ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ Т.Г. ШЕВЧЕНКА

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики та методик навчання фізико-математичних дисциплін

М. М. Нак, О. М. Хайтова

АЛГЕБРА

Навчально-методичний посібник з курсу
для студентів
спеціальності 6.040201 «Математика»

Чернігів – 2015

УДК 378.016:512(072)
ББК В14р30
Н 21

Рекомендовано до друку
вченою радою фізико-математичного факультету
Чернігівського національного педагогічного університету
імені Т. Г. Шевченка
(протокол № 4 від 24 листопада 2015 року)

Нак М. М., Хайтова О. М.
Н 21 **Алгебра** : Навчально-методичний посібник з курсу для студентів спеціальності 6.040201 «Математика» / М. М. Нак, О. М. Хайтова. – Чернігів: ЧНПУ імені Т. Г. Шевченка, 2015. – 80 с.

УДК 378.016:512(072)
ББК В14р30

Методичні рекомендації до вивчення курсу алгебри, алгебри і теорії чисел і контрольні завдання для студентів I та II курсів. Укладено на основі курсу, який автори ведуть на фізико-математичному факультеті Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка. Може бути корисним студентам спеціальності 6.040201 «Математика» як денної, так і заочної форми навчання.

І. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

За навчальним планом курс вивчається на першому курсі в І і ІІ семестрах (лінійна алгебра) і на ІІ курсі в ІІІ і IV семестрах (алгебра і теорія чисел).

Завданням курсу є вивчення основних понять та методів алгебри, необхідних для подальшого вивчення математичного аналізу, геометрії а також інших суміжних дисциплін.

Разом з іншими предметами вивчення алгебри повинно сприяти розвитку наукового мислення.

Програма курсу визначає об'єм знань з алгебри, необхідний для якісної підготовки вчителів математики.

При викладанні курсу алгебра значна увага приділяється розумінню конкретного змісту понять та методиці застосуванню апарату в математиці. Програмою не передбачається проведення всіх доведень, частина з них може бути замінена наочними міркуваннями.

Головною метою курсу «Алгебра» є вивчення основних понять курсу (СЛР, матриці, визначники, векторні простори, лінійні оператори, білінійні і квадратичні форми, алгебраїчні операції, основні алгебраїчні структури, групи, кільця, теорія подільності в кільці цілих чисел, теорія порівнянь, многочлени від однієї та багатьох змінних, алгебраїчні розширення полів), розуміння їх положення і ролі в загальній системі математичних знань та вміння застосовувати у конкретних ситуаціях, а також виховання алгебраїчної і теоретико-числової культури, необхідної майбутньому вчителю для глибокого розуміння цілей і завдань як основного шкільного курсу математики, так і факультативних курсів.

В результаті вивчення курсу алгебри студенти повинні засвоїти теорію та вміти застосовувати її до конкретних задач, навчитися користуватися математичною та спеціальною літературою та довідниками, здобути навички та уміння доводити розв'язування задач до практично прийнятного результату.

І КУРС

І СЕМЕСТР

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
Системи лінійних рівнянь

Тема 1. Загальні відомості про СЛР. Метод Гаусса

Поняття лінійного ріняння, системи лінійних рівнянь. Розв'язок СЛР, сумісні і несумісні СЛР. Метод Гаусса розв'язування СЛР. Загальний розв'язок СЛР.

Практичне заняття № 1. **Система m рівнянь з n невідомими. Поняття матриці. Метод Гаусса. Загальний розв′язок СЛР.**

Тема 2. Перестановки та підстановки

Перестановки та підстановки. Інверсії в перестановках та підстановках. Транспозиція. Добуток підстановок. Властивості. Застосування.

Практичне заняття № 2. **Перестановки. Інверсія. Парна, непарна перестановка. Транспозиція. Підстановка. Парна, непарна підстановка. Добуток підстановок. Транспозиція. Циклічна підстановка.**

Тема 3. Визначники 2-го і 3-го порядку. Способи обчислення визначників вищих порядків

Поняття визначника. Обчислення визначників 2-го і 3-го порядків. Властивості визначників. Мінори та алгебраїчні доповнення. Способи обчислення визначників вищих порядків. Формули Крамера розв'язування СЛР.

Практичне заняття № 3. **Визначники 2 та 3 порядку. Визначники n-го порядку. Властивості визначників. Алгебраїчне доповнення. Мінори. Теорема Лапласа.**

Тема 4. Алгебра матриць

Типи матриць. Операції над матрицями. Поліном матриці. Обернена матриця та способи її знаходження. Розв'язування СЛР за допомогою оберненої матриці.

Практичне заняття № 4. **Поняття матриці. Операції над матрицями. Визначник добутку матриць. Обернена матриця. Поліном матриці.**

Перший модуль «*Системи лінійних рівнянь*» присвячений вивченню систем лінійних рівнянь, знаходженню різних способів їх розв'язування як з використанням визначників, матриць, так і без такого використання. В цьому модулі вводяться поняття арифметичного *n*-вимірного простору та лінійної залежності між векторами.

Література: [2] – розд. 1, 2, 3; [3] – розд. 6, 7; [8] – розд. 1, 3.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.
ЧИСЛОВІ ПОЛЯ. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Тема 1. Бінарні відношення. Алгебраїчні структури

Поняття бінарного відношення. Операції над відношеннями, властивості відношень. Поняття алгебраїчних операцій, властивості. Поняття алгебраїчної структури (група, кільце, поле).

Практичне заняття № 5. **Бінарне відношення. Операції над бінарними відношеннями. Основні властивості бінарних відношень. Функціональні відношення. Алгебраїчні операції. Одиничний, обернений елемент. Півгрупа, моноїд, група, кільце, поле. Ізоморфізм алгебраїчних структур.**

Тема 2. Поле комплексних чисел. Добування кореня з комплексного числа

Алгебраїчна і тригонометрична форми комплексного числа. Операції над комплексними числами. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Добування кореня з комплексного числа. Корені з одиниці.

Практичне заняття № 6. **Поле комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа. Тригонометрична форма комплексного числа. Операції над комплексними числами. Формула Муавра. Добування кореня з комплексного числа. Корінь з одиниці.**

У другому модулі «*Числові поля. Поле комплексних чисел*» вивчаються властивості бінарних відношень, вводяться поняття основних алгебраїчних структур (груп, кілець, полів), будується поле комплексних чисел та вивчаються властивості цих чисел.

Література: [2] – розд. 4, 5, 6; [3] – розд. 2, 4, 5; [8] – розд. 10, 14, 4.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3.
ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Тема 1. Арифметичний n-вимірний простір

Простір V_n. Лінійна комбінація векторів, лінійна залежність та незалежність системи векторів, властивості.

Практичне заняття № 7. **Поняття лінійного простору. Приклади просторів. Лінійна комбінація векторів. Лінійна залежність і незалежність системи векторів. Лінійна оболонка векторів.**

Тема 2. Базис і ранг системи векторів

Поняття базису системи векторів. Ранг матриці за рядками і за мінорами. Ранг системи векторів та його обчислення.

Практичне заняття № 8. **Елементарні перетворення системи векторів. Базис та ранг системи векторів. Ранг матриці.**

Тема 3. Загальна теорія СЛР

Аналіз методу Гаусса. Критерій сумісності і визначеності СЛР. Відокремлення базисних розв'язків.

Практичне заняття № 9. **Аналіз методу Гаусса. Теорема Кронекера-Капеллі. Критерій визначеності СЛР. Базисні розв′язки.**

Тема 4. Системи лінійних однорідних рівнянь

Розв'язування СЛОР. Простір розв'язків СЛОР. Фундаментальна система розв'язків СЛОР.

Практичне заняття № 10. **Система лінійних однорідних рівнянь. Властивості розв′язків системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв′язків системи лінійних однорідних рівнянь.**

Модуль *«Дослідження систем лінійних рівнянь»* присвячений аналізу методу Гаусса, дослідження лінійної залежності та незалежності СЛР, знаходження базису та рангу системи векторів та рангу матриці, розв'язуванню СЛОР та знаходженню фундаментальної системи розв'язків СЛОР.

Література: [2] – розд. 1. 2, 3; [2] – розд. 9.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4.
Лінійні простори

Тема 1. Скінченновимірний простір

Поняття базису і розмірності простору. Скінченновимірні простори. Координати вектора. Зв’язок між базисами. Перетворення координат вектора при переході до нового базису.

Практичне заняття № 11. **Скінченновимірний простір. Приклади просторів. Зв’язок між базисами, координати вектора в різних базисах.**

Тема 2. Лінійні підпростори. Спряжені підпростори. Лінійний багатовид

Підпростори векторних просторів. Розмірність підпросторів. Спряжені підпростори. Поняття лінійного багатовиду.

Практичне заняття № 12. **Лінійний підпростір. Спряжені підпростори та базиси. Способи задання лінійних підпросторів. Поняття лінійного багатовиду.**

Модуль “*Векторні простори”* присвячений вивченню понять векторного простору (над довільним полем), підпростору, базису і розмірності векторного простору, суми, прямої суми та перетину підпросторів.

Література: [2] – розд. 9; [3] – розд. 8; [8] – розд. 7.

Питання теорії, що виносяться на самостійне опрацювання

1. Загальний розв’язок СЛР, ненульові розв’язки.
2. Способи обчислення визначників n-го порядку.
3. Поліном матриці.
4. Функціональні відношення. Відношення еквівалентності. Відношення порядку.
5. Півгрупа, моноїд, група, кільце, поле.
6. Ізоморфізм алгебраїчних структур.
7. Поле комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа.
8. Показникова форма комплексного числа.
9. Лінійна оболонка векторів.
10. Елементарні перетворення системи векторів.
11. Відокремлення базисних розв’язків.
12. Перетин і сума лінійних підпросторів.
13. Лінійно еквівалентні системи векторів. Способи задання лінійних підпросторів.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

I. *Метод Гаусса*

$2x_1 - x_2 + x_3 = 6,$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 4,$

$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8.$

Δ Для розв'язування систем рівнянь використовують елементарні перетворення, які перетворюють систему в рівносильну. Тому друге рівняння краще поставити на перше місце і помножити на (–1). Всі перетворення будемо робити над розширеною матрицею. Отже,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} II + I(-2) \\ III + I(-3) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & -22 & -66 \end{array}\right) III + II(-5) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Отже, вихідна система рівносильна системі:

$x_1 - x_2 - 2x_3 = -4,$

$x_2 + 5x_3 = 14,$

$x_3 = 3.$

Така система сумісна і визначена. Її єдиним розв'язком є (1, –1, 3).

II. *Метод Крамера*

Δ Оскільки ранг основної матриці дорівнює розміру матриці, тому визначник відмінний від нуля. Він дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 2 - 6 - 3 - 8 + 3 = -22.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 8 + 16 + 8 - 24 - -12 = -22,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -24+8+36-12+32-18=22,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -16-12-12-18-16+8=-66.$$

Отже, $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{-22}{-22} = 1,\quad x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{22}{-22} = -1;\quad x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{-66}{-22} = 3.$
Вектор (1, –1, 3) є розв’язком системи. Δ

III. *Матричний метод*

Дану систему можна записати у вигляді матричного рівняння наступним чином:

$AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$. В такому випадку розв’язок системи матиме вигляд $X = A^{-1} \cdot B$. Знайдемо матрицю, обернену до A за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів:

$A_{11} = -7;\ A_{21} = -1;\ A_{31} = -3;$
$A_{12} = 3;\ A_{22} = -9;\ A_{32} = -5;$
$A_{13} = -5;\ A_{23} = -7;\ A_{33} = 1.$

Отже обернена матриця

$A^{-1} = \dfrac{1}{-22} \begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ 3 & -9 & -5 \\ -5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$. Помножимо A^{-1} та B:

$X = \dfrac{1}{-22} \begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ 3 & -9 & -5 \\ -5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-22} \begin{pmatrix} -22 \\ 22 \\ -66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Тобто єдиним розв’язком є (1, –1, 3).

2. Знайти матрицю, обернену до даної: $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

I. *Методом елементарних перетворень*

$$\Delta \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right).$$

Перевіримо, що $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ обернена матриця до даної:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+9 & 12-12 \\ -6+6 & 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \ \Delta$$

II. *Методом використання алгебраїчних доповнень*

Δ Визначник даної матриці дорівнює –1, алгебраїчні доповнення: $A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 4$, тому обернена матриця до даної буде:

$$-\frac{1}{1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}. \ \Delta$$

3. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

Розв'язування. Перший стовпчик визначника ненульовий, і в ньому на першому місці стоїть ненульовий елемент. Тому можна в першому стовпчику одержати нулі на всіх місцях, починаючи з другого. Для цього від другого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Далі від третього рядка віднімаємо перший, помножений на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Від четвертого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Нарешті від п’ятого рядка віднімемо перший:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

У другому стовпчику одержаного визначника на другом місці знаходиться ненульовий елемент. Тому одержуємо нулі у другому стовпчику на всіх місцях, починаючи з третього. Для цього від третього рядка віднімемо другий, від четвертого віднімемо другий, помножений на 11, і до п’ятого рядка додамо другий, помножений на 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

У третьому стовпчику одержаного визначника на другому місці знаходиться ненульовий елемент. Одержуємо нулі у третьому стовпчику, починаючи з четвертого місця. Для цього до четвертого рядка додамо третій помножений на 10, а від п’ятого віднімемо третій, помножений на 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

У даному визначнику четвертий елемент четвертого стовпчика не дорівнює нулю. Тому можна від п'ятого рядка відняти четвертий, помножений на $\frac{5}{3}$ і одержати визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{vmatrix}.$$

Тоді $\Delta = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \frac{52}{3} = 5$.

4. Обчислити:

$$x = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}.$$

Розв'язання. Перетворюємо чисельник і знаменник в тригонометричну форму, підносимо їх до відповідного степеня, а потім виконуємо дію ділення за правилом ділення комплексних чисел, поданих у тригонометричні формі:

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3},\ r = 2,\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Отже, $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Аналогічно знаходимо, що

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

$$x = \frac{z_1^{15}}{z_2^{20}},\ z_1^{15} = 2^{15}(\cos 10\pi + i\ \sin 10\pi) = 2^{15}(\cos 0 + i\ \sin 0) = 2^{15}.$$

$$z_2^{20} = 2^{10}(\cos 35\pi + i\ \sin 35\pi) = 2^{10}[\cos(17\cdot 2\pi + \pi) + i\ \sin(17\cdot 2\pi + \pi)] =$$
$$= 2^{10}(\cos\pi + i\ \sin\pi) = -2^{10}.$$

$$x = \frac{2^{15}}{-2^{10}} = -32.$$

5. Обчислити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поміняємо місцями 1 і 2 рядок. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, додамо до 2 рядка 1 помножений на –2; додамо до 3 рядка 1 помножений на –2; додамо до 4 рядка 1 помножений на –3. Отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Додамо до 3 рядка 2 помножений на 4; додамо до 4 рядка 2 помножений на –1. Отримаємо: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отримали три ненульові рядки, значить ранг матриці дорівнює 3.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Систему лінійних рівнянь розв'язати: а) користуючись правилом Крамера; б) методом виключення Гаусса.

1) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=2\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=1\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4&=-3\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4&=-3 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3&=0\\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6&=0\\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8&=0\\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8&=0 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4&=16\\ x_1+7x_2+x_3+x_4&=23\\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4&=10\\ 4x_1-3x_2+4x_3+6x_4&=1 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 7x_1+9x_2+4x_3+2x_4-2&=0\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4-6&=0\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4-3&=0\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4&=30\\ 3x_1+3x_2+4x_3+5x_4&=34\\ 4x_1+4x_2+4x_3+5x_4&=41\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=10 \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3-x_4&=1\\ 2x_1-x_2-3x_4&=2\\ 3x_1-x_3+x_4&=-3\\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4&=-6 \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2-6x_3+3x_4+1&=0\\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4+32&=0\\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4-5&=0\\ x_1-x_2+2x_3-6x_4+8&=0 \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} 2x_1+x_2+4x_3+8x_4&=-1\\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4&=3\\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4&=8\\ 2x_1-x_2+2x_3&=4 \end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=5\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=3\\ 3x_1+2x_2+8x_3+4x_4&=5\\ 3x_1+4x_2+14x_3+9x_4&=4 \end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned} 2x_1-5x_2+3x_3+x_4&=5\\ 3x_1-7x_2+3x_3-x_4&=-1\\ 5x_1-9x_2+6x_3+2x_4&=7\\ 4x_1-6x_2+3x_3+x_4&=8 \end{aligned}$$

Обчислити визначник

1) $$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8\\ -3 & 2 & 4 & -6\\ 2 & -5 & -7 & 5\\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

3) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$ 10) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Обчислити визначники (всюди, де незрозуміло, який порядок визначника, припускати, що він дорівнює n)

1) а) $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2) а) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \dots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$

3) а) $\begin{vmatrix} a_1{}^n & a_1{}^{n-1}b_1 & a_1{}^{n-2}b_1{}^2 & \dots & b_1{}^n \\ a_2{}^n & a_2{}^{n-1}b_2 & a_2{}^{n-2}b_2{}^2 & \dots & b_2{}^n \\ a_3{}^n & a_3{}^{n-1}b_3 & a_3{}^{n-2}b_3{}^2 & \dots & b_3{}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}{}^n & a_{n+1}{}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}{}^{n-2}b_{n+1}{}^2 & \dots & b_{n+1}{}^n \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$

4) а) $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$

5) а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+4 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+2^n \end{vmatrix}$

6) а) $\begin{vmatrix} \sin^{n-1}\alpha_1 & \sin^{n-2}\alpha_1\cos\alpha_1 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_1 \\ \sin^{n-1}\alpha_2 & \sin^{n-2}\alpha_2\cos\alpha_2 & \dots & \cos^{n-1}\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin^{n-1}\alpha_n & \sin^{n-2}\alpha_n\cos\alpha_n & \dots & \cos^{n-1}\alpha_n \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} b & b & \dots & b & a \\ b & b & \dots & a & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & a & \dots & b & b \\ a & b & \dots & b & b \end{vmatrix}$

Обчислити добуток матриць.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 24 & -12 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Для даної матриці знайти обернену матрицю

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Розв’язати матричне рівняння.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 8 & 7\\ 2 & 7 & 9\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$

4) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 4 & -1 & 4\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}4 & 3 & 6\\ 3 & 5 & 5\\ 5 & 1 & 7\end{pmatrix}$

6) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -3 & 1\\ 2 & 4 & -8\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

Знайти деякий базис системи векторів і всі вектори, які не належать цьому базису, виразити через вектори базису.

1) $a_1 = (4;3;-1;-1;-1)$
$a_2 = (2;1;-3;2;-5)$
$a_3 = (1;-3;0;1;-2)$
$a_4 = (1;5;2;-2;6)$
$a_5 = (3;-4;1;2)$

2) $a_1 = (1;2;3;-4)$
$a_2 = (2;3;-4;1)$
$a_3 = (2;-5;8;-3)$
$a_4 = (5;26;-9;-12)$

3) $a_1 = (1;2;1;-2;1)$
$a_2 = (2;-1;1;3;2)$
$a_3 = (1;-1;2;-1;3)$
$a_4 = (2;1;-3;1;-2)$
$a_5 = (1;-1;3;-1;7)$

4) $a_1 = (2;-1;3;4;-1)$
$a_2 = (1;2;-3;1;2)$
$a_3 = (5;-5;12;11;-5)$
$a_4 = (1;-3;6;3;-3)$

5) $a_1 = (2; 0; 3; 3; –1)$
$a_2 = (1; 1; 0; –1; 1)$
$a_3 = (0; –2; 1; 5; –3)$
$a_4 = (1; –3;2; 9; –5)$

6) $a_1 = (2; 1; 3; –1)$
$a_2 = (–1; 1; –3; 1)$
$a_3 = (4; 5; 3; –1)$
$a_4 = (1; 5;–3; 1)$

7) $a_1 = (1; 2; 3; 4)$
$a_2 = (2; 3; 4; 5;)$
$a_3 = (3; 4; 5; 6)$
$a_4 = (4; 5; 6; 7)$

8) $a_1 = (1; 2; 5; 7)$
$a_2 = (3; –1; 1; 7)$
$a_3 = (5; –3; –1; 9)$
$a_4 = (–1; 4; 7; 1)$

9) $a_1 = (1; 1; 1; 1; 1)$
$a_2 = (4; 4; –1; –2; 6)$
$a_3 = (–1; 2; 1; 0; 3)$
$a_4 = (2; 1; 4; 2; 1)$
$a_5 = (0; 2; –1; 5; 3)$
$a_6 = (7; 0; 0;–1; 0;)$

10) $a_1 = (1; 2; 1; 3)$
$a_2 = (1; 1; 2; 2)$
$a_3 = (–l; 8; –6; 5)$
$a_4 = (1; 1; 1; 3)$
$a_5 = (3; –5; 7; 2)$

Дослідити сумісність і знайти загальний розв’язок системи лінійних рівнянь.

1)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 &= 18 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 &= -8 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 &= 5 \end{aligned}$$

7)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

9) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

Знайти загальний розв`язок і фундаментальну систему розв`язків системи лінійних однорідних рівнянь

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + 10x_2 + 17x_3 + 7x_4 - 3x_5 = 0 \\ 9x_1 + 3x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$

Знайти ранг матриці

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Перевірити, чи утворює система векторів лінійний підпростір в просторі всіх n-вимірних векторів. Якщо система векторів є підпростором, знайти його базис та розмірність.

1) Усі вектори, у яких координати з парними номерами рівні між собою.
2) Усі вектори, сума координат яких дорівнює 0.
3) Усі вектори, у яких координати з парними номерами дорівнюють 0.
4) Усі вектори, у яких усі ненульові координати одного знаку.
5) Усі вектори, у яких перша та остання координати рівні між собою.
6) Усі вектори, у яких перша координата дорівнює 0.
7) Усі вектори вигляду $(\alpha,\beta, \alpha,\beta, \alpha,\beta,\ldots)$, де α,β – будь-які числа.
8) Усі вектори, у яких перша координата дорівнює сумі усіх інших координат.
9) Усі вектори, у яких усі координати рівні.
10) Усі вектори, у яких перша координата дорівнює сумі третьої та четвертої при $n\geq 4$.

Довести, що кожна з двох систем векторів $e_1, e_2,\ldots, e_n$ та $e_1', e_2',\ldots, e_n'$ утворює базис простору і знайти матрицю переходу від базису $e_1, e_2,\ldots, e_n$ до базису $e_1', e_2',\ldots, e_n'$.

1) $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,1)$, $e_3=(1,1,2,1)$, $e_4=(1,3,2,3)$;
$e_1'=(1,0,3,3)$, $e_2'=(-2,-3,-5,-4)$, $e_3'=(2,2,5,4)$, $e_4'=(-2,-3,-4,-4)$;

2) $e_1=(4,2,1)$, $e_2=(5,3,2)$, $e_3=(3,2,1)$;
$e_1'=(-1,4,0)$, $e_2'=(4,3,1)$, $e_3'=(1,2,3)$;

3) $e_1=(1,1,1,1)$, $e_2=(1,2,1,3)$, $e_3=(1,1,2,2)$, $e_4=(1,1,1,3)$;
$e_1'=(3,-5,7,2)$, $e_2'=(-1, 8,-6, 5)$, $e_3'=(1,0,1,3)$, $e_4'=(2,2,2,2)$;

4) $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(2,1,0)$, $e_3=(1,0, 0)$;
$e_1'=(1,1,1)$, $e_2'=(0,1,2)$, $e_3'=(3,2,0)$;

5) $e_1=(2,1,0)$, $e_2=(1,0,1)$, $e_3=(0,1, -1)$;
$e_1'=(2,1,2)$, $e_2'=(3,3,1)$, $e_3'=(1,2,0)$;

6) $e_1=(-3,-2,-3)$, $e_2=(4,2,4)$, $e_3=(3,3,4)$;
$e_1'=(1,1,2)$, $e_2'=(1,2,3)$, $e_3'=(3,2,4)$;

7) $e_1=(-3,-4,0)$, $e_2=(2,2,-1)$, $e_3=(1,3,2)$;
$e_1'=(0,7,8)$, $e_2'=(-3,2,7)$, $e_3'=(1,10,10)$;

8) $e_1=(1,2,-1,0)$, $e_2=(1, -1,1,1)$, $e_3=(-1,2,1,1)$, $e_4=(-1, -1,0,1)$;
$e_1'=(2,1,0,1)$, $e_2'=(0,1,2,2)$, $e_3'=(-2,1,1,2)$, $e_4'=(1,3,1,2)$;

9) $e_1=(8,-6,7)$, $e_2=(-16,7,-13)$, $e_3=(9,-3,7)$;
$e_1'=(1,-2,1)$, $e_2'=(3,-1,2)$, $e_3'=(2,1,2)$;

10) $e_1=(1,1,2)$, $e_2=(1,2,3)$, $e_3=(1,2,4)$;
$e_1'=(2,-3,1)$, $e_2'=(3, -1,5)$, $e_3'=(1,-4,3)$;

Знайти розмірність і базис лінійного підпростору, породженого системою векторів

1) $a_1=(4,1,-1)$, $a_2=(6,3,3)$, $a_3=(1,1,2)$, $a_4=(3,1,0)$;
2) $a_1=(1,2,1,1)$, $a_2=(1,3,2,-1)$, $a_3=(0,2,2,-3)$, $a_4=(1,4,3,2)$;
3) $a_1=(1,1,-1,-1)$, $a_2=(5,-4,7,1)$, $a_3=(3,-3,5,1)$, $a_4=(9,-6,11,1)$;
4) $a_1=(0,1,1,0)$, $a_2=(1,0,0,1)$, $a_3=(-1,0,1,1)$, $a_4=(0,0,1,2)$; $a_5=(2,-1,-1,2)$
5) $a_1=(1,1,1,1,0)$, $a_2=(1,1,-1,-1,-1)$, $a_3=(2,2,0,0,-1)$, $a_4=(1,1,5,5,2)$;
$a_5=(1,-1,-1,0,0)$
6) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(3,-5,7,2)$, $a_4=(1,-7,5,-2)$;
7) $a_1=(1,2,1,3)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(1,0,1,3)$, $a_4=(2,-1,1,6)$; $a_5=(-2,-1,-2,-6)$
8) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,2,1,3)$, $a_3=(1,1,2,2)$, $a_4=(1,1,1,3)$; $a_5=(2,3,3,3)$
9) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(5,-7,3,-9)$, $a_3=(1,2,2,2)$, $a_4=(3,-10,0,-12)$;
10) $a_1=(3,1,3,1)$, $a_2=(1,2,1,2)$, $a_3=(1,2,0,2)$, $a_4=(1,-1,1,-1)$;
$a_5=(-3,-3,-3,-3)$

Знайти систему лінійних рівнянь, яка задає підпростір, породжений системою векторів

1) $a_1=(1,3,2,-5)$, $a_2=(-1,2,1,-2)$, $a_3=(3,-5,-2,3)$, $a_4=(2,-3,-1,1)$
2) $a_1=(2,-3,5,1)$, $a_2=(1,2,3,1)$, $a_3=(3,13,10,4)$, $a_4=(1,-19,0,-2)$
3) $a_1=(1,-1,1,-1,1)$, $a_2=(1,1,0,0,3)$, $a_3=(3,1,1,-1,7)$, $a_4=(0,2,-1,1,2)$
4) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(0,3,2,1)$, $a_3=(-2,1,0,-1)$, $a_4=(-4,5,2,1)$
5) $a_1=(2,-1,4,2)$, $a_2=(3,0,6,1)$, $a_3=(-1,2,-2,-3)$, $a_4=(1,1,2,-1)$
6) $a_1=(1,-3,4,-2)$, $a_2=(3,-1,-1,1)$, $a_3=(3,7,-14,8)$, $a_4=(2,2,-5,3)$
7) $a_1=(2,3,1,2)$, $a_2=(3,1,2,1)$, $a_3=(1,-9,2,-5)$, $a_4=(6,-5,5,-2)$
8) $a_1=(2,-1,1,3)$, $a_2=(1,2,3,4)$, $a_3=(1,12,13,14)$, $a_4=(-1,8,7,6)$
9) $a_1=(1,-1,1,-1)$, $a_2=(3,2,1,0)$, $a_3=(1,-6,3,-4)$, $a_4=(1,14,-5,8)$
10) $a_1=(1,2,3,5)$, $a_2=(3,2,1,3)$, $a_3=(1,4,7,11)$, $a_4=(3,4,5,9)$

Знайти базиси суми і перетину лінійних підпросторів, породжених системами векторів $a_1,\dots, a_k$ і $b_1,\dots, b_m$ відповідно.

1) $a_1=(1,2,1,3)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(1,0,1,3)$;
$b_1=(1,1,1,1)$, $b_2=(1,1,2,2)$, $b_3=(1,1,-1,-1)$;

2) $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(4,3,1)$, $a_3=(2,-1,-5)$;
$b_1=(1,1,1)$, $b_2=(-3,2,0)$, $b_3=(-2,3,1)$;

3) $a_1=(1,2,3)$, $a_2=(0,1,1)$, $a_3=(1,1,2)$;
$b_1=(4,3,1)$, $b_2=(1,1,0)$, $b_3=(5,3,2)$;

4) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,1,3)$, $a_3=(1,2,1,3)$, $a_4=(1,0,1,3)$;
$b_1=(1,1,1,2)$, $b_2=(1,1,2,2)$, $b_3=(3,3,4,5)$, $b_4=(0,0,1,1)$;

5) $a_1=(1,1,1)$, $a_2=(4,2,1)$, $a_3=(2,0,-1)$;
$b_1=(-2,3,1)$, $b_2=(1,4,1)$, $b_3=(5,-2,-1)$;

6) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,2,1,3)$, $a_3=(1,1,2,2)$;
$b_1=(0,0,1,1)$, $b_2=(2,2,3,3)$, $b_3=(1,1,2,2)$;

7) $a_1=(1,2,1,3)$, $a_2=(-1,8,-6,5)$, $a_3=(0,10,-5,8)$;
$b_1=(1,4,-1,5)$, $b_2=(3, -2,6,3)$, $b_3=(4,2,5,8)$;

8) $a_1=(1,1,0,0)$, $a_2=(0,1,1,0)$, $a_3=(0,0,1,1)$;
$b_1=(1,0,1,0)$, $b_2=(0,2,1,1)$, $b_3=(1,2,1,2)$;

9) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(1,1,-1,-1)$, $a_3=(1,-1,1,-1)$;
$b_1=(1,-1,-1,1)$, $b_2=(1,-1,0,0)$, $b_3=(3,-1,1,1)$;

10) $a_1=(1,2,1,1)$, $a_2=(2,3,1,0)$, $a_3=(3,1,1,-2)$;
$b_1=(0,4,1,3)$, $b_2=(1,0,-2,-6)$, $b_3=(1,0,3,5)$;

Питання до екзамену

1. Лінійне рівняння. Розв’язок лінійного рівняння. СЛР та її розв’язок. Основна та розширена матриці.
2. Еквівалентні системи. Метод Гаусса. Загальний розв’язок СЛР.
3. Перестановки. Парність і непарність. Інверсія. Транспозиція. Теорема.
4. Підстановка. Парність і непарність. Інверсія. Цикл. Циклічна підстановка. Декремент. Властивості підстановки.
5. Поняття визначника. Визначники 2 та 3 порядку. Властивості визначників. Наслідки.
6. Алгебраїчне доповнення. Мінори. Теорема Лапласа.
7. Методи обчислення визначників n-го порядку.
8. Матриці. Типи матриць. Операції над матрицями. Властивості операцій.
9. Визначник добутку матриць. Обернена матриця. Теорема. Властивості оберненої матриці.
10. Поліном матриці. Корінь полінома. Теорема Келі-Гамільтона. Розв’язання СЛР за допомогою оберненої матриці.
11. Упорядкована пара. Прямий добуток. Бінарне відношення. Операції над відношеннями.
12. Основні властивості бінарних відношень. Відношення еквівалентності. Класи еквівалентності. Твердження.
13. Відношення порядку. Функціональні відношення.
14. Алгебраїчна операція. Нейтральний елемент. Симетричний елемент. Властивості операцій.
15. Група. Властивості. Підгрупа. Критерій бути підгрупою
16. Кільце, поле. Властивості. Критерій підкільця, критерій підполя.
17. Поле комплексних чисел. Побудова поля комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа.
18. Геометрична інтерпретація поля комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.
19. Операції над комплексними числами в алгебраїчній формі. Спряжене комплексне число, властивості спряжених чисел.
20. Формула Муавра. Корінь з комплексного числа. Корінь з одиниці.
21. n-вимірний векторний простір. Приклади просторів. Арифметичний векторний простір.
22. Лінійна залежність та незалежність системи векторів. Властивості.
23. Еквівалентність системи векторів. Теорема про еквівалентність систем. Властивості. Елементарні перетворення систем векторів.
24. Базис і ранг системи векторів.

25. Ранг матриці. Теорема про ранг матриці.
26. Лінійні перетворення простору. Ізоморфізм просторів. Скінченно-вимірні простори. Базис і розмірність простору.
27. Лінійні підпросторі. Сума підпросторів. Пряма сума підпросторів.
28. Перетин і сума лінійних підпросторів. Теорема про перетин і суму лінійних підпросторів.
29. Задання лінійних підпросторів.
30. Лінійний багатовид.
31. СЛР. Основна та розширена матриця СЛР. Розв'язок системи. Сумісна, несумісна, означена, неозначена СЛР. Система наслідок. Елементарні перетворення СЛР.
32. Аналіз методу Гаусса. Теорема Кронекера-Капеллі.
33. Теорема про визначеність СЛР. Відокремлення базисних розв'язків.
34. СЛОР. Властивості розв'язків СЛОР. Фундаментальна система розв'язків СЛОР.
35. Координати вектора. Зв'язок між базисами. Перетворення координат вектора.

II СЕМЕСТР

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
Евклідові та унітарні простори

Тема 1. Дійсні та комплексні простори зі скалярним множенням

Скалярний добуток векторів в дійсному і комплексному просторах. Властивості скалярного добутку. Нерівність Коші-Буняковського. Поняття евклідового та унітарного простору.

Практичне заняття № 1. **Дійсні та комплексні простори зі скалярним множенням.**

Тема 2. Модуль вектора і кут між векторами

Довжина вектора. Кут між векторами. Нормовані вектори. Нормовані простори.

Практичне заняття № 2. **Довжина вектора. Кут між векторами.**

Тема 3. Ортогональні та ортонормовані базиси

Ортогональні системи векторів. Ортогональні базиси. Процес ортогоналізації. Ортонормовані системи векторів і ортонормовані базиси. Ортогональне доповнення до підпростору.

Практичне заняття № 3. **Ортогональні та ортонормовані базиси. Процес ортогоналізації системи векторів.**

У модулі «*Унітарні та евклідові простори*» вивчаються властивості просторів із скалярним добутком над різними числовими полями, розглядаються умови існування та способи побудови ортонормованих базисів в них, доводиться унітарність матриці переходу між ортонормованими базисами, розглядається ортогональне доповнення підпростору.

Література: [2] – розд. 11; [3] – розд. 8; [8] – розд. 8; [1] – розд. 4, [18] – розд. 7.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Тема 1. Означення і приклади лінійних операторів. Ранг і дефект лінійного оператора

Поняття лінійного відображення, властивості. Приклади лінійних операторів. Ранг і дефект, ядро і образ лінійного оператора.

***Практичне заняття № 4.* Лінійні оператори. Найпростіші властивості. Область значень і ядро лінійного оператора.**

Тема 2. Задання лінійних операторів

Задання лінійного оператора за допомогою відображення. Матриця лінійного оператора. Зв’язок між матрицями лінійного оператора заданого в різних базисах.

***Практичне заняття № 5.* Матричне зображення лінійних операторів. Зв′язок між матрицями лінійних операторів в різних базисах.**

Тема 3. Дії над лінійними операторами

Дії над лінійними операторами, їх властивості. Алгебра матриць та алгебра лінійних операторів.

***Практичне заняття № 6.* Дії над лінійними операторами.**

Модуль «*Лінійні оператори*» присвячений вивченню лінійних перетворень простору, їх властивостей, способу задання.

Література: [2] – розд. 9; [1] – розд. 3; [18] – розд. 6.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3.

СТРУКТУРА ЛІНІЙНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ НА ЕВКЛІДОВОМУ ТА УНІТАРНОМУ ПРОСТОРАХ

Тема 1. Інваріантні підпростори та їх роль для вивчення будови і властивостей лінійних операторів. Характеристичний багаточлен лінійного оператора

Інваріантні підпростори. Характеристичний багаточлен лінійного оператора, характеристичне рівняння. Власні значення і власні вектори лінійного оператора.

***Практичне заняття № 7.* Інваріантні підпростори. Власні вектори і власні значення лінійних операторів.**

Тема 2. Оператори з простим спектром і простої структури

Спектр лінійного оператора. Оператори з простим спектром. Оператори простої структури. Зведення матриці лінійного оператора до діагонального виду.

Практичне заняття № 8. **Зведення матриці лінійного оператора до найпростішого виду.**

Тема 3. Спряжені та самоспряжені лінійні оператори

Спряжені та самоспряжені лінійні оператори евклідових та унітарних просторів, їх матриці, властивості, власні значення та власні вектори.

Практичне заняття № 9. **Спряжені та самоспряжені лінійні оператори.**

У модулі «*Структура лінійного відображення*» розглядаються інваріантні відносно лінійного оператора підпростори, власні значення та характеристичні корені лінійного оператора, зв'язок між ними, досліджуються умови зведення матриці лінійного оператора до діагонального виду.

Література: [1] – розд. 3, 5; [18] – розд. 6, 7.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4.

БІЛІНІЙНІ І КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

Тема 1. Поняття білінійної форми. Квадратичні форми та полярні білінійні форми

Білінійні форми, їх задання. Квадратичні форми та їх задання. Зв’язок між білінійними і квадратичними формами.

Практичне заняття № 10. **Білінійні форми, їх матричне зображення. Квадратичні форми та полярні білінійні форми. Типи квадратичних форм.**

Тема 2. Канонічний вигляд квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до канонічного виду методом Лагранжа

Дійсні квадратичні форми. Канонічний вид і канонічний базис квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа.

Практичне заняття № 11. **Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа.**

Тема 3. **Критерій Сільвестра. Метод Якобі.**
Зведення квадратичних форм до головних осей

Додатньовизначені та від’ємновизначені квадратичні форми. Критерій Сільвестра. Зведення квадратичної форми до канонічного виду методом Якобі. Зведення квадратичної форми до канонічного виду за допомогою ортогонального перетворення.

Практичне заняття № 12. **Критерій Сільвестра. Метод Якобі. Зведення квадратичних форм до головних осей.**

У модулі «*Білінійні і квадратичні форми*» вивчаються питання зведення квадратичної форми до канонічного і нормального виду, закон інерції дійсних квадратичних форм, критерій Сільвестра додатньої визначеності, а також зв'язок квадратичних форм з самоспряженими лінійними операторами.

Література: [1] – розд. 6; [18] – розд. 5.

Питання теорії, що виносяться на самостійне опрацювання

1. Ортогональне доповнення до підпростору.
2. Геометрична інтерпретація системи лінійних однорідних рівнянь.
3. Алгебра матриць та алгебра лінійних операторів.
4. Оборотні лінійні оператори. Повна лінійна група.
5. Ортогональні лінійні оператори та їх матриці. Властивості.
6. Унітарні оператори.
7. Симетрична і кососиметрична форми. Вироджені і невироджені форми. Критерій симетричності білінійних форм.
8. Закон інерції квадратичних форм.
9. Пари квадратичних форм.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Нехай e_1, e_2 – базис простору R^2 і $\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}$ – довільний вектор цього простору. Переконатися що перетворення простору $\overline{U} = \varphi(\overline{x}) = x_1\overline{e_1} + \alpha x_2\overline{e_2}$ є лінійним (ά ∈ R).

Δ Для доведення лінійності перетворення слід переконатися у виконанні умов:

1) $\varphi(\overline{x} + \overline{y}) = \varphi(\overline{x}) + \varphi(\overline{y})$; 2) $\varphi(\lambda\overline{x}) = \lambda\varphi(\overline{x})$

Нехай розклад довільного вектора $\overline{y} \in R^2$ у базисі $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ має вигляд $\overline{y} = y_1\,\overline{e}_1 + y_2\,\overline{e}_2$, тоді:

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1)\cdot\overline{e}_1 + (x_2 + y_2)\cdot\overline{e}_2 \text{ і } \lambda\,\overline{x} = \lambda\,x_1\,\overline{e}_1 + \lambda\,x_2\,\overline{e}_2$$

$$\varphi(\overline{x} + \overline{y}) = \varphi((x_1 + y_1)\cdot\overline{e}_1 + (x_2 + y_2)\cdot\overline{e}_1) = (x_1 + y_1)\cdot\overline{e}_1 + \alpha(x_2 + y_2)\cdot\overline{e}_2 =$$

$$= (x_1\cdot\overline{e}_1 + \alpha\,x_2\cdot\overline{e}_2) + (y_1\cdot\overline{e}_1 + \alpha\,y_2\cdot\overline{e}_2) = \varphi(\overline{x}) + \varphi(\overline{y});$$

$$\varphi(\lambda\overline{x}) = \lambda\,x_1\,\overline{e}_1 + \alpha\cdot\lambda\,x_2\,\overline{e}_2 = \lambda(x_1\,\overline{e}_1 + \alpha\cdot x_2\,\overline{e}_2) = \lambda\varphi(\overline{x})\ \Delta$$

2. Знайти матрицю лінійного оператора в базисі e_1, e_2, e_3, якщо $\varphi(\overline{x}) = (3x_1 + 2x_2;\ x_1 - x_2 + x_3;\ x_1 + 2x_2 + 2x_3)$.

Δ Кожному лінійному оператору відповідає в даному базисі єдина матриця: $\varphi(x) = A(x)$.

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_2 \end{pmatrix};\ (x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Матриця лінійного оператора в базисі e_1, e_2, e_3 має вигляд:

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

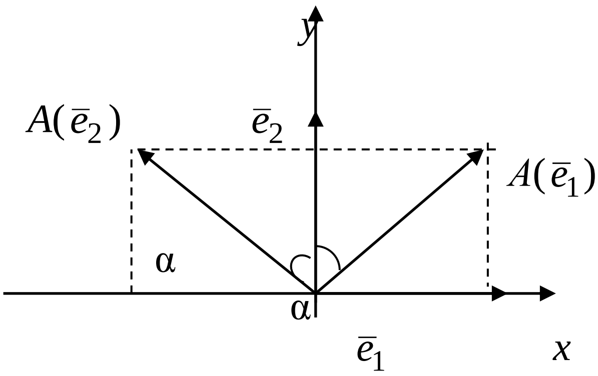
3. Оператор A обертає усі вектори площини XOY навколо початку координат на кут α проти годинникової стрілки. Знайти його матрицю в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Δ Розглянемо дію оператора A на базисні вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2$

$A(\bar{e}_1) = \cos\alpha\ \bar{e}_1 + \sin\alpha\,\bar{e}_2$;

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$A(\bar{e}_2) = -\sin\alpha\,\bar{e}_1 + \cos\alpha\,\bar{e}_2$;



4. Знайти власні вектори і власні значення лінійного оператора, який у деякому базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ простору V_3 має вигляд:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= 6x_1 + 2x_2 - 3x_2 \\ y_3 &= 2x_2 + 3x_3. \end{aligned}$$

Δ Складемо характеристичне рівняння. Для цього спочатку запишемо матрицю даного оператора в базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left| A - \lambda E \right| = 0. \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1-\lambda)\,(2-\lambda)\,(3-\lambda) + 6(1-\lambda) = 0,\ \ (1-\lambda)(\lambda^5 - 5\lambda + 12) = 0$;

$$\begin{cases} 1-\lambda = 0; \\ \lambda^2 - 5\lambda + 12 = 0; \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_{2,3} = \frac{5 \pm i\sqrt{23}}{2}.$$

Знайшли три власні значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{5 + i\sqrt{23}}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{5 - i\sqrt{23}}{2}$. $\lambda_1 \in R$, $\lambda_{2,3} \in C$.

Знайдемо власний вектор, що відповідає єдиному дійсному значенню $\lambda = 1$.

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0\\ 6x_1 + (2-\lambda)x_2 - 3x_3 = 0\\ 0x_1 + 2x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0\\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}6x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\\ \quad 2x_2 = -2x_3\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2 = -x_3\\ 6x_1 = 4x_3\end{cases} \qquad x_2 = -x_3 \qquad x_1 = \frac{2}{3}x_3$$

$\lambda = 1$ відповідає вектор $a = \left(\frac{2}{3}x_3;\ -x_3;\ x_3\right) = x_3\left(\frac{2}{3};\ -1;\ 1\right),\quad x_3 \neq 0.$

Таким чином, власному значенню $\lambda = 1$ відповідають власні вектори:

$\bar{x} = \frac{2}{3}x_3\,\bar{e}_1 - x_3\,\bar{e}_2 + x_3\,\bar{e}_3$. Δ

5. Дано координатне зображення деякого лінійного оператора в базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$: $u_1 = x_1 - x_2$; $u_2 = 2x_1 + x_2$;

Знайти координатне зображення того самого оператора в базисі $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, де $\bar{e}_1' = 2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 \qquad \bar{e}_2' = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$

Δ Запишемо матрицю оператора в базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$: $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Запишемо матрицю переходу від одного базису до іншого: $C = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$

Знайдемо $\Delta = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$, тому $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$ – дійсно утворюють базис. Існує C^{-1} $\quad C^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$. За формулою

$$A_1 = C^{-1}AC = \begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18 & -11\\ 33 & 20\end{pmatrix}.$$

Отже, даний лінійний оператор в новому базисі має координатне зображення:

$U_1' = -18x_1' - 11x_2'$

$U_2' = 33x_1 + 20x_2$ Δ

6. Лінійний оператор A в площині R^2 у деякому базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ має матрицю $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. Переходячи до нового базису, звести цю матрицю до діагонального вигляду.

Δ Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння: $|A - \lambda E| = 0$.

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -7 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$; $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3, \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$

Корені характеристичного рівняння різні. Отже, матрицю можна звести до діагонального вигляду.

$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 - 7x_2 = 0, \\ 2x_1 + (-5-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$ Нехай $\lambda_1 = -3 \begin{cases} 7x_1 - 7x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = x_2. \end{cases}$

Тому власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = -3$ дорівнює $\bar{a}_1 = (1;1)$. У випадку $\lambda_2 = 2$: $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2}x_2, \\ x_2 = x_2. \end{cases}$

власний вектор $\bar{a}_2 = (7;2)$.

Якщо вектори $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$ брати за базис, то в цьому базисі матриця оператора А матиме вигляд:

$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Δ

7. Чи є A – унітарним оператором, що діє в двовимірному унітарному просторі, якщо: $A(e_1) = e_1 + ie_2$; $A(e_2) = ie_1$, де $\langle e_1, e_2 \rangle$ – ортонормований базис.

Δ Матриця оператора A в базисі $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ має вигляд: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Дана матриця буде унітарною, якщо виконується: $A_1 A_1^* = E \cdot A_1 A_1^* = A_1\, \overline{A}^T{}_1$, де $A_1^* = A_1^{-1}$;

$\overline{A}^T{}_{1\_}$ – матриця, що дістаємо з матриці A_1 шляхом транспонування і заміни всіх елементів на комплексно спряжені.

$\overline{A}^T{}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$; $A_1\, \overline{A}^T{}_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \neq$ E.

A_1 – матриця не унітарна, тому і оператор A не є унітарним. Δ

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Нехай x_1, x_2, та y_1, y_2 – координати векторів x, y в деякому базисі двохвимірного лінійного простору над полем R. З'ясувати чи може дана функція $F(x, y)$ бути скалярним добутком.

1) $F(x,y)= x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$
2) $F(x,y)= 3x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$
3) $F(x,y)= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$
4) $F(x,y)= 7x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 9x_2y_2$
5) $F(x,y)= 3x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + x_2y_2$
6) $F(x,y)= 5x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 4x_2y_2$
7) $F(x,y)= 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2$
8) $F(x,y)= x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$
9) $F(x,y)= 4x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$
10) $F(x,y)= 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$

Система векторів задається координатами в деякому ортонормованому базисі евклідового простору. За допомогою процесу ортогоналізації знайти ортогональний базис підпростору, породженого даною системою векторів.

1) (2,1,3,–1), (7,4,3,–3), (1,1,–6,0), (5,7,7,8)
2) (3,–1,–2), (4,0,–1), (7, –1,–3),(5,1,0), (9,1,–1)
3) (1,2, –1,1), (–5,–5,4,–2), (–3,6,2,0)
4) (1,–3,2,1), (–1,7,–3,–2), (2,–2,3,1)
5) (1,0,1,–1), (6,0,4,–5), (3,2,–5,4)
6) (1,–1,1,–1), (4,–2,4,–2), (–2,7,–4,7), (2,7,–2,5)
7) (1,1,1,1), (3,3,–1,–1), (–2,0,6,8)
8) (2,3,–4,–6), (1,8,–2,–16), (12,5,–14,5), (3,11,4,–7)
9) (1,1,–1,–2), (–2,1,5,11), (0,3,3,7), (3,–3,–3,–9)
10) (1,1,–1,0), (1,2,0,–1), (0,0,1,0)

У варіантах 1-4 перевірити ортогональність системи векторів і доповнити вектори до ортогонального базису простору.

1) (1,1,1,2), (1,0,1,–1)
2) (1,–2,1,3), (2,1,–3,1)
3) (1,–1,1,–3), (–4,1,5,0)
4) (1,2,1,2), (1,1,–1,–1)

У варіантах 5-7 доповнити систему векторів до ортонормованого базису простору

5) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6})$

6) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$,$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

7) $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$

У варіантах 8-10 знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$ підпростору L

8) L породжується системою векторів (1,2,–1,–3), (2,1,1,–9), (1,4,–3,–1)
9) L задається системою лінійних рівнянь
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0$
$10x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$
10) L породжується системою векторів (–1,3,0,1), (4,2,1,1), (3,5,1,2)

У варіантах 1-6 знайти ортогональну проекцію y та ортогональну складову z вектора x на лінійний підпростір L

1) x = (–3,5,9,3). L породжується системою векторів a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (2,–1,1,1), a_3 = (2,–7,–1,–1).
2) x= (14,–3,–6,–7). L породжується системою векторів a_1 = (–3,0,7,6), a_2 = (1,4,3,2), a_3 = (2,2,–2,–2).
3) x = (–3,0,–5,9). L задається системою лінійних рівнянь
$3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$
$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0$
4) x= (2,–5,3,4). L породжується системою векторів a_1 = (1,3,3,5), a_2 = (1,3,–5,–3), a_3 = (1,–5,3,–3).
5) x= (1,4,0,2). L породжується системою векторів a_1 = (1,0,–1,1), a_2 = (3,3,–2,1), a_3 = (–1,6,3,–5).
6) x = (8,–2,8,3). L задається системою лінійних рівнянь
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$

У варіантах 7-8 знайти відстань від точки, що відповідає вектору x, до лінійного підпростору L, породженого системою векторів $a_1, \ldots, a_k$

7) $x = (1,-1,1,-1)$; $a_1 = (1,-1,0,2)$, $a_2 = (1,0,1,1)$
8) $x = (1,1,-1,0)$: $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,-1,-1,1)$, $a_3 = (1,1,-1,-1)$

У варіантах 9-10 знайти кут між вектором x і підпростором L.

9) $x = (3,-1,-1,-1)$. L задається системою лінійних рівнянь
$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_4 = 0$
10) $x = (1,2,3,-1)$. L породжується системою векторів
$a_1 = (1,1,-1,-1)$, $a_2 = (1,-1,5,-3)$, $a_3 = (0,1,2,-4)$.

Оператор φ задається координатами вектора $\varphi(x)$ як фукнціями координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$. З'ясувати, чи є φ лінійним оператором. У випадку лінійності знайти його матрицю в базисі, в якому задаються координати векторів x та $\varphi(x)$.

1) $\varphi(x) = (3x_1 - x_2,\ x_1 + 5x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$
2) $\varphi(x) = (x_1^2 - x_2,\ 2x_1 + 2x_3,\ x_1 + 2x_2 + x_3)$
3) $\varphi(x) = (3x_1 - x_2 + 4x_3,\ x_2 - 2x_3,\ x_1 + 2x_2 + 4x_3)$
4) $\varphi(x) = (4x_1 - 5x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 + x_3)$
5) $\varphi(x) = (5x_1 + 3x_2 + 4x_3,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_2 - 4x_3)$
6) $\varphi(x) = (-2x_1 + 4x_2 + 2x_3,\ 2x_1 - x_2 - x_3,\ 4x_1 + 7x_2 + x_3)$
7) $\varphi(x) = (-2x_1 + |x_2| + x_3,\ 4x_1 + x_2 - x_3,\ x_2 + x_3)$
8) $\varphi(x) = (-x_1 - x_2 - x_3,\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3,\ 5x_3)$
9) $\varphi(x) = (2x_1 - 2x_2 - x_3,\ 4x_1 + x_2 + 8x_3,\ 2x_2 - 5x_3)$
10) $\varphi(x) = (5x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + x_3,\ |x_1 - x_2 + x_3|)$

В варіантах 1-5 довести, що існує єдине лінійне перетворення, що переводить вектори a_1, a_2, a_3 відповідно в b_1, b_2, b_3, та знайти матрицю цього перетворення в базисі, в якому задаються координати усіх векторів.

1) $a_1=(1,-1,1)$, $a_2=(1,2,4)$, $a_3=(1,1,2)$;
$b_1=(5,1,7)$, $b_2=(1,4,2)$, $b_3=(2,4,-1)$;
2) $a_1=(2,3,4)$, $a_2=(1,2,2)$, $a_3=(-1,-1,-1)$;
$b_1=(-11,3,9)$, $b_2=(1,1,-1)$, $b_3=(18,-6,-14)$;
3) $a_1=(6,2,1)$, $a_2=(-7,-1,-1)$, $a_3=(9,1,1)$;
$b_1=(-2,9,11)$, $b_2=(0,4,5)$, $b_3=(-4,-36,-46)$;
4) $a_1=(2,1,1)$, $a_2=(3,1,-1)$, $a_3=(3,1,0)$;
$b_1=(1,2,3)$, $b_2=(0,1,1)$, $b_3=(1,1,3)$;
5) $a_1=(-1,3,5)$, $a_2=(0,1,2)$, $a_3=(1,2,4)$;
$b_1=(-5,-2,-5)$, $b_2=(1,1,-1)$, $b_3=(4,3,0)$;

В варіантах 6-10 лінійне перетворення в базисі e_1, e_2, e_3 задається матрицею A, знайти матрицю цього перетворення в базисі f_1, f_2, f_3.

6) $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \\ f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{array}$

7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3 \\ f_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{array}$

8) $A = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ f_2 = e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f_3 = e_1 + e_3 \end{array}$

9) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = 2e_1 - e_2 - e_3 \\ f_2 = -e_1 + e_2 \\ f_3 = -e_1 + 2e_3 \end{array}$

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} f_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ f_2 = e_1 - 3e_3 \\ f_3 = e_2 + 3e_3 \end{array}$

Лінійне перетворення в деякому базисі задається матрицею. З'ясувати, чи існує для даного перетворення базис простору, складений з власних векторів перетворення. Знайти цей базис і матрицю перетворення в цьому базисі.

1) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ 4) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -9 & -7 \\ 4 & -9 & 0 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Лінійне перетворення φ простору в деякому базисі задається матрицею. Знайти базис, в якому матриця цього перетворення зводиться до діагонального вигляду

1) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & -12 \\ 3 & 6 & -11 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$

У варіантах 1-8 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормований базис евклідового простору. Лінійне перетворення φ задається в базисі $f_1, f_2, \ldots, f_n$ матрицею A. Знайти матрицю спряженого перетворення φ^* в базисі $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 - e_2 - e_3,\ f_2 = e_1 + e_2 + e_3,\ f_3 = e_3$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 - e_2 + e_3,\ f_3 = e_1 - e_2 - e_3$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ f_2 = e_2 + e_3,\ f_3 = e_2 - e_3$

4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_2 + e_3,\ f_3 = e_1 + e_3$

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 - e_2,\ f_2 = e_2 + e_3,\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3$

6) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ f_2 = e_1 - e_2 - e_3,\ f_3 = e_1 + e_3$

7) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $f_1 = -e_1 + e_2 + e_3,\ f_2 = e_1 - e_2 + e_3,\ f_3 = e_1 + e_2 - e_3$

8) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f_1 = e_1 - e_2 - e_3,\ f_2 = e_1 - e_2,\ f_3 = e_1$

У варіантах 9-10 лінійне перетворення φ двохвимірного евклідового простору переводить вектори a_1, a_2 в b_1, b_2 відповідно. Координати векторів задаються в ортонормованому базисі e_1, e_2. Знайти матрицю лінійного перетворення φ^*, спряженого для перетворення φ, в базисі e_1, e_2.

9) $a_1 = (0,1)$, $a_2 = (1,3)$, $b_1, = (3,1)$, $b_2 = (2,3)$

10) $a_1 = (1,1)$, $a_2 = (1,4)$, $b_1, = (0,–2)$, $b_2 = (–3,7)$.

Самоспряжене лінійне перетворення φ в деякому ортонормованому базисі задається матрицею A. Знайти ортонормований базис простору, який складається з власних векторів перетворення φ, і матрицю B перетворення в цьому базисі.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & 16 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

8) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Знайти канонічний вигляд B ортогональної матриці A і ортогональну матрицю Q таку, що $B = Q^{-1}AQ$.

1) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 4) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 6) $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 8) $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ 10) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Розкласти дану матрицю в добуток симетричної матриці з додатними характеристичними числами і ортогональної матриці.

1) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&1\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 4) $A=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&-2&0\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&3\end{pmatrix}$ 6) $A=\begin{pmatrix}3&-3&3\\3&3&-3\\-3&3&3\end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix}2&-2&6\\2&4&-3\\-1&4&6\end{pmatrix}$ 8) $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\-2&2&4\\5&0&-2\end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 10) $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&0\\1&3&-1\end{pmatrix}$

Для квадратичної форми знайти канонічний вигляд та невироджене лінійне перетворення, що зводить квадратичну форму до цього вигляду (метод Лагранжа)

1) $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$
2) $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$
3) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$
4) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
5) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$
6) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$
7) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 - 8x_1x_3 - 27x_2x_3$
8) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$
9) $-12x_1^2 + 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$
10) $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$

Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду, і записати цей канонічний вигляд.

1) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$
2) $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$
3) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$
4) $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$
5) $7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$
6) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
7) $-3x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$
8) $-x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$
9) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 7x_2^2 - 8x_2x_3 + 3x_3^2$
10) $x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$

Звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду і визначити тип поверхні.

1) $5x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}\,xz + 2\sqrt{2}\,yz + 26x + 34y + 10\sqrt{2}\,z + 10 = 0$
2) $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 2y - 4z - 1 = 0$
3) $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 4x - 2z - 1 = 0$
4) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 6x - 6y + 8 = 0$
5) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 20y + 20z - 10 = 0$ φ
6) $-x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8yz + 2x + 12y + 24z + 36 = 0$
7) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6yz + 4x + 16y + 16z + 10 = 0$
8) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 10xy + 20x - 8y + 29 = 0$
9) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 18z + 1 = 0$
10) $3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8yz - 8xz - 4x + 6y + 8z - 5 = 0$

Питання до екзамену

1. Евклідові простори.
2. Унітарні простори.
3. Довжина вектора. Нерівність Коші-Буняковського.
4. Кут між векторами. Нормовані простори.
5. Ортогональні системи векторів. Процес ортогоналізації.
6. Ортогональний базис. Ортогональне доповнення до підпростору.
7. Простір розв’язків СЛОР (геометрична інтерпретація).
8. Фундаментальна система розв’язків СЛОР (геометрично). Ізоморфізм евклідових просторів.
9. Поняття лінійного оператора. Властивості. Приклади.
10. Область значень, ядро, ранг і дефект лінійного оператора.
11. Операції над лінійними операторами та їх властивості. Поняття лінійної алгебри.
12. Задання лінійного оператора за допомогою відображення. Матриця лінійного оператора.
13. Зв’язок між матрицями лінійного оператора, заданого в різних базисах. Подібні матриці.
14. Алгебра матриць та алгебра лінійних операторів. Їх ізоморфізми.
15. Оборотні лінійні оператори. Повна лінійна група.
16. Інваріантні підпростори. Власні вектори і власні значення лінійного оператора.
17. Характеристичний багаточлен лінійного оператора.
18. Оператори з простим спектром і простої структури. Зведення матриць лінійного оператора до діагонального вигляду.
19. Ортогональні лінійні оператори.
20. Спряжені лінійні оператори в евклідовому та унітарному просторі, його матриця, властивості.
21. Самоспряжені лінійні оператори в евклідовому та унітарному просторах, його матриця, властивості.
22. Унітарний оператор.
23. Поняття білінійної форми. Зображення білінійних форм. Ранг і дефект форми.
24. Симетричні і кососиметричні білінійні форми. Канонічний вид і канонічний базис.
25. Квадратичні форми та полярні білінійні форми.
26. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Метод Лагранжа. Канонічний вигляд квадратичної форми.
27. Дійсні квадратичні форми. Закон інерції квадратичної форми Метод Якобі.
28. Додатньовизначені та від’ємновизначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра.
29. Розпадні квадратичні форми. Зведення квадратичної форми до головних осей.
30. Пари квадратичних форм.

Література

1. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1985. – 392 с.
2. Завало С. Т. Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.
3. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. Н. Алгебра и теория чисел, ч. 1. – К.: ВШ, 1977. – 400 с.
4. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. Н. Алгебра и теория чисел, ч. 2. – К.: ВШ, 1970. – 408 с.
5. Завало С. Т., Левіщенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Алгебра і теорія чисел: Практикум. – Ч. 2. – К.: ВШ, 1985. – 260 с.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
7. Калужнін А. А. Вишенський В. А. Шуб Ч. А. Лінійні простори. – К.: Вища школа, 1971. – 344с.
8. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
9. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. – М.: ВШ, 1979. – 559 с.
10. Лісняк В. С. Лекції з лінійної алгебри. – К.: КУ, 2001. – 172 с.
11. Мурач М. М. Методические указания к программе по курсу «Алгебра и теория чисел». – Чернигов: ЧГПИ, 1988. – 54 с.
12. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М.: Гостехиздат, 1956. – 340 с.
13. Мурач М. М. Основи курсу лекцій: бінарні і квадратичні форми. – Чернігів: ЧДПУ, 2004. – 50 с.
14. Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1964. – 185 с.
15. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974. – 384 с.
16. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1983.
17. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
18. Чарін В. С. Лінійна алгебра: підручник / В. С. Чарін. – 2-ге вид., стер. – К.: Техніка, 2005. – 413 с.
19. Шилов Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969. – 432 с.
20. Шнеперман Л. Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях, ч. 2. – Мн.: ВШ, 1987. – 256 с.

II КУРС

III СЕМЕСТР

МОДУЛЬ 1.

АЛГЕБРИ: ПІВГРУПИ І ГРУПИ, КІЛЬЦЯ І ПОЛЯ СКІНЧЕННОЇ І НЕСКІНЧЕННОЇ ХАРАКТЕРИСТИК

Тема 1. Алгебраїчні операції та основні алгебраїчні структури

Поняття бінарної алгебраїчної операції та основні її властивості. Поняття оберненої операції. Структури півгруп, груп, кілець, полів, векторних просторів, алгебр (означення, приклади на застосування).

Практичне заняття № 1. **Дослідження властивостей бінарних операцій, виявлення групових операцій. Приклади груп.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

Шнеперман Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел (1982)

№ 8.1 (1,2,4,6,10); № 8.2 (2,3); №8.3 (1,2); № 8.5 (1,4,19); № 8.14 (7,2);

1. Чи утворює множина натуральних чисел відносно операції додавання (множення) групу?

2. Які із заданих множин матриць утворюють групу відносно операцій додавання, множення: а) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in Z;$ б) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in 2Z.$

Домашнє завдання: № 8.1 (3, 13); № 8.3 (3,8); № 8.5 (2); № 8.15 (3)

1. Чи дистрибутивна операція додавання відносно множення?

2. Чи комутативна, асоціативна операція піднесення до степеня на множині натуральних чисел?

3. Визначити чи є групою відносно операції додавання, множення: 1) множина раціональних чисел, які можна подати у вигляді дробів з парними знаменниками; 2) множина многочленів другого степеня.

Тема 2. Групи

Види груп: скінченні, нескінченні, комутативні, некомутативні, періодичні, неперіодичні. Циклічні групи та їх властивості. Підгрупи циклічних груп. Розклад групи за підгрупою на суміжні класи. Теорема Лагранжа та наслідки з неї. Побудова таблиць Келі та їх дослідження.

***Практичне заняття № 2.* Побудова таблиць Келі та їх дослідження. Види груп (періодичні, абелеві, без скруту, скінченні, циклічні)**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

Шнеперман Л.Б. «Сборник задач по алгебре и теории чисел» (1982)

№ 8.17 (2); № 8.20 (1); № 8.35;

1. Скласти таблицю Келі для групи коренів 6 степеня з одиниці.
2. Довести, що алгебра кватерніонів є некомутативною групою. Дослідження провести за допомогою таблиці Келі.
3. Скласти таблицю Келі для симетричної групи третього степеня.

Домашнє завдання: № 8.17 (1); № 8.18 (2); № 8.20 (3); № 8.27.

***Практичне заняття № 3* Розклад групи на суміжні класи. Нормальні підгрупи. Теорема Лагранжа.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

1. № 8.55; № 8.75.
2. Скласти таблицю Келі для групи самосуміщень прямокутника. Зробити розклад групи за всіма її підгрупами. Чи має дана група нормальний дільник? З’ясувати циклічність групи.
3. Чи є підмножина M групи G її лівим або правим суміжним класом за підгрупою H, якщо $M = \{2n+1, n \in Z\}, (Z,+), H = \{2n, n \in Z\}$.
4. Якими є праві суміжні класи групи $(Z,+)$ за підгрупою $H = 3z$?

Домашнє завдання:

1. Зробити розклад групи S_3 за всіма її підгрупами. Чи має дана група нормальний дільник?
2. Знайти розклад циклічної групи порядку 8 за її підгрупами порядку 2, 4.
3. Скласти різні суміжні класи за підгрупою цілих чисел кратних 3.

Тема 3. Види підгруп. Морфізми

Нормальні підгрупи груп. Фактор групи. Ізоморфізми та гомоморфізми груп, їх властивості. Образи і ядра гомоморфізмів та ізоморфізмів груп.

Практичне заняття № 4. **Побудова морфізмів груп, дослідження образу і ядра. Автоморфізм.**

Завдання для закріплення і повторення вивченого матеріалу:

1. Довести, що адитивна група цілих чисел ізоморфна мультиплікативній групі чисел виду $5^k, k \in Z$.
2. Довести, що мультиплікативна група $K = \{1, -1, i, -i\}$ гомоморфна мультиплікативній групі $H = \{1, -1\}$.
3. Задати гомоморфізм адитивної групи цілих чисел на $(\{1, -1\}, \cdot)$.
4. Довести, що $Q(\sqrt{2}) \ncong Q(\sqrt{7})$.

Домашнє завдання:

1. Знайти всі ізоморфізми кільця цілих чисел в себе.
2. Чи існує гомоморфне відображення адитивної групи цілих чисел в себе при якому $\varphi(2) = 3$.
3. Задати гомоморфізм групи коренів 12-го степеня з одиниці на групу коренів 3-го степеня з одиниці та знайти його ядро.

Тема 4. Кільця і поля та основні поняття, що зв'язані з ними

Види кілець. Область цілісності. Ідеали кілець. Фактор-кільця. Характеристика кілець та полів. Гомоморфізми кілець. Теорема про гомоморфізми кілець, застосування.

Практичне заняття № 5. **Кільце, підкільце. Дільники нуля та одиниці.**

Завдання для закріплення і повторення вивченого матеріалу:

Завало С.Т., Левищенко С.С. та ін. Алгебра і теорія чисел. Практикум (2 частина, 1986) № 7.1 (є,з); № 7.4 (ж,м); № 7.6; № 7.7 (в); № 7.11.

Домашнє завдання: № 7.1 (в); № 7.2 (г, є); № 7.4 (л); № 7.5 (ж).

Практичне заняття № 6. **Ідеали кільця та операції над ними. Фактор-кільце. Гомоморфізми кілець.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 7.16 (г); № 8.2 (а, г); № 8.5 (а,б,в); № 8.8 (д); № 8.11; № 9.6.

Домашнє завдання: № 8.2 (в,б); № 8.5 (з,к); № 8.7 (а); № 8.12; № 8.7.

МОДУЛЬ 2.

ТЕОРІЯ ПОДІЛЬНОСТІ В КІЛЬЦІ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ.
ТЕОРІЯ ПОРІВНЯНЬ

Тема 5. Подільність цілих чисел

Подільність цілих чисел. Відношення подільності цілих чисел та його властивості. Теорема про ділення з остачею, алгоритм Евкліда, НСД, НСК, зв'язок між ними. Розв'язування лінійних невизначених рівнянь. Прості числа, їх властивості, теорема Евкліда, решето Ератосфена, основна теорема арифметики цілих чисел.

Практичне заняття № 7. **Дослідження властивостей подільності в кільці цілих чисел. Теорема про ділення з остачею.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 1.5 (а, б, в); № 1.8 (а,б); № 1.9 (а,б); № 1.11 (е,з); № 1.16 (а); № 1.19; № 2.1 (1643); № 2.2 (є); № 2.4 (а,в); № 2.5 (б,г); № 2.9 (а).

Домашнє завдання: № 2.6 (б); № 2.5 (а,д); № 2.3 (в,д); № 2.1 (в,б); № 1.1 (а,б,в); № 1.4 (а,б); № 1.8 (е,ж).

Практичне заняття № 8. **НСД, НСК, алгоритм Евкліда. Розв'язування лінійних невизначених рівнянь.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 3.1 (е,є); № 3.2 (а, г); № 3.3 (д); № 3.5 (в,д); № 3.7 (б,є); № 3.9 (г).

Домашнє завдання: № 3.12 (а,б); № 3.9 (е); № 3.7 (ж. л); № 3.5 (е); № 3.4 (е); № 3.2 (д).

Практичне заняття № 9. **Прості і взаємнопрості числа та їх зв'язок. Дослідження властивостей подільності в різноманітних кільцях.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 5.12 (а, ж); № 3.11; № 10.11 (а); № 10. 20 (в); № 10.22 (в,д); № 10.23;

1. Знайти не менше 4 послідовних простих чисел, кожне з яких на 6 більше від попереднього.
2. Довести, що множина простих чисел виду $6n-1$ нескінченна.
3. Рівняння $x^2-2y^2=1$ розв'язати в простих числах.

Домашнє завдання:

1. Знайти всі пари простих чисел таких, що їхні сума і різниця також є простим.
2. Знайти всі прості числа p, для яких: число p^2-1 є просте; числа $p, p+2, p+4$ є простими.
3. № 10.16 (а); № 10.20 (г); № 10.23.

Тема 6. **Теорія порівнянь**

Порівняння та їх властивості. Повна та зведена системи лишків. Теореми Ейлера та Ферма. Їх застосування. Порівняння першого степеня з одним невідомим, методи їх розв'язання. Первісні корені та лишки. Порядки чисел та класів лишків за модулем, їх властивості. Первісні корені за простим модулем, їх існування і кількість. Індекси за простим модулем, властивості, таблиці індексів.

Практичне заняття № 10. **Порівняння та їх властивості. Повна та зведена система лишків.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:
№ 11.4; № 11.5 (а,д); № 11.6 (а,в,г); № 11.7 (а); № 11.9 (г,м); № 11.10 (а); № 12.9 (а,в); № 12.10 (а,б); №13.14 (е).

Домашнє завдання: № 13.14 (д); № 12.11 (а); № 12.10 (е); № 12.9 (д); № 11.10 (е); № 11.9 (ж); № 11.8 (є).

Практичне заняття № 11. **Теореми Ейлера та Ферма. Конгруенції першого степеня з одним невідомим та їх застосування.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:
№ 13.1 ; № 13.2; № 13.3 (а, е); № 13.4 (а,в); № 13.10 (а); № 13.7 (в); № 14.1; № 14.2; № 14.3; № 14.5.

Домашнє завдання: № 14.9 (ж); № 14.10 (а,є); № 1411 (в); № 4.18 (а); № 14.13; № 14.26.

Практичне заняття № 12. **Порядок числа і класу лишків за модулем. Первісні корені, існування їх та кількість за простим модулем.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:
№ 17.1 (а,б); № 17.3 (а); № 17.6 (б); № 17.7 (а); № 17.14; № 18.1 (а); № 18.5; № 18.6; № 18.8; № 18.9.

Домашнє завдання: № 18.11 (а,є); № 18.12 (а,б); № 18.13 (а,в); № 18.15 (б); № 18.20 (а); № 18.1 (г); № 18.9 (к).

Питання теорії, що виносяться на самостійне опрацювання

1. Історія розвитку алгебри;
2. Означення алгебраїчних структур (півгрупа, група, кільце, поле, векторний простір);
3. Подільність чисел. Властивості й ознаки подільності чисел.
4. Найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне цілих чисел.
5. Прості числа, решето Ератосфена. Нескінченність множини простих чисел.
6. Дослідження властивостей подільності в різноманітних кільцях, пошуки в них простих елементів.

Основні питання теорії та методи розв'язування вправ викладені в посібниках: Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.І. Алгебра и теория чисел, ч. 1-2. – К.: ВШ, 1979, 1980; Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: ВШ, 1983. – 232 с.; Завало С.Т., Левіщенко Е.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум, ч. 1-2. – К.: ВШ., 1986. – 232 с., 264 с.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. *Які можливості виникають для бінарної алгебраїчної операції. Якщо вона асоціативна?*

Бінарна операція виконується кожного разу над двома елементами. Отже, для того щоб її можна було поширювати на три і більше елементів з однозначним результатом потрібно, щоб операція була асоціативна, тобто щоб $(a+b)+c=a+(b+c)$.

2. *На множині* $Z^2=\{(x,y),x,y\in Z\}$ задано *операцію* $(a,b)+(c,d)=$ $=(a+c,\ b+d)$. *Переконатися в тому, що множина* Z^2 *відносно додавання утворює абелеву групу.*

Справді. Означене, додавання пар цілих чисел зводиться до додавання цілих чисел. Оскільки, останнє додавання – однозначне, комутативне, асоціативне, існує нуль-елемент і до кожного цілого числа існує протилежне, то ці ж властивості переносяться і на додавання пар цілих чисел. Наприклад, з того що $(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)=$ $=(c+a,\ d+b)=(c,d)+(a,b)$, випливає комутативність додавання пар, є (0,0), до $(a,\ b)$ протилежною парою є $(–a, –b)$, бо $(a,\ b)+(-a,\ -b)=(0,0)$. Отже, $(Z^2,+)$ – адитивна абелева група.

3. *В групі* $(Z^2, +)$ *навести приклади підгруп.*

$Z^2 = \{(x, y), x, y \in Z\}$ має пари вигляду $(x, 0)$ та $(0, y)$, бо сума їх дорівнює: (x, y). Коли в парі $(x, 0)$ x пробігає всі елементи адитивної абелевої групи цілих чисел Z, то теж дістаємо таку ж групу пар вигляду $(x, 0)$. Аналогічно існує адитивна абелева група пар вигляду $(0, y)$. Можна переконатися також і в тому, що група $(Z^2, +)$ має нескінченну множину підгруп аналогічно, як і група $(Z, +)$.

4. *Довести, що підгрупа всіх пар* $(x, 0)$*, де* $x \in Z$ *і група* $(Z,+)$ *ізоморфні.*

Справді, відповідність $\varphi: x \to (x, 0)$ – взаємнооднозначна і узгоджується з груповою операцією, бо $\varphi(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (0, y) =$ $= \varphi(x) + +\varphi(y)$.

5. *Довести, що група* $(Z,+)$ *гомоморфна групі* $(\{-1,1\},\cdot)$.

Згідно властивостей гомоморфізму: нейтральний елемент відображається в нейтральний, а симетричний – в симетричний, тому має бути для гомоморфізму $\varphi: Z \to \{-1, 1\}$, що $\varphi(0) = 1$. Оскільки 0 – парне число, то покладемо $\varphi(2k) = 1$, тоді $\varphi(2k + 1) = -1$. Переконаємося, що так побудоване відображення є гомоморфізмом. Маємо:
$\varphi(2k + 2l) = 1 = 1 \cdot 1 = \varphi(2k) \cdot \varphi(2l), \varphi\big((2k + 1) + 2l\big) = -1 = (-1) \cdot 1 =$
$\varphi(2k + 1) \cdot \varphi(2l)$
$\varphi\big((2k + 1) + (2l + 1)\big) = 1 = (-1) \cdot (-1) = \varphi(2k + 1) \cdot \varphi(2l + 1)$ всі можливі випадки відображень елементів першої групи в другу групу, які узгоджуються з груповою операцією. Тому φ – гомоморфізм.

6. *Довести, що корені третього степеня з одиниці утворюють групу – циклічну групу третього порядку.*

Справді, коренями $\sqrt[3]{1}$ є $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i \sin\frac{2\pi k}{3}$, $k = 0,1,2$. Множина всіх коренів $\{\varepsilon_0 = 1, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2\}$ – замкнена відносно множення, так як

$$\varepsilon_1\varepsilon_1 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$

$$\varepsilon_2\varepsilon_2 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)^2 = \cos\frac{8\pi}{3} + i \sin\frac{8\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = \varepsilon_1.$$

Множення комплексних чисел є однозначною, комутативною і асоціативною операцією, до кожного елемента існує обернений. Тому $\{\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ – мультиплікативна, комутативна група, причому циклічна, тому що може породжуватися тільки одним з елементів: ε_1 або ε_2.

7. *Дослідити відношення подільності натуральних чисел.*

Згідно означення подільності, якщо a ділиться на b, то існує натуральне число q, що $a = bq$. Тому $a = a \cdot 1$ і відношення подільності рефлексивне. З того що $(a \div b) \wedge (b \div a) \Rightarrow a = b$, тобто відношення антисиметричне. Воно є і транзитивним, бо $(a \div b) \wedge (b \div c) \Rightarrow a \div c$. Звичайно, не кожна пара чисел знаходиться в даному відношенні тому воно виконується лише частково. Отже, $(N, \div)$ є частково упорядкована множина.

8. *Виконати ділення числа – 37 на 8.*

Як бачимо, число – 37 можна поділити лише з остачею: $0 < r < 8$, тому $-37 = 8 \cdot (-5) + 3$.

9. *Довести, що найменший простий дільник p натурального числа n не перевищує* $\sqrt{n}$.

Справді, нехай $n = pq$, де $p \leq q$, тоді $p^2 \leq pq = n$, тому $p \leq \sqrt{n}$.

10. *Довести, що сума квадратів двох непарних цілих чисел не може бути квадратом цілого числа.*

Маємо $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$, тому їх сума має вигляд $(2k+1)^2 + (2m+1)^2 = 4(k^2 + m^2) + 4(k+m) + 2$. Це число яке ділиться на 2 і не ділиться на 4, а квадрат непарного числа при діленні на 4 дає в остачі 1, а не 2.

11. *При діленні числа 100 на* b *дістали остачу 6. Знайти дільник і неповну частку.*

Оскільки $a = bq + r$, то $bq = a - r = 100 - 6 = 94$, причому $0 < r < b$, тому $b > 6$ і є дільником числа 94. Отже, ним може бути число 47, а частка при цьому дорівнює 2.

12. *Для перевезення зерна є мішки по 60 і 80 кг. Скільки треба таких мішків для перевезення 440 кг зерна?*

Якщо відповідних мішків x та y, то $60x + 80y = 440$. Що після скорочення на 20 дає рівняння $3x + 4y = 22$. Зрозуміло, x та y мають бути невід'ємними. З рівняння виразимо $x = \frac{22-4y}{3.}$. Виділимо цілу частину і дослідимо дробову, тоді $x = 7 - y + \frac{1-y}{3}$, де $\frac{1-y}{3} = z -$ ціле число, тому $y = 1 - 3x$, а $x = 6 + 4z$. Оскільки $6 + 4z \geq 0$ *і* $1 - 3z \geq 0$, то $3z \leq 1$ має розв'язки $z = 0$, $z = -1$, які задовольняють і нерівність $6 + 4z \geq 0$. Тому розв'язками рівняння є (6;1) і (2;4). Це будуть розв'язки і вихідного рівняння.

13. *Розв'яжемо задачу 12 у загальному вигляді.*

Зведемо її до розв'язку рівняння $3x+4y=22$. Оскільки НСД $(3;4)=1$, то за допомогою алгоритму Евкліда можна знайти такі цілі числа $x_0\ i\ y_0$, що будемо мати $3x_0+4y_0=1$. Справді $4=3\cdot 1+1$, тому $3(-1)+4\cdot 1=1$ звідки $x_0=-1,\ y_0=1$.

Для знаходження розв'язку рівняння $3x+4y=22$ помножимо рівність $3(-1)+4\cdot 1=1$ на 22, отримаємо $3\cdot(-22)+4\cdot 22=22$, отже частинним розв'язком є пара (–22; 22). Щоб знайти загальний розв'язок рівняння $3x+4y=22$, віднімемо від нього рівність $3\cdot(-22)+4\cdot 22=22$, отримаємо $3(x+22)+4(y-22)=0$ або $3(x+22)=4(22-y)$. Оскільки числа 3 і 4 – взаємнопрості, то $(x+22)$ ділиться на 4, а $(22-y)$ ділиться на 3, тобто $22-y=3k$, де $k\in Z$. Тому $x=22+4k$ і $y=22-3k$ є загальним розв'язком рівняння $3x+4y=22$.

Для знаходження розв'язку задачі № 12 потрібно врахувати те, що $x=-22+4k\geq 0\ i\ y=22-3k\geq 0,\ 3k\leq 22$. Спільним розв'язком цих двох нерівностей є $k=6$ і $k=7$. Тому $x=2,\ y=4$, коли $k=6$, бо $4\cdot 7>22$, а при цьому $3\cdot 7<22$. Коли $k=7$, то $x=6,\ y=1$. Отже, дана задача має два розв'язки (2; 4) і (6; 1).

14. *Розв'язати порівняння:*$6x\equiv 8(mod5)$.

Це порівняння рівносильне $6x\equiv 3(mod\,5),\ 2x\equiv 1(mod\,5)$. Серед лишків: $0, 1, 2, 3, 4$ дістанемо розв'язок цього порівняння у вигляді $2x\equiv 1+5(mod\,5)\equiv 6(mod\,5),\ x\equiv 3(mod\,5)$, розв'язком буде весь клас цілих чисел порівняльних з числом 3 за модулем 5. Отже, $x\equiv 3+5z,$ де $z\in Z$.

15. *Чи має порівняння* $3x\equiv 8(mod6)$ *розв'язок?*

НСД (3;6) =3, але 8 на 3 не ділиться, тому порівняння нерозв'язне. Це можна обґрунтувати, також, записавши порівняння у вигляді рівняння $3x=8+6z$, або $3x-6z=8$. Як бачимо, зліва вираз ділиться на 3, а 8 на 3 не ділиться, тому рівняння суперечливе, не має розв'язку і відповідне йому порівняння.

16. *Нехай* $a^{\delta}\equiv 1(mod\,m),\ (a,m)=1,$ *тоді* $a^{\gamma}\equiv 1(mod\,m)\Leftrightarrow\ \gamma$ *ділиться на* δ.

Справді, якщо $a^{\delta}\equiv 1(mod\,m)$, тоді другу конгруенцію можна подати $a^{\delta q+r}\equiv 1(mod\,m)$, звідки $a^{r}\equiv 1(modm)$, де $0\leq r<\delta$, тому $r=0$ і γ ділиться на δ. Правильно і навпаки, якщо γ ділиться на δ, то $\gamma=\delta q$, тому $a^{\delta q}\equiv\left(a^{\delta}\right)^{q}\equiv 1^{q}\equiv 1(mod\,m)$.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Чи утворює множина матриць $\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\right\}$ групу відносно множення?
2. Нехай $M = R \setminus \{0,1\}$. Множина G складається з таких перетворень множини M: $\varphi_0(a) = a, \varphi_1(a) = \frac{1}{a}$, $\varphi_2(a) = 1 - a, \varphi_3(a) = \frac{a}{a-1}$, $\varphi_4(a) = \frac{a-1}{a}, \varphi_5(a) = \frac{1}{1-a}$. Довести, що $G = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_5\}$ утворює групу відносно послідовного виконання. Знайти одиницю та елементи, які обернені самі до себе.
3. Довести, що множина всіх цілих чисел, кратних трьом, є адитивною абелевою групою.
4. Довести, що множина всіх векторів площини є адитивною абелевою групою.
5. Довести, що адитивна група цілих чисел ізоморфна мультиплікативній групі всіх цілих степенів числа 2.
6. Довести, що поле раціональних чисел – мінімальне числове поле.
7. Довести, що періодичні елементи комутативної групи утворюють підгрупу.
8. Знайти періодичну підгрупу групи C^*.
9. Довести, що в групі рівняння $a\,x = b$ для даних a, b має єдиний розв'язок $x = a^{-1}b$, а рівняння $y\,a = y$ має єдиний розв'язок $y = ba^{-1}$.
10. Якщо множина H елементів групи G замкнена відносно групової операції і взяття оберненого елемента, то H – підгрупа групи G.
11. Якщо два суміжні класи однакового виду мають спільний елемент, то вони збігаються.
12. Довести, що група є диз'юнктивним об'єднанням або лівих суміжних класів за підгрупою, або правих суміжних класів за підгрупою.
13. Якщо H, K – підгрупи групи G, $K \subset H \subset G$ і індекси K в H і H в G скінченні, то їх добуток є індексом K в G. Довести.
14. Довести, що в групі квадратних невироджених матриць над деяким полем, множина матриць з одиничним визначником утворює нормальну підгрупу.
15. Довести, що підгрупа ортогональних матриць у групі всіх невироджених дійсних матриць не є нормальною підгрупою.

16. Довести, що гомоморфний образ групи є групою.
17. Довести, що повні прообрази елементів при гомоморфізмі є суміжними класами за ядром гомоморфізму.
18. Нехай *H і K* – підгрупи групи *G*, причому *H* – нормальна підгрупа групи *G*. Тоді *HK* – підгрупа групи *G* і *HK*=*KH*.
19. Нехай Н складається з діагональних невироджених матриць $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, а *K* породжується матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Перевірте, що *HK* не є підгрупою.
20. Елементи групи, які переставні з усіма її елементами, утворюють центр групи – нормальну підгрупу групи. Довести.
21. Нехай *N*, *H* – нормальні підгрупи групи *G*, такі, що $N\cap H=\langle e\rangle$. Тоді $\forall x\in N,\ \ \forall y\in H\quad xy=yx$. Довести.
22. Довести: якщо *H і K* – нормальні підгрупи групи *G*, такі, що $N\cap H=\langle e\rangle$ і *NH*= *G*, то *G* ізоморфна прямому добутку $N\times H$ своїх підгруп.
23. Якщо порядок групи є степінь простого числа *p*, то вона називається *p*-групою. Довести, що *p*-група має центр $\neq\langle e\rangle$.
24. Якщо *Z* – центр *p*-групи *G*, то група внутрішніх автоморфізмі групи *G* ізоморфна групі G/Z.
25. Внутрішні автоморфізми утворюють нормальну підгрупу групи усіх автоморфізмів.
26. Довести: якщо скінченна множина елементів групи *G* замкнена відносно групової операції, то *H* буде підгрупою групи *G*.
27. Довести: якщо всі елементи множини *H* групи *G* мають скінченні порядки і множина *H* замкнена відносно групової операції, то *H* – підгрупа групи *G*.
28. Знайти групи самосуміщень правильних платонових многогранників.
29. Довести, якщо у групі кожен її неодиничний елемент має порядок 2, то група є абелевою.
30. Знайти групу поворотів та групу всіх осьових симетрій правильного трикутника.
31. Симетрична група S_3 має тільки внутрішні автоморфізми. Довести.
32. Довести, що кожна група простого порядку є циклічною і кожен її елемент, крім нейтрального, є її твірним елементом.
33. Довести, що фактор-група некомутативної групи *G* по її центру *Z* не може бути циклічною.
34. Довести, що фактор-група $G\,/\,H$, тоді і тільки тоді буде комутативною, коли *H* включає комутант групи.

35. Описати групи симетрій правильних n-кутників.

36. Знайти всі корені 6-го степеня з 1, дати їм геометричну інтерпретацію. Знайти порядки всіх елементів, підгрупи, фактор-групи за підгрупами та побудувати природні гомоморфізми груп.

37. Довести, що всі рухи площини утворюють групу. Вказати твірні елементи цієї групи.

38. Довести, що усі матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ з раціональними a, b утворюють поле, а з дійсними a, b – тільки кільце.

39. Знайти всі дільники нуля кільця пар (a, b) цілих чисел, з покомпонентним додаванням і множенням.

40. Довести, що в кільці з одиницею e комутативність додавання випливає з решти аксіом кільця.

41. Довести, що матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, де $a, b \in R$, утворюють поле, яке ізоморфне полю С комплексних чисел.

42. Довести, що матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ з $a, b \in Q$ утворюють поле, яке ізоморфне полю чисел $a + b\sqrt{2},\ a, b \in Q$.

43. Довести, що поля Q і R мають лише тотожний автоморфізм.

44. Знайти автоморфізми поля C комплексних чисел.

45. Кільце Z цілих чисел є кільцем головних ідеалів. А кільце многочленів $Z[x]$ – ні. Довести.

46. Довести, якщо ідеал кільця має оборотний елемент, то він збігається з усім кільцем.

47. Довести, що кільце з одиницею і без дільників нуля, у якому кожний спадний ланцюг лівих ідеалів скінченний, є тілом.

48. Довести, що кільце $Z\left[\sqrt{-3}\right] = \left\{x + y\sqrt{-3}i,\ x, y \in Z\right\}$ не є евклідовим.

49. Довести, що кільце чисел $\left\{\frac{1}{2}\left(x + y\sqrt{3}i,\ x, y \in Z\right)\right\}$, де x, y – цілі числа однакової парності, є евклідовим.

50. Довести, що скінченна область цілісності є полем.

51. Довести, що множина подвійних чисел $P = \{a + be$, де $a, b \in R, e^2 = 1\}$ відносно додавання і множення утворює комутативне кільце з одиницею і дільниками нуля виду $a + be,\ a \neq 0$.

52. Довести, що множина дуальних чисел $D = \{a + b\varepsilon,\ a, b \in R,\ \varepsilon^2 = 0\}$ відносно додавання і множення утворюють комутативне кільце з одиницею і дільниками нуля $b\varepsilon,\ \varepsilon \neq 0$.

53. Які ідеали є в будь-якому полі?

54. Довести, що асоційовані елементи кільця породжують один головний ідеал.

55. Який ідеал породжують числа (2,3) у кільці цілих чисел?

56. У кільці цілих гауссових чисел $Z[i]$ знайти всі елементи фактор-кільця $Z[i]/\langle 2\rangle$. Знайти всі оборотні елементи і, якщо є, знайти всі дільники нуля.

57. Довести, що гомоморфний образ області цілісності є кільцем, але не завжди є областю цілісності. З огляду на це, розгляньте фактор-кільце $Z/\langle 6\rangle$.

58. Довести, що кільця $Z[\sqrt{2}]$ та $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix},\ a, b \in Z\right\}$ ізоморфні.

59. Довести, що поле Q є полем часток кільця цілих чисел Z.

60. Довести, що полем часток кільця $Z[i]$ є поле $Q(i)$.

61. Довести, що в кільці $\{a + b\sqrt{3}i, a, b \in Z\}$ 4 ділиться на $1+i\sqrt{3}$, але не ділиться на $2+2i\sqrt{3}$; оборотні елементи кільця вичерпуються числами ± 1; усі дільники числа 4 вичерпуються числами $\pm 1, \pm 1 \pm \sqrt{3}i, \pm 2, \pm 4$; знайти спільні дільники чисел 4 і $2+2i\sqrt{3}$; чи мають 4 і $2+2i\sqrt{3}$ найбільший спільний дільник?

62. Довести, що у даному кільці числа $\pm 1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i},\ \pm 2$ незвідні (прості).

63. Довести, що в кільці Z добуток ідеалів $\langle a\rangle\langle b\rangle = \langle ab\rangle$.

64. Довести, якщо I і J – ідеали кільця, то $I + J = \{x + y,\ x \in I,\ y \in J\}$ – ідеал кільця.

65. У кільці K головних ідеалів кожні два елементи a і $b \neq 0$ мають НСД $(a, b) = d$, тоді існують такі елементи u, v, що $d = au + bv$. Довести.

66. Довести, що в кільці головних ідеалів кожний зростаючий ланцюг ідеалів $\langle a\rangle \subset \langle a_1\rangle \subset \cdots \subset \langle a_n\rangle \subset \cdots$ обривається через скінченне число кроків.

67. Довести, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

68. Скільки існує натуральних чисел, які менші 100 і такі, що не діляться ні на 2, ні на 3?

69. Скільки є яблук, якщо їх розкласти по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, і при цьому одне яблуко залишається, а якщо розкласти по 7, то не залишається жодного яблука.
70. Знайти, при яких натуральних n n^3+7n+1 ділиться на $n-2$.
71. Знайти НСД(1173, 323), НСК[–38, 178].
72. Розв'язати рівняння: $8x+3=2$; $8x+5y=49$.
73. Скоротити дріб $\frac{932}{10959}$.
74. Чи ізоморфні поля $Q(\sqrt{2})$ і $Q(-\sqrt{2})$?
75. Довести нескінченність множини простих чисел виду $4k+1$, $k\in N$.
76. Знайти лінійне зображення НСД(1786, 705).
77. Розв'язати в цілих числах рівняння $12x+31y=170$.
78. Серед чисел 135, 106, 181, 225 знайти всі пари чисел, які порівняльні за модулем 15.
79. Знайти остачу від ділення 208^{208} на 23.
80. Знайти останню цифру числа $(22^3)^9$.
81. Довести, що дане рівняння не має розв'язків в натуральних числах, якщо $x, y, z \in N$, $2^x+7^y=19^z$.
82. Чи утворює повну систему лишків множина чисел 597, –181, 242, –303, 135, 32, –43, 186 за модулем 11?
83. Чи утворює зведену систему лишків множина чисел 1, 2, 3, 4, 120, 121, 123, –1, –2, –3 за модулем 11?
84. Довести: якщо х набуває значень повної системи лишків за модулем 11, то й $3x+2$ теж пробігає повну систему лишків за тим же модулем.
85. Довести: якщо х пробігає зведену систему лишків за модулем 9, то й $7x^5$ теж пробігає зведену систему лишків за тим же модулем.
86. Знайти повну та зведену систему найменших невід'ємних лишків за модулем 12.
87. Знайти повну систему найменших за абсолютною величиною лишків за модулем 15.
88. Знайти повну систему найменших натуральних лишків за модулем 7.
89. Користуючись теоремою Ейлера, знайти остачу від ділення 109^{345} на 14.
90. Користуючись теоремою Ферма, знайти остачу від ділення 42^{50} на 17.

91. Розв’язати різними методами конгруенції:

а) $3x \equiv 22(\text{m } 7)$, б) $8x \equiv 3(\text{m } 4)$, в) $32x \equiv 43(\text{m } 51)$,

г) $12x \equiv 51(\text{m } 39)$, д) $13x \equiv -1(\text{m } 30)$.

92. Скласти конгруенції першого степеня з одним невідомим за модулем 12 так, щоб одна з них не мала розв’язків, а друга мала тільки один розв’язок і третя мала б більше одного розв’язку.

93. Розв’язати в цілих числах невизначені рівняння декількома методами: а) $17x - 16y = 31$, б) $23x + 15y = 19$.

94. Розв’язати систему конгруенцій: $\begin{cases} 3x \equiv 1(mod20) \\ 2x \equiv 3(mod15) \end{cases}$

95. Скільки точок з цілими координатами лежать на прямій $8x - 13y + 6 = 0$ між точками її перетину з прямими $x = -20$ і $x = 30$?

96. Скільки точок з цілими координатами лежать на прямій $31x - 47y = 23$ між точками з абсцисами 23 і –50 ?

97. Скільки розв’язків має конгруенція $x^5 \equiv 10(\text{mod } 11)$?

98. Чи можна конгруенцію $3x^3 - 5x^2 - 2 \equiv 0(mod5)$ замінити на рівносильну того ж степеня, але зі старшим коефіцієнтом 1 ?

99. Розв’язати конгруенцію, звівши її до двочленної: $2x^2 + 4x - 1 \equiv 0(mod5)$

100. Знайти кількість розв’язків конгруенції $x^3 \equiv 3(mod31)$.

101. Скільки білетів вартістю 30 і 50 гр. можна купити на 1490 гр.?

102. Знайти порядки всіх класів лишків за модулем 11.

103. Знайти всі первісні корені за модулем 15.

104. Знайти число первісних коренів і найменший з них за модулем 37.

105. Найменшим первісним коренем за модулем 37 є 2. Скільки існує всього первісних коренів за модулем 37. Знайти їх.

106. Довести, що для простого числа *p* виду 2^n, де *n*>*3*, число 3 є первісним коренем.

107. Серед зведеної системи лишків за модулем 41 знайти ті, порядок яких дорівнює 6, тобто розв’язати рівняння $x^6 \equiv 1$

108. Знайти дільники нуля в кільці $Z_6 = \{\bar{0}.\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$.

Питання до екзамену з алгебри і теорії чисел

1. Поняття бінарної алгебраїчної операції та її властивості.
2. Алгебраїчні структури: півгрупа, група, кільце, поле, векторний простір, модулі.
3. Підгрупи. Критерій бути підгрупою.
4. Властивості гомоморфізмів, ізоморфізмів груп. Їх ядра.
5. Види груп. Циклічні групи та їх підгрупи.
6. Розклад групи за підгрупою. Теорема Лагранжа.
7. Нормальні підгрупи групи. Фактор-група.
8. Поняття подільності цілих чисел та їх властивості.
9. Теорема про ділення з остачею.
10. НСД, НСК, зв'язок між ними. Алгоритм Евкліда.
11. Прості числа та їх знаходження.
12. Основна теорема арифметики натуральних чисел.
13. Поняття порівняння цілих чисел та їх властивості.
14. Повна та зведена система лишків. Адитивна група та кільце класів лишків.
15. Функція Ейлера. Теорема Ферма та Ейлера.
16. Лінійні конгруенції з одним невідомим. Методи їх розв’язування.
17. Індекси за простим модулем та їх властивості.
18. Область цілісності та поле часток. Ідеали кілець.
19. Відношення подільності в комутативних кільцях.
20. Прості і складні елементи області цілісності. Кільця головних ідеалів

IV СЕМЕСТР

МОДУЛЬ 3.

МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 7. Кільце многочленів

Многочлени та основні поняття, що пов'язані з ними. Корені многочлена. Схема Горнера та її застосування. Теорема Безу та її узагальнення. Про алгебраїчну та функціональну рівність многочленів.

Практичне заняття № 1. **Многочлени та основні поняття, що пов'язані з ними. Корені многочлена.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 20.3; № 20.5 (а); № 20.6 (в); № 20.14 (а); № 20.16 (а); №22.2 (а); № 22.3 (в); № 22.4; № 22.10; № 22.12.

Домашнє завдання: № 22.13; № 22.18; № 22.21; № 22.22 (а); № 22.23 (а); № 21.15; № 21.1 (а).

Тема 8. Теорія подільності в кільці многочленів

Теорема про ділення з остачею. Алгоритм Евкліда, НСД, НСК многочленів. Незвідні многочлени над даним полем. Основна теорема про розклад многочленів в добуток незвідних множників. Похідна многочлена та відокремлення кратних множників.

Практичне заняття № 2. **Відношення подільності в кільці многочленів. Ділення з остачею. НСД, НСК многочленів.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 21.2; № 21.2; № 21.11 (б,в); № 21.12 (а,г); № 21.13; № 23.3 (г); № 23.5 (в); № 23.6 (б); № 23.7 (а); № 32.13 (а).

Домашнє завдання: № 23.12 (а); № 23.7 (г); № 23.6 (д); № 23.3 (а); № 22.20; № 22.21; № 22.9.

Практичне заняття № 3. **Незвідні многочлени над полем. Розклад многочленів на незвідні множники.**

Завдання для закріплення і повторення вивченого матеріалу:

№ 24.3; № 24.5; № 24.8; № 24.10 (а); № 24.16 (а,в,з,л); № 25.7; № 25.21 (в).

Домашнє завдання: № 25.20 (г); № 25.17 (б); № 25.6; № 25.15 (б); № 24.16 (е,к, н); № 24.1.

Тема 9. Многочлени від декількох змінних

Основні поняття, пов’язані з многочленами від декількох змінних та їх кільцями. Симетричні многочлени та основна теорема про них. Застосування. Результант многочленів.

Практичне заняття № 4. **Многочлени від кількох змінних. Симетричні многочлени та основна теорема про них.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 27.14 (б); № 27.18 (а,г); № 28.1; № 28.2 (а); № 28.4 (б); № 28.9 (г,д); № 29.1

Домашнє завдання: № 29.1 (д,е); № 29.3 (а); № 29.3 (а); № 28.9 (б); № 28.10 (в); № 27.17; № 27.17 (д).

Практичне заняття № 5. **Результант многочленів, застосування.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№29.4 (а,б); № 29.10 (а,в); № 30.1 (а,б,в,г); № 30.3 (а); № 30.4 (а); № 30.8 (б).

Домашнє завдання: № 30.9 (б); № 30.4 (д); № 30.3 (в); № 30.1 (л,м); № 29.4 (г)

Тема 10. Многочлени над числовими полями

Основна теорема алгебри многочленів. Доведення теореми Гаусса та наслідків з неї. Корені многочленів з дійсними коефіцієнтами. Незвідні многочлени над С і R.

Практичне заняття № 6. **Застосування основної теореми алгебри многочленів до дослідження многочленів та їх коренів.**

Завдання для закріплення і повторення вивченого матеріалу:

№ 25.13; № 25.14; № 25.16; № 25.18; № 31.11; № 31.17 (а); № 31.20; № 31.15.

Домашнє завдання: №31.12; №31.15(б); №31.16(б); №31.18; №31.22.

Тема 11. Рівняння малих степенів

Дослідження і розв’язування рівнянь 3-го і 4-го степеня, їх розв’язність в радикалах. Нерозв’язність в радикалах рівнянь вищих степенів $n \geq 5$.

Практичне заняття № 7. **Дослідження та розв’язування рівнянь третього степеня.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 33.1 (а); № 33.2 (б,г); № 33.3; № 33.5; № 33.8; № 33.13; № 33.17 (д); № 31 2

Домашнє завдання: № 33.1 (е); № 33.2 (е); № 33.6; № 33.10; № 33.12 (а).

Практичне заняття № 8. **Дослідження та розв′язування рівнянь четвертого степеня.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 33.18 (а,б); № 33.19; № 33.20 (б); № 33.21;

Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре (1964): № 690 (а); № 691 (а); № 695 (б); № 747.

Домашнє завдання: № 33.18 (в,г); № 33.20 (а); № 33.22 (а); № 696 (д); № 670.

Тема 12. Многочлени над полем Q і кільцем Z

Критерій незвідності. Цілі та раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами. Поле алгебраїчних чисел.

Практичне заняття № 9. **Застосування алгоритму пошуку цілих та раціональних коренів многочленів з цілими коефіцієнтами. Критерій незвідності Ейзенштейна.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 35.1 (а,к,м); № 35.3 (в,д); № 35.4 (б,в,г); № 35.5 (б); Шнеперман Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел (1982) № 13.3(5,7); № 13.5(1);

Домашнє завдання: № 13.3 (2,6); № 13.5 (2); № 13.12 (1,2,5); № 35.4 (д); № 35.7 (а,в); № 35.1 (л).

МОДУЛЬ 4.

АЛГЕБРАЇЧНІ РОЗШИРЕННЯ ПОЛІВ

Тема 13. Алгебраїчні числа

Алгебраїчні числа, їх мінімальні многочлени, властивості. Види алгебраїчних розширень. Структура простого алгебраїчного розширення та інші види розширень. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу.

Практичне заняття № 10. **Алгебраїчні і трансцендентні числа. Будова простого алгебраїчного розширення поля.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 36.1 (б,в,є); № 36.2 (в); № 36.3 (а,б); № 36.9; Шнеперман Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел (1982) № 13.39 (1); № 13.40; № 13.38.

Домашнє завдання: № 36.1 (г,е,ж); № 36.2 (б); № 36.3 (в); № 36.7; № 13.39.

Практичне заняття № 11. **Звільнення від алгебраїчної ірраціональності в знаменнику дробу.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

№ 37.1 (б) – застосувати теорему про основні симетричні многочлени; (в) – застосувати теорему про просте алгебраїчне розширення поля; (д) – застосувати метод невизначених коефіцієнтів; № 37.2 (в) – застосувати алгоритм Евкліда; № 37.3 (б) – застосувати формули скороченого множення.

Домашнє завдання: № 37.1 (г); № 37.2 (г); № 37.3 (г); № 34.4 (а).

Тема 14. Поняття про теорію Галуа

Вихідні поняття теорії Галуа. Нормальні розширення полів. Автоморфізми полів Галуа. Група Галуа. Розв'язні групи. Рівняння розв'язні в радикалах. Поняття про нерозв'язність в радикалах загального рівняння степеня $n \geq 5$.

Практичне заняття № 12. **Розв'язність алгебраїчних рівнянь в квадратних радикалах.**

Завдання для закріплення та повторення вивченого матеріалу:

Шнеперман Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. (1982)

№ 13.53 (1,2); № 13.54; Окунев Л. Я Сборник задач по высшей алгебре.(1964)

№730, № 731; № 738 (а); № 739 (с); № 741; № 748 (а); № 751.

Домашнє завдання: № 738 (б); № 740 (б); № 742; № 747 (а); № 752; № 754.

Питання теорії, що виносяться на самостійне опрацювання

1. Многочлени та основні поняття пов'язані з ними.
2. НСД, НСК многочленів.
3. Похідна многочлена та відокремлення кратних множників.
4. Кільце многочленів від декількох змінних, основні поняття.
5. Рівняння малих степенів, необхідність введення комплексних чисел.
6. Складене алгебраїчне розширення поля та його зв'язок з простим.
7. Задачі розв'язні і нерозв'язні за допомогою циркуля і лінійки.

Основні питання теорії і методи розв'язування вправ викладені в посібниках: Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. И. Алгебра і теорія чисел, ч. 1-2. – К.: ВШ, 1977, 1980.; Завало С. Т., Левіщенко Е. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Алгебра і теорія чисел. Практикум, ч. 1-2. – К.: ВШ, 1983, 1986.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. *Чи є серед чисел* 1; –1; 2 *корені многочлена* $3x^5 - 5x^4 - 7x^2 + 12$?

Це можна перевірити за схемою Горнера або безпосередньо підставити дані значення в многочлен. Після підстановки будемо мати: $f(-1) = -3$, $f(1) = 3$, $f(2) = 0$. Як бачимо тільки при значенні $x = 2$ многочлен дорівнює нулю. Тому 2 є коренем многочлена.

2. *Розкласти многочлен на множники* $x^4 + 3x^2 - 14$.

Якщо многочлен має цілі корені, то вони знаходяться серед дільників вільного члена – 14: $\pm1; \pm2; \pm7; \pm14$. За схемою Горнера встановимо, що даний многочлен не має цілих коренів, тому він немає лінійних множників.

Але можливо він є добутком квадратних тричленів, тобто $(ax^2 + bx + c)(px^2 + qx + r) = x^4 + 3x^2 - 14$. Для перевірки цього потрібно знайти невизначені коефіцієнти квадратних тричленів. Оскільки добуток вищих членів співмножників є вищим членом даного многочлена, то $a = p = \pm1$. З огляду на те, що два многочлени, записані в канонічному вигляді, рівні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при відповідних степенях рівні, у першому випадку $a = p = 1$ маємо $b + q = 0, r + c + bq = 3,\ br + cq = 0, cr = -14$. Виявляється, що ця система розв'язку не має. У випадку $a = p = -1$ теж дістаємо аналогічний висновок. Отже, даний многочлен не розкладається і на квадратні множники. Звичайно для даного многочлена питання розкладу на множники можна розв'язати простіше, оскільки задача зводиться до розв'язання квадратного рівняння $y^2 + 3y - 14 = 0$, де $x^2 = y$. Оскільки це рівняння не має жодного цілого кореня, то відповідний многочлен не можна розкласти в добуток лінійних множників, а отже вихідний многочлен – в добуток квадратних множників.

3. *Відокремити кратні множники многочлена* $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

Для цього знайдемо похідну даного многочлена $3x^2 - 3$ і НСД даного многочлена і його похідної $x + 1$. Цей множник входить в многочлен $f(x)$ з кратністю два, тому якщо його поділити на $(x + 1)^2$, отримаємо $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$.

4. *Розкласти многочлен на множники* $f(x, y, z) = xy(x - y) + {}$ $+xz(z - x) + yz(y - z)$.

Для знаходження розкладу, використаємо узагальнення теореми Безу. Справді. Оскільки при $x = y$ $f(x, y, z) = 0$, то $x_0 = y$ є коренем даного многочлена. Отже, многочлен ділить на $(x - y)$. Аналогічно встановлюємо, що многочлен ділиться на $(y - z)$ і $(z - x)$, тому розклад многочлена має вигляд: $f(x, y, z) = \alpha(x - y)(y - z)(z - x)$. Знайдемо значення α, підставимо $x = 0$, $y = z = 1$, що дає значення $\alpha = -1$.

5. *Виразити многочлен* $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 5xyz$ *через основні симетричні многочлени* σ_1; σ_2; σ_3.

Для зображення даного симетричного многочлена через основні симетричні многочлени потрібно передбачити всі можливі вищі члени вираження через основні симетричні многочлени та коефіцієнти при них. Оскільки вищий член симетричного многочлена $x^k y^l z^m$ задовольняє умову $k \geq l \geq m$, то в зображенні можуть бути тільки такі члени $\sigma_1^3 + \mathrm{A}\sigma_1\sigma_2 + \mathrm{B}\sigma_3$ де $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + x = yz, \sigma_3 = xyz$ (бо можуть бути лише такі вищі члени $x^3 y^0 z^0$, $Ax^2 yz^0$,$Bxyz$). Для знаходження невизначених коефіцієнтів А і В вибираємо такі значення змінних x, y, z як 1, 1, 0 та 1, 1, –2, тоді $f\,(1,1,0) = 2$, $f\,(1,1,-2) = -16$ і $8 + A \cdot 2 \cdot 1 + B \cdot 0 = 2$, $A = -3$, у другому випадку $0 + A \cdot 0 \cdot (-3) + B \cdot (-2) = -16$, $B = 8$. Тому маємо такий вигляд даного многочлена через основні симетричні многочлени $f(x, y, z) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3$.

6. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} (y^2 + y)x^2 + y^2 x + 1 = 0 \\ y^2 x + 1 = 0 \end{cases}$.

Запишемо та обчислимо результант, який складається з коефіцієнтів наших рівнянь $\begin{vmatrix} y^2 + y & y^2 & 1 \\ y^2 & 1 & 0 \\ 0 & y^2 & 1 \end{vmatrix} = y(y + 1) = 0$. Корені цього рівняння $y_1 = -1$, $y_2 = 0$. Коли $y = -1$, вихідна система перетворюється в систему з двох таких рівнянь $0x^2 + x + 1 = 0$ i $x + 1 = 0$, отже $x = -1$. Тому (–1; 1) є розв'язком вихідної системи. Коли $y = 0$, то отримуємо суперечливу систему рівнянь $0x^2 + 0x + 1 = 0$, $0x + 1 = 0$.

7. *Побудувати квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами, одним з коренів якого є:* 1+i.

Так як комплексні корені квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами взаємно спряжені, то другим коренем буде 1–i. За теоремою Вієта сума коренів $(1 + i) + (1 - i) = 2$, а добуток відповідно

$(1+i)(1-i)=2$. Тому числа 1+i, 1–i є коренями рівняння $x^2-2x+2=0$.

8. *Знайти раціональні корені многочлена* $f(x)=x^4+x^3-11x^2-5x++30$.

Оскільки цілі раціональні корені даного многочлена знаходяться серед дільників вільного члена 30, то їх треба було б перевірити на наявність кореня за схемою Горнера. Через їх велику кількість знайдемо спочатку межі дійсних коренів: верхня межа дорівнює $1+\sqrt{\frac{11}{1}}<5$, а нижня межа –12. Тому цілі корені знаходяться в інтервалі (–12; 5). Залишається перевірити числа $\pm1,\pm2,\pm3,-5,-6,-10$. Застосуємо критерій відбору $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ і $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ – цілі. $f(1)=16$, $f(-1)=24$ – не є коренями многочлена. Далі замість α підставляємо решту 7 цілих чисел. З них тільки 2, 3, –3 треба перевірити за схемою Горнера, чи є серед них корені. Виявляється, що числа 2 і –3 є коренями, причому однократними. Отже, $f(x)=(x-2)(x+3)(x^2-5)$.

9. *Довести, що многочлен* $f(x)=x^3-6x^2+12x-4$ *є незвідним над Q (полем раціональних чисел).*

Безпосередньо застосувати критерій Ейзенштейна не можна, тому подамо многочлен у вигляді $f(x)=(x-2)^3+4$, $y=x-2, x=y+2$тоді $f(y+2)=y^3+4$. Так як многочлен y^3+4 не має раціональних коренів, то він незвідний над полем Q, а отже вихідний многочлен незвідний над Q.

10. *Чи звідний многочлен* $f(x)=x^6-2x^3-1$ *над Q?*

З’ясуємо чи є цілі корені многочлена серед дільників 1. Таких коренів немає. Отже, даний многочлен не може мати лінійних множників. Зробимо підстановку $y=x^3$, тоді отримаємо многочлен y^2-2y-1, який має корені $y_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$. Цей многочлен незвідний над Q, а отже, не розкладається в добуток многочленів третього степеня. Перевіримо, що цей многочлен немає і квадратного множника. Нехай многочлен має вигляд $x^6-2x^3-1=(x^2+px-1)(x^4+ax^2+bx^2+cx+1)$. Перемножимо, зведемо подібні члени і застосовуючи алгебраїчну рівність многочленів отримаємо систему, $x^6+(a+p)x^5+(b+ap+1)x^4+(c+bp+a)x^3+$ $+(b+cp-1)x^2+(c-p)x-1=x^6-2x^3-1$; $a+p=0$, $b+ap+1=0$, $c+bp+a=-2$, $b+cp-1=0$, $c-p=0$, звідки будемо мати $p=-a,\ b-a^2+1=0,\ c-ab+a=-2,\ p=c,$ $b-ac-1=0$. Отже $p=-a=c,\ b-a^2+1=0, -a-ab+a=-2,\ b+a^2-1=0,$ тому

$p = -a = c,\ b - a^2 + 1 = 0,\ a^2 + b - 1 = 0 - 2b = 0$ або $b = 0$. Тому дістаємо суперечність $a \cdot 0 = 2$. До того ж висновку дійдемо, розглядаючи другу можливість. Прийшли до висновку, що многочлен не має квадратичного множника. Отже многочлен незвідний над Q.

11. *Довести, що число* $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ *є алгебраїчним над* Q.

Число $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ є коренем рівняння $x^3 = 1 - \sqrt{2}$ над полем $Q(\sqrt{2})$. Щоб знайти рівняння над Q, продовжимо перетворення і отримаємо $x^3 - 1 = -\sqrt{2},\ (1-x^3)^2 = 2,\ x^6 - 2x^3 + 1 = 2$. Отже задане в умові число є коренем рівняння $x^6 - 2x^3 - 1 = 0$.

12. *Які елементи утворюють базис розширення поля* $Q\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\right)$*?*

Якщо $\alpha = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$, то степені $\alpha^0 = 1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^5$ утворюють базис даного в умові задачі розширення. Його можна розглядати як 6-вимірний простір над полем Q, в якому кожний ненульовий елемент має обернений.

13. *Яке число буде спряжене до* $\alpha = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$*?*

Спряженим до α буде таке число β, що $\alpha \cdot \beta$ – раціональне число. У випадку $\alpha \cdot \beta = 1$ число β буде навіть оберненим. Знайдемо многочлен коренем якого є α, це $\alpha^6 - 2\alpha^3 = 1$. Звідки $\alpha(\alpha^5 - 2\alpha^2) = 1$, а тому маємо, що $\beta = \alpha^5 - 2\alpha^2$.

14. *Чи є розширення* $Q(\sqrt{2})$ *нормальним?*

Скінченне розширення F поля Pназивається нормальним, якщо кожний многочлен, який незвідний над P і який має в F деякий корінь, має в F усі свої корені.

На основі означення, ми можемо сказати, що розширення $Q(\sqrt{2})$ є нормальним. Так $\alpha = \sqrt{2}$ є коренем рівняння $x^2 - 2 = 0$ над Q, але це рівняння має своїм коренем і $\beta = -\sqrt{2}$, який теж входить в $Q(\sqrt{2})$, бо $-\sqrt{2} = 0 - \sqrt{2} \in Q(\sqrt{2})$.

15. *Чи є розширення* $Q(\sqrt[4]{2})$ *нормальним?*

За означенням нормального розширення поля, перевіримо, чи всі корені рівняння $x^4 - 2 = 0$ знаходяться в даному розширенні. Наше рівняння зводиться до розв'язування двох рівнянь $x^2 - \sqrt{2} = 0$ і $x^2 + \sqrt{2} = 0$. Корені першого рівняння знаходяться в $Q(\sqrt[4]{2})$, але жодний корінь $\pm i\sqrt[4]{2}$ другого рівняння не знаходиться в даному полі. Тому таке розширення не є нормальним.

16. *Довести, що квадратичне розширення $Q(\sqrt{2})$ поля Q має автоморфізм f: $a+b\sqrt{2} \to a-b\sqrt{2}$ поля $Q(\sqrt{2})$ над полем Q.*

Справді, таке відображення взаємно однозначне, бо кожне число має єдине спряжене. Так як будь-яке раціональне число $\alpha = a + 0 \cdot \sqrt{2}$ і $\alpha = a - 0 \cdot \sqrt{2}$, то при відображенні f раціональні числа залишаються нерухомими, а кожний елемент c розширення F автоморфізмом φ перетворюється в спряжений до нього елемент $\varphi(c)$. Тому маємо:

$$f\colon \begin{array}{l} a+b\sqrt{2} \to a-b\sqrt{2} \\ \underline{c+d\sqrt{2} \to c-d\sqrt{2}} \end{array}$$

$$(a+c)+(b+d)\sqrt{2} \to (a+c)-(b+d)\sqrt{2}.$$

Аналогічно відносно множення. Отже, f автоморфізм поля $Q(\sqrt{2})$, причому другого порядку, бо $a+b\sqrt{2} \to a-b\sqrt{2} \to a+b\sqrt{2}$. Автоморфізм fпороджує циклічну групу другого порядку – групу Галуа поля $Q(\sqrt{2})$ над полем Q, яка позначається $G(Q(\sqrt{2})/Q)$.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Поділити многочлен $4x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ на $2x^2 - 5x + 1$.
2. Чи є $x = -3$ коренем многочлена $2x^4 - 3x^2 + 5x + 12$?
3. Розкласти многочлен $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$за степенями $x - 1$.
4. Розкласти многочлен $x^6 - 4x^5 - 7x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 1$ за степенями $x^2 - 1$.
5. Знайти НСД двох многочленів: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ і $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
6. Знайти НСК многочленів: $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x - 2$ і $x^2 - x + 2$.
7. Знайти лінійне представлення НСД двох многочленів $x^3 + 5x^2 + 6x + 2$ і $x^2 + 6x + 5$.
8. Чи має многочлен $x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 4$ кратні корені?
9. При яких a, b, c многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ ділиться на $(x-1)^3$?
10. Відокремити кратні множники многочлена $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.
11. Упорядкувати лексикографічно і знайти вищий член многочлена $2x^3(y+z) - 3y^2x^2(x^2+z^2) + 5x^4yz^2$.
12. Застосовуючи підстановку $x = zy$, розкласти в добуток незвідних множників многочлен $9x^4 - 12x^3y - 21x^2y^2 - 40xy^3 - 16y^4$.
13. Розкласти в добуток незвідних множників многочлен $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.
14. Застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів, розкласти в добуток незвідних множників многочлен $x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 19x - 3$.
15. Обчислити результант многочленів: $3x^2 + 7x + 2$ і $x^2 - 3$.
16. Виразити многочлен $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$ через основні симетричні многочлени.
17. Розв'язати систему рівнянь: $(x-y)(x^2-y^2) = 3$ і $(x+y)(x^2+y^2) = 15$.
18. Розв'язати рівняння, застосовуючи симетричні многочлени: $(10-x)^{3^{-1}} - (3-x)^{3^{-1}} = 1$.
19. Розв'язати рівняння $x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$.
20. Чи має дійсні корені многочлен: $2x^6 + x^4 + x^2 + 1$?

21. Чи має многочлен $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ корінь з проміжку [4,10]?

22. Довести, що многочлен $6x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ при всіх $x \geq 2$ набуває тільки додатних значень.

23. Розв'язати графічно рівняння $2x^3 + 5x^2 - x - 2 = 0$.

24. Розв'язати рівняння $x^4 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$.

25. Розв'язати систему, використовуючи основні симетричні многочлени: $(x - y)(x^2 - y^2) = 16, (x + y)(x^2 + y^2) = 40$.

26. Знайти інші корені многочлена $3x^3 + ax^2 + bx + 12$, якщо його коренем є 1.

27. Знайти, для якого a рівняння $x^5 + 2ax + 1$ має корінь $x = 1$. Яка кратність цього кореня?

28. Довести, що $x^4 - 3x^3 y = y^4$ не має цілих розв'язків, відмінних від нуля.

29. Побудувати геометричне місце точок z, що $z^{-1}\bar{z} = 1, z \in C$.

30. Чи можна многочлен $x^4 + x^2 + 1$ подати у вигляді суми квадратів двох многочленів?

31. Довести, що многочлен $x^5 + 5x + 9$ є незвідним над полем Q.

32. Знайти мінімальний многочлен числа $\alpha = 1 + \sqrt[3]{2}$.

33. Довести, що існує таке алгебраїчне число α, що $Q(\alpha) = Q(\sqrt{2})(\sqrt{5})$.

34. Позбавитися від ірраціональності в знаменнику: а) $\dfrac{2}{(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1)}$,

    б) $\dfrac{x}{x+1}$, де x – корінь многочлена $x^3 - 2x - 3$.

35. Довести, що $8x^3 - 6x - 1 = 0$ і $x^9 - 1 = 0$ нерозв'язні в квадратних радикалах.

36. Довести, що за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати правильний трикутник.

37. Чи ізоморфні поля $Q(\sqrt{3} + i\sqrt{5})$ і $Q(\sqrt{3} - i\sqrt{5})$?

38. Чи можна побудувати корені рівняння $8x^3 - 6x - 1 = 0$ за допомогою циркуля і лінійки?

39. Знайти групу автоморфізмів полів: $Q, R, C, Q(\sqrt{2})$.

40. Знайти поля розкладу многочленів: $x^2 - 2$, $x^2 + 1$.

41. Довести, що поле $Q(\sqrt{3})$ включає всі корені мінімального многочлена елемента $\sqrt{3}$, тобто $Q(\sqrt{3})$ є нормальним розширенням поля Q.

42. Довести, що многочлен x^4-3 незвідний над Q, а порядок його групи дорівнює 8.
43. Довести, що поле C не має розширень другого степеня.
44. Довести, що корені n-го степеня з одиниці утворюють мультиплікативну циклічну групу.
45. Довести, що поля 3-го і 4-го степенів з одиниці над полем Q квадратичні.
46. Чи ізоморфні квадратичні поля коренів 3-го і 4-го степенів з одиниці?
47. Знайти групу Галуа рівняння $x^3+1=0$.
48. Довести, що кожний елемент поля Галуа F характеристики p має тільки один корінь p-го степеня.
49. Довести, що поле Галуа F порядку p^n є нормальним розширенням поля P порядку р.
50. Довести, що число елементів поля Галуа F характеристики p має p^n елементів для деякого $n \in N$.
51. Довести, що мультиплікативна група скінченного поля циклічна.
52. Довести: якщо F – поле порядку p^n, то відображення $f(a)=a^p$, де $a \in F$, є автоморфізмом.
53. Довести, що рівняння $x^3-2=0$ нерозв'язне в квадратних радикалах.
54. Довести, що не можна кут 60° розділити на три рівні частини за допомогою циркуля і лінійки.
55. Обґрунтувати, що за допомогою циркуля і лінійки не можна побудувати правильний 7-кутник.
56. Довести, що за допомогою циркуля і лінійки не можна побудувати трикутник за даними трьома бісектрисами.
57. Обґрунтувати, що числа π і $\sqrt{\pi}$ не можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.
58. Обґрунтувати, що задача про квадратуру круга рівносильна задачі про побудову відрізка довжини $\sqrt{\pi}$.
59. Довести, що числа $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ і $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ – це єдині взаємно обернені числа, що мають однакові дробові частини.
60. Довести, що відрізок можна поділити у відношенні $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ за допомогою циркуля і лінійки

Питання до екзамену з алгебри і теорії чисел

1. Кільце многочленів від однієї змінної та основні поняття пов’язані з ними.
2. Корені многочлена, їх види. Теорема Лагранжа.
3. Схема Горнера та теорема Безу.
4. Алгебраїчна і функціональна рівність многочленів. Поняття кореня.
5. Подільність многочленів. Незвідні многочлени.
6. Похідна многочлена та її властивості. Застосування похідної до відокремлення кратних множників.
7. Многочлени від багатьох змінних.
8. Кільце симетричних многочленів. Основні симетричні многочлени.
9. Теореми про многочлени з спільним коренем.
10. Результант двох многочленів та його застосування.
11. Основна теорема алгебри многочленів (теореми Кронекера, теорема Гауса, леми про модуль старшого члена).
12. Леми про многочлени непарного та парного степеня. Лема про многочлени з комплексними коефіцієнтами.
13. Теорема про корені многочлена з комплексними коефіцієнтами.
14. Властивості раціональних коренів многочленів з цілими коефіцієнтами.
15. Алгоритм знаходження цілих і раціональних коренів многочлена.
16. Незвідні многочлени. Критерій Ейзенштейна.
17. Дослідження та розв’язування кубічних рівнянь.
18. Дослідження та розв’язування рівнянь 4-го степеня.
19. Поняття алгебраїчного числа. Мінімальний многочлен та його властивості.
20. Будова простого алгебраїчного розширення. Види алгебраїчних розширень та їх взаємозв’язок.
21. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу.
22. Поняття про розв’язність рівнянь в радикалах, зокрема кубічного рівняння – в квадратних радикалах.
23. Класичні задачі, нерозв’язні за допомогою циркуля і лінійки.
24. Вихідні поняття теорії Галуа.

ЛІТЕРАТУРА

1. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. И. Алгебра и теория чисел, ч. І. – К.: ВШ, 1977. – 400 с.
2. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. И. Алгебра и теория чисел, ч. 2. – К.: ВШ, 1980. – 408 с.
3. Куликов Л. Я. Алгебра й теория чисел. – М., 1979. – 559 с.
4. Завало С. Т., Левіщенко Е. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. – Ч. І. – К.: ВШ, 1983. – 232 с.
5. Завало С. Т., Левіщенко Е. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. – Ч. 2. – К.: ВШ, 1986. – 264 с.

Додаткова література:

6. Шнеперман Л. П. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. Ч.1. – Мн.: ВШ, 1986. – 272 с.
7. Шнеперман Л. П. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. Ч. 2. – Мн.: ВШ, 1987. – 256 с.
8. Любецький В. А. Основные понятия школьной математики. – М.: Просвещение, 1987. – 400 с.
9. Мурач М. М. Методические указаний к программе по курсу: «Алгебра и теория чисел», «Линейная алгебра». – Чернигов.: ЧГПИ, 1986. – 56 с.
10. Михелович Ш. Х. Теория чисел. – М.: ВШ, 1967. – 336 с.
11. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. – М.: Мир, 1965. – 442 с.
12. Постников М. М. Теория Галуа. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 218 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Нак Марина Миколаївна
Хайтова Оксана Михайлівна

АЛГЕБРА

Навчально-методичний посібник з курсу
для студентів
спеціальності 6.040201 «Математика»

Технічний редактор *О. І. Полковник*

Комп'ютерний набір *М. М. Нак, О. М. Хайтова*

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 17500-6250 ПР від 16.11.2010 р.

Підписано до друку 24.11.2015 р. Формат 60×90 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 4,65. Обл.-вид. 3,82. Наклад 100 прим.
Редакційно-видавничий відділ ЧНПУ імені Т.Г. Шевченка.
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
тел. 65-17-99. Chnpu.tipograf@gmail.com