6. Лаврінський Г.В. Моделювання економічної динаміки / Г.В. Лавінський , О.С. Пшенишнюк, С.В. Устенко, О.Д. Шарапов.– К.: Вид-во «Атіка». – 2006. – С. 276.

7. Нельсон Р. Эволюционная теория экономических изменений / Р. Нильсон, С. Уинтер. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. – 474 с.

8. Малахова Л.И. Правоведение: краткий курс лекций / Л.И. Малахова. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 270 с.

Надійшла до редакції 24.12.2015

Мартыненко Е.В., Мащенко А.И. Математические методы и модели потребительского поведения.

В статье рассмотрены основные вопросы эконометрии, что устанавливает непосредственную связь экономических понятий и процессов с математикой. Охарактеризованы основные проблемы экономики, которые до настоящего времени не имеют решений без вмешательства математических моделей. Также исследованы вопросы математических методов, которые активно используются в экономической науке. Установлено преимущества экономико-математических моделей. Рассмотрена теория поведения потребителя. Основное внимание уделено математическим методам и моделям потребительского поведения. Данная статья является полезной для практического использования в экономических исследованиях потребительского поведения и спроса.

Ключевые слова: *модель, математическое и экономико-математическое моделирование, эконометрия, метод, поведение потребителя, поверхность безразличия, бюджетная множество.*

Martynenko O., Mashchenko G. Mathematical methods and models of consumer behavior.

In the article examines the main issues econometrics, establishing a direct connection economic concepts and processes of mathematics. We characterized the main problems of the economy, which to this day have no solutions without the intervention of mathematical models. Also explored question of mathematical methods that are widely used in economics. Established benefits of economic and mathematical models. We examined the theory of consumer behavior. Special attention is paid of mathematical methods and models of consumer behavior. This article is useful for practical use in economic studies consumer behavior and demand.

Key words: *model, mathematical and economic and mathematic modeling, econometrics method, consumer behavior, indifference surfaces, the budget set.*

УДК 37.016:517.1

С. В. Музиченко

Чернігівський національний педагогічний університет імені Т. Г. Шевченка

ДЕЯКІ МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ У СТАРШОКЛАСНИКІВ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ

Стаття присвячена проблемі формування у школярів складних абстрактних математичних понять. До таких понять належить поняття границі. Це поняття має велике значення для якісного засвоєння математичного аналізу, основою якого є операція граничного переходу. У статті вказані об'єктивні причини, через які учні відчувають труднощі у сприйнятті поняття границі. Однією з таких причин є *структурна складність формального означення даного поняття. Вивчення елементів теорії границь розглядається у контексті профільної диференціації навчання математики у старшій школі. Зроблено огляд чинних програм та підручників і запропоновано альтернативну послідовність вивчення відповідного навчального матеріалу. Обґрунтовано доцільність ознайомлення учнів з трьома видами границь. Особливу увагу приділено наочно-інтуїтивному етапу формування поняття границі. Зокрема, розглянуто можливість здійснення пропедевтики ще у основній школі. Наведено рекомендації щодо використання наочності. Вказано на доцільність використання конструктивних вправ, тобто вправ, які передбачають аналітичне чи графічне конструювання функцій із заданими властивостями.*

Ключові слова: *границя послідовності, границя функції, старша школа, наочність, пропедевтика, конструктивні задачі.*

Постановка проблеми. Поняття границі – одне з фундаментальних понять математичного аналізу. Саме операція граничного переходу відокремлює елементарну математику від вищої. Без розуміння сутності цієї операції, фактично, можна розраховувати лише на формальне володіння учнями технікою обчислення похідних. Тоді як у загальноосвітньому світоглядному сенсі набагато важливішим є усвідомлення поняття похідної як потужного засобу математичного дослідження реальних процесів та явищ. Проте питання вивчення елементів теорії границь у школі завжди було дискусійним. Трансформація змісту шкільної математичної освіти практично на всіх етапах її реформування так чи інакше торкалася цього питання. Зміни в навчальних програмах відображалися й у шкільних підручниках, де можна знайти діаметрально протилежні концепції ознайомлення учнів з теорією границь: від ґрунтовного висвітлення у стилі вузівського курсу до неявного натяку. Очевидно, причини такого неоднозначного ставлення криються у конфлікті значимості поняття з однієї сторони і складності розуміння учнями – з іншої.

Аналіз актуальних досліджень. У методиці математики проблема вивчення елементів аналізу у школі почала активно розглядатися у 80-х роках минулого століття. Це було обумовлено радикальними змінами програми 1968 року, яка передбачала, крім іншого, досить ґрунтовне вивчення основ вищої математики. Такі знані математики і методисти як М. Б. Гельфанд, С. І. Шварцбурд, З. І. Слєпкань та інші розробляли методичний супровід вивчення курсу, якого конче потребували вчителі. Ознайомлення учнів з теорією границь у цей період максимально наближається до її наукової концепції, сформованої на кінець 19 століття. Відповідно, у посібнику [9] докладно розглянуто два підходи до введення поняття границі функції: за Коші та за Гейне. Детальний аналіз класичного означення границі можна знайти у книзі Л. В. Тарасова [10], особливістю якої є те, що вона адресована не вчителям, а учням. Зазначимо, що вказані роботи є актуальними і у теперішній час, адже класичне означення границі знову повертається на сторінки шкільних підручників.

Сучасний стан вивчення елементів математичного аналізу у школах Росії значною мірою відображається у підручниках та методичних посібниках О. Г. Мордковича, який категорично заперечує вихолощене і формалізоване навчання математики. У його роботах знаходять розвиток ідеї видатного математика і педагога О. Я. Хінчина. Так, у посібнику [6] він підкреслює недоцільність формування у школярів поняття границі у формі відповідності областей ε та δ.

Серед сучасних досліджень привертає увагу робота М. В. Босовського [3], яка безпосередньо стосується вивчення теорії границь у школі та вузі.

Багато в чому згадані автори солідарні, наприклад, стосовно конкретно-індуктивного введення поняття границі. Проте є питання, щодо яких позиції так чи інакше різняться: рівень строгості, послідовність вивчення матеріалу, методика використання наочності та ін. Деякі розбіжності, очевидно, обумовлені станом реалізації диференційованого підходу до навчання у той чи інший період. Отже, є потреба їх уточнити відповідно до сучасних умов. Бажано також докладніше розглянути питання пропедевтики, особливості системи задач, які стосуються елементів теорії границь.

Мета статті: акцентувати неоднозначні аспекти процесу формування поняття границі та обґрунтувати вибір відповідної методичної позиції в умовах сучасної профільної школи.

Виклад основного матеріалу. Труднощі у засвоєнні поняття границі, які виникають перед учнями, досить закономірні. Адже становлення поняття відбувалося впродовж тривалого часу й у самій математиці. Як відомо, вчені користувалися поняттям границі на наочно-інтуїтивному рівні задовго до введення його формального означення. Методологія математики це пояснює тим, що у класичному нині «ε-δ-означенні» закладено внутрішнє протиріччя: на *статичній* мові нерівностей описано *динамічний* процес наближення до граничного значення.

Крім того, означення границі є об’єктивно складним і за своєю структурою. Якщо за критерій складності взяти кількість кванторів у означенні, то порівняно з означеннями, наприклад, парності (один квантор) чи періодичності (два квантори) 3-кванторне означення границі є найскладнішим. Як свідчить шкільна практика, ієрархія сприйняття і розуміння учнями цих означень є відповідною. На думку О. Г. Мордковича, для учнів загальноосвітньої школи доступними можуть бути не більш, як 2-кванторні означення [6, с. 90]. Отже, від 3-кванторного означення границі у школі варто відмовитися, обмежуючись лише формуванням у старшокласників інтуїтивних уявлень про границю. В цілому ми погоджуємося із цією позицією. Але реалії сучасної профільної школи такі, що вчителям, які працюють у класах профільного чи поглибленого рівнів, керуючись чинною навчальною програмою [7], відповідними підручниками [5], [8] та іншими, все ж таки доводиться роз’яснювати учням формальне означення границі. До того ж студенти-першокурсники не набагато відрізняються від учнів 11-го класу. Тому проблема якісного формування поняття границі стоїть не менш гостро і перед викладачами університетів.

Як відомо, у курсі матаналізу розглядають три види границь: границя числової послідовності, границя функції у точці та на нескінченності. Виникають питання: з якими границями і у якому порядку варто ознайомлювати школярів? Очевидно, що мінімально необхідно (для введення поняття похідної, формального означення неперервності функції, визначеного інтеграла тощо) розглянути границю функції у точці. Саме такий варіант передбачено програмою [7] для стандартного та академічного рівнів. Він реалізований і у відповідних підручниках [1], [2]. Вже на профільному рівні, згідно програми, учні спочатку мають вивчати границю послідовності, а потім – границю функції в точці. У такому порядку подається матеріал у підручнику [5]. В альтернативному підручнику [8] границя послідовності розглядається в останню чергу. Що стосується границі функції на нескінченності, то програмою не передбачене обов’язкове вивчення цього поняття на жодному з рівнів. Якщо так і, крім того, означення границі функції у точці учням пропонується за Коші, а не за Гейне, то чи доцільно взагалі витрачати час на границю числової послідовності?

На нашу думку, усі три границі варті уваги. Але методично більш виправданим є інший порядок їх вивчення. Поняття границі числової послідовності найпростіше. Воно для учнів виглядає природніше, ніж поняття границі функції у точці, адже досвід та інтуїція підказують, що нескінченна множина не може бути обмеженою. Тому їм важко сприймати процес наближення до точки як нескінченний. Деякі учні, попри все, не усвідомлюють, чим відрізняються поняття значення функції у точці та границі функції у точці. Також не слід забувати, що є можливість здійснення вже у основній школі пропедевтики саме поняття границі послідовності. Отже, розпочинати краще з послідовностей.

Оскільки послідовності – це частинний випадок функцій, то природно шляхом узагальнення перейти від границі послідовності до границі функції на нескінченності. У свою чергу дослідження функції на нескінченності можна використати як аргумент для мотивації учнів до дослідження поведінки функції у деякій конкретній точці. При такому підході вивчення кожного виду границі підпорядковується наступному. На нашу думку, саме вивчення усіх трьох зазначених видів границь у вказаному порядку дозволяє закласти основу не лише теорії границь, а й аналізу взагалі.

Ще один аргумент, з яким важко не погодитись, на користь вивчення у школі границі функції на нескінченності наводить О. Г. Мордкович: уявлення учнів про таку границю можуть спиратися як на досвід математичної діяльності, так і на життєвий досвід, адже учням відомі функції, графіки яких мають горизонтальні асимптоти, а також і реальні процеси, які можна змоделювати графіками такого типу [6, с 91].

Зазначимо, що М. В. Босовський, розробляючи методику навчання теорії границь студентів ВНЗ, також віддає перевагу першочерговому вивченню границі послідовності: «…результати експериментального навчання показують, що перехід від вивчення границі послідовності до границі функції є більш ефективним як з огляду на результативність навчання, так і з огляду на реалізацію розвивального потенціалу» [3, с.16].

Коли перед учителем постає проблема введення нового поняття, він перш за все вирішує, яким методом скористатися – абстрактно-дедуктивним чи конкретно-індуктивним. Природно, що вводити таке складне поняття, як границя послідовності, рекомендується на конкретних прикладах. Індуктивний підхід реалізовано у всіх чинних шкільних підручниках. При цьому традиційно учням пропонується візуалізація: зображення членів конкретної послідовності точками координатної прямої. Таке зображення компактне, швидко виконується, порівняно із зображенням на координатній площині. Проте для його декодування потрібно часу більше. Тому на перших порах доцільно наводити геометричну інтерпретацію також і на площині. Враховуючи, що числові послідовності – це функції, такий спосіб учням більш звичний. Він краще передає динаміку процесу, а також створює потрібне підґрунтя для розгляду згодом границі функції на нескінченності. Зауважимо також, що графічне задання числових послідовностей на координатній площині варто розглядати з учнями ще у основній школі, забезпечуючи тим самим пропедевтику поняття границі послідовності. З цією ж метою у 9-му класі можна розв'язувати завдання на зразок: «Загальний член послідовності визначається за формулою $x_n = \frac{2n}{n+1}$. Для яких значень n модуль різниці $x_n - 2$ менший від 10^{-1}?» (№ 672, підручник [4]).

Отже, вже в основній школі може бути закладене наочно-інтуїтивне розуміння таких понять як границя послідовності, границя функції на нескінченності, горизонтальна асимптота. У такому разі вивчення границь згодом у старшій школі доцільно розпочинати з його відновлення. При цьому на стандартному та академічному рівнях можна обмежитись закріпленням наочно-інтуїтивних уявлень. Важливо, щоб у старшокласників сформувалися міцні двосторонні зв'язки між аналітичною моделлю границі та її геометричним змістом. Учнів слід вчити «зчитувати» з графіків послідовностей або функцій інформацію про ту чи іншу границю, а також і моделювати графічно конкретні випадки існування границь. Для цього слід передбачити відповідні вправи, які, на жаль, у підручниках відсутні.

У цьому зв'язку хочемо звернути увагу на *конструктивні вправи*. На відміну від традиційних для цієї теми задач на доведення того, що деяке число є границею, або на відшукання границь, конструктивні задачі не алгоритмізуються. Вони як ніякі інші свідчать про усвідомлення істотних властивостей поняття. Наведемо кілька прикладів таких задач.

1. Задайте графічно функцію, яка є неперервною і зростаючою на множині дійсних чисел і $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

2. Задайте графічно неперервну, визначену на множині дійсних чисел функцію, для якої $f(0) = 3$ і $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$.

3. Задайте графічно функцію, яка має властивості: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$; $\lim_{x\to 3} f(x) = -2$; $f(3) = 0$; $f(0) = 9$.

4. Наведіть п'ять прикладів функцій, для яких $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.

5. Наведіть три приклади функцій, які б у точці $x = 1$ не мали границі.

Чинні підручники з алгебри і початків аналізу не орієнтовані на формування лише наочно-інтуїтивних уявлень про границі, а передбачають ознайомлення учнів з формальними означеннями. У підручниках [5], [8] і навіть у підручнику [2] учням пропонується класичне означення на мові «ε-δ». У зв'язку з цим зазначимо, що перш, ніж розглядати з учнями строге означення границі, варто переконатися, що вони добре володіють поняттям модуля числа та розуміють «мову нерівностей». З цією метою на етапі актуалізації опорних знань доцільно розглянути вправи на геометричне зображення розв'язків нерівностей з модулем типу $|x - a| < b$.

Автори підручника [1] зробили спробу спростити означення за рахунок його розділення на дві частини. Поняття границі функції роз'яснюється опосередковано через поняття *прямування значень функції до деякого числа*. При бажанні можна обмежитись наочно-інтуїтивним розумінням такого процесу або ж розглянути його ґрунтовніше: прямування функції $f(x)$ до числа a означає можливість забезпечення будь-якої наперед заданої точності наближеній рівності $f(x) \approx a$. Ефективність такого підходу суттєво залежить від того, наскільки якісно учні опанували техніку наближених обчислень. Проте на сьогодні стан вивчення наближених обчислень у основній школі далекий від бажаного. Тема все ще сприймається учнями, а нерідко і вчителями, як другорядна. З цим варто рахуватися, застосовуючи даний підхід.

Ідея поступового розгортання означення може бути реалізована й інакше: через введення поняття *околу точки певного радіуса*. Засвоєння цього поняття жодних труднощів не викликає. З його допомогою учням можна запропонувати більш «м'яку» і не переобтяжену символікою геометричну інтерпретацію означення границі. Наприклад, границю числової послідовності можна означити так: число A називається границею послідовності, якщо для кожного як завгодно малого околу точки A в цей окіл потраплять усі члени послідовності, починаючи з деякого.

Яке б формулювання учням не пропонувалося, очевидно, що методичні схеми ознайомлення з різними видами границь мають бути уніфіковані. Слід підкреслити аналогічність структурної будови усіх трьох означень, акцентувати відмінності.

Висновки та перспективи подальших наукових досліджень. У підсумку можна констатувати, що для ефективного формування поняття границі вчителю необхідно докласти чимало зусиль і виявити максимум методичної майстерності. При цьому стратегія навчання визначається рівнем профілю. Але тактику обирає сам учитель. Він має зважено підійти до вибору рівня строгості та послідовності вивчення матеріалу, максимально використати можливості пропедевтики, наочних засобів навчання та дидактичні функції задач. Очевидно, це стосується не тільки формування поняття границі, а й інших складних абстрактних понять початків аналізу, які вивчаються у середній школі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Афанасьєва О. М. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 480 с.
2. Бевз Г. П. Математика: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Генеза, 2011. – 320 с.
3. Босовський М. В. Наступність у вивченні теорії границь у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)» / М. В. Босовський. – Черкаси, 2010. – 20 с.
4. Кравчук В. Алгебра: підручник для 9 класу. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2009. – 256 с.
5. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011. – 431 с.
6. Мордкович А. Г. Беседы с учителями математики: Учеб.-метод. пособие / Александр Григорьевич Мордкович. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2005. – 336 с.
7. Навчальні програми для учнів 10 – 11 класів // Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. ІІ. Профільне навчання /Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – С. 5 – 119.
8. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011. – 448 с.
9. Слєпкань З. І. Методика викладання алгебри і початків аналізу / Зінаїда Іванівна Слєпкань. – К.: Рад. школа, 1978. – 224 с.
10. Тарасов Л. В. Математический анализ: Беседы об основных понятиях. Пособие для учащихся / Лев Васильевич Тарасов. – М.: Просвещение, 1979. – 144 с.

Надійшла до редакції 08.12.2015

Музыченко С. В. Некоторые методические особенности формирования у старшеклассников понятия предела.

Данная статья посвящена проблеме формирования у школьников сложных абстрактных математических понятий. К таким понятиям принадлежит понятие предела. Это понятие имеет большое значение для качественного усвоения математического анализа, в основе которого лежит операция предельного перехода. В статье указаны объективные причины, по которым ученики испытывают трудности в восприятии понятия предела. Одной из таких причин отмечена структурная сложность формального определения понятия. Изучение элементов теории пределов рассматривается в контексте профильной дифференциации обучения математике в старшей школе. Сделан обзор действующих программ и учебников и предложена альтернативная последовательность изучения соответствующего учебного материала. Обоснована целесообразность ознакомления учащихся с тремя видами пределов. Особое внимание уделено наглядно-интуитивному этапу формирования понятия предела. В частности, рассмотрена возможность осуществления пропедевтики еще в основной школе. Приведены рекомендации по использованию наглядности. Отмечена целесообразность использования конструктивных упражнений, то есть упражнений, предполагающих аналитическое или графическое конструирование функций с заданными свойствами.

Ключевые слова: *предел последовательности, предел функции, старшая школа, наглядность, пропедевтика, конструктивные задачи.*

Muzichenko S. Some methodical features of formation of the concept of limit for senior pupils.

This article is devoted to the formation of understanding of difficult abstract mathematical concepts by students. The concept of limit belongs to such concepts. This concept is important for the quality of mastering the mathematical analysis which is based on the operation limit and reasons why students have difficulties in perception of the concept of limit. One such reason is a structural complexity of the formal definition. Study of the elements of the theory of limits is considered in the context of profile differentiation of teaching mathematics in high school. A review of existing programs and textbooks and proposed an alternative sequence of examination of the educational material. Expediency familiarize students with three types of limits. Special attention is given to visually-intuitive stage of forming the concept of limit. In particular we consider the possibility of the implementing this method in elementary school and recommendations for the use of visualization. There is mentioned advisability of the use of constructive exercises, i.e. exercises involving analytical or graphical design functions with desired properties.

Key words: *limit of a numerical sequence, limit of a function, upper secondary school, visual aids, propaedeutic, constructive tasks.*

УДК 378

Л. Л. Рикова

КЗ «Харківська гуманітарно-педагогічна академія»

АНАЛІЗ СТАНУ ДОСЛІДЖЕНОСТІ ПРОБЛЕМИ ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛЕЙ ПРИ ВИКЛАДАННІ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Проведено аналіз робіт, присвячених тлумаченню поняття моделі, використанню моделей у дослідницькій та навчальній діяльності. Описано специфіку використання моделей у викладанні природничих і математичних дисциплін, означені шляхи перспективних досліджень, зокрема, використання еволюційних модельних ланцюжків і моделей-аналогів.

Ключові слова *– модель, моделювання, викладання природничо-математичних дисциплін.*

Постановка проблеми. Питання використання моделей і метод моделювання досліджували багато вчених у різних аспектах – історичному, гносеологічному, дидактичному тощо. У сучасній науці використання моделей отримує все більшого розповсюдження, створюється загальна теорія моделювання, в якій питання про значення терміну «модель» залишається дискусійним, проблемним. Ще більш дискусійним є питання про використання моделей у викладанні, про функції навчальних моделей. Найбільш проблемним представляється питання про типи моделей та їх використання у викладанні природничих і математичних дисциплін.

Метою даної роботи є аналіз досліджень щодо поняття моделі, використання моделей і моделювання у викладанні, застосуванні моделей і моделюванні у викладанні природничих і математичних дисциплін.

Виклад основного матеріалу. Численні визначення поняття «модель», які можна знайти в науковій і навчальній літературі, свідчать, з одного боку, про його багатозначність, з іншого – про багатоаспектність застосування моделей. Зупинимося на суттєвих для нашого дослідження ознаках і властивостях моделі. Перш за все, потребує висвітлення істотно важливе питання про зв’язок між моделлю і об’єктом, який вона відображає, – оригіналом.