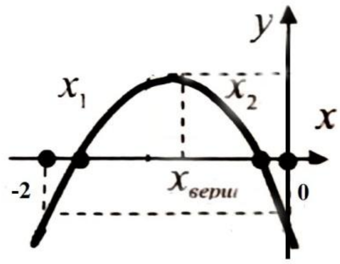


Рис.6

Тобто мають виконуватись наступні умови:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ (2a-2)f(-2) > 0, \\ (2a-2)f(0) > 0, \\ -2 < x_{\text{верш.}} < 0 \end{cases} (*), \text{ де } x_{\text{верш.}} = -\frac{a+1}{2(2a-2)}.$$

Тоді система (*) прийме вид:

$$\begin{cases} (a+1)^2 - 4(2a-2) \geq 0, \\ 1\big((2a-2)(-2)^2 + (a+1)(-2) + 1\big) > 0, \\ 1\big((2a-2)(0)^2 + (a+1)(0) + 1\big) > 0, \\ -2 < -\dfrac{a+1}{2(2a-2)} < 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a + 1 - 8a + 8 \geq 0, \\ 4(2a - 2) - 2(a + 1) + 1 > 0, \\ 1 > 0, \\ -2 < -\dfrac{a + 1}{2(2a - 2)}, \\ -\dfrac{a + 1}{2(2a - 2)} < 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (a - 3)^2 \geq 9, \\ 8a - 8 - 2a - 2 + 1 > 0, \\ 2 > \dfrac{a + 1}{2(2a - 2)}, \\ \dfrac{a + 1}{a - 1} > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a \in R, \\ 6a - 9 > 0, \\ 2 - \dfrac{a + 1}{4a - 4} > 0, \\ \dfrac{a + 1}{a - 1} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a > \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{8a - 8 - a - 1}{4a - 4} > 0, \\ a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases},$$

$$\begin{cases} a \in \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right), \\ a \in (-\infty; 1) \cup \left(\dfrac{9}{7}; +\infty\right), \\ a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}, \text{ звідки } a \in \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right).$$

Відповідь. $a \in \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Приклад 2.12.

При яких значеннях параметра a один з коренів рівняння

$(a + 2)x^2 - (3a + 1)x + 4a + 4 = 0$ менший ніж 2, а другий більший ніж 2.

Розв’язання

Учень з’ясовує за яких умов задане рівняння є квадратним, а за яких умов – лінійне. Тобто необхідно розглянути випадки: $a + 2 = 0$, $a + 2 \neq 0$.

Розглянемо кожен із випадків:

1. Нехай $a + 2 = 0$, $a = -2$. Тоді задане рівняння є лінійним і не може мати лише два кореня. Тому $a = -2$ не задовольняє вимогу завдання.
2. Нехай $a + 2 \neq 0$, $a \neq -2$. Тоді задане рівняння є квадратним.

Далі учень з’ясовує взаємне розташування на числовій осі коренів квадратного тричлена. Як і в попередньому випадку покажемо це використовуючи пояснювально-ілюстративний метод (рис.7, рис.8).

Оскільки за умовою завдання, число 2 має бути між коренями квадратного рівняння:

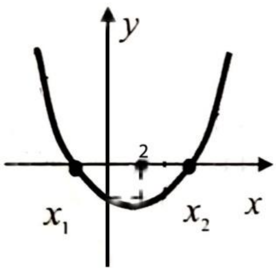


Рис.7

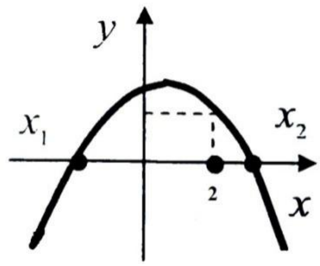


Рис.8

Для розв'язання необхідно використати умову:

$(a + 2)f(2) < 0$ (*). Тоді нерівність (*) набуде вигляду:

$$(a + 2)(4(a + 2) - 2(3a + 1) + 4a + 4) < 0,$$

$$(a + 2)(4a + 8 - 6a - 2 + 4a + 4) < 0,$$

$$(a + 2)(2a + 10) < 0.$$

Звідки $a \in (-5; -2)$.

Відповідь. $a \in (-5; -2)$.

Завдання, що містять знак модуля, можна запропонувати учням 10-го класу. Для розв'язування типових рівнянь (нерівностей) із модулями використовують такий прийом (дане рівняння (нерівність) зводять до нового, чи сукупності нових рівнянь (нерівності), спосіб розв'язування яких загальновідомий).

Приклад 2.13.

Знайдіть кількість розв'язків рівняння $|x + 2| = ax + 1$ залежно від значень параметра a.

Розв'язання

Учні пропонують дане рівняння з модулем розв'язати, використовуючи рівносильний перехід до сукупності нових рівнянь.

Рівняння визначено за будь-якого дійсного значення параметра a. Дане рівняння буде рівносильне наступній сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x + 2 = ax + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 < 0, \\ -x - 2 = ax + 1; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq -2, \\ (a-1)x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2, \\ (a+1)x = -3; \end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'яжемо кожну з утворених систем:

1. $\begin{cases} x \geq -2, \\ (a-1)x = 1, \end{cases}$

Учні зазначають,що друге рівняння – лінійне, для розв'язання якого необхідно розглянути такі випадки, коли $a - 1 = 0$ та $a - 1 \neq 0$. Тобі сукупність буде мати наступний вигляд:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = 1, \\ x \geq -2, \\ 0x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 1, \\ x \geq -2, \\ x = \dfrac{1}{a-1}. \end{cases}\end{array}\right.$$

Очевидно, що перша система розв'язку не має. Друга система матиме розв'язки за умови $\frac{1}{a-1} \geq -2$, $\frac{2a-1}{a-1} \geq 0$, тобто якщо $a \leq 0{,}5$ або $a > 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$.

2. $\begin{cases} x < -2, \\ (a+1)x = -3; \end{cases}$

Учні помічають, що друге рівняння – лінійне, для розв'язання якого необхідно розглянути такі випадки, коли $a - 1 = 0$ та $a - 1 \neq 0$. Тобі сукупність буде мати наступний вигляд:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a = -1, \\ x < -2, \\ 0x = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 1, \\ x < -2, \\ x = \dfrac{-3}{a+1}. \end{cases}\end{array}\right.$$

Очевидно, за $a = -1$ перша система розв'язків не має. Друга система матиме розв'язки за умови $\frac{-3}{a+1} < -2$, $\frac{2a-1}{a+1} < 0$, тобто якщо $-1 < a < 0{,}5$, то $x = \frac{-3}{a+1}$.

Відповідь. Якщо $a \leq -1$ або $a = 0{,}5$ або $a > 1$, то рівняння має 1 розв'язок.

Якщо $-1 < a < 0{,}5$, то рівняння матиме 2 розв'язки.

Якщо $0{,}5 < a \leq 1$, то рівняння розв'язку не має.

Приклад 2.14.

Розв'яжіть аналітично нерівність $|x + a| < 1$ з параметром a.

Розв'язання

Знайдемо область визначення: і параметр, і змінна приймають будь-які значення.

Нерівність $|x + a| < 1$ – це нерівність з одним модулем, зовні якого немає змінної. Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x + a < 1, \\ x + a > -1 \end{cases}$, звідки $\begin{cases} x < 1 - a, \\ x > -1 - a \end{cases}$. Отже при будь-якому значенні параметра a розв'язком початкової нерівності буде інтервал $x\epsilon(-a - 1; -a + 1)$.

Відповідь. $x\epsilon(-a - 1; -a + 1)$ для будь-якого значення параметра a.

Приклад 2.15.

Розв'яжіть нерівність $|x - 3a| - |x + a| < 2a$ з параметром a.

Розв'язання

Знайдемо область визначення: і параметр, і змінна можуть приймати будь-які значення.

Розкриваємо модулі у нерівності $|x - 3a| - |x + a| < 2a$ (*) за означенням. Зазначимо, що $x = 3a$, $x = -a$ – це значення змінної, при яких вирази під модулями перетворюються на нуль. Ці значення поділяють дійсні значення змінної на проміжки.

На кожному з проміжків встановлюємо знак, згідно якого будемо розкривати кожен із виразів під модулями.

1. Нехай $a > 0$, тоді $-a < 3a$. Перейдемо від нерівності (*) до такої сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -a, \\ -x + 3a + x + a < 2a, \end{cases} \\ \begin{cases} -a < x < 3a, \\ -x + 3a - x - a < 2a, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 3a, \\ x - 3a - x - a < 2a \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \begin{array}{l} \begin{cases} x \le -a, \\ a < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -a < x < 3a, \\ x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 3a, \\ a > 0 \end{cases} \end{array} .$$

Оскільки $a > 0$, то перша система сукупності розв’язків не має; друга має розвязком проміжок $x\epsilon(0; 3a)$; третя система – проміжок $x\epsilon[3a;+\infty)$.

2. Нехай $a = 0$, тоді $-a = 3a = 0$. Нерівність (*) матиме вигляд $|x| - |x| < 0$, $0 < 0$, звідки $x\epsilon\emptyset$.

3. Нехай $a < 0$, тоді $-a > 3a$. Перейдемо від нерівності (*) до такої сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -a, \\ -x + 3a + x + a < 2a, \end{cases} \\ \begin{cases} 3a < x < -a, \\ x - 3a + x + a < 2a, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -a, \\ x - 3a - x - a < 2a \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \begin{array}{l} \begin{cases} x \le 3a, \\ a < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3a < x < -a, \\ x < 2a, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -a, \\ a > 0 \end{cases} \end{array}$$

Оскільки $a < 0$, то третя система сукупності розв’язків не має; друга має розв’язком проміжок $x\epsilon(3a; 2a)$; перша система – проміжок $x\epsilon(-\infty;3a]$.

Об’єднавши знайдені розв’язки запишемо відповідь.

Відповідь. Якщо $a\epsilon(-\infty; 0)$, то $x\epsilon(-\infty; 2a)$.

Якщо $a = 0$, то $x\epsilon\emptyset$.

Якщо $a\epsilon(0; +\infty)$, то $x\epsilon(0; +\infty)$.

Формування дослідницької компетентності також відбувається в процесі розв’язування дробово-раціональних рівнянь у 8 класі та дробово-раціональних нерівностей у 9 класі. Перед розв’язування завдань необхідно пригадати способи розв’язування дробово-раціональних рівнянь та нерівностей.

Приклад 2.16.

Розв'язати рівняння з параметром a.

$$\frac{x^2 + 2m^2}{(x-2m)^2} = \frac{m}{x-2m} - \frac{2m(x+m)}{4mx - x^2 - 4m^2}$$

Розв'язання

Учні помічають, що перед ними дробово-раціональне рівняння з параметром m.

Розв'яжемо дане рівняння за допомогою рівносильних перетворень.

Переносимо у ліву частину всі доданки рівняння:

$$\frac{x^2 + 2m^2}{(x-2m)^2} - \frac{m}{x-2m} + \frac{2m(x+m)}{4mx - x^2 - 4m^2} = 0.$$

Зводимо ліву частину до найменшого знаменника:

$$\frac{x^2 + 2m^2}{(x-2m)^2} - \frac{m}{x-2m} - \frac{2m(x+m)}{(x-2m)^2} = 0;$$

$$\frac{x^2 + 2m^2 - m(x-2m) - 2mx - 2m^2}{(x-2m)^2} = 0.$$

Область визначення рівняння: знаменник не дорівнює нулю:

$$x - 2m \neq 0, x \neq 2m.$$

Виконаємо спрощення в чисельнику:

$$\frac{x^2 - 3mx + 2m^2}{(x-2m)^2} = 0.$$

Знаходимо значення змінної, при яких чисельник дробу дорівнює нулю (для цього треба розв'язати утворене квадратне рівняння):

$$x^2 - 3mx + 2m^2 = 0 \; (*)$$

Знаходимо дискримінант рівняння:

$$D = (-3m)^2 - 4 \times 2m^2 = m^2.$$

Слід розглянути такі випадки:

1. $D > 0$, тобто $m^2 > 0$, $m\epsilon(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$, рівняння буде мати два різ корені:

$$x_{1,2} = \frac{3m \pm |m|}{2}, x_1 = 2m \text{ або } x_2 = m\ .$$

2. $D = 0$, тобто $m^2 = 0$, $m = 0$, буде мати два рівні корені $x_{1,2} = 0$.

.

Врахуємо область визначення рівняння:

При $m \epsilon (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $x_1 = 2m$ – не належить області визначення рівняння, а $x_2 = m$ – належить.

При $m = 0$, $x_{1,2} = 0$ – не належить області визначення.

Відповідь. Якщо $m \epsilon (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$,то $x = m$.

Якщо $m = 0$, то $x \in \emptyset$.

Приклад 2.17.

Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-5)(x-a)}{x-5} \geq 0$ з параметром a.

Розв'язання

Учень зазначає, що першим кроком є знаходження області визначення:

$$x - 5 \neq 0, x \neq 5.$$

Скоротимо дріб у лівій частина нерівності на множник $x - 5 \neq 0$, отримаємо: $x - a \geq 0$, $x \geq a$.

Наступним етапом навчальна діяльність учнів пов'язана із врахуванням випадків, за яких виконується вимого задачі. Таких випадків три: 1) $a > 0$; 2) $a < 0$; 3) $a = 0$.

Розглянемо ці випадки:

1. Якщо $a > 0$, то $x \geq a$.
2. Якщо $a < 0$, то $x \in R$.
3. Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in R$.

Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Якщо $a \in (0; +\infty)$, то $x \geq a$.

На третьому етапі в учнів під керівництвом вчителя формуються такі дослідницькі вміння: опрацювання різних способів розв'язування дослідницької задачі (у нашому випадку задачі з параметрами); аналіз їх ефективності; обґрунтування результатів. Наведемо приклади таких завдань 2.18-2.19.

Запропонований приклад можна дати учням 8 класу під час вивчення теми «Квадратні рівняння».

Приклад 2.18.

Знайти всі значення параметра m, при яких рівняння

$|x^2 - 6x| = m$ має три розв'язки.

Розв'язання

Учні пропонують розв'язати дане рівняння з модулем двома способами: аналітичним (використати рівносильний перехід до сукупності рівнянь) та графічним (шляхом побудови графіків функцій $y = |x^2 - 6x|$ та $y = m$).

Наступним кроком учень має проаналізувати, коли дане рівняння має три корені.

Необхідно розглянути лише випадок, коли $m > 0$ (при від'ємних значеннях параметра рівняння не має розв'язків, при $m = 0$ не може бути більше, ніж два розв'язки).

(1 спосіб аналітично)

Знаходимо область визначення рівняння: і параметр і змінна можуть приймати будь-які дійсні значення.

При $m > 0$ задане рівняння буде рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 6x = m, \\ x^2 - 6x = -m. \end{array}\right.$$

Тобто

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 6x - m = 0, \\ x^2 - 6x + m = 0 \end{array}\right. .$$

Наступним кроком учень має проаналізувати, коли рівняння має три розв'язки.

Щоб сукупність двох квадратних рівнянь мала три розв'язки, потрібно, щоб перше квадратне рівняння мало два розв'язки (при $D_1 > 0$), а друге – один (при $D_2 = 0$). Та навпаки.

Оскільки значення параметра вже обмежені ($m > 0$), то при цих значеннях перше рівняння вже має 2 розв'язки, отже, необхідно, щоб друге рівняння мало лише 1 розв'язок.

$D_1 = 36 + 4m > 0$ при всіх $m > 0$.

$D_2 = 36 - 4m = 0$, звідки$m = 9$.

Відповідь. $m = 9$.

(2 спосіб графічно)

1. Побудуємо графік функції $m = |x^2 - 6x|$ у системі координат xOa за допомогою геометричних перетворень графіків.

Побудуємо графік функції $m = x^2 - 6x = (x^2 - 6x + 9) - 9 = (x - 2)^2 - 9$. Частину графіка функції $m = x^2 - 6x$, яка розташована над віссю абсцис, залишаємо, а ту частину, що розташована вище – відображаємо симетрично осі абсцис вгору. Отримаємо графік $m = |x^2 - 6x|$.

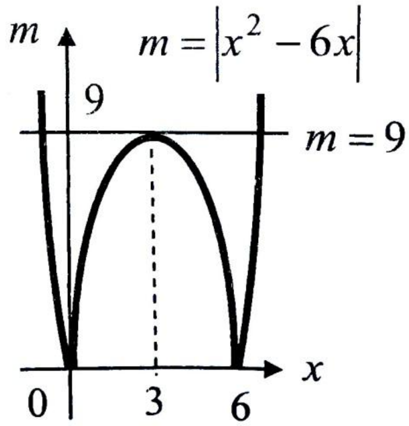


Рис.9

2. Очевидно, лише пряма $m = 9$ перетинає графік функції $m = |x^2 - 6x|$ у трьох точках. Тобто лише при $m = 9$ рівняння має три розв'язки (рис.9).

Відповідь. $m = 9$.

Вивчаючи тему «Ірраціональні нерівності» у 10 класі можна запропонувати учням наступні завдання.

Приклад розв'язажемо аналітично та використовуючи засоби інформаційно-комукаційних технологій.

Приклад 2.19.

При яких значеннях параметра a існують розв'язки нерівності $\sqrt{1-x^2} > a - x$?

Розв'язання

Учні пропонують розв'язати дану нерівність двома способами: аналітичним (використовуючи прийом введення тригонометричної заміни) та графічно (використовуючи програму Gran1).

1. Аналітичний спосіб.

Учні аналізують які значення може приймати параметр: будь-які дійсні значення.

Далі знаходять область допустимих значень змінної: $x \in [-1; 1]$.

Оскільки $x \in [-1; 1]$, то можна ввести заміну $x = \cos\beta$, $\beta \in [0; \pi]$. Отримаємо нерівність $\sqrt{1-\cos^2\beta} > a - \cos\beta$, звідки $|\sin\beta| > a - \cos\beta$ $(*)$. Так як у нашому випадку $\sin\beta \geq 0$, то нерівність (*) буде мати вигляд $\sin\beta > a - \cos\beta$, звідки $\sin\beta + \cos\beta > a$ (**).

Перетворимо ліву частину нерівності (**) так :

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta\right) > a,$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) > a.$$

Оскільки $\beta \in [0; \pi]$, то $\max\sqrt{2}\sin\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Отже, задана нерівність буде мати розв'язки, якщо $\sqrt{2} > a$.

Відповідь. $a \in \left(-\infty; \sqrt{2}\right)$.

2. Графічний спосіб розглянуто у пункті 2.4. Приклад2.

Наступним етапом дослідницької діяльності вважаємо формування наступних умінь: співвіднесення результату дослідження з метою; перевірка розв'язку та його відповідність вимогам дослідницької задачі. Пропонуємо до уваги приклади 2.20-2.26.

Формується дослідницька компетентність й під час вивчення теми «Тригонометричні рівняння та нерівності» у 10 класі. Для розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей із параметрами необхідно знати базові положення тригонометрії (радіанна міра кутів, означення та властивості тригонометричних функцій довільного кута), тригонометричні формули, а також вміти розв'язувати найпростіші тригонометричні рівняння та нерівності.

Приклад 2.20.

При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)(\operatorname{tg}x-1)=0$ має єдиний корінь на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$?

Розв'язання

Важливо проаналізувати всі можливі розв'язки рівняння з урахуванням області допустимих значень, відповідність їх умові задачі, а саме: на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ рівняння має єдиний корінь; у відповіді врахувати всі одержані результати.

Використовуючи властивості тригонометричної функції $\operatorname{tg}x$, учні знаходять, що область визначення: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. Тоді буде рівняння рівносильне наступній сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x=a, \\ \operatorname{tg}x=1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=a, \\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z \end{array}\right.; \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=a, \\ x=\frac{\pi}{4}; \end{array}\right. \\ 0<x<\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь. При $a\in(-\infty;0]\cup\left[\frac{\pi}{2};+\infty\right)\cup\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

Приклад 2.21.

Розв'яжіть нерівність $\cos x-\frac{1}{\cos x}\leq a$, для $a>0$.

Розв'язання

Першим кроком учні знаходять область значень $-1\leq\cos x\leq 1$. Потім зазначають, що при умові, що $\cos x>0$, дріб $\frac{1}{\cos x}\geq 1$, а задана нерівність виконується для всіх x, що задовольняють даній умову, тобто $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

Далі розглядають умову, коли $\cos x < 0$. В даному випадку початкова нерівність набуває вигляду $\cos^2 x - a\cos x - 1 \geq 0$. Розв'язавши дану нерівність як квадратну відносно $\cos x$, отримаємо $\cos x \geq \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ або $\cos x \leq \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$. Оскільки ми розглядаємо випадок $\cos x < 0$, то нерівність $\cos x \geq \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ не має змісту для всіх $a > 0$. Тому $\cos x \leq \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$.

Нерівність $\cos x \leq \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ має розв'язки тоді, коли $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} > -1$. Перепишемо отриману нерівність так: $\sqrt{a^2+4} < a+2$. піднісши обидві частини нерівності до квадрата та виконавши спрощення, отримаємо $a > 0$. Таким чином, ми показали, що нерівність $\cos x \leq \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ виконується при всіх $a > 0$.

Відповідь. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$\arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k \leq x \leq 2\pi - \arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$, $k, n \in Z$.

Продовжують формування дослідницької компетентності в 11 класі під час вивчення теми «Показникові рівняння», «Показникові нерівності», «Логарифмічні рівняння», «Логарифмічні нерівності». Для розв'язання таких рівнянь і нерівностей необхідно знати означення, властивості зазначених функцій та їх способи розв'язування. Важливим моментом розв'язування рівнянь (нерівностей) є перевірка входження коренів до ОДЗ рівняння (нерівності).

Приклад 2.22.

Розв'яжіть рівняння з параметром a: $2^{2x} - (2a+1)2^x + a^2 + a = 0$.

Розв'язання

Першим кроком учні знаходять область допустимих значень параметра і змінної: і змінна x, і параметра a можуть приймати будь-які дійсні значення.

Для розв'язання даного рівняння, учні пропонують використати спосіб введення допоміжного невідомого.

Введемо заміну: $2^x = t$, де $t > 0$. Отримаємо квадратне рівняння відносно змінної t. Розв'яжемо утворене рівняння.

$$t^2 - (2a + 1)t + (a^2 + a) = 0,$$

$D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + a) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1 > 0$, отже, квадратне рівняння при будь-яких значеннях параметра буде мати два різні корені: $t_1 = \frac{2a+1-1}{2} = a$, $t_2 = \frac{2a+1+1}{2} = a + 1$.

Повернемося до заміни.

Коли $t_1 > 0$, тобто $t_1 = a > 0$; отже, якщо $a \in (0; +\infty)$, то повертаємось до заміни: $2^x = a$, $\log_2 2^x = \log_2 a$, $x = \log_2 a$.

Коли $t_2 > 0$, тобто $t_2 = a + 1 > 0$ для $a > -1$; отже, якщо $a \in (-1; +\infty)$, то повертаємось до заміни: $2^x = a + 1$, $x = \log_2(a + 1)$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -1]$, то $x \in \emptyset$.

Якщо $a \in (-1; 0)$, то $x = \log_2(a + 1)$.

Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Якщо $a \in (0; +\infty)$, то $x = \log_2 a$, $x = \log_2(a + 1)$.

Приклад 2.23.

Розв'яжіть нерівність $\log_a(x^2 + x + 2) < \log_a(2x^2 - 18)$ з параметром a, якщо відомо, що вона перетворюється в істинну числову нерівність при $x = -3{,}5$.

Розв'язання

На початку учні здійснюють аналіз умови.

За умовою нерівність перетворюється в істинну числову нерівність при $x = -3{,}5$.

Далі пропонують підставити це значення змінної у нерівність і подивитися що вийде. Як правило, це дає можливість знайти певні обмеження для параметра.

Область визначення логарифмічної функції:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ x^2 + x + 2 > 0, \\ 2x^2 - 18 > 0 \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty) \end{cases}$$

Далі учні аналізують, в яких межах знаходиться основа логарифма, тобто параметр a. Підставимо $x = -3{,}5$ у нерівність, отримаємо:

$$\log_a\left(\frac{49}{4} - \frac{7}{2} + 2\right) < \log_a\left(2 \times \frac{49}{4} - 18\right);$$

$$\log_a\left(\frac{43}{4}\right) < \log_a\left(\frac{26}{4}\right);$$

$$\frac{43}{4} > \frac{26}{4}, \text{ отже } a \in (0; 1).$$

Розв'яжемо нерівність враховуючи знайдене обмеження:

$$x^2 + x + 2 > 2x^2 - 18,$$

$$x^2 + x - 20 < 0,$$

$$(x - 5)(x - 4) < 0,$$

$$x \in (-4; 5).$$

Врахуємо область визначення нерівності, отримаємо:

$$\begin{cases} x \in (-4; 5), \\ x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty), \end{cases}$$

$$x \in (-4; -3) \cup (3; 5)$$

Відповідь. При $a \in (0; 1)$, $x \in (-4; -3) \cup (3; 5)$.

Наступні приклади з трансцендентними функціями, порівняно з попередніми, є складніші. Їх можна запропонувати учням на факультативних заняттях або в 11 класі після вивчення логарифмічної і показникової функцій.

Приклад 2.24.

ЗНО 2015

36. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\frac{(x^2 - 2(a + 1)x + 6a - 3)(tg\pi x - 1)}{\sqrt[4]{49x^2 - 84xa + 36a^2}} = 0$$

на проміжку $[0; 1]$ має рівно два різні корені?

Розв'язання

Важливо проаналізувати всі можливі розв’язки рівняння з урахуванням області допустимих значень, відповідність їх умові задачі, а саме: на проміжку $[0;1]$ рівняння має рівно два різні корені; у відповіді врахувати всі одержані результати.

Запишемо область визначення рівняння: це всі значення змінної, при яких знаменник дробу не дорівнює нулю та підкореневий вираз невід’ємний, тобто маємо $49x^2 - 84xa + 36a^2 > 0$, $(7x - 6a)^2 > 0$, звідки $x \neq \frac{6a}{7}$.

Врахуємо також, що $\pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, звідки $x \neq \frac{1}{2} + n$, де $n \in Z$. За умовою, корені потрібно обрати на проміжку $[0;1]$, тому $0 \leq \frac{1}{2} + n \leq 1$, де $n \in Z$, звідки $n = 0$, отже $x \neq \frac{1}{2}$.

Врахувавши область визначення перейдемо від рівняння

$$\frac{(x^2 - 2(a+1)x + 6a - 3)(tg\pi x - 1)}{\sqrt[4]{49x^2 - 84xa + 36a^2}} = 0$$

до сукупності

$$\left[\begin{array}{c} x^2 - 2(a+1)x + 6a - 3 = 0, \\ tg\pi x - 1 = 0 \end{array}\right. \quad (*).$$

Розв’яжемо перше рівняння сукупності (*).

$$x^2 - 2(a+1)x + 6a - 3 = 0;$$

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння:

$D = 4(a+1)^2 - 4(6a - 3) = 4(a^2 + 2a + 1 - 6a + 3) = 4(a-2)^2$;

Необхідно розглянути випадок коли $D > 0$, тобто $4(a-2)^2 > 0$, звідки $a \neq 2$.

Тоді $x_{1,2} = \frac{2(a+1) \pm 2|a-2|}{2} = (a+1) \pm |a-2|$.

$x_1 = a + 1 - a + 2 = 3$ – не належить проміжку $[0;1]$;

$x_2 = a + 1 + a - 2 = 2a - 1$.

Знайдемо значення змінної $x = 2a - 1$ буде коренем заданого рівняння на проміжку $[0;1]$ при тих значеннях параметра, які задовольняють умови:

$$\begin{cases} 0 \le 2a - 1 \le 1, \\ 2a - 1 \ne \dfrac{6a}{7}, \\ 2a - 1 \ne \dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le a \le 1, \\ 2a - \dfrac{6a}{7} \ne 1, \\ 2a \ne \dfrac{3}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le a \le 1, \\ \dfrac{8a}{7} \ne 1, \\ a \ne \dfrac{3}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le a \le 1, \\ a \ne \dfrac{7}{8}, \\ a \ne \dfrac{3}{4} \end{cases},$$

звідки $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right]$

Розглянемо випадок, коли $D = 0$, тоді $4(a-2)^2 = 0$, звідки $a = 2$. Тоді $x_1 = x_2 = \frac{2(a+1)}{2} = a + 1 = 3$ – не належить проміжку $[0; 1]$.

Розв’яжемо друге рівняння сукупності (*).

$$tg\pi x - 1 = 0;$$

$$tg\pi x = 1;$$

$$\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{де } k \in Z;$$

$$x = \frac{1}{4} + k, \text{де } k \in Z.$$

За умовою, корені потрібно обирати на проміжку $[0; 1]$, тому

$0 \le \frac{1}{4} + k \le 1$, де $k \in Z$, звідки $k = 0$, отже $x = \frac{1}{4}$. Знайдене значення змінної буде коренем заданого рівняння на проміжку $[0; 1]$ при тих значеннях параметра, які задовольняють умови:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} \ne \dfrac{6a}{7}, \\ \dfrac{1}{4} \ne \dfrac{1}{2} \end{cases}, \text{ звідки } a \ne \frac{7}{24}.$$

Коренів на проміжку $[0; 1]$ має бути два, тому $x = 2a - 1$ не повинен співпадати з $x = \frac{1}{4}$, тобто $2a - 1 \ne \frac{1}{4}$, звідки $a \ne \frac{7}{24}$.

Отже, якщо $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right]$, то на проміжку $[0; 1]$ будемо мати корінь $x = 2a - 1$. Якщо $a \ne \frac{7}{24}$, то на проміжку $[0; 1]$ будемо мати корінь $x = \frac{1}{4}$. Якщо $a \ne \frac{5}{8}$, то знайдені корені будуть різними.

Відповідь. $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right]$.

Наступні приклад учням можна запропонувати розв'язати самостійно.

Приклад 2.25.

ЗНО 2016

33. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{x^2+(4a-4)x+4a^2}-2\sqrt{2a}}{5\times 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x}=0$ залежно від параметра a.

Розв'язання

Важливо проаналізувати всі можливі розв'язки рівняння з урахуванням області допустимих значень, відповідність їх умові задачі; у відповіді врахувати всі одержані результати.

Знайдемо область визначення заданого рівняння:

$$\begin{cases} x^2+(4a-4)x+4a^2\geq 0, \\ 2a\geq 0, \\ 5\times 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x\neq 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x^2+(4a-4)x+4a^2\geq 0, \\ a\geq 0, \\ 5\times 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x\neq 0 \end{cases};\quad (*)$$

Знайдемо окремо значення змінної x, при яких знаменник дробу перетворюється в нуль:

$$5\times 5^{2x}-5^{a+x}-5^{a-1}+5^x=0;$$

$$5\times 5^{2x}-(5^a-1)5^x-5^{a-1}=0;$$

Введемо заміну $5^x=t>0$, тоді

$$5t^2-(5^a-1)t-5^{a-1}=0;$$

Знайдемо дискримінант:

$$D=(5^a-1)^2-4\times 5(-5^{a-1})=5^{2a}-2\times 5^a+1+4\times 5^a=(5^a+1)^2>0;$$

Тоді $x_{1,2}=\frac{5^a-1\pm|5^a+1|}{10}$.

$$x_1=\frac{5^a-1-5^a-1}{10}=-\frac{1}{5};$$

$$x_1=\frac{5^a-1+5^a+1}{10}=5^{a-1}>0.$$

Повертаємось до заміни: $5^x=t$, звідки $x=a-1$.

Отже, систему (*) можна записати так:

$$\begin{cases} x^2+(4a-4)x+4a^2\geq 0, \\ a\geq 0, \\ x\neq a-1 \end{cases};\quad (**).$$

Дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник ні. Перейдемо на визначеній області визначення до такого рівнянню:

$$\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a} = 0;$$

$$\sqrt{x^2 + (4a - 4)x + 4a^2} = 2\sqrt{2a};$$

$$x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 = 8a;$$

$$x^2 + (4a - 4)x + 4a^2 - 8a = 0;$$

$$D = 16(a - 1)^2 - 16(a^2 - 2a) = 16(a^2 - 2a + 1 - a^2 + 2a) = 16 > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-4(a - 1) \pm 4}{2} = -2(a - 1) \pm 2;$$

$$x_1 = -2(a - 1) - 2 = -2a + 2 - 2 = -2a;$$

$$x_2 = -2(a - 1) - 2 = -2a + 2 + 2 = -2a + 4.$$

Значення $x_1 = -2a$ є коренем заданого рівняння при тих значеннях параметра, при яких $x_1 = -2a$ задовольняє систему (**). Знайдемо ці значення:

$$\begin{cases} (-2a\ )^2 + (4a - 4)(-2a\ ) + 4a^2 \geq 0, \\ a \geq 0, \\ -2a\ \neq a - 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4a^2 - 8a^2 + 8a + 4a^2 \geq 0, \\ a \geq 0, \\ -3a\ \neq -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ a \geq 0, \\ a\ \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$, звідки $a \in [0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Значення $x_2 = -2a + 4$ є коренем заданого рівняння при тих значеннях параметра, при яких $x_2 = -2a + 4$ задовольняє систему (**). Знайдемо ці значення:

$$\begin{cases} (-2a + 4\ )^2 + (4a - 4)(-2a + 4\ ) + 4a^2 \geq 0, \\ a \geq 0, \\ -2a + 4\ \neq a - 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4a^2 - 16a + 16 - 8a^2 + 16a + +8a - 16 + 4a^2 \geq 0, \\ a \geq 0, \\ -3a\ \neq -5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ a \geq 0, \\ a \neq \frac{5}{3} \end{cases}, \text{ звідки } a \in [0; 1\frac{2}{3}) \cup \left(1\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

При $a = \frac{1}{3}$ коренем буде $x_2 = -2a + 4 = -2 \times \frac{1}{3} + 4 = 3\frac{1}{3}$, а при $a = \frac{5}{3}$ коренем буде $x_1 = -2a = -2 \times \frac{5}{3} = -3\frac{1}{3}$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то рівняння не має змісту.

Якщо $a \in [0; \frac{1}{3}) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\frac{2}{3}\right) .\cup \left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$, то $x = -2a$, $x = 4 - 2a$.

Якщо $a = 1\frac{2}{3}$, то $x = -3\frac{1}{3}$.

Якщо $a = \frac{1}{3}$, то $x = 3\frac{1}{3}$.

Приклад 2.26.

<u>ЗНО 2013 (1 сесія)</u>

33. Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння $\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16 + a - x}$ належить проміжку $(1{,}5; 2)$.

Розв'язання

Знайдемо область визначення заданого рівняння:

$$\begin{cases} \sin 5\pi x > 0, \\ 16 + a - x \geq 0 \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} \sin 5\pi x > 0, \\ x \leq 16 + a \end{cases} (*).$$

Розглянемо ліву частину $\lg(\sin 5\pi x)$ заданого рівняння. Оскільки $\sin 5\pi x > 0$ і $-1 \leq \sin 5\pi x \leq 1$ (це обмежена функція), то $0 \leq \sin 5\pi x \leq 1$. Таким чином, $\lg(\sin 5\pi x) \leq 0$.

Розглянемо праву частину $\sqrt{16 + a - x}$ заданого рівняння. Очевидно, що $\sqrt{16 + a - x} \geq 0$.

Отже, одночасно виконати вимоги $\lg(\sin 5\pi x) \leq 0$ і $\sqrt{16 + a - x} \geq 0$ можна, якщо ліва та права частини рівняння дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \lg(\sin 5\pi x) = 0, \\ \sqrt{16 + a - x} = 0 \end{cases}; \text{ тобто } \begin{cases} \lg(\sin 5\pi x) = \lg 1, \\ 16 + a - x = 0 \end{cases}; \begin{cases} \sin 5\pi x = 1, \\ x = 16 + a \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \epsilon Z \\ x = 16 + a \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}k, k \epsilon Z \\ x = 16 + a \end{cases} (**).$$

Зауважимо, що значення змінної, які подані в системі (**) задовольняють область визначення рівняння (це система (*)).

Оскільки корінь заданого рівняння, за умовою, повинен належати проміжку $(1{,}5; 2)$, то $1{,}5 < \frac{1}{10} + \frac{2}{5}k < 2$, $k \epsilon Z$. Розв'яжемо цю подвійну нерівність:

$$15 < 1 + 4k < 20;$$

$$14 < 4k < 19;$$

$$\frac{7}{2} < k < \frac{19}{4};$$

$$k = 4\text{, бо } k \epsilon Z.$$

Отже, $x = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}k = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \times 4 = \frac{1}{10} + \frac{8}{5} = \frac{17}{10} = 1{,}7$.

Перепишемо систему (**) так: $\begin{cases} x = 1{,}7 \\ x = 16 + a \end{cases}$; $16 + a = 1{,}7$, звідки $a = -14{,}3$.

Відповідь. $a = -14{,}3$.

2.4. Розв'язування задач з параметрами за допомогою програми GRAN1

Нині в навчальному процесі все ширше використовуються комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання, що базуються на сучасних інформаційно-комунікаційних технологіях (ІКТ), перспективи використання яких досі далеко не повністю розкриті. Бурхливий розвиток ІКТ спонукає до постійного пошуку нових перспектив їх використання в навчальному процесі, зокрема у навчанні математики. Питаннями впровадження інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики у школі займаються М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко, О.В. Вітюк, В.П. Горох, Т.Г. Крамаренко, С.А. Раков, О.І. Скафа, О.В. Співаковський, Ю.В. Триус та ін. [18, 19, 23, 26, 49].

Значні можливості комп'ютерної підтримки навчання математики розкриваються на основі педагогічно виваженого, методично вмотивованого і доцільного використання в навчальному процесі програми навчального призначення GRAN1, його значного удосконалення за рахунок розширення кола розв'язуваних задач, унаочнення навчального матеріалу, диференціації навчання відповідно до нахилів, запитів і здібностей учнів, розкриття творчого потенціалу учнів і вчителів. Цей програмний засіб не потребує надпотужних комп'ютерів з високими вимогами до графічного інтерфейсу. Програмний засіб GRAN1 простий у користуванні, оснащений інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом, від користувача не вимагається значних затрат часу і зусиль для оволодіння правилами роботи з ним.

Використання GRAN1 під час розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем з параметрами надає можливість учням творчо підходити до пошуку шляхів відшукання розв'язків, застосовувати різні методи розв'язування, спираючись на знання з різних розділів математики, уміння будувати графіки залежностей між змінними, знаходити і подавати графічно множини розв'язків нерівностей та їх систем за допомогою комп'ютера та проводити графічні і аналітичні дослідження [23].

Розглянемо приклади.

У 8 класі при вивчені теми «Квадратні рівняння» пропонуємо учням розглянути приклад 2.27 та провести графічне дослідження кількості коренів даного рівняння.

Приклад 2.27.

Знайти максимальну кількість розв'язків рівняння $|x^2 - 5x - 6| = a$.

Розв'язання

Розглянемо функції: $y = |x^2 - 5x - 6|$ та $y = a$. Скориставшись явним заданням залежностей між змінними x і y (замінивши позначення a на $p1$, де $p1$ – змінний параметр), побудуємо за допомогою GRAN1 графік функції $y = |x^2 - 5x - 6|$ – парабола, вітки якої відображені вгору симетрично відносно осі Ox (рис.1).

Далі побудуємо графік функції $y = p1$ за деякого фіксованого значення змінного параметра $p1$, через яку для кожного фіксованого значення параметра $p1$ задається пряма на координатній площині xOy. Змінюючи значення параметра $p1$, будемо одержувати різні паралельні між собою прямі. Потрібно визначити значення параметра $p1$, при якому знайдеться максимальна кількість спільних точок параболи $y = |x^2 - 5x - 6|$ і прямої $y = p1$.

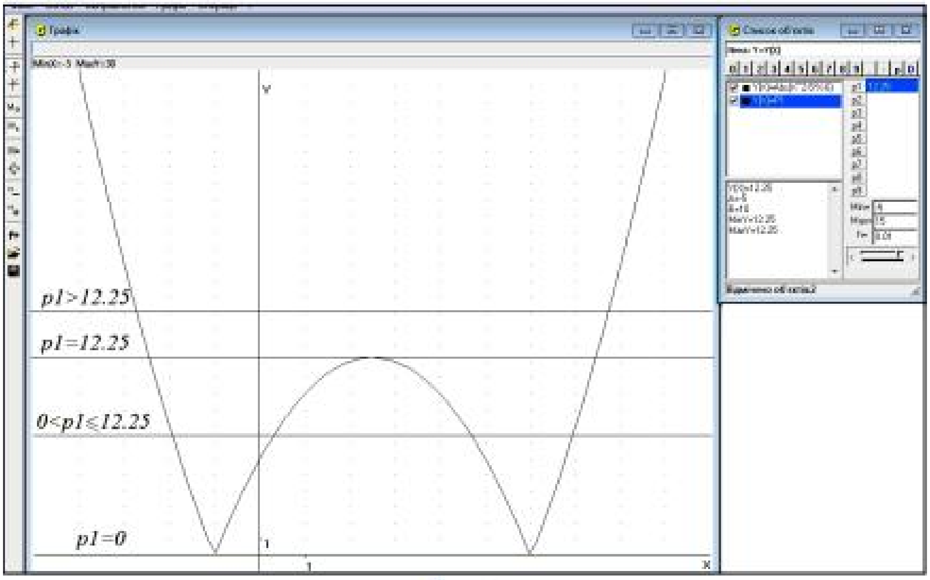


Рис.10

З рис. Можна зробити висновок, що коли:

1. $p1 < 0$, то розв'язків немає (спільних точок параболи $y = |x^2 - 5x - 6|$ і прямої $y = p1$ не існує);
2. $p1 = 0$ або $p1 > 12{,}25$ – існує два розв'язки.
3. $0 < p1 \leq 12{,}25$ – існує чотири розв'язки.

Отже, рівняння $|x^2 - 5x - 6| = a$ матиме максимальну кількість розв'язків при $0 < a \leq 12{,}25$.

Під час узагальнення теми «Ірраціональні нерівності» у 10 класі пропонуємо учням розглянути приклад 2.28. Цей приклад був розв'язаний аналітичним способом в пункті 2.19.

Приклад 2.28.

При яких значеннях параметра a існують розв'язки нерівності $\sqrt{1 - x^2} > a - x$?

Розв'язання

Розглянемо функції: $y = \sqrt{1 - x^2}$ та $y = a - x$. Скориставшись явним заданням залежностей між змінними x і y (замінивши позначення a на $p1$, де $p1$ – змінний параметр), побудуємо за допомогою GRAN1 графік функції $y = \sqrt{1 - x^2}$ – верхню половину кола з центром $(0; 0)$ (рис.2).

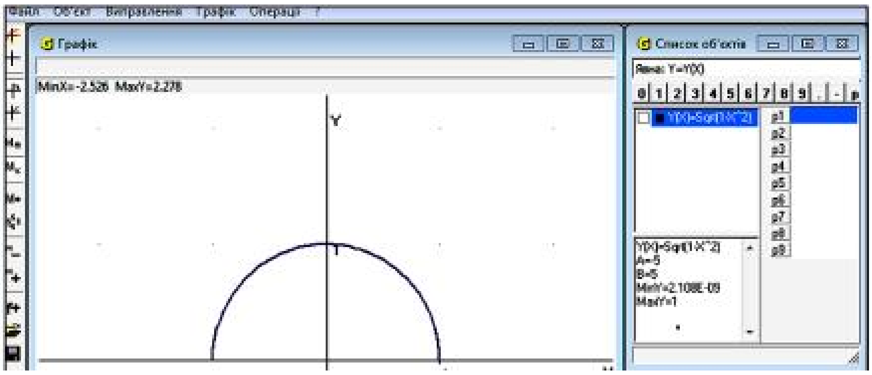


Рис.11

Далі побудуємо графік функції $y = p1 - x$ при деякому фіксованому значенні змінного параметра $p1$, через яку для кожного фіксованого значення параметра $p1$ задається пряма на координатній площині xOy. Змінюючи значення параметра $p1$, будемо одержувати різні паралельні між собою прямі. Потрібно визначити таке значення параметра $p1$, при якому знайдуться точки півкола, що розташовані вище відповідних точок прямої. Такі точки існуватимуть лише в тому випадку, якщо пряма y=p1–x займе положення зліва від прямої, що дотикається до півкола і віддалена від центра на відстань, що дорівнює радіусу кола (рис. 3). З рис. 3 видно, що пряма $y = p1 - x$ дотикається до півкола $y = \sqrt{1 - x^2}$, коли $p1 = 1{,}42$.

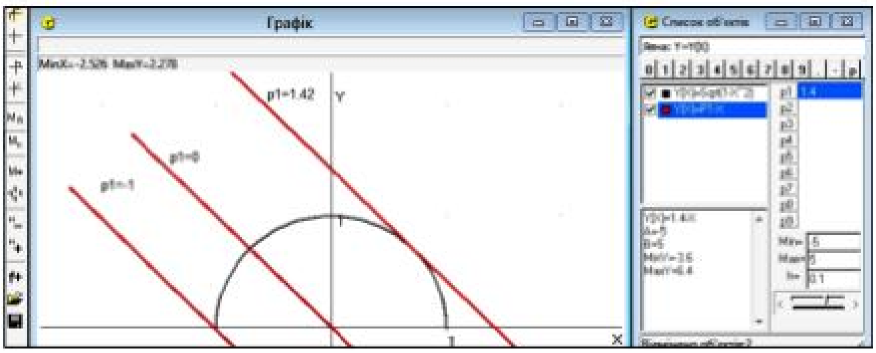


Рис.12

Отже, при $p1 < 1{,}42$ у нерівності $\sqrt{1 - x^2} > a - x$ існують розв'язки.

Порівнюючи два способи розв'язання даної нерівності, виявилося, що в даному випадку графічний спосіб є більш наочним і простішим. В обох випадках кінцеві розв'язки співпадають.

У 9 класі під час вивчення теми «Квадратична функція» учням можна запропонувати розглянути наступний приклад 2.29.

Приклад 2.29.

Скільки розв'язків має система $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ залежно від значення параметра a?

Розв'язання

Перш за все, потрібно відмітити, що при $a \le 0$ система розв'язків не має. Скориставшись неявним заданням залежностей між змінними x і y (замінивши позначення a на $p1$, де $p1$ – змінний параметр), маємо: графіком залежності $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ є коло з центром у початку координат і радіусом, рівним 1, або множина точок $\{(x,y)|x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, графіком залежності $G(x,y) = |x| + |y| - p1 = 0$ є квадрат з центром $(0;0)$, або множина точок $\{(x,y)||x| + |y| - p1 = 0\}$ (рис.4)

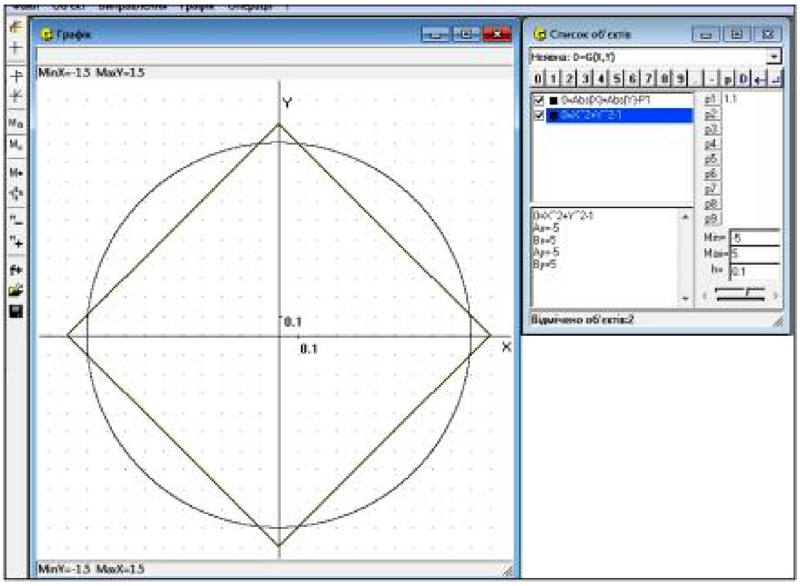


Рис.13

Скориставшись програмою GRAN1, побудуємо графік залежності $G(x,y) = |x| + |y| - p1 = 0$, надавши спочатку параметру $p1$ значення 0. При цьому графік вказаної залежності вироджується в точку $(0;0)$. Збільшуючи поступово значення параметра $p1$ (через яке задається відстань від центра до вершини квадрата — половина довжини діагоналі квадрата), будемо бачити (рис. 5) що, коли $0 < p1 < 1$, тоді квадрат знаходиться всередині кола, і тому вказана система рівнянь не має розв'язків (при $p1 < 1$); при $p1 = 1$ – квадрат стає вписаним у коло, його вершини виявляються точками на колі, а тому задана система рівнянь має чотири розв'язки (точки $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$). Коли $1 < p1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, тоді кожна сторона квадрата двічі перетинається з колом, а тому коли $1 < p1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, задана система рівнянь має вісім розв'язків; коли $p1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ – квадрат стає описаним навколо кола, і тоді розв'язками вказаної системи рівнянь будуть точки дотику сторін квадрата до кола: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

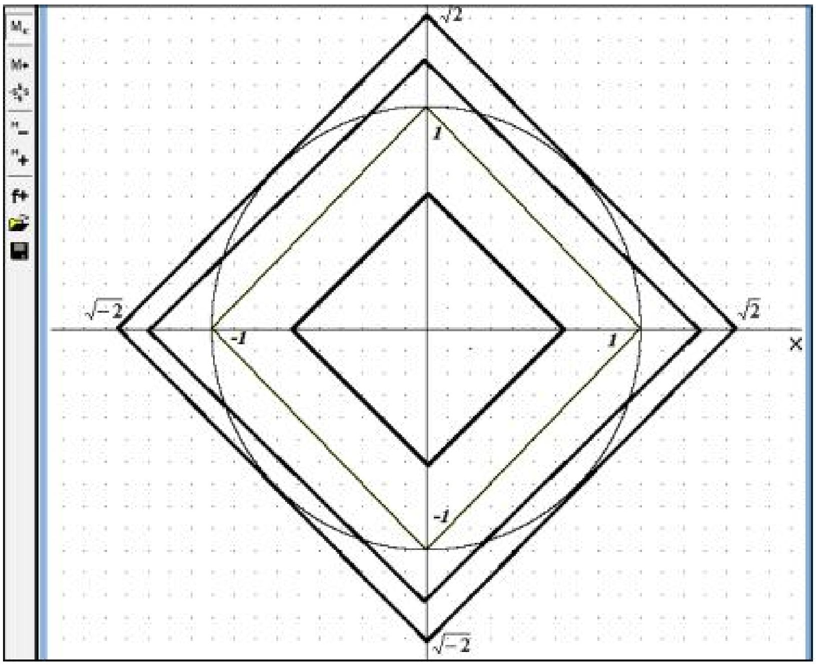


Рис.14

Коли $p1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то система не має розв'язків.

Отже, якщо $p1 < 1$ або $p1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то система не має розв'язків; якщо $p1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то система має чотири розв'язки; якщо $1 < p1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то система має вісім розв'язків.

Застосування програми Gran1 полегшує процес побудови графічного зображення, допомогає знайти розв'язки задач, встановити кількість розгалужень. Програму можна застосовувати до багатьох задач, що зазвичай розв'язуються аналітичним методом. Використання цієї програми робить задачі з параметрами більш доступними кожному, хто має елементарні навички роботи з комп'ютером, дозволяє учню досягти успіху, навіть якщо вона не володіє деякими теоретичними знаннями.

2. 5. Експериментальна перевірка основних положень дослідження та її результат.

З метою з'ясування ефективності запропонованої методики навчання учнів розв'язування задач з параметрами, що орієнтована на формування дослідницької компетентності, було проведено педагогічний експеримент.

Навчально-педагогічний експеримент з теми дослідження ми проводили в Чернігівському обласному педагогічному ліцеї для обдарованої сільської молоді. В нашому дослідженні були задіяні учні 11 класу фізико-математичного профілю.

На першому етапі проводився теоретичний аналіз навчальних планів і програм з математики, психолого-педагогічної та навчально-методичної літератури з проблеми дослідження. Вивчалась психолого-педагогічна та навчально-методична література з питань формування дослідницької компетентності учнів під час розв'язування задач з параметрами. Також здійснювалося спостереження за навчальним процесом, вивчалися результати навчально-пізнавальної діяльності учнів, проводилися бесіди з учнями та вчителями, вивчення та аналіз педагогічного досвіду вчителів математики закладів загальної середньої освіти.

На другому етапі відбувався пошук та добір системи задач з параметрами, спрямованих на формування навчально-дослідницьких умінь учнів.

На третьому етапі відбувалася експериментальна перевірка ефективності розробленої методики, її вдосконалення, а також проводилося опрацювання отриманих результатів.

Експериментальне навчання учнів 11 класу здійснювалося на факультативному курсі, присвяченому задачам з параметрами.

Експериментальним навчанням було охоплено 29 учнів.

На початку експерименту було проведено контрольний зріз знань, метою якого було перевірити початковий рівень сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів. Запропоновані завдання передбачали перевірити у школярів, вміння: спостерігати, аналізувати, досліджувати умову задачі; висувати гіпотезу; складати план дій та реалізовувати його; співвідносити отримані результати з умовою задачі. Розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь на початку експериментального навчання подано в таблиці 1. Зміст контрольної роботи подано у Додатку А.

Табл.1

Розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь на початку експериментального навчання

Рівні сформованості навчально-дослідницьких умінь					
Низький		Середній		Високий	
кількість	%	кількість	%	кількість	%
11	37,9	12	41,4	6	20,7

Для проводження факультативних занять розроблена методична система задач була запропоновано вчителю Шидловській Л. М. Під час проходження практики автором дослідження було проведено два факультативні заняття на такі теми: «Показникові рівняння з параметрами», «Показникові нерівності з параметрами». Конспект одного з проведених факультативних занять розміщено у Додатку Б.

В процесі навчання учнів дослідницькій діяльності створювалося середовище таким чином, щоб активізувати навчальну діяльність учнів та спостерігати активність кожного окремого учня. Особлива увага приділялася наведеній учнями аргументації.

При визначенні рівня сформованості навчально-дослідницьких умінь учнів наприкінці експериментального навчання враховувалися степінь самостійності. Розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь наприкінці експериментального навчання подано в таблиці 2. Зміст контрольної роботи подано у Додатку В.

У процесі експериментального навчання зросла частина учнів, які проявляли ініціативу під час розв’язування задач з параметрами.

Табл. 2

Розподіл учнів за рівнями сформованості навчально-дослідницьких умінь наприкінці експериментального навчання

Рівні сформованості навчально-дослідницьких умінь					
Низький		Середній		Високий	
кількість	%	кількість	%	кількість	%
6	20,7	14	48,3	9	31

Динаміку зміни сформованості в учнів навчально-дослідницьких умінь під час експериментального навчання відображено на рис.1.

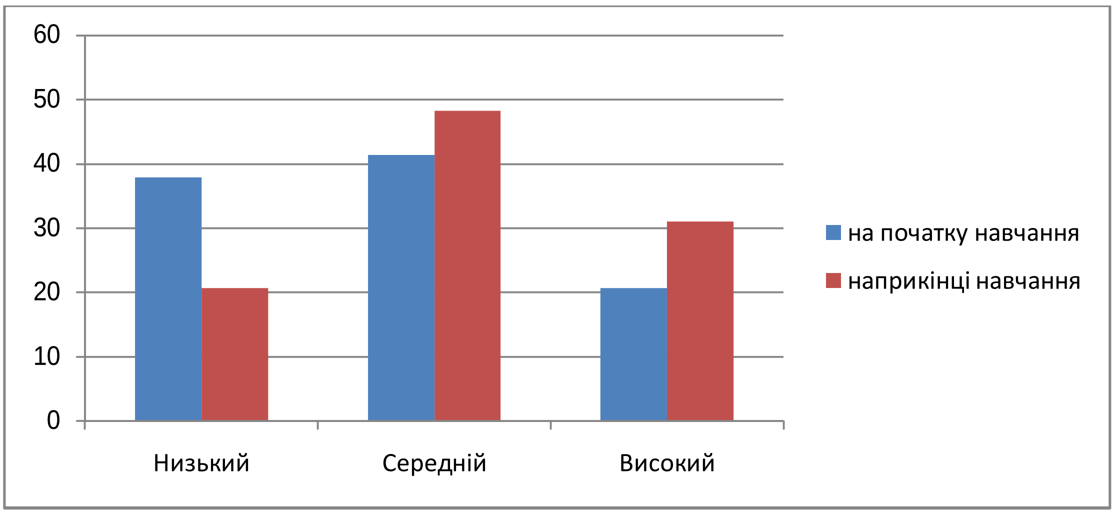


Рис.1. Динаміка сформованості в учнів навчально-дослідницьких умінь під час експериментального навчання

Слід відзначити, що кількість учнів з низьким сформованості навчально-дослідницьких умінь зменшилася, зросла кількість учнів з середнім і високим рівнями навчально-дослідницьких умінь.

Експеримент виявив позитивний вплив запропонованої методики на формування учбових дослідницьких умінь учнів при навчанні учнів розв’язувати задачі з параметрами, зіграв значну роль у її вдосконаленні, зокрема, новим матеріалом були доповнені розроблені системи задач з параметрами.

Висновки

Навчально-дослідницька діяльність учнів організовується вчителем з використанням різноманітних форм організації навчання. Вона спрямована на виявлення закономірних зв'язків і відношень теоретичних або експериментально спостережених фактів, явищ, процесів. В навчально-дослідницькій діяльності учнів переважає самостійне застосування прийомів наукових методів пізнання. В процесі навчально-дослідницької діяльності учні активно здобувають знання, розвивають свої дослідницькі вміння.

Наповнення навчального процесу спеціально підібраними системами задач із параметрами є одним з основних шляхів формування дослідницької компетентності учнів, а також організації елементів дослідницької діяльності на уроках математики. Критерії оцінювання рівня сформованості дослідницької компетентності учнів у процесі розв'язування задач з параметрами безпосередньо пов'язані з їхніми навчальними досягненнями.

При вивченні задач з параметрами у шкільному курсі математики доцільно використовувати такі організаційні форми як навчальні проекти і конференції, лекції, тематичні семінари, консультації. З метою формування дослідницьких умінь необхідно: здійснювати чергування репродуктивного, пояснювально-ілюстративного, дослідницького методів навчання; організовувати самостійну діяльність учнів та поєднувати традиційні засоби навчання та сучасні засоби інформаційно-комунікаційних технологій.

Формуючи дослідницьку компетентність в процесі розв'язування задач з параметрами необхідно, враховувати індивідуальні та вікові особливості учнів.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій навчання, зокрема програмного засобу GRAN1, дозволяє зробити розв'язування задач з параметрами більш наочним і доступним, що також сприяє формуванню дослідницької компетентності учнів.

При підготовці учнів до розв'язування задач з параметрами зовнішнього незалежного оцінювання з математики доцільно використання систематизуючого методу навчання (зокрема, проведення систематизуючих бесід з використанням графічних схем). При цьому основним системоутворюючим фактором є методи розв'язування задач з параметрами. Також варто познайомити учнів з критеріями оцінювання розв'язування тих завдань на ЗНО з математики, для яких передбачається запис розв'язання з повним обґрунтуванням, та навести зразки оформлення розв'язань різними методами.

В ході роботи було проаналізовано психолого-педагогічну й методичну літературу, навчальні програми, проаналізована ЗНО на наявність задач з параметрами, розглянуто трактування дослідницької компетентності різними авторами.

Нами запропоновано етапи формування дослідницької компетентності під час навчання учнів розв'язуванню задач з параметрами, розроблено систему задач із параметрами, що сприяють формуванню дослідницької компетентності та розроблено методичні рекомендації навчання розв'язування систем задач із параметрами для формування дослідницької компетентності учнів.

Розроблена методика дає можливість працювати в профільних, стандартних класах різних типів шкіл і може бути використана вчителями, під час проведення факультативних занять та спецкурсів, які вважають однією з головних задач формування дослідницької компетентності учнів. У залежності від профілю навчання варіюється рівень допомоги з боку вчителя.

Використання розроблених методичних рекомендацій сприяє формуванню в учнів умінь аналізувати об'єкти та взаємозв'язки, застосовувати знання у новій ситуації, використовувати та оцінювати власні стратегії розв'язування пізнавальних проблем, складати та реалізовувати план своєї діяльності, висловлювати свою думку, підвищенню їх грамотності, і, як наслідок, набуттю учнями дослідницької компетентності.

Було проведено експериментальне дослідження під час проходження практики у Чернігівському обласному педагогічному ліцеї для обдарованої сільської молоді. У ході експериментального дослідження отримали підтвердження ефективності розробленої методики формування дослідницької компетентності учнів під час навчання розв'язування задач з параметрами.

Результати дослідження можуть бути використані при розробці методичних посібників для вчителів та учнів, у лекціях для вчителів математики і студентів математичних факультетів педагогічних ЗВО.

В ході роботи з темою кваліфікаційною роботи мету було досягнуто і всі завдання виконано.

Список використаних джерел

1. Акуленко І. А. Формування дослідницьких компетентностей учнів у процесі навчання елементів теорії множин / І. А. Акуленко, Ю. Ю. Лещенко // Дидактика математики: пробл. і дослідж. : зб. наук. пр. - 2009. - Вип. 32. - С. 58-63.
2. Амелькин, В. В., Рябцев В. А. Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике / В. В. Амелькин, В. А. Рабцевич. – Мн. : «Асар», 1996. – 464с.
3. Апостолова Г. В., Ясінський В. Перші зустрічі з параметром. – К.: Факт, 2006. – 324с.
4. Ачкан В. В. До проблеми реалізації компетентнісного підходу в навчанні математики / В. В. Ачкан // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). − №1. – Бердянськ: БДПУ, 2007. – С.60-65.
5. Ачкан В.В. Набуття учнями математичних компетентностей при вивченні рівнянь та нерівностей у старшій школі / В.В. Ачкан // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – № 2. – Бердянськ: БДПУ, 2007. – С. 46 – 52.
6. Ачкан В.В. Реалізація компетентнісного підходу у процесі підготовки учнів до розв’язування рівнянь та нерівностей державної підсумкової атестації з математики / В.В. Ачкан // Збірник наукових праць. Педагогічні науки. Випуск 50. – Ч.1. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2008. – 406 с.
7. Бібік Г.В. Компетентнісний підхід у навчанні математиці як методична проблема: наукові записки / Г.В. Бібік // − Ч.1.− Кіровоград: РВВ КДПУ імені В.Винниченка, 2009.− Випуск 82. – С. 11–15.

8. Бібік Н. М. Переваги і ризики запровадження компетентнісного підходу в шкільній освіті / Н. М. Бібік // Український педагогічний журнал. − 2015. − № 1. − С. 47-58. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ukrpj_2015_1_8
9. Бурда М. І. Компетентнісна орієнтація змісту шкільних підручників з математики // проблеми сучасного підручника : зб. наук. Праць / [ред. кол.; наук. ред. – О. М. Топузов]. – К. : Педагогічна думка, 2014. – Вип. 14. – 866с. – С. 78−85.
10. Вербицький В.В. Дослідницька компетентність старшокласників як засіб формування особистості. *Сучасний виховний процес: сутність та інноваційний потенціал* : матеріали звіт. наук.-практ. конф. Ін-ту проблем виховання НАПН України за 2017 рік / [За ред. І.Д. Беха, Р.В. Малиношевського]. – Вип.6. Івано-Франківськ: НАІР, 2018. С. 44-.47.
11. Вдовенко, В. В. Формування дослідницької компетентності учнів на уроках математики / В. В. Вдовенко // Математика в шк. України. – 2013 №34−36. −С. 2−7.
12. Глобін О. І. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник / О. І. Глобін, М. І. Бурда, Д. В. Васильєва, В. В. Волошена, О. П. Вашуленко, Н. Д. Мацько, Т. М. Хмара. − К.: Педагогічна думка, 2015. – 245 с.
13. Головань М. С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М. С. Головань // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 20012» : матеріали міжнародної науково-методичної конференції (6-7 грудня 2012 р.) : у 3-х частинах. - Суми : Виробничо-видавниче підприємство «Мрія», 2012. – Частина 1. - 36-38 с.
14. Головань М. С. Сутність та зміст поняття «дослідницька компетеність» / М. С. Головань, В. В. Яценко // Теорія та методика навчання

фундаментальних дисциплін у вищій школі : зб. наук. пр. – Кривий Ріг : НМетАУ. – Вип. VII. – 2012. – С. 55–62.

15. Головань М. С. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду // http://uabs.edu.ua/images/stories/docs/K_VM/Holovan_03.pdf.
16. Гоменюк, Ганна Володимирівна.Методичні засади реалізації компетентністного підходу в навчанні алгебри учнів основної школи [Текст] : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Гоменюк Ганна Володимирівна ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. - Київ, 2016. - 22 с. : рис., табл.
17. Горнштейн П. І., Полонський В. Б., Якір М. С. Задачі з параметрами. – Тернопіль: підручники і посібники. – 2004. – 256 с.
18. Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. Використання комп’ютерних програм для створення динамічних моделей при вивченні математики // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць − К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. − №4. − С. 56–62.
19. Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. Розв’язування задач із параметрами за допомогою програми GRAN1 // Математика в школі. − 2006. − №4. − С. 25–28.
20. Грищенко Г.О., Філон Л. Г. Дослідницька компетентність учня з алгебри і початків аналізу: Що це? *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами міжнар. наук.-практ. конф., 30 травня – 1 червня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. С. 253-256.
21. Державний стандарт базової і повної середньої освіти. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/ show/1392-2011-п

22. Енциклопедія освіти / Акад. пед. наук України; головний редактор В. Г. Кремень. – К. : Юрінком Інтер, 2008. – 1040с.
23. Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. Математика з комп'ютером : посібник для вчителів. – Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2008. – 278 с.
24. Іващенко А. А. Розв'язання задач з параметрами за допомогою комп'ютера // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2015. – №2. – с. 25-29.
25. Карлащук А. Ю. Формування дослідницьких умов школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами. [Текст] : Теорія та методика навч. матем.: Автореферат дис. канд. пед. наук. / А. Ю. Карлащук. – К., 2001. −19с.
26. Крамаренко Т.Г. Уроки математики з комп'ютером. Посібник для вчителів і студентів / Т.Г. Крамаренко / За ред. М.І. Жалдака. – Кривий Ріг : Видавничій дім, 2008. – 272 с.
27. Мерзляк А. Г. Алгебра. Пропедевтика поглибленого вивчення : навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2015. — 340 с.
28. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 8 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2016. — 384 с.
29. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2017. — 416 с.
30. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підр. Для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2018. — 400 с.
31. Мерзляк А. Г. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х.: Гімназія, 2011. — 431 с.

32. Михайленко, Л. І. Задачі з параметрами / Л. І. Михайленко, Т. Г. Платова // Математика в школах України. − 2008. − №16 − 18(червень). − Спецвипуск.

33. Навчальна програма з математики для учнів 8−9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf.

34. Навчальна програма з математики для учнів 10−11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

35. Навчальна програма з математики для учнів 10−11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv.

36. Натяганов В. Л., Лужина Л. М. Методы решения задач с параметрами: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – 368с.

37. Овчарук О. В. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти / О. В. Овчарук // Стратегія реформування освіти в Україні. – К., 2003. – С. 13-41.

38. Пліско О. В. Задачі з параметрами для 7-8 класів.— Х.: Вид. група «Основа», 2012. — 128 с.

39. Пометун О. І. Компетентнісний підхід до оцінювання рівнів досягнень учнів. – К., 2004. – 10 с.

40. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навч. – метод. посібник. Житомир: ‹‹ Рута››, 2016. − 468с.

41. Равен Дж. Компетентность в современном обществе: выявление, развитие и реалтзация: [пер. С англ.] / Дж. Равен. – М.: «Когитоцентр», 2002. – 396 с.

42. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій: Автореф. дис. докт. пед. наук : 13.00.02. – К., 2005. – 52с.
43. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія / Раков С. А. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.
44. Радигіна І. В. Компетентнісно орієнтований підхід до навчання. – Х. : Вид. група «Основа», 2005. – 96с.
45. Рашевська Н. В. Формування дослідницьких компетентностей учнів на уроках математики в суспільно-гуманітарних класах / Наталя Рашевська // Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця (НПК2016): матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 1-2 грудня 2016 р., м. Суми; у 2-х частинах. – Суми : ФОП Цьома С.П., 2016. – Ч. 2. – 108 с. – С. 23-26.
46. Репета В. К., Клешня Н. О., Короболова М. В., Репета Л. А. Задачі з параметрами: Навч. посіб. – К.: Вища шк., 2006. – 302 с.
47. Репета Л. формирование исследовательской компетенции учащихся [электронный ресурс] / Л. Репета // general and professional education 3/2011 pp. 28-33 режим доступа : http://genproedu.com/paper/2011-03/full_028-033.pdf.
48. Родніна І. В. Компетентнісно орієнтований підхід до навчання.— Харків.: Основа, 2006.— 94 с.
49. Співаковський О.В. Теоретико-методичні основи навчання вищої математики майбутніх вчителів математики з використанням інформаційних технологій : автореф. д-ра пед. наук : 13.00.02 / О.В. Співаковський. – К., 2004. – 44 с.
50. Тонкаль Н. Ю., Філон Л. Г. Навчання учнів елементів математичного дослідження через розв’язування задач з параметрами // *Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та*

*методик їх навчання :*Збірник тез доповідей Регіональної науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених (28 листопада 2018 р., м. Чернігів). Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2018. С. 107-108.

51. Тонкаль Н. Ю., Філон Л. Г. Етапи формування дослідницьких умінь учнів під час навчання розв'язування задач з параметрами. // *Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання :*Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів і молодих учених (27 листопада 2019 р., м. Чернігів). Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2019. С. 97-98.
52. Філон Л. Г., Грищенко Г.О. Графічний метод та його роль у навчанні учнів розв'язування задач з параметрами. // *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2018* : матеріали ІІІ міжнар. наук.-метод. конф. (8-9 листопада 2018 р., м. Суми) : у 2 томах. Т. 2 / упорядн. Чашечникова О. С. – Суми : ФОП Цьома С. П., 2018. С. 24-25.
53. Филон Лидия, Швец Василий, Грищенко Галина. Содержание и характеристика исследовательской деятельности старшеклассников в контексте обучения их решению математических задач м параметрами // Международная научная конференція «Школьный куррикулум проблемы и возможности для развития», (7-8 декабря 2018 г., г. Кишинэу, Республика Молдова) Институт педагогических наук Молдовы. – С. 61-66.
54. Хуторской А. В. Ключевые компетенции как компонент личностноориентированной парадигмы образования / А. В. Хуторской // Народное образование. – 2003. – №2. – С. 55-61.
55. Шавальова Ольга Володимирівна. Реалізація компетентнісного підходу у математичній підготовці студентів медичних коледжів в

умовах комп'ютеризації навчання : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / О. В. Шавальова ; наук. кер. М. І. Жалдак ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. - Київ, 2007. - 20 с

56. Швець, В. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики / В. Швець, А. Прус // Математика. − 2016. − № 10 (трав.). − С. 26−30.
57. Юр’єва К. Зміст і шляхи формування полікультурної компетентності педагогів // Управління школою. – 2004. −№ 33. – с. 10−11 .
58. Ясінський В. В. Математика. Навчальний посібник для слухачів підготовчих курсів ФДП НТУУ «КПІ» / В. В. Ясінський – К. : Вид. Гнозіс, 2014. – 472 с.
59. Ястребинецький Г. А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1972. – 128с.
60. Яценко С. А., Крючковський В. В., Зернов О. Є., Усов А. В., Гришина В. А. Рівняння і нерівності з параметрами: стандартні задачі / частина I /: навчальн. посібник/ За ред. к. ф.-м. н. В.В. Крючковського. – К: ІЗМН, 1997. – 143 с.
61. Яценко С. А., Крючковський В. В., Зернов О. Є., Усов А. В., Гришина В. А. Рівняння і нерівності з параметрами: якісні задачі / частина II /: навчальн. посібник/ За ред. к. ф.-м. н. В.В. Крючковського. – К: ІЗМН, 1997. – 148 с.

Додаток А

Контрольна робота (зріз знань)

1. Знайдіть всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $36^x - (8a + 5)6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ має єдиний розв'язок.
2. При яких значеннях параметра a рівняння

$9^x - (a + 1)3^x + 3a - 6 = 0$ має єдиний корінь?

3. При яких значеннях параметра a рівняння

$(\sqrt{x} - a)(3^{2x} - 4 \times 3^x + 3) = 0$ має два різні корені?

4. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність

$25^x - 5^x - a - a^2 < 0.$

5. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність

$(2^x - a)\sqrt{x - 3} \geq 0.$

Додаток Б

Конспект факультативного заняття

Тема: Показникові рівняння та нерівності з параметрами.

Мета уроку:

1) навчальна: сформувати в учнів уміння розв'язувати показникові рівняння та нерівності з параметрами;

2) розвиваюча: розвивати в учнів інтерес до математики, увагу, уяву, спостережливість, логічне мислення, пам'ять, уміння аналізувати умову та хід розв'язання, робити висновки;

3) виховна: виховувати культуру математичних записів, охайність, наполегливість.

Хід заняття:

I. Організаційний момент.

II. Мотивація навчальної діяльності.

Задачі з параметрами відіграють важливу роль у формуванні логічного мислення, дослідницьких умінь та математичної культури, але їх розв'язання викликає значні труднощі. Це пов'язано з тим, що кожна задача з параметрами являє собою цілий клас звичайних завдань, для кожної з яких повинно бути отримано рішення.

III. Актуалізація опорних знань

1. Давайте пригадаємо що називається параметром?

Параметром називається незалежна змінна, значення якої в задачі вважається заданим фіксованим або довільним дійсним числом, або числом, що належить заздалегідь обумовленій множині.

2. А що означає розв’язати рівняння з параметром?

Розв’язати рівняння з параметрами - це означає:

1. Вказати, при яких значеннях параметрів рівняння має корені і скільки їх при різних значеннях параметрів.

2. Знайти всі вирази для коренів і вказати для кожного з них ті значення параметрів, при яких цей вираз визначає корінь рівняння.

3. Які рівняння називаються показниковими?

Показниковими називають рівняння в яких невідома величина міститься в показнику степеня, при цьому основа степеня не містить невідомої величини.

Показникові рівняння та нерівності з параметрами дуже часто зустрічаються на зовнішньому незалежному оцінювані. Тому даній темі хотілося б приділити особливу увагу.

IV. Розвязування вправ.

Приклад 1.

Розв’яжіть рівняння з параметром a: $2^{2x} - (2a + 1)2^x + a^2 + a = 0$.

Розв’язання

Учні мають помітити, що перед ними показникове рівняння.

Далі знаходять область допустимих значень параметра і змінної: і змінна x, і параметра a можуть приймати будь-які дійсні значення.

Для розв’язання даного рівняння, учні пропонують використати спосіб введення допоміжного невідомого.

Введемо заміну: $2^x = t$, де $t > 0$. Отримаємо квадратне рівняння відносно змінної t. Розв’яжемо утворене рівняння.

$$t^2 - (2a + 1)t + (a^2 + a) = 0,$$

$D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + a) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1 > 0$, отже, квадратне рівняння при будь-яких значеннях параметра буде мати два різні корені: $t_1 = \frac{2a+1-1}{2} = a$, $t_2 = \frac{2a+1+1}{2} = a + 1$.

Повернемося до заміни.

Коли $t_1 > 0$, тобто $t_1 = a > 0$; отже, якщо $a \in (0; +\infty)$, то повертаємось до заміни: $2^x = a$, $\log_2 2^x = \log_2 a$, $x = \log_2 a$.

Коли $t_2 > 0$, тобто $t_2 = a + 1 > 0$ для $a > -1$; отже, якщо $a \in (-1; +\infty)$, то повертаємось до заміни: $2^x = a + 1$, $x = \log_2(a + 1)$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty;-1]$, то $x \in \emptyset$.

Якщо $a \in (-1; 0)$, то $x = \log_2(a + 1)$.

Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Якщо $a \in (0; +\infty)$, то $x = \log_2 a$, $x = \log_2(a + 1)$.

Приклад 2.

Розв'яжіть рівняння з параметром a: $2^{2x} - (2a + 1)2^x + a^2 + a = 0$.

Розв'язання

Першим кроком учні знаходять область допустимих значень параметра і змінної: і змінна x, і параметра a можуть приймати будь-які дійсні значення.

Для розв'язання даного рівняння, учні пропонують використати спосіб введення допоміжного невідомого.

Введемо заміну: $2^x = t$, де $t > 0$. Отримаємо квадратне рівняння відносно змінної t. Розв'яжемо утворене рівняння.

$$t^2 - (2a - 1)t + (a^2 - a) = 0,$$

$D = (2a - 1)^2 - 4(a^2 - a) = 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 4a = 1 > 0$, отже, квадратне рівняння при будь-яких значеннях параметра буде мати два різні корені: $t_1 = \frac{2a-1-1}{2} = a - 1$, $t_2 = \frac{2a-1+1}{2} = a$.

Повернемося до заміни.

Коли з t можна повернутися до заміни?

Коли $t_1 > 0$, тобто $t_1 = a - 1 > 0$, $a > 1$; отже, якщо $a \in (1; +\infty)$, то повертаємось до заміни: $2^x = a - 1$, $\log_2 2^x = \log_2(a - 1)$, $x = \log_2(a - 1)$.

Коли $t_2 > 0$, тобто $t_2 = a > 0$; отже, якщо $a \in (0; +\infty)$, то повертаємось до заміни: $2^x = a$, $x = \log_2 a$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty;0]$, то $x \in \emptyset$.

Якщо $a \in (0; 1)$, то $x = \log_2(a - 1)$.

Якщо $a = 1$, то $x = 0$.

Якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x = \log_2 a$, $x = \log_2(a-1)$.

Приклад 3.

Розв'яжіть нерівність з параметром a: $4a^2 \times (2^x)^2 - 33a \times 2^x + 8 > 0$.

Розв'язання

Учні зазначають, що це показникові нерівність. Для розв'язання даного якої, учні пропонують використати спосіб введення допоміжного невідомого.

Введемо заміну: $2^x = t$, де $t > 0$. Отримаємо нерівність:

$$4a^2 \times t^2 - 33a \times t + 8 > 0.$$

Далі учень має проаналізувати, за яких умов нерівність є квадратною, лінійною.

Якщо $a = 0$, тоді $0t^2 - 0t + 8 > 0$, $8 > 0$, тому $t > 0$, звідки $x \in R$.

Якщо $a \neq 0$, тоді нерівність буде квадратною, розв'яжемо її:

$$D = (-33a)^2 - 16a^2 \times 8 = 1089a^2 - 128a^2 = 961a^2 > 0.$$

Тоді:

$$t_1 = \frac{33a+31a}{8a^2} = \frac{1}{4a}, \quad t_2 = \frac{33a-31a}{8a^2} = \frac{8}{a}.$$

$$4a^2\left(t - \frac{1}{4a}\right)\left(t - \frac{8}{a}\right) > 0,$$

$$\left(t - \frac{1}{4a}\right)\left(t - \frac{8}{a}\right) > 0.$$

Розв'яжемо утворену нерівність методом інтервалів.

Нехай $\frac{1}{4a} < \frac{8}{a}$, тобто $\frac{1}{4a} - \frac{8}{a} < 0$, $\frac{1-32}{4a} < 0$, $\frac{-31}{4a} < 0$, звідки $a \in (0; +\infty)$. Тоді $t \in \left(-\infty; \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\frac{8}{a}; +\infty\right)$.

Нехай $\frac{8}{a} < \frac{1}{4a}$, звідки $a \in (-\infty; 0)$. Тоді $t \in \left(-\infty; \frac{8}{a}\right) \cup \left(\frac{1}{4a}; +\infty\right)$.

Врахуємо, що $t > 0$. Отже, якщо $a \in (0; +\infty)$, то $t \in \left(0; \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\frac{8}{a}; +\infty\right)$; якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $t \in (0; +\infty)$.

Повернемося до заміни.

Якщо $a \in (0; +\infty)$, то

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{1}{4a}, \\ t > \frac{8}{a} \end{array}\right.\text{, тобто } \left[\begin{array}{l} 0 < 2^x < \frac{1}{4a}, \\ 2^x > \frac{8}{a} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} \log_2 2^x < \log_2 \frac{1}{4a}, \\ \log_2 2^x > \log_2 \frac{8}{a} \end{array}\right.,$$

$$\left[\begin{array}{l} x\log_2 2 < \log_2 \frac{1}{4a}, \\ x\log_2 2 > \log_2 \frac{8}{a} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} x < \log_2 \frac{1}{4a}, \\ x > \log_2 \frac{8}{a} \end{array}\right.,$$

звідки $x \in \left(-\infty; \log_2 \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\log_2 \frac{8}{a}; +\infty\right)$.

Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $t > 0$, звідки $x \in R$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 0]$, то $x \in R$.

Якщо $a \in (0; +\infty)$, то $x \in \left(-\infty; \log_2 \frac{1}{4a}\right) \cup \left(\log_2 \frac{8}{a}; +\infty\right)$.

Приклад 4.

Знайти всі значення параметра a, при яких нерівність $2^{2\cos x} - 2(a-3)2^{\cos x} + a + 3 > 0$ виконується для всіх $x \in R$.

Розв'язання

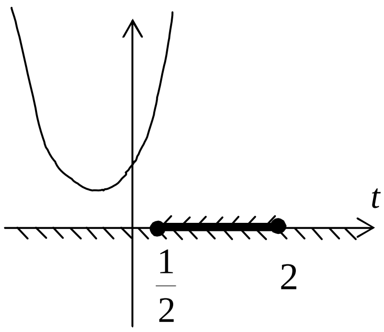
Для розв'язання заданої нерівності, учні пропонують використати спосіб введення допоміжного невідомого.

Введемо заміну: $2^{\cos x} = t$, де $t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Сформулюємо задачу так: при яких значеннях параметра a нерівність $t^2 - 2(a-3)t + a + 3 > 0$ виконується при всіх $t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Розглянемо функцію $f(t) = t^2 - 2(a-3)t + a + 3$. Учні зазначають, що вітки параболи напрямлені вгору й можливі такі випадки:

1)

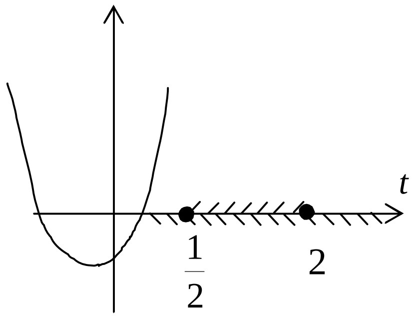


Достатньо виконати умову $D < 0$.

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6a + 9 - a - 3 = a^2 - 7a + 6 = (a-1)(a-6).$$

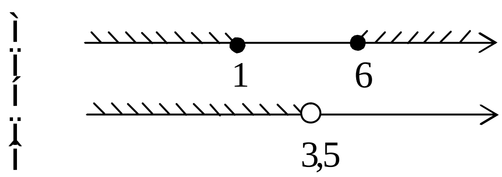
$$(a-1)(a-6) < 0, a \in (1; 6).$$

2)



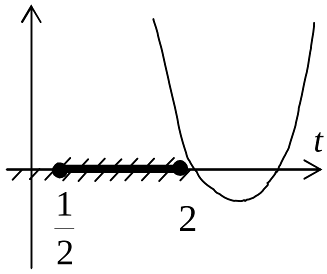
$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_в < \frac{1}{2}, \\ f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \end{cases}, \quad де\ x_в = \frac{2(a-3)}{2} = a - 3$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{4}$.



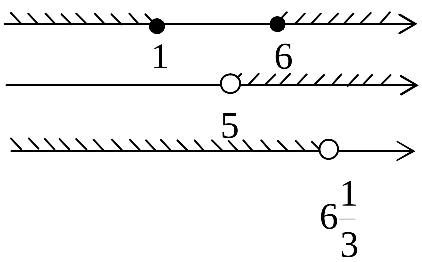
$a \in (-\infty; 1]$.

3)



$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_в > 2, \\ f(2) > 0 \end{cases}, \text{де } x_в = a - 3$$

$f(2) = -3a + 19.$



$a \in \left[6; 6\frac{1}{3}\right)$

Об’єднавши результати, маємо: $a \in \left(-\infty; 6\frac{1}{3}\right)$.

Відповідь. $a \in \left(-\infty; 6\frac{1}{3}\right)$.

V. Підсумки заняття.

VI. Список використаної літератури.

1. Прус А. В., Швець В. О. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Навч. – метод. посібник. Житомир: ‹‹ Рута››, 2016. − 468с.

Додаток В

Контрольна робота (зріз знань)

1. Розв'яжіть рівняння з параметром a:
   1) $25^x + a^2(a-1)5^x - a^5 = 0$;
   2) $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3$.
2. При яких значеннях параметра a рівняння

$\left(\sqrt{x} - a\right)(2^{2x} - 10 \times 2^x + 16) = 0$ має два різні корені?

3. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:
   1) $a^2 - 9^{x+1} - 8 \times 3^x \times a > 0$;
   2) $a^2 - 2 \times 4^{x+1} - a \times 2^{x+1} > 0$.
4. Знайдіть всі значення параметра a, при яких нерівність

$(a+2)4^{|x-1|} - 2a \times 2^{|x-1|} + 1 + 3a > 0$ виконується при всіх $x \in R$.