Державна установа
Інститут досліджень науково-технічного потенціалу
та історії науки ім. Г. М. Доброва НАН України
Національний університет «Чернігівський колегіум»
імені Т. Г. Шевченка

**Т. В. Кілочицька**

# НАРИСИ ІСТОРІЇ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ В УКРАЇНІ
## (30–60 рр. XX ст.)

**Монографія**

**Чернігів**
**2021**

УДК 53(091)(477)″1930/1960″
К 39

**Рецензенти:**
***Храмов Ю. О.*** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу історії та соціології науки і техніки Інституту досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки ім. Г. М. Доброва НАН України;
***Хорошева С. А.*** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник відділу історії та соціології науки і техніки Інституту досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки ім. Г. М. Доброва НАН України;
***Гриценко М. І.*** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри фізики та астрономії Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка.

**К 39** **Кілочицька Т. В. Нариси історії нелінійної механіки в Україні (30–60 рр. ХХ ст.)** : монографія. Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2021. 176 с

В монографії вперше створено коротку історію вчення про нелінійні коливання, встановлено її періодизацію (від Г. Галілея до створення загальної теорії нелінійних коливань); здійснено історико-науковий аналіз розвитку ідей і методів нелінійної механіки в Україні через діяльність відповідних наукових шкіл в контексті світової науки, розкрито діяльність М. М. Крилова і М. М. Боголюбова в цій галузі; проаналізовано наукова, педагогічна та організаційна діяльності академіка Ю. О. Митропольського, ідентифіковано неформальний науковий колектив, очолюваний Ю. О. Митропольським, з науковою школою, розкрито її персональний склад, внесок в науку, розглянуто подальший розвиток нелінійної механіки в працях учнів Ю. О. Митропольського.

Розрахована на істориків науки, викладачів фізики, студентів фізичних спеціальностей університетів і всіх тих, хто цікавиться історією науки.

УДК 53(091)(477)″1930/1960″

*Рекомендовано до друку Вченою радою Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка (протокол № 5 від 23.12.2020 р.)*

# ЗМІСТ

# ПЕРЕДМОВА

Вибір теми монографії визначається пріоритетом українських вчених у створенні нової гілки теорії нелінійних коливань – асимптотичної теорії нелінійних коливань, або нелінійної механіки. Нелінійна механіка (так її назвали М. М. Крилов і М. М. Боголюбов) є міждисциплінарною теорією.

В монографії здійснено історико-науковий аналіз розвитку ідей і методів вчення про коливання (лінійні і нелінійні) в контексті світової науки через діяльність наукових шкіл у цьому напрямі, дано коротку історію вчення (світовий контекст) та розроблено періодизацію, досліджено процес становлення нової галузі математичної фізики – нелінійної механіки.

В першому розділі проаналізовано формування вчення про коливання у XVII ст. – першій чверті XX ст.

В другому – досліджено роботу Кафедри математичної фізики ВУАН в 20-30 рр., де були закладені основи нового напряму теорії коливань – нелінійної механіки (асимптотичної теорії нелінійних коливань). Проаналізовано праці М. М. Крилова та М. М. Боголюбова в цьому напрямі (20-30-ті рр. XX ст.).

В третьому розділі розглянуто розвиток методів нелінійної механіки в Україні (40-60-ті рр. XX ст.). Проаналізовано праці М. М. Боголюбова з нелінійної механіки цього періоду, розглянуто початок формування школи математичної фізики М. М. Боголюбова, досліджено наукову, педагогічну та організаційну діяльність академіка НАН України Ю. О. Митропольського, дано його характеристику як наукового лідера, ідентифіковано неформальний науковий колектив, очолюваний Ю.О. Митропольським, з науковою школою, розкрито її персональний склад та внесок у світову науку.

Період 30-60 рр. XX ст. дослідження в монографії вибраний таким чином, щоб охопити період від зародження нелінійної механіки в Україні до остаточного формування школи Ю. О. Митропольського в Києві в 60-ті рр. XX ст.

Авторка вдячна за допомогу в підготовці монографії до друку доктору фізико-математичних наук, професору Ю. О. Храмову, завідувачу відділу історії та соціології науки і техніки Інституту досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки ім. Г. М. Доброва НАН України і також всім співробітникам цього відділу, працівникам довідково-бібліографічного відділу Національної бібліотеки України ім. В. І. Вернадського та бібліотеки Інституту математики НАН України за можливість користуватися їх фондами.

# ВСТУП

Коливальні процеси є одним з найпоширеніших видів руху в природі. Вони зустрічаються в радіотехніці, машинобудуванні, суднобудуванні, астрономії, хімії, оптиці тощо.

Початкові уявлення про коливання як рух і про звук, що спричиняється внаслідок коливань, виникли в ще Стародавній Греції. Так, античні філософи Арістотель, Евклід, Птолемей вважали, що звук зумовлюється коливальним рухом тіла. Піфагорійці встановили, що висота звуку, який виникає внаслідок коливань струни, залежить від її довжини, товщини і натягу [1, с. 58; 2, с. 49], вперше відкрили, що при відношенні довжин струн як цілих чисел виникає гармонійний звук [3, с. 92–93]. Арістотель перший запровадив поняття про два роди руху – природні та вимушені і дав класифікацію рухів тіл. Природні рухи відбуваються самі по собі, наприклад, падіння тіл по вертикалі. Вимушені рухи викликаються завжди зовнішньою причиною [4, с. 175].

В результаті тривалих досліджень сформувалися поняття про коливання і хвилі. Нині коливаннями в фізиці і техніці називають рухи (зміни стану), що повторюються, а хвилями – процеси поширення коливань і будь-яких збурень. За своєю фізичною природою коливання можуть бути механічними (маятника, струни, корабля, мосту), електромагнітними (зміни струму в коливальному контурі, напруги електричного та магнітного полів у радіохвилях), хімічними (коливання концентрації реагуючих речовин), термодинамічними, ядерними. Всі коливання мають характерні закономірності, однакові для всіх коливань різної фізичної природи, що об’єднує їх в одну галузь – вчення про коливання.

В XIX ст. в Західній Європі та Росії розпочалися дослідження в галузі нелінійних коливань. Основоположниками методів, за допомогою яких можна розглядати нелінійні коливання, є французький математик, механік і фізик А. Пуанкаре та вітчизняний математик і механік О. М. Ляпунов, який тоді працював у Харківському університеті. У 20–30-ті рр. XX ст.

російська теоретична школа Л. І. Мандельштама (вихідця з України) вперше використала ці методи для вивчення тільки чисто періодичних режимів нелінійних коливань, побудувавши їх теорію. Паралельно М. М. Крилов та М. М. Боголюбов у 30-ті рр. XX ст. у Києві розробляли асимптотичний напрямок цієї теорії – нелінійну механіку. В подальшому вона дістала значний розвиток у працях учня М. М. Боголюбова – Ю. О. Митропольського, який побудував строгу теорію нестаціонарних режимів нелінійних коливальних процесів.

В результаті аналізу, узагальнення, систематизації великої кількості літератури в монографії викладено історію вчення про коливання (світовий контекст) та визначено її переламні, ключові моменти (відкриття). Відповідно до цього можна дати таку логічно обґрунтовану періодизацію вчення про коливання, яка дає змогу чітко простежити його розвиток.

# ПЕРІОДИЗАЦІЯ ВЧЕННЯ ПРО КОЛИВАННЯ

## Передісторія вчення про коливання, або період виникнення і накопичення окремих уявлень про коливання (IV ст. до н.е. – кінець XVI ст.)

### Період становлення вчення про коливання як наукового напряму (кінець XVI ст. – 80 –ті рр. XVII ст.)

В цьому періоді проводились перші наукові дослідження періодичних процесів. Було встановлено ізохронність коливань маятника, створено маятниковий годинник, відкрито закон пружності.

## Класичний період вчення про коливання (кінець XVII ст. – остання чверть XIX ст.)

### Перший етап (кінець XVII ст. – остання чверть XVIII ст.). Формування вчення про лінійні коливання.

В кінці XVII ст. – останній чверті XVIII ст. наукові дослідження періодичних процесів містили не пов'язані між собою спроби експериментального та математичного дослідження коливань. Коливання теоретично досліджували І. Ньютон, Л. Ейлер, Ж. Д'Аламбер, Б. Тейлор, експериментально Е. Хладні, Ж. Савер. Зароджується математичний апарат дослідження коливань. Ж. Лагранж в праці «Аналітична механіка» (1787) звів деякі задачі теорії малих коливань до лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами, заклавши основи лінійних коливань.

**Другий етап (остання чверть XVIII ст. – кінець XIX ст.)**

В цьому періоді відбувається зародження в астрономії методів, придатних для дослідження періодичних процесів, – методу малого параметра та методу лінеаризації. В подальшому метод малого параметра розвивається при розв'язанні нелінійних диференціальних рівнянь М. В. Остроградським, К. Вейєрштрассом, А. Ліндштедтом, а метод лінеаризації – при розв'язанні інженерних задач О. Коші, У. Томсоном, П. Тетом, Е. Роусом, Дж. Максвелом. У 1877 р. Дж. Релей систематизував та узагальнив вчення про коливання, чим завершив процес формування теорії лінійних коливань, паралельно з яким відбувалося подальше дослідження і нелінійних коливань. А. Пуанкаре і О. М. Ляпунов розробляли якісні методи розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь.

## Сучасний період (з початку XX ст.)

**Перший етап (перша чверть XX ст.)**

У зв'язку з потребами електро- і радіотехніки нелінійні задачі розв'язуються за допомогою квазілінійних методів, методу припасовування, методу Ван-дер-Поля.

**Другий етап. Створення загальної теорії коливань (кінець 20-х – 30-ті рр. XX ст.)**

Для нього є характерним перенесення існуючих методів розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь на коливальні процеси радянськими вченими Л. І. Мандельштамом, О. О. Андроновим, О. А. Віттом і створення нових методів дослідження коливань. В цей період у школі Л. І. Мандельштама закладено основи загальної теорії коливань.

Наприкінці 20-х – 30-х рр. XX ст. відбувається розширення застосування методу малого параметра та новий підхід до нього, розроблення методів, придатних для вивчення як періодичних, так і квазіперіодичних режимів. В 30-х рр. українськими вченими М. М. Криловим і М. М. Боголюбовим розробляється асимптотичний напрямок теорії нелінійних коливань, названий ними нелінійною механікою.

**Третій етап (з 40-х рр. XX ст.).**

Нові асимптотичні методи строго математично обґрунтовуються, відбувається їх подальший розвиток М. М. Боголюбовим, школою його учня Ю. О. Митропольського, дочірньою школою А. М. Самойленка, учня Ю. О. Митропольського. З 70-х рр. XX ст. відбувається створення на основі теорії нелінійних коливань фізики нелінійних процесів.

# ІСТОРІЯ ВЧЕННЯ ПРО НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ (СВІТОВИЙ КОНТЕКСТ) (XVII ст. – 30-ті рр. XX ст.)

## 1. СТАНОВЛЕННЯ ВЧЕННЯ ПРО КОЛИВАННЯ ЯК НАУКОВОГО НАПРЯМУ (кінець XVI ст. – 80 –ті рр. XVII ст.)

В XVII ст. відбувалося становлення науки, в тому числі фізики. Наприкінці XVI – 80-ті рр. XVII ст. нагромаджувалися окремі відомості про коливання та розпочато перші наукові дослідження періодичних процесів. Було встановлено ізохронність коливань, проведено аналогію між коливаннями маятника і звуковими хвилями, створено маятниковий годинник, відкрито закон пружності. У 1585 р. італійський вчений Дж. Бенедетті в праці «Про різноманітні математичні та фізичні міркування» у розділі «Про музикальні інтервали» описував дослід з монохордом – приладом, що складався тільки з однієї натягнутої струни, яку він розділив на дві частини. Хвилі від двох частин струни однаково поширювались і співпадали. В результаті Дж. Бенедетті дійшов висновку, що відношення висот тонів коливань струн дорівнює відношенню їх частот. Незважаючи на такий висновок, з праці Дж. Бенедетті не випливало, що він сформулював поняття ізохронності звукових коливань.

Ізохронність малих коливань маятника встановив 1583 р. італійський вчений Г. Галілей – творець експериментального методу, один із засновників точного природознавства та динаміки[1] [5, с. 182]. Його учень В. Вівіані розповідав, що 1583 р. Г. Галілей, спостерігаючи розгойдування лампади в Пізанському соборі, встановив незмінність періоду коливань маятника. Він провів досліди з свинцевими кульками і показав, що відношення часу однакової кількості коливань маятників дорівнює подвійному відношенню їх

[1] Розділу механіки, в якому вивчаються причини виникнення механічного руху.

довжин [6]. Ізохронність коливань розглядалася Г. Галілеєм у творі «Бесіди та математичні доведення, які стосуються двох нових наук» (1638) [5]. Вивчаючи закони падіння тіл, Г. Галілей встановив, що частоти коливань свинцевої підвішеної на нитці кульки і легкої кульки, підвішеної на нитці такої самої довжини, однакові, проте відрізняються тільки амплітудами коливань [5, с. 182–183]. Тим самим було встановлено ізохронність малих коливань маятника. Періодичний процес ізохронності коливань маятника Г. Галілей запропонував використовувати у мореплавстві і поклав в основу вимірювання часу. Він намагався визначити різницю довготи місць за різницею часу, коли супутник Юпітера входив в конус тіні Юпітера в одному місці, і часу, коли це явище відбувалося в іншому місці. Для цього необхідний був точний вимірювач часу. 5 червня 1637 р. в листі до губернатора Голландських Індій Лаврентія Реаля Г. Галілей писав про ідею поєднання маятника з лічильником, що відраховує кількість коливань. Крім цих досліджень, він вивчав коливання струн, намагаючись порівняти висоту тону з кількістю коливань [5, с. 192–193]. Г. Галілей провів аналогію між коливаннями маятника і звуковими коливаннями.

Дослідженнями коливань маятника займався також нідерландський вчений Х. Гюйгенс. Він теж пов’язав конструкцію годинників з маятником і 16 червня 1657 р. отримав голландський патент на винахід маятникового годинника, 1658 р. надрукував брошуру «Годинники». Але подальші дослідження Х. Гюйгенса показали, що за допомогою простого маятника не можна точно виміряти час. Щоб довести це, він досліджував властивості циклоїди і аналізу законів падіння тіл [7, с. 10]. У XXIII–XXV розділах другої книжки праці «Годинники, які качаються, або геометричні доведення, що відносяться до руху маятника» (1673), використовуючи принцип додавання переміщень, він довів, що «важка точка», яка падає по циклоїді з вертикальною віссю і опуклістю, повернутій донизу, має сталий період коливань. Далі Х. Гюйгенс показав, що коливання маятника з великою амплітудою не ізохронні, а з малою – ізохронні лише наближено, і тільки коливання циклоїдального маятника справді ізохронні. Слід зауважити, що Х. Гюйгенс писав про таутохронність циклоїди. Запровадження поняття ізохронності належить французькому математику І. Пардису.

Крім цих відкриттів, Х. Гюйгенс спостерігав на досліді з двома годинниками, які підвішені на одній балці і рухаються в протилежні боки, явище параметричного резонансу, що пізніше було названо «вимушеним консонансом» [5, с. 30–31]. Це явище полягає в тому, що коливання маятників годинників завжди збігатимуться. Якщо ж порушити це співпадання, то цей збіг відновиться за короткий проміжок часу. Це явище синхронізації (процесу збігання в часі змін періодичних процесів) є однією з найхарактерніших властивостей автоколивальних систем.

Значний внесок у вчення про коливання зробив англійський вчений Р. Гук. Він вважав, що коливання властиві всій матерії. В результаті експериментального дослідження розтягання пружин і спіралей різного виду Р. Гук 1660 р. відкрив закон пружності, формулювання якого дав, однак, 1678 р. в лекції «Про відновлювальну здатність, або про пружність». Він проілюстрував цей закон поведінкою чотирьох типів пружних тіл: металічної дротяної пружини, часової пружини, довгого дроту, консольної банки з сухого дерева. Р. Гук вперше звернув увагу на те, що при згинанні бруска стискаються одні волокна і розтягуються інші, а приблизно посередині перерізу залишається нейтральний шар.

## 2. ФОРМУВАННЯ ВЧЕННЯ ПРО ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ (кінець XVII ст. – остання чверть XVIII ст.)

Наприкінці XVII ст. – останній чверті XVIII ст. коливання почали досліджувати теоретично І. Ньютон, Б. Тейлор, Ж. Д'Аламбер, Л. Ейлер, експериментально – Е. Хладні та Ж. Савер.

У восьмому розділі другої книги «Математичні початки натуральної філософії» (1687) англійський вчений І. Ньютон показав, що коливання рідини схожі з коливаннями маятника. «Коли в рідині поширюються збудження, – писав він, – то окремі її частинки, виконуючи назад і вперед значно малі коливання, прискорюються і сповільнюються за законом маятника» [8, с. 474]. Він вперше застосував термін «довжина хвилі». В розділі VI другої книги «Початків» І. Ньютон досліджував рух маятника за наявністю опору і записав вираз, що визначає величину згасання малих коливань маятника при будь-якому опорі середовища [8, с. 396–402]. Він дав першу геометрично обґрунтовану формулу визначення швидкості поширення хвилі в межах одного і того ж середовища. Таким чином І. Ньютон заклав основи математичного апарату дослідження фізичних явищ. Сам він у передмові до «Початків» писав «Цей твір нами пропонується як математична основа фізики. Всі труднощі фізики… полягають у тому, щоб за явищами руху розпізнати сили природи, а потім за цими силами пояснити явища» [8, с. 3].

Математичне дослідження коливання струни розпочав 1715 р. англійський математик Б. Тейлор. У праці «Щодо методу приростів» (1715) він дослідив поперечні коливання струни. Б. Тейлор припустив, що сила, яка діє на будь-яку точку струни, пропорційна відстані від цієї точки до осі (розглядав лінійні, малі коливання). Завдяки цьому припущенню він визначив функцію коливань як функцію часу, що змінюється за «законом маятника». Б. Тейлор розрахував залежність кількості коливань струни від її довжини, ваги та натягу. Ця задача швидко стала відомою. Нею почали займатися Й. Бернуллі та його син Д. Бернуллі, Дж. і В. Ріккарті, Ж. Д'Аламбер. Зокрема, Ж. Д'Аламбер у 1746 р. знайшов рівняння в частинних похідних, які визначають малі коливання однорідної струни і проінтегрував їх. У 1784 р. він зробив висновок, що задача про коливання струни є нерозв'язною, коли початкова форма струни є дугою параболи (парна і неперіодична функція). Ж. Д'Аламбер також зауважив, що математичний аналіз можна застосовувати тільки до неперервних функцій.

Вагомий внесок у теорію коливань зробив Л. Ейлер. У 1741–1766 рр. він побудував повну теорію струни, початок якої було закладено в його праці «Досвід нової теорії музики». У другому розділі праці «Нова теорія світла і кольорів» (1746) Л. Ейлер розглянув виникнення і поширення поздовжніх хвиль в пружному середовищі. В статті «Про коливання струн» (1748) він зауважив, що при дослідженні коливань струн його попередниками (Б. Тейлором, Й. Бернуллі та ін.) коливання вважалися нескінченно малими і правильними (такими, що приводять до синусоїдальної форми струни). Л. Ейлер відкинув ці припущення і отримав рівняння струни, аналогічне опублікованому в 1746 р.

Ж. Д'Аламбером. Л. Ейлер дав більш широке, хоч нестроге, пояснення цього рівняння, включивши в розв'язок задачі про струну довільні кусково-гладкі функції. Він показав, як проінтегрувати лінійне диференціальне рівняння будь-якого порядку зі сталими коефіцієнтами, Ж. Д'Аламбер – як проінтегрувати системи таких рівнянь. Так, загальний інтеграл диференціального рівняння, яке описує малі коливання, є сумою доданків, кожний з яких відповідає малим ізохронним коливанням маятника. Л. Ейлер також теоретично досліджував коливання стрижнів, кілець, пластин, але одержані результати не збігалися з результатами експериментальної перевірки німецького фізика Е. Хладні, якого вважають засновником експериментальної акустики.

Е. Хладні перший точно дослідив коливання камертона в праці «Про поздовжні коливання струн і стрижнів» (1796) і встановив закони коливання стрижнів. У 1787 р. він у праці «Нові відкриття з теорії звуку» виявив, що в струнах, стрижнях, пластинах, камертонах поряд з поперечними коливаннями, виникають поздовжні. В цьому ж році Е. Хладні дослідив коливання пластин, які посипано піском. Насипаний на пластини пісок скупчувався у вузлових точках. «Акустичні фігури», які при цьому утворюються, мають назву фігур Хладні. Ці експериментальні дослідження сприяли появі нової задачі – задачі про коливання мембрани. В 1799 р. Е. Хладні відкрив крутильні коливання стрижнів. Він також розпочав дослідження поздовжніх хвиль в твердих тілах і порівняв поздовжні і поперечні коливання стрижнів, збуджених різними способами. У 1802 р. опубліковано працю Е. Хладні «Акустика», де він систематично виклав свої дослідження.

Експериментальні дослідження коливань проводив також французький математик і фізик Ж. Савер. У 1700–1707 рр. в мемуарах з акустики він виклав метод визначення частоти звуку, експериментально дослідив коливання струни, спостерігав і запровадив терміни «вузли» і «пучності» хвиль, помітив, що при збудженні струни поряд з основною нотою звучать і інші ноти, довжини хвиль яких становлять дробові частини від основної. Він назвав ці ноти вищими гармонійними. В 1701 р. запровадив уявлення про стоячі хвилі, першим намагався визначити межі сприймання звуків людиною.

В XVII ст. – останній чверті XVIII ст. спроби дослідження періодичних процесів не були пов’язані між собою, проте почав зароджуватися математичний апарат дослідження коливань. Цей період пов'язаний із завершенням процесу формування класичної фізики, який розпочав І. Ньютон.

У 1831 р. англійський фізик і хімік М. Фарадей відкрив явище електромагнітної індукції – виникнення струму в провіднику, відносно якого змінюється магнітне поле, що зумовило швидкий розвиток електротехніки, а 1833 р. – тотожність всіх видів электрики [9]. У 1847 р. німецький фізик Г. Гельмгольц у праці «Про збереження сили» вказав на коливальний характер розряду лейденської банки* [10, с. 35–72]. Суть цього явища в тому, що розрядний струм тече не тільки до моменту розрядження банки, а й далі, заряджаючи її в протилежному напрямку, а потім змінює напрям. В 1869 р. він показав, що подібні коливання виникають і в індукційній котушці, приєднаній до обкладинок конденсатора (в коливальному контурі з індуктивністю і ємністю). У 1853 р. англійський фізик У. Томсон знайшов умови, за яких розряд стає коливальним і описав ці коливання математично.

Наприкінці XIX ст. англійський вчений Дж. Релей систематизував і узагальнив вчення про коливання. Його роботи в галузі звуку (1877–1878) відіграли значну роль у розвитку теорії коливань. Так, його книга «Теорія звуку» (1877) стала першим розгорнутим і систематичним викладенням загального вчення про коливання. В ній він зазначив, що в значній частині теорія звуку охоплює ту ж галузь, що і теорія коливань. Таким чином він виокремив загальну теорію, що вивчає коливання незалежно від природи коливальних процесів. Дж. Релей навів приклади акустичних, механічних та інших систем (камертонний переривач Гельмгольца, маятник Фронда та ін.) як автоколивальних систем [11, т. 1, с. 99–105], хоч і не використовував цього терміну (термін «автоколивання» ввів 1928 р. О. О. Андронов). Дж. Релей вперше вказав на особливості систем, здатних генерувати незатухаючі коливання (автоколивальні системи), в першу чергу на нелінійність диференціальних рівнянь, за допомогою яких ці системи

* Перший електричний конденсатор, створений 1745 р.

можна адекватно описати [11, т. 1, с. 101–102]. Він довів фундаментальні теореми лінійної теорії коливань, зокрема теореми про власні частоти коливальної системи з багатьма степенями вільності [11, т. 1, с. 131–140], передусім про стаціонарність власних частот при наявності зв'язків [11, т. 1, с. 131–133]. На основі принципу стаціонарності власних частот Дж. Релей виклав спосіб оцінки найнижчої власної частоти [11, т. 1, с. 133–135], розвинув кількісний метод збурень [11, т. 1, с. 135–137], навів приклади його застосування для знаходження власних частот і типів коливань системи, яка мало відрізняється від довільної невиродженої системи [11, т. 1, с. 138–141; с. 222–227; с. 356–359].

Дж. Релей першим звернув увагу на низку фізичних задач, до яких можна застосувати апарат диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами [11, т. 1, с. 101–105]. Він чітко відокремив автоколивання* від власних та вимушених коливань [11, т. 1, с. 230–235], вказав на причину автоколивань струни і навів інший приклад механізму збудження незагасаючих коливань маятника Фронда [11, т. 2, с. 235].

Другий том його книги «Теорія звука» присвячено поширенню хвиль в пружному середовищі, зокрема в повітрі та рідині. Дж. Релей широко використав електричні аналогії, що є окремим випадком сучасного «ізоморфізму закономірностей», який покладено в основу теорії коливань [11, т. 2, с. 175]. Зокрема, він розглянув задачу про розподіл потенціалу в рідині, що рухається в площині отвору в необмежено плоских стінках нескінченно малої товщини (в порівнянні з розмірами отвору). Ця задача аналогічна задачі знаходження розподілу електрики на зарядженій провідній пластині, яка має форму даного отвору і розміщена у відкритому просторі.

Таким чином Дж. Релей об'єднав, узагальнив, систематизував і доповнив дослідження коливань своїх попередників, відокремив автоколивання від власних і вимушених коливань. Працею Дж. Релея «Теорія звука» завершується формування теорії лінійних коливань.

* Амплітуди і періоди таких коливань встановлюються незалежно від початкових умов і визначаються властивостями системи.

# 3. ПОСТАНОВКА НИЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ (остання чверть XVIII ст. – кінець XIX ст.)

Крім експериментальних і математичних досліджень коливань, на вчення про них вплинув розвиток астрономії. Всередині XVIII – наприкінці XIX ст. в астрономії зароджується метод малого параметра, придатний для дослідження періодичних процесів, подальший розвиток якого пов'язаний з розв'язанням нелінійних диференціальних рівнянь М. В. Остроградським, К. Вейєрштрассом, А. Ліндштедтом. Наприкінці XIX ст. до розв'язання інженерних задач, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями, застосовували метод лінеаризації (У. Томсон, П. Тет, Е. Роус і Дж. Максвел). Він полягає в тому, що малі нелінійні члени диференціального рівняння відкидаються без обґрунтування.

Якісні методи розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь розробили А. Пуанкаре і О. М. Ляпунов.

## 3.1. Метод малого параметра в працях учених середини XVIII–XIX ст.

Значну роль у розвитку вчення про коливання відіграли дослідження рухів тіл Сонячної системи. Ще в стародавні часи було помічено, що ці рухи є періодичними. Теорія руху небесних тіл значно ускладнювалася при врахуванні збурюючого впливу інших планет. Для розв'язання таких задач з XVIII ст. розроблялися різні модифікації методу збурень, який полягав у заміні вихідної задачі задачею про знаходження відхилень від незбуреного руху. В XVIII ст. було відомо розв'язання задачі про рух двох тіл, що притягуються за законом Ньютона. Після відкриття малих планет* (першу таку планету – Цереру – відкрив у 1801 р. італійський астроном Дж. Піацці) виникла задача про рух трьох тіл (задача трьох тіл), що полягала у вивченні збурених рухів двох планет навколо Сонця під дією сили взаємного притягання. Існують два істотно відмінні варіанти цієї задачі. В одному з них маємо справу з двома планетами, маси яких є величинами одного порядку, в

* Планети, діаметром 1000 км., мають кам'янистий склад.

другому, навпаки, маса однієї з планет набагато менша за масу іншої. В першій книзі «Початків» (1687) І. Ньютон ставить задачу про рух багатьох тіл і розглядає простий випадок цієї задачі – задачу трьох тіл [8, с. 224–240]. В третій книзі «Початків» викладено вчення І. Ньютона про всесвітнє тяжіння, на основі якого він розробив теорію руху планет, супутників і комет. В ній рівняння для сили взаємного притягання тіл є нелінійним. Він встановив, що закони Кеплера є наслідками закону всесвітнього тяжіння і довів, що не тільки планети рухаються навколо Сонця відповідно до законів Кеплера (в першому наближенні), але й рух супутників навколо планет та комет відбувається за цими ж законами. І. Ньютон багато зробив і для теорії руху Місяця. Приблизно через 150 р. після смерті І. Ньютона в його аркушах було знайдено розклад руху Місяця в ряд, що давав правильні перші два його члени. 6 листопада 1872 р. створено комісію з опрацювання творів І. Ньютона, в результаті роботи якої опубліковано працю «Каталог колекції книг і паперів, які написані або належать І. Ньютону» з теорії Місяця (1888) [12, с. 677].

Цікавими є астрономічні праці Л. Ейлера, зокрема, праця «Дослідження питання про нерівності* в русі Сатурна та Юпітера» (1748) та «Дослідження нерівностей в русі Юпітера і Сатурна» (1752). В третьому параграфі останньої подається метод розв’язання диференціальних рівнянь задачі трьох тіл. Л. Ейлер на початку викладення цього методу вказував на доцільність отримання наближених виразів безпосередньо з диференціальних рівнянь. Він першим запропонував врахувати вже в початковому наближенні частину збурень. Л. Ейлер за незалежну змінну обрав кутову відстань між Юпітером і Сатурном і розділив збурення на класи, розклав отримані ірраціональності в ряд і зауважив, що достатньо в ньому взяти п’ять перших членів, оскільки решта є досить малими і їх можна відкинути.

Цей метод знаходження збурених значень ексцентриситетів і довгот перигеліїв орбіт був початком теорії представлення вікових збурень у тригонометричній формі. Л. Ейлер у праці «Теорія руху Місяця» (1753) розвинув методи наближеного інтегрування

---

* Збурення в русі.

диференціальних рівнянь і запропонував початкову форму методу варіації довільних сталих* як наслідок простої геометричної інтерпретації сталих інтегрування, які входять в розв'язок задачі двох тіл. В праці «Теорія руху Місяця, трактована новим методом, разом з астрономічними таблицями, з яких положення Місяця легко можуть бути обчислені для будь-якого часу… Л. Ейлера, І. Ейлера, В. Крафта і А. Лекселя» (1772) було побудовано місячні таблиці з урахуванням вже в початковому наближенні частини збуреного впливу Сонця та використанням нової теорії Л. Ейлера. Цей вплив враховувався завдяки спеціальному вибору системи координат та представленню шуканих функцій (координат Місяця) в аналітичному вигляді. Записані Л. Ейлером в прямокутних координатах рівняння руху Місяця є нелінійними. Після знаходження початкового наближення розв'язок шукається у вигляді тригонометричних рядів, члени яких поділено на п'ять класів, що відображають збурення у взаємному притяганні Сонця, Землі та Місяця. В цьому творі астрономи отримали алгоритм побудови теорії руху небесних тіл. В працях Л. Ейлера містяться основи математичного апарату теорії збурень, який завдяки працям його послідовників став фундаментом теорії нелінійних коливань. У його статті «Зауваження про задачу трьох тіл» (1770) закладено основи методу розкладів розв'язків диференціальних рівнянь у вигляді рядів за степенями часу, який отримав назву «метод рядів Лі».

Французький вчений Ж. Лагранж продовжив розпочаті Л. Ейлером дослідження з представлення вікових збурень планет у тригонометричній формі. В праці «Про теорію супутників Юпітера» (1766) він представив величини, які характеризують рух, у вигляді нескінчених тригонометричних рядів за часом, у 1774 р. дослідив вікові зміни елементів орбіти в тригонометричній формі. Основною ж працею Ж. Лагранжа є «Аналітична механіка» (1787), в якій він об'єднав принцип можливих переміщень, узагальнивши його і поклавши в основу статики, з принципом Д'Аламбера, та застосував строгий математичний апарат без побудов і міркувань

---

* Породжуючий розв'язок розглядається як формула переходу від старих змінних до нових. Наближене інтегрування рівнянь відносно нових змінних можна здійснити, наприклад, методом послідовних наближень.

геометричного та фізичного характеру [13]. В передмові до цієї праці Ж. Лагранж писав: «…той, хто любить математичний аналіз, із задоволенням побачить, що механіка стає новим розділом аналізу, і буде мені вдячний за таке розширення меж його застосування» [13, т. 1, с. 10]. В шостому розділі «Про малі коливання будь-якої системи тіл» він проаналізував диференціальні рівняння довільної системи тіл, які завжди інтегровані, коли тіла дуже мало відхиляються від своїх положень рівноваги [13, т. 1, с. 439–521]. За допомогою рівняння в узагальнених координатах Ж. Лагранж звів деякі задачі теорії малих коливань до описання лінійними диференціальними рівняннями із сталими коефіцієнтами, методи розв'язання яких в загальному випадку було вже розроблено [13, т. 1, с. 458–460, с. 514]. Тим самим було закладено основи теорії малих, або лінійних коливань, тобто коливань, що характеризуються лінійними диференціальними рівняннями з сталими коефіцієнтами. До кінця свого життя він працював над другим виданням книги «Аналітична механіка», перший том якої вийшов у 1813 р., а другий – після смерті автора в 1816 р. В цьому виданні, на відміну від першого видання, Ж. Лагранж розглядає коливання струни, рух води в каналах, поширення хвиль тощо.

Також Ж. Лагранж перший поставив задачу про стійкість руху небесних тіл. Він вивів з диференціальних рівнянь вікових збурень інтегральне співвідношення, в якому деяка додатна квадратична функція збурень ексцентриситету і довготи перигелію залишається незмінною і рівною $k^2$ [13, т. 2, с. 160]. Цей інтеграл і використовується Ж. Лагранжем для доведення стійкості незбуреного стану планетної системи. Він довів теорему про стійкість ізольованого положення рівноваги матеріальної системи, коли силова функція діючих на систему сил має максимум.

Дослідженнями руху планет займався і французький вчений П. Лаплас. У 1773 р. він застосував нескінченні тригонометричні ряди за часом до дослідження руху Юпітера і Сатурна. Трапилося, що працю П. Лапласа було надруковано раніше за мемуар Ж. Лагранжа. До п'ятого тому своєї праці «Небесна механіка» (1799–1805) П. Лаплас включив мемуар Ж. Лагранжа «Щодо виправлення методів наближеного розв'язання рівнянь руху планет» [14, с. 149]. Він довів, що Ж. Лагранж відкинув члени ряду, які не можна було відкидати. Коли П. Лаплас підставив у ряд відповідні параметри Юпітера і Сатурна, то вікові прискорення цих планет зникли, і він зробив висновок, що прискорення Юпітера і Сатурна є періодичними, а не віковими. В 1784 р. П. Лаплас знов звернувся до цієї задачі. Він виявив періодичні члени ряду, які далеко стоять від його початку і величиною яких нехтувати не можна, знайшов їх період – понад 900 р. Тобто, якщо астрономічні спостереження тривають досить довго, то можна помітити, що прискорений рух Юпітера стає сповільненим, а сповільнений рух Сатурна, навпаки, перетворюється на прискорений. Цього ж року він відкрив ефект малих знаменників.

Теорія П. Лапласа простіша за теорію Ж. Лагранжа. В системі рівнянь Ж. Лагранжа час, що міститься під знаком синуса, косинуса і показникової функції, є незалежною змінною. П. Лаплас час прийняв за довільний сталий параметр і отримав простішу систему рівнянь для визначення шуканих величин.

Проблему руху планет, зокрема задачу трьох тіл, почав досліджувати 1802 р. і німецький вчений К. Гаусс, розкладаючи в тригонометричні ряди частинні похідні пертурбаційної функції. Ця функція описує зміни в русі планети навколо Сонця. Результати цієї роботи було опубліковано 1802 р. та 1803 р. У 1805 р. К. Гаусс відмовився від цього методу і створив метод тригонометричної інтерполяції, який полягав у знаходженні за даними значеннями функції її проміжних значень. Цей метод викладено в мемуарі К. Гаусса «Теорія методу інтерполяції…» (1866). Вчений вважав свої формули більш вдалими, ніж у П. Лапласа. За допомогою цього методу К. Гаусс точніше знайшов збурення малої планети Церери. В 1811 р. він досліджував цим методом збурення планети Паллади, обчислив її орбіту. В праці «Про гіпергеометричний ряд» (1812) К. Гаусс вивчав питання збіжності нескінченних рядів.

Французький вчений С. Пуассон також займався аналогічними дослідженнями. В праці «Механіка» і в дослідженнях коливань маятника при знаходженні розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь за допомогою розкладів функцій в ряди за степенями малого параметра $\alpha$ він виявив вікові члени (члени, що містять час поза знаками тригонометричних функцій) [14, с. 141–143]. У 1809 р., знайшовши збурення великих півосей планетних орбіт з точністю до членів другого порядку відносно збурених мас, С. Пуассон зацікавився питанням стійкості Сонячної системи. Він вказав, що стійкість існує, якщо враховувати квадрати мас і нехтувати їх кубами, які містять вікові члени. Тобто, коли параметри, які визначають конфігурацію системи, не мають вікових членів, то має місце стійкість. За наявності вікових членів амплітуда коливань необмежено зростає і стійкість порушується.

У 1878 р. С. Аретю показав, що серед членів третього порядку відносно збурених мас в збуреннях великих осей є вікові члени.

Спільним для всіх цих праць Л. Ейлера, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, К. Гаусса і С. Пуассона є те, що в них розглядаються рухи, які описуються звичайними диференціальними рівняннями з малим параметром, при нульовому значенні якого ці рівняння перетворюються в рівняння задачі двох тіл, які є лінійними та інтегруються. При розв'язанні задачі трьох тіл необхідно було враховувати, що маси планет порівняно з масою Сонця досить малі і планети знаходяться одна від одної на значній відстані. Тому при розв'язанні задачі трьох тіл можна використати розв'язок задачі двох тіл і врахувати незначний вплив другої планети. Тобто, можна було шукати розв'язок диференціальних рівнянь у формі розкладання в тригонометричні ряди за степенями малого параметра. Цей параметр є відношенням маси збурюючої планети до маси Сонця. В результаті цього одержували наближені формули, які поряд зі членами, що гармонічно залежать від часу, мають ще так звані вікові (секулярні) члени. Інтенсивність вікових членів швидко зростає з часом, тому навіть без детального аналізу похибки ясно, що застосування таких формул обмежено дуже коротким проміжком часу. В зв'язку з цим астрономи обмежувалися знаходженням двох-трьох членів такого ряду, що з врахуванням малості параметра було достатнім для практичних цілей.

У 1860 р. американський вчений С. Ньюком застосував метод Лапласа до обчислень збурень рухів Урану, Меркурія, Венери, Землі і Марса. В праці «…Внесок в знання» (1874) він перший визначив ряди, які описують рух планет і містять лише синус і косинус. Запропонований ним метод ґрунтується на варіації довільних сталих.

Французький астроном У. Леверр'є 1839 р. провів дослідження вікових змін планетних орбіт і дослідив питання стійкості Сонячної системи. В 1845 р. він почав вивчати нерівності в русі планети Уран, а в 1855–1877 рр. методом послідовних наближень отримав розв'язок рівнянь довгот, широт і радіус-векторів планет з точністю до членів першого і частково другого порядків відносно збурюючих мас і, виходячи з цього, відкрив планету Нептун.

Французький астроном Ш. Делоне в 1845–1855 рр. розробив метод розв'язання задачі збуреного руху небесних тіл (метод Делоне). В 1860 – 1867 рр. він розклав збурюючу функцію в ряд за елементами орбіт Місяця і Сонця. За допомогою деякого канонічного перетворення змінних з канонічних рівнянь він виключив найбільш значимі члени і обійшов труднощі, викликані появою малих знаменників. Цей розв'язок не дає змоги прогнозувати рух за початковими значеннями координат небесного тіла.

Американський астроном С. Ньюкомб у 1895–1898 рр. змінив форму розкладу елементів орбіт в нескінчені ряди і ввів розклади без вікових членів.

Фінсько-шведський астроном Г. Гюльден у другій половині XIX ст. розділив збурення на дві частини: вікові та невікові, замість вікових членів ввів члени більшого періоду, в яких період обернено пропорційний збурюючій масі. Доведення збіжності таких рядів є важким. Замість кеплерова еліпса він ввів нові криві: проміжну орбіту, при складанні рівняння якої враховувались головні збурення і абсолютну орбіту, рівняння якої містило всі збурюючі члени.

Американський астроном і математик Дж. Хілл наприкінці XIX ст. побудував періодичний розв'язок спрощених рівнянь задачі трьох тіл, взявши за перше наближення орбіту, що задовольняє рівняння руху. Він виписав диференціальне рівняння першого наближення для Місяця при умові, що Сонце «віддалено на нескінченність» і знайшов його формальний періодичний розв'язок у вигляді рядів з коефіцієнтами, які виражаються у вигляді степеневих рядів за степенями малого параметра.

Метод малого параметра, яким широко користувалися в астрономії, в математиці застосували і розвинули М. В. Остроградський, К. Вейєрштрасс і А. Ліндштедт до розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь.

11 вересня 1835 р. на засіданні Петербурзької Академії наук М. В. Остроградський доповів працю «Замітка про метод послідовних наближень» [15], яку вперше опубліковано 1836 р. Для прикладу М. В. Остроградський знаходить розв'язок нелінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = \alpha \cdot y^3(t),$$

де $y(t)$ – функція, $\alpha$ – малий параметр, у вигляді ряду, розкладеного за степенями малого параметра $\alpha$ [15, с. 72]. Якщо відкинути нелінійний член $\alpha \cdot y^3(t)$, то отримане таким чином лінійне рівняння дає частинний періодичний розв'язок. Вважаючи при $t = 0$ початкові умови $y = 1,\ y_t^{'} = 0$ М. В. Остроградський, розглядаючи тільки перше наближення при розкладі розв'язку за степенями параметра $\alpha$, отримав рівняння, яке може бути проінтегроване в еліптичних функціях [15, с. 74]. В цій статті він знайшов наближений розв'язок цього рівняння ще інакше: одночасно розкладаючи період (або частоту $\omega$) і самий розв'язок за параметром $\alpha$. Поклавши малий параметр рівним частоті ($\alpha = \omega$), він отримав розв'язок цього рівняння, який містив час лише під знаком косинусу (без вікових членів). М. В. Остроградський порівняв отриманий його методом наближений розв'язок з тим, який можна отримати з точного розв'язку при відповідному наближенні до нього. Праця не містить вказівки, яким чином вести наступні наближення, щоб члени розкладу не були віковими. В ній також не доводиться, що запропонований метод однозначно визначає всі послідовні наближення [15, с. 75]. Однак заслуга М. В. Остроградського в тому, що йому належить простіша ідея виключення секулярних членів у розкладах за степенями малого параметра. Цей приклад М. В. Остроградського відноситься до так званих збурених гармонічних коливань, які зустрічаються в техніці, наприклад, при хитанні корабля.

Всередині XIX ст. розв'язанням нелінійних диференціальних рівнянь займався німецький математик К. Вейєрштрасс. Він продовжив дослідження норвезького математика Н. Абеля, який у вступі до праці «Точна теорія еліптичних функцій» представив модульну функцію у вигляді частки двох збіжних рядів, розміщених за цілими позитивними степенями незалежної змінної, коефіцієнти яких є цілими функціями модуля, не давши доведення цього. К. Вейєрштрасс звернув увагу на необхідність рівномірної збіжності рядів і поставив задачу знайти розклади, ідею яких запропонував Н. Абель, а, також показати, яким чином з них можна отримати інші відомі розклади еліптичних функцій. К. Вейєрштрасс розв'язав задачу в 1840 р., зокрема в його першому мемуарі «Щодо розвинення модульних функцій» викладено ідею розкладу еліптичної функції в ряди [16, с. 7–9]. Пізніше за допомогою еліптичних функцій він знайшов точний розв'язок задачі з маятником. Другий і третій мемуари «Представлення аналітичної функції комплексної змінної, абсолютна сума якої знаходиться в певних межах» та «До теорії рядів потенціалу» К. Вейєрштрасса містять верхні межі для абсолютних значень коефіцієнтів рядів, розміщених за степенями однієї або кількох змінних. В третьому мемуарі К. Вейєрштрасс вже використовував терміни «безумовно та рівномірно збіжні ряди». В четвертому мемуарі він доводить, що ці ряди не тільки безумовно, але і рівномірно збіжні і саме тому вони є представленням аналітичної функції.

Розв'язанням нелінійних диференціальних рівнянь також займався шведський вчений А. Ліндштедт. В статті «До інтегрування диференціальних рівнянь теорії збурень» (1883) він дослідив рівняння, яке відіграє важливу роль в небесній механіці

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(n^2-2\psi_1)x=\psi\ (x,t), \tag{1}$$

де $n$ – частота, $\psi\ (x,t)$ – функція, яка допускає розкладання в ряд за зростаючими степенями $x$ з коефіцієнтами, що періодично залежать від часу $t$ за допомогою послідовних наближень, і звів його інтеграл до членів четвертого порядку відносно коефіцієнтів у виразах $\psi_1$ і $\psi_0$. Метод Ліндштедта – виключно формальний. Він не з'ясував питання збіжності цих розкладів. А. Ліндштедт пояснював появу вікових членів тим, що аргумент $nt$ залишається незмінним. В цьому поясненні полягає основна ідея розкладів за степенями малого параметра. А. Ліндштедт також показав, що цей метод можна застосовувати до рівнянь

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (n_1{}^2 - 2\psi_1)x = \psi \ \ (x, y, t),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (n_2{}^2 - 2\psi_1)x = \psi \ \ (x, y, t),$$

які є узагальненням рівняння (1). За допомогою метода Ліндштедта краще розглядати прості випадки. Однак він не застосовується, коли знаменники дуже малі.

Користувався методом малого параметра і Дж. Релей. В книзі «Теорія звуку» (1877) він застосував метод виключення секулярних членів у розкладах за степенями малого параметра, нехтуючи малими змінами коливань, зокрема розглянув в узагальненій формі рівняння, яке було прикладом у М. В. Остроградського [17, т. 1, с. 153–156].

Наприкінці XIX ст. французький вчений А. Пуанкаре в праці «Про проблему трьох тіл і рівняння динаміки» (1890) та тритомнику «Нові методи небесної механіки» (1892–1899) далі розвинув кількісний метод малого параметра, проаналізував дослідження своїх попередників С. Ньюкомба, А. Ліндштедта та ін. В першій праці він розвивав метод інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою послідовних наближень [18]. Узагальнення рівняння (1) розглядається у другому томі праці «Нові методи небесної механіки» [18, т. 1, с. 346–363]. А. Пуанкаре показав, що всі тригонометричні ряди, до яких приводить метод малого параметра, розбіжні. Після деякого номера члени ряду починають зростати. Але сума перших членів таких рядів дає величину, похибка якої тим менша, чим менше значення параметра (похибка $m$-го наближення пропорційна $(m-1)$-му степеню малого параметра). В цьому сенсі А. Пуанкаре назвав такі ряди асимптотичними [18, т. 1, с. 333]. У його працях метод малого параметра дістав узагальнення й подальший розвиток. Було з'ясовано, що точність цього методу тим вища, чим менший проміжок часу. А. Пуанкаре досліджував властивості різноманітних нескінченних рядів, які зустрічаються в небесній механіці, вивчав важливе питання стійкості руху небесних тіл.

## 3.2. Розв'язання інженерних задач методом лінеаризації. Стійкість руху (остання чверть XIX ст.)

Наприкінці XIX ст. в інженерній практиці при з'ясуванні питання стійкості руху до розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь застосовувався метод лінеаризації. Він полягає в тому, що малі нелінійні члени диференціального рівняння відкидаються без обґрунтування. Однак навіть досить малий «степінь нелінійності» в деяких випадках викликає вагомі зміни головних якісних властивостей лінійних коливань.

Лінеаризовані рівняння для нескінченно малих коливань зустрічалися вже в працях французьких вчених О. Коші «Замітка з теорії хвиль» (1827) та С. Пуассона «Замітка з теорії хвиль» (1816). Перша спроба побудувати загальну теорію стійкості руху була зроблена англійським фізиком і математиком У. Томсоном і шотландським вченим П. Тетом в їх праці «Курс натуральної філософії» (1867). Приймаючи за незалежну змінну одну з координат системи, У. Томсон і П. Тет склали диференціальні рівняння для визначення інших координат в збуреному русі і дослідили стійкість руху системи в просторі. Задачу про стійкість руху запропоновано 1875 р. Кембриджським університетом на здобуття премії Адамса. Вона була присуджена 1877 р. англійському вченому Е. Роусу. Основні результати його досліджень з доповненнями ввійшли до книги «Удосконалена частина динаміки системи твердих тіл» (1877). За допомогою методу лінеаризації Е. Роус показав, як за певних умов рівняння збуреного руху зі змінними коефіцієнтами за допомогою лінійних підстановок можна звести до рівнянь з сталими коефіцієнтами. Е. Роус, як до нього і С. Пуассон, намагався удосконалити метод лінеаризації, розглядаючи рівняння другого наближення. Питанням стійкості руху займався і російський вчений М. Є. Жуковський. В докторській дисертації «Про стійкість руху» (1882) він систематизував і доповнив результати У. Томсона і П. Тета [19, с. 67–160]. В праці «Про вплив коливань штатива на час коливань маятника» М. Є. Жуковський знайшов похибку, яку допускає формула Гюйгенса для визначення довжини маятника за часом його коливань [19, с. 161–166].

У. Томсон і П. Тет, Е. Роус і М. Є. Жуковський у вищезгаданих працях користувались першим наближенням і відкидали члени нелінійних рівнянь вище першого порядку, отримуючи лінійні рівняння. Правильність цих дій не доводилась.

В зв'язку з бурхливим розвитком техніки в другій половині XIX ст. увагу вчених усе більше привертали прикладні питання, пов'язані з коливаннями. Зокрема зростання потужності парових машин і турбін призводило до збільшення маси їх регуляторів, процес роботи яких супроводжувався небажаними коливаннями, що спричиняли явище саморозхитування. Так виникли технічні задачі регулювання швидкостей обертання роторів машин, для розв'язання яких методів лінійної теорії коливань було недостатньо.

Англійський вчений Дж. Максвел в мемуарі «Регулятори» (1868) дослідив корені характеристичного рівняння для лінеарізованих рівнянь руху системи прямого регулювання (з безпосередньою дією величини на регулятор) і вперше сформулював умови самозбудження коливань [20].

В 1876 р. російський вчений І. О. Вишнеградський, учень М.В. Остроградського, сформулював нелінійну задачу прямого регулювання. Розглядалася машина, в якій момент руху залежав від положення регулюючого органу. Роботою машини керував тахометр, інерцією і тертям якого не можна було знехтувати. І. О. Вишнеградський дослідив умови стійкості і отримав розв'язок лише для лінійного випадку. Для частинного випадку, коли відсутнє в'язке тертя, результати було отримано 1897 р. Л. Ф. Лекорню (Франція), 1909 р. М. Є. Жуковським (Росія), 1908 р. Р. Мізесом (Австрія). Тільки в 1945 р. О. О. Андронову і А. Г. Майєру вдалося розв'язати задачу Вишнеградського [21].

Дослідженням регуляторів непрямої дії займався і французький інженер А. Леонте. У 1885 р. він врахував нелінійність при розгляді явищ, які не можна було пояснити за допомогою лінійної теорії, вказав на наявність «мертвих зон» в характеристиці серво-мотору і кулонівського тертя в чуттєвому елементі. А. Леонте вперше геометрично дослідив диференціальні рівняння руху. У випадку задачі Леонте розглядалися регулятори непрямої дії, але примітивні, в яких швидкість переміщення затулки залежала тільки від зміщення муфти чуттєвого елементу. Вивчаючи автоколивання в цих регуляторах, А. Леонте дослідив їх фазовий простір і накреслив для нього інтегральні криві і граничні цикли.

# 4. РОЗРОБКА МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРО- І РАДІОТЕХНІКИ: КВАЗІЛІНІЙНІ МЕТОДИ, МЕТОД ПРИПАСОВУВАННЯ, МЕТОД ВАН-ДЕР-ПОЛЯ, СТРОГІ МЕТОДИ (початок ХХ ст. )

На початку ХХ ст. в зв'язку з потребами електро- і радіотехніки нелінійні задачі розв'язувались за допомогою різних нестрогих методів: квазілінійних методів, методу припасовування, методу Ван-дер-Поля.

В 1906 р. Л. Форест винайшов тріод (триелектродну лампу). Це відкриття зумовило швидкий розвиток радіотехніки. Тут шкідливий коливальний процес почав застосовуватись для генерації незагасаючих електромагнітних коливань. Проблема стійкої генерації незагасаючих коливань, трансформації частоти, стабілізації, примусової синхронізації, модуляції та демодуляції та ін. мали бути вирішені за допомогою введення в коливальні системи нелінійних елементів, оскільки в чисто лінійних коливальних системах не можуть існувати сталі коливальні режими, що не залежать від початкових умов. В результаті поступово в різних галузях науки і техніки, зокрема в акустиці, радіофізиці, фізиці твердого тіла, статистичній фізиці, почала зростати кількість аналогічних проблем, які вимагали швидкого вирішення. На часі стала необхідність розробки загальної теорії нелінійних коливань, адже існуючі на той час методи часто призводили до грубих помилок не тільки кількісного, але і якісного характеру.

З 1907 по 1928 р. центром досліджень в галузі нелінійних коливань стала Німеччина. Г. Мьоллер і Г. Баркгаузен намагалися пристосувати лінійні методи до нелінійних задач, заміняючи нелінійні члени рівняння лінійними [22, 23]. В докторській дисертації «Проблеми генерації коливань» (1907) Г. Баркгаузен, досліджуючи дуговий генератор, зробив важливий внесок в теорію нелінійних перемикачів. У 1920 р. він побудував електронну трубку для створення високочастотних коливань, записав рівняння, які пов'язують коефіцієнти трубки. Г. Мьоллер розглянув випадок, коли період збуджуючої сили дорівнює власному періоду коливань системи. Г. Баркгаузен та Г. Мьоллер припустили, що частиною розв'язку задачі про ламповий генератор є синусоїда $a\sin\omega t$, де $\omega$ – власна частота контуру, а амплітуда знаходиться з рівняння

$$\frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(M\omega\cos\omega t)\cos\omega\cdot t\cdot dt = 2\delta a.$$

Ці, так звані квазілінійні методи, дозволяли за заданою характеристикою лампи приблизно знайти амплітуди коливань і дослідити їх стійкість. Основна ідея квазілінійних методів полягає в заміні нелінійних елементів еквівалентними лінійними з параметрами, які визначаються певним чином. Ці параметри, на відміну від параметрів лінійних систем, залежать від амплітуди, а у випадку резонансу – і від фази коливань. Ці методи застосовні до задач, яким відповідають незагасаючі коливання, близькі до синусоїдальних.

У колишньому СРСР квазілінійний метод у застосуванні до задач радіотехніки в 30–ті роки XX ст. розвивали Ю. Б. Кобзарєв [24, 25, 26] і А. І. Берг [27, 28, 29]. Ю. Б. Кобзарєв дав простий метод тлумачення явищ при нелінійному резонансі у випадку майже періодичних коливань. Він розглянув застосування квазілінійного методу до теорії резонансу поділу частоти в два рази в простішому випадку «м'якого режиму самозбудження», коли можна обмежитись для описання резонансних кривих членами третього степеня. Ю. Б. Кобзарєв отримав загальні диференціальні рівняння першого наближення, тотожні рівнянням, вивченним в загальному вигляді Л. І. Мандельштамом і М. Д. Папалексі. Він знайшов періодичні режими і вивчив їх стійкість [26].

А. І. Берг створив методику розрахунку лампових передавачів і генераторів [27]. В статті, присвяченій дослідженню лампового генератора зі змішаним навантаженням, шляхом введення «фіктивної прямолінійної характеристики лампи» він наблизив цей випадок до розгляду генератора з лінійною характеристикою і знайшов характеристики генераторів з розлаштованим анодним контуром [28]. В подальшому він застосовував цю методику до дослідження лампового генератора, що працює в перенапруженому режимі [29]. В 1937 р. А. І. Берг розширив дослідження генерації коливань. До праць цього напрямку відносяться «Розвиток теорії косинусоїдального імпульсу», «Розподіл струму між анодом і сіткою в трьохелектродних лампах», «Аналіз роботи трьох електродних генераторів з врахуванням сіткового струму». Після всіх цих досліджень було повністю розроблено методику розрахунку параметрів тріодних генераторів і передавачів на єдиному підході до досліджуваних у них явищ.

На початку XX ст. для розв'язання нелінійних задач почали застосовувати метод припасовування. Він полягає в тому, що нелінійна частина рівняння заміняється функцією, яка зображається ламаною лінією, і замість нелінійного рівняння розглядається система лінійних диференціальних рівнянь. У точках з'єднання сталі інтегрування припасовуються, виходячи з вимог неперервності розв'язку. Першим використав цей метод у 1911 р. для розв'язання нелінійної задачі про випрямляч російський радіофізик М. Д. Папалексі [30].

Істотну роль у розвитку нелінійних коливань відіграв метод, запропонований голландським вченим Б. Ван-дер-Полем [31]. Перші його наукові праці присвячено дослідженням коливань, збуджуваних у ламповому генераторі. Б. Ван-дер-Поль першим вказав на незастосовність до нелінійних задач радіотехніки методу лінеаризації. Навіть при малому значенні параметра, який входить у диференціальне рівняння, яке описує періодичний процес у ламповому генераторі, виникають коливання, як правило, з великою, але завжди скінченною амплітудою. Крім того, амплітуди і періоди коливань, збуджуваних у ламповому генераторі, встановлюються незалежно від початкових умов і визначаються властивостями системи (автоколивання). Лінійні ж неконсервативні системи породжують тільки згасаючі чи тільки зростаючі коливання і їх амплітуда залежить від початкових умов. Таким чином коливання, що виникають в ламповому генераторі, істотно відрізняються від лінійних коливань. Ці явища неможна пояснити лінійною теорією. Вивчаючи автоколивання, Б. Ван-дер-Поль знайшов диференціальне рівняння, що описує цей процес.

Пізніше, у 1926 р., в його працях це рівняння, яке нині носить його ім'я, прийняло форму:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Коли значення параметра $\varepsilon$ були більші за одиницю, виникали істотні труднощі в дослідженні розв'язку цього рівняння. Тому Б. Ван-дер-Поль вивчав характер розв'язку цього рівняння методом ізоклін у фазовій площині при різних значеннях параметра $\varepsilon$.

При малих значеннях параметра $\varepsilon$ це диференціальне рівняння мало відрізняється від лінійного, і коливання, які описуються цим рівнянням, є близькими до синусоїдальних. Для цього випадку Б. Ван-дер-Поль запропонував у 1920–1923 рр. спеціальний метод, названий ним методом «повільно змінних коефіцієнтів», подібний до методу варіації довільної сталої. Цей метод не було строго обґрунтовано, але багато важливих практичних і теоретичних задач було розв'язано за його допомогою. Суть його полягала в тому, що за допомогою підстановки в (2)

$$x = u\sin t - v\cos t,$$

$$\frac{dx}{dt} = u\cos t + v\sin t,$$

рівняння (2), після перетворень і нехтування деякими членами ($v_t'', u_t'', \varepsilon v_t', u_t'$ – відкидаються, через припущення $u$ і $v$ повільно змінними), переходить в систему так званих «укорочених рівнянь Ван-дер-Поля». Переходячи до полярних координат у цій системі, можна розділити змінні.

За допомогою цього методу Б. Ван-дер-Поль отримав низку важливих результатів. Зокрема, він дослідив процес становлення коливань, стаціонарні режими, коливальний гістерезис. Йому вдалося виявити і дослідити використання релаксаційної автоколивальної системи для моделювання роботи серця. Недоліком методу Ван-дер-Поля було те, що він давав тільки перше наближення, тобто не був асимптотичним, не було встановлено умови його застосування, не з'ясовано ступінь точності, залишалося відкритим питання обґрунтування. За допомогою цього методу можна було адекватно описувати тільки системи, близькі до лінійних консервативних.

У 1926 р. Б. Ван-дер-Поль вперше графічно дослідив сильно синусоїдальні автоколивання, використовуючи фазову площину, розглянув у граничному випадку розривні коливання. Цією задачею займався також Е. Фрідлендер (1926).

У 1934 р. метод Ван-дер-Поля строго математично обґрунтували радянські вчені Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі. Крім того, вони показали, що цей метод в окремому випадку становить різновид методу малого параметра [32].

Перші строгі математичні методи для розв'язання нелінійних задач радіотехніки було застосовано у Франції – Е. Картаном і А. Картаном (1925) [33], А. Л'єнаром (1928). Вони аналітично підтвердили існування у фазовій площині замкненої кривої, яка відповідає періодичному розв'язку цього рівняння. Це рівняння отримав Б. Ван-дер-Поль, вивчаючи методом ізоклін розв'язки диференціального рівняння, яке описує коливання в ламповому генераторі. Е. і А. Картани та А. Л'єнар розглядали з якісної точки зору зв'язок математичної форми диференціального рівняння з фізичними властивостями даної коливальної системи. А. Л'єнар розробив простий графічний метод розв'язання нелінійного диференціального рівняння (рівняння Л'єнара):

$$X + \varphi''(X) + X' = 0 .$$

Серед перших дослідників з нелінійних проблем слід також відзначити англійського вченого Е. Епплтона, який першим почав досліджувати нелінійну задачу поширення, загасання та відбиття радіохвиль в атмосфері. Англійський вчений Р. Пайєрлс створив квантову теорію теплопровідності кристалічних тіл, яка враховує ангармонізм атомів у кристалічній ґратці [34; 35]. Японський вчений Кога виявив, що період самозбуджувальної автоколивальної системи за певних умов стає кратним періоду діючої сили [36].

# 5. ЗАДАЧІ ПРО СТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ. ЯКІСНІ МЕТОДИ А. ПУАНКАРЕ, СТІЙКІСТЬ ЗА А. ПУАНКАРЕ. СТВОРЕННЯ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ О. М. ЛЯПУНОВИМ

В більшості випадків питання щодо стійкості вирішували якісними методами, тобто не інтегруючи диференціальних рівнянь. Це пов'язано з тим, що в явній формі одержати загальний розв'язок диференціального рівняння вдається дуже рідко. Задачі, пов'язані з дослідженням стійкості, з'явилися всередині XVIII ст. У третьому розділі «Про стійкість, з якою тіла, занурені в воду, протидіють в положенні рівноваги» праці Л. Ейлера «Корабельна наука» (1749) вводиться міра стійкості. Вона визначається величиною моменту відновлюючої сили, тут же чітко вводиться поняття про стійкість рівноваги по відношенню до нескінченно малих збурень, яка досліджується за допомогою аналізу малих коливань плаваючого тіла навколо положення рівноваги.

Після Л. Ейлера, дослідженням малих коливань механічної системи біля положення рівноваги займались А. Клеро, Д. Бернуллі, Ж. Д'Аламбер, Ж. Лагранж. Уперше (1786) задачу про стійкість руху поставив Ж. Лагранж. Досліджуючи корені алгебраїчного рівняння, яке визначає частоти коливань, він висловив помилкове твердження, що при наявності кратних коренів цього рівняння повинні з'являтися «вікові члени» і стійкості не буде. Цю помилку Ж. Лагранжа майже одночасно пояснили в 1858 р. К. Вейерштрасс та російський вчений О. І. Сомов у 1859 р. Ж. Лагранж сформулював теорему про стійкість стану рівноваги консервативної системи, яка відповідає мінімуму потенціальної енергії. Г. Діріхле в замітці «Про стійкість рівноваги» (1846) удосконалив доведення Ж. Лагранжем цієї теореми [12, с. 538]. Перша спроба строго вирішити задачу про стійкість руху в першому наближенні була зроблена А. Пуанкаре. В його мемуарі «Про криві, які визначаються диференціальними рівняннями» (1885) розглянуто деякі окремі випадки задачі про стійкість руху [37]. Він досліджував питання стійкості для випадку систем диференціальних рівнянь другого порядку.

В працях «Про криві, які визначаються диференціальними рівняннями» і «Нові методи небесної механіки» А. Пуанкаре створив теорію якісних методів дослідження диференціальних рівнянь, яка містила також узагальнений метод Лагранжа [18]. Він запропонував визначати характер руху за видом правої частини диференціального рівняння, не інтегруючи його, та з множини інтегральних кривих знаходити криві, які відповідають періодичним розв'язкам. А. Пуанкаре розробив метод визначення цих кривих – геометричний метод якісного описання руху в фазовому просторі. Досліджуючи фазові траєкторії, А. Пуанкаре шукав відповідь на питання, чи може задана система перебувати в рівновазі або періодичному русі.

Важливе значення для визначення поведінки системи мають введені А. Пуанкаре поняття особливої точки та граничних циклів, зв'язок між якими він установив за допомогою поняття індексу. [18, т. 3, с. 13].

Загальну якісну теорію А. Пуанкаре розвивали А. Данжуа (Франція), І. Бендіксон (Швеція), А. Кнезер (Німеччина), С. Лефшец (США), Дж. Біркгофф (США) та інші. В колишньому СРСР якісні методи розвивалися і широко застосовувалися в працях О. О. Андронова, О. А. Вітта, С. Е. Хайкіна, Л. С. Понтрягіна, В. В. Немицького, М. О. Леонтовича та інших.

А. Пуанкаре в своїх працях користувався для знаходження періодичних розв'язків методом малого параметра. Цей метод має недолік: він не дає можливості зробити висновки щодо відносної кількості періодичних розв'язків, дослідити квазіперіодичні і перехідні процеси, процеси становлення коливань. В останньому мемуарі А. Пуанкаре сформулював теорему, що періодичні рухи динамічної системи справді можуть служити основою для вивчення всіх її рухів. Ця теорема була доведена Дж. Біркгоффом.

А. Пуанкаре провів ґрунтовні дослідження з теорії стійкості. Створення ж загальної теорії стійкості належить російському вченому О. М. Ляпунову – приват-доценту Харківського університету. Ця проблема зацікавила його у зв'язку з задачею про форми рідких мас, що обертаються. 15 березня 1891 р. Харківське математичне товариство заслухало його доповідь «Загальна задача про стійкість руху» [38]. У докторській дисертації під такою ж назвою (1892) і наступному циклі статей про стійкість (до 1902 р.) О. М. Ляпунов розробив оригінальний строгий математичний апарат, який дозволив дати повну відповідь на питання щодо стійкості руху. Він заміняв рівняння збуреного руху системи лінійними рівняннями, які отримуються з початкових відкиданням всіх членів вище першого порядку малості відносно змінних. Доведення цього О. М. Ляпунов не дав і вказував що це заміна однієї задачі іншою, яка може бути ніяк не пов'язана з попередньою. Одним із основних результатів О. М. Ляпунова є розв'язання деякого класу систем нелінійних рівнянь та з'ясування поведінки інтегральних кривих рівнянь руху поблизу положення рівноваги.

Крім того, в мемуарі «Дослідження в теорії малюнку небесних тіл» (1903) О. М. Ляпунов ввів малий параметр, прийнявши за нього певне незначне відхилення поверхні рівня від деякої сфери. Встановивши законність цього розкладу і застосовуючи метод послідовних наближень*, він дав спосіб побудови наближень довільного порядку. О. М. Ляпунов перший довів збіжність отриманих наближень.

Таким чином одночасно з дослідженнями, що стосуються методу малого параметра, в останній чверті XIX ст. почав формуватися новий підхід до вивчення розв'язків диференціальних рівнянь. Це так звані якісні методи, пов'язані з іменами А. Пуанкаре та О. М. Ляпунова. В локальній теорії періодичних розв'язків Ляпунова-Пуанкаре розглядаються загальні нелінійні диференціальні рівняння, які містять малий параметр таким чином, що при його нульовому значенні вони мають періодичний розв'язок. А. Пуанкаре і О. М. Ляпунов встановили явні критерії існування і стійкості періодичних розв'язків, які не пов'язані з обов'язковою консервативністю системи. Хоч в теорії Пуанкаре за породжуючий розв'язок прийнято розв'язок вихідної системи при малому параметрі рівному нулеві, в теорії Ляпунова розглядається частинний розв'язок, але вже загальної системи (при ненульовому значенні малого параметра). В працях А. Пуанкаре і О. М. Ляпунова

* Метод повторних підстановок – один із загальних методів наближеного розв'язання рівнянь. Полягає в побудові послідовності (для розв'язку) і дослідженні її збіжності.

започатковано класичну теорію періодичних розв’язків диференціальних рівнянь.

Методи Ляпунова-Пуанкаре точні, математично обґрунтовані, аналітичні, за їх допомогою можна проводити кількісне та якісне дослідження нелінійної коливальної системи з малим параметром.

Одним з перших застосував якісні методи до дослідження диференціальних рівнянь латвійський вчений П. Боль [39]. В своїй магістерській дисертації (1893) він заклав основи теорії майже періодичних функцій (квазіперіодичних). У його працях, зокрема «Про деякі загальні диференціальні рівняння, які застосовуються в механіці» (1900), вперше зроблено спробу поширити результати А. Пуанкаре та О. М. Ляпунова на більш загальний клас квазіперіодичних розв’язків диференціальних рівнянь.

Всі наведені вище методи були лише спробами розв’язати окремі нелінійні задачі. Ми бачимо, що математичний апарат, який можна було застосувати до дослідження нелінійних коливань, наприкінці першого етапу сучасного періоду вчення про коливання існував, але не був узагальненим. Для стійких станів руху, малі відхилення від яких приводять до малих коливань фізичних величин навколо деяких середніх значень, використовували метод лінеаризації і нехтували малими нелінійними членами. Цього робити не можна, коли відхилення не є малими або стан руху, поблизу якого вони розглядаються, стає нестійким і малі відхилення необмежено наростають. Крім того, вплив нелінійних членів може істотно змінити характер руху, коли вони є малими в порівнянні з лінійними. Це призводить до явищ, які не можна описати в межах лінійної теорії. Тому метод зведення нелінійних задач до лінійних працює в тому випадку, коли нелінійність не є суттєвою, і нею можна знехтувати для даної конкретної задачі.

Квазілінійна теорія, розроблена в працях німецьких вчених Г. Баркгаузена і Г. Мьоллера, в кращому випадку давала тільки перше наближення без перспектив на уточнення. Цю теорію можна було застосувати для дослідження деяких явищ нелінійного резонансу, наприклад, синхронізації, демультиплікації. Однак вона є непридатною при дослідженні проблем, де необхідно розглядати наближення вищих порядків, зокрема при обчисленні власної частоти електронного генератора. Кожен з розглянутих підходів через свою обмеженість не міг бути використаний для побудови загальної теорії нелінійних коливань.

Ідеї та методи О. М. Ляпунова покладено в основу всіх подальших досліджень з теорії стійкості. Перевага методів Ляпунова і Пуанкаре перед методом малого параметра в їх точності та математичній обґрунтованості. Однак їх можна застосовувати тільки для дослідження періодичних режимів, тоді як у більшості випадків маємо справу з квазіперіодичними коливаннями. До початку 30-х р. XX ст. ці методи при дослідженні нелінійних коливальних процесів систематично не використовувались. Не було розкрито також їх тісний внутрішній зв’язок з проблемами нелінійних коливань.

Вперше застосувати точні методи Ляпунова і Пуанкаре в систематичному дослідженні нелінійних коливань і повністю розкрити їх фундаментальне значення в цій галузі вдалося Л. І. Мандельштаму, М. Д. Папалексі, О. О. Андронову та О. А. Вітту. Наприкінці 20-х – на початку 30-х рр. XX ст. Л. І. Мандельштам, О. О. Андронов, О. А. Вітт застосували існуючі методи розв’язання нелінійних диференціальних рівнянь до дослідження коливальних процесів, розробивши нові методи розв’язання нелінійних задач. Саме в цей період і створюється загальна теорія коливань.

# СТВОРЕННЯ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ
# (кінець 20-х – 30-ті рр. XX ст.)

## 1. ФОРМУВАННЯ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ Л. І. МАНДЕЛЬШТАМОМ ТА ЙОГО ШКОЛОЮ (РОСІЙСЬКИЙ НАУКОВИЙ НАПРЯМ)

На початку XX ст. швидкого розвитку набула радіотехніка. Вивчення процесів в електричних лампах показало, що проходження електричного струму в вакуумі не підпорядковано закону Ома. Коливальний процес в радіотехніці був використаний для генерації незагасаючих електромагнітних коливань (автоколивання). Проблеми стійкої генерації незатухаючих коливань, трансформації частоти, стабілізації, примусової синхронізації, модуляції та демодуляції та ін. мали бути вирішені введенням у коливальні системи нелінійних елементів та розв’язанням відповідних нелінійних диференціальних рівнянь, оскільки в лінійних коливальних системах не можуть існувати сталі коливальні режими, незалежні від початкових умов. Поступово у різних галузях науки і техніки, зокрема в акустиці, радіофізиці, фізиці твердого тіла, статистичній фізиці, почали виникати аналогічні проблеми, що вимагали швидкого вирішення.

Добре розроблена теорія лінійних диференціальних рівнянь не могла описувати нелінійні процеси, бо в них суттєву роль відігравала нелінійність, абстрагуватись від якої в таких задачах було неможливо. На кінець 20-х рр. XX ст. існували окремі методи розв’язання нелінійних задач: метод малого параметра, метод лінеаризації, квазілінійні методи, метод Ван-дер-Поля та ін. Ці методи часто приводили до грубих помилок не тільки кількісного, але і якісного характеру, оскільки не були достатньо розроблені. Зокрема, метод Ван-дер-Поля, як і метод еквівалентної лінеаризації, дозволяв знаходити лише перше наближення, коливання розглядалися або як гармонічні з сталими амплітудами і фазами (стаціонарні режими), або як коливання з повільно змінними амплітудами і фазами (процеси становлення). Метод еквівалентної лінеаризації застосовували для визначення амплітуди стаціонарних коливань в електронному генераторі, дослідженні резонансів поділу частоти, явища асинхронного збудження. Методи Ляпунова-Пуанкаре в їх початковому формулюванні не були простими для застосування.

В інженерній практиці застосовувався квазілінійний метод, який полягав у заміні нелінійних елементів еквівалентними лінійними з параметрами, які залежать від амплітуди, а у випадку резонансу – від фази коливань. Строгі математичні методи для розв'язання нелінійних задач радіотехніки застосовували у Франції – Е. і А. Картани (1925), А. Л'єнар (1928). Вони розглянули зв'язок між математичною формою диференціальних рівнянь, які описують дану систему, і фізичними властивостями коливань в ній. Необхідним стало перенесення існуючих методів на нелінійні коливання, їх систематизація, узагальнення, подальший розвиток, визначення предмету і задач теорії коливань, тобто розроблення загальної теорії нелінійних коливань. Значний внесок в це зроблено радянськими вченими.

Леонід Ісакович Мандельштам (виходець з України) і Микола Дмитрович Папалексі почали займатися проблемою самозбудження коливань в ламповому генераторі в 1918–1920 рр. в Одесі. Л. І. Мандельштам бачив необхідність створити хоча б для простішої моделі строгу теорію для опису встановлення коливань з амплітудою, яка не залежить від початкових умов.

На Всесоюзній конференції з коливань в Інституті фізики Московського університету 12.11.1931 р. Л. І. Мандельштам вперше застосував термін «нелінійні коливання». Він дав класифікацію систем і процесів з фізичної точки зору та з точки зору диференціальних рівнянь: «Класифікації тут можуть бути різноманітні. Можна, наприклад, проводити поділ на системи, які мають скінченну кількість степенів вільності, в граничному випадку з одним степенем вільності, і системи, які мають їх нескінченну кількість. … Перші керуються системою простих диференціальних рівнянь, другі – рівняннями в частинних похідних.

Але можна і треба йти далі і характеризувати системи за типом диференціальних рівнянь, яким вони підкоряються. Наприклад, ми кажемо про лінійні системи чи нелінійні залежно від того, лінійні чи нелінійні рівняння, якими вони керуються» [40, с. 59].

В цій доповіді Л. І. Мандельштам поряд з дослідженням лінійних коливань підкреслює необхідність розв’язання не тільки нелінійних окремих задач, але і створення поряд з лінійною коливальною культурою нової нелінійної коливальної культури, яка містила б надійний математичний апарат і фізичні уявлення, адекватні новим задачам, вироблення нелінійної інтуїції.

Л. І. Мандельштам створив наукову школу в Москві в 20-30 рр. XX ст., в якій почалося оформлення науки, що описує поведінку нелінійних систем різноманітної природи – теорії нелінійних коливань, яка в подальшому, з розширенням сфер застосування, переросла в нову галузь – фізику нелінійних явищ. Він давав неоднозначну оцінку існуючим методам. Стосовно методу лінеаризації він відзначав: «така «лінеаризація» завжди штучна, рідко буває корисною, нічому не навчає, а подекуди й шкідлива» [41, с. 10]. Він вказував на помилку, яка виникає при знаходженні умов виникнення коливань в генераторі: нелінійні коливання розглядають при дуже малих значеннях відхилень, розкладають в ряд, обмежуються першим членом і отримують лінійні рівняння, які можна розв’язати існуючими методами [40, с. 63].

Л. І. Мандельштам також вказував, що ряди, які отримували при розв’язанні нелінійних задач, не досліджувались на збіжність, не було загального підходу до розв’язання. Він з’ясовував питання, що означає проінтегрувати нелінійне рівняння: «якщо назвати інтегруванням знаходження функцій, відомих нам, які задовольняють рівняння, то така задача є нерозв’язною – таких «відомих» функцій немає… Якщо виразити $x$ у відомих функціях в явному вигляді чи в квадратурах від таких функцій, то більшість задач фізики і техніки випала би, оскільки функції, які визначаються цими рівняннями, саме цими рівняннями і визначаються».

Л. І. Мандельштам вказував на метод А. Пуанкаре з самого рівняння вивести основні якісні властивості функцій і назвав такий спосіб якісним інтегруванням диференціальних рівнянь [40, с. 63].

Він значну увагу приділяв методу припасовування, бачив необхідність і можливість його строгого математичного обґрунтування, його розроблення, щоб він став працюючим методом фізики і техніки, який можна застосувати до розв'язання найактуальніших нелінійних задач. Він відзначав: «Не можна сподіватися, що математика дасть нам можливість працювати з як завгодно складними характеристиками, необхідно фундаментально спрощувати задачу, обирати ту або іншу просту аналітичну апроксимацію. Розбиття ж нелінійної характеристики на прямолінійні ділянки в ряді випадків прямо підказується фізикою» [42, с. 454]. Л. І. Мандельштам вказував на окремі класи задач, де метод припасовування не застосовується, але при відповідному його удосконаленні може виявитися ефективним. У 1927 р. він запропонував двом своїм аспірантам О. О. Андронову та М. О. Леонтовичу дві задачі, пов'язані з методом припасовування. Задача, поставлена перед М. О. Леонтовичем, полягла в тому, щоб за допомогою методу припасовування дослідити роботу електромагнітного переривача і основну увагу зосередити на ідеалізації – питанні про незастосовність математичної моделі роботи переривача, яка не враховує самоіндукції, на що вперше вказав ще Дж. Релей [11, т. 1, с. 99–105]. О. О. Андронову треба було дослідити питання стійкості періодичного розв'язку, який отримується методом припасовування, для довільних початкових умов, а потім, по можливості, підвести під цей метод строгу математичну базу. «З цієї задачі виросла задача про граничні цикли <…> але сама задача, поставлена Л. І. Мандельштамом, тоді не була розв'язана» [42, с. 454].

У 1927 р. О. О. Андронов захистив дисертацію «Граничні цикли Пуанкаре і теорія коливань», де вказав, що граничні цикли Пуанкаре – це автоколивання. Її не було надруковано повністю, але стислий зміст відображали дві невеликі статті. Одна з них вийшла 1928 р., інша – 1929 р. у доповідях Паризької Академії наук [43]. В цій дисертації О. О. Андронов переніс основи математичного апарату А. Пуанкаре в теорію коливань. Цей апарат є надзвичайно наочний, за його допомогою можна геометрично зобразити будь-який стан динамічної системи. Л. І. Мандельштам підкреслював недоліки і переваги нового підходу. Серед недоліків він вказував: «біда теорії Пуанкаре не в тому, що вона дає якісні відповіді на запитання, саме ці якісні відповіді дуже часто потрібні техніці, біда теорії Пуанкаре в тому, що вона скоріше вказує, що може бути в диференціальних рівняннях певного класу, ніж навчає, як досліджувати конкретні рівняння» [42, с. 456–457].

Л. І. Мандельштам вказував на такі переваги нового підходу: «В теорії коливань математичний образ, наприклад, граничний цикл, має надзвичайно наочний не тільки геометричний, але і фізичний зміст. Інакше кажучи, в доповнення до аналізу ви тут маєте не тільки геометричну, але й фізичну наочність, не тільки геометричну, але й фізичну інтуїцію. Причому ця фізична наочність та інтуїція може бути досить розгалуженою і багатою та спиратися на радіотехнічний, електротехнічний, оптичний і тому подібний матеріал» [42, с. 449].

На основі фундаментальних понять якісної теорії диференціальних рівнянь Пуанкаре – понять характеристики, напівхарактеристики, особливої точки О. О. Андронов запровадив нові означення: поняття траєкторії, напівтраєкторії, стану рівноваги для системи. Він вказав на те, що дане А. Пуанкаре поняття окремої характеристики не повністю визначене, бо не з’ясовано поняття кривої, що задається диференціальним рівнянням [44, с. 371]. З метою уточнення цього поняття було введено поняття траєкторії замість поняття характеристики і дано його визначення [45, с. 270].

Крім математичного апарату Пуанкаре, школою Л. І. Мандельштама в теорію коливань перенесено й методи О. М. Ляпунова. Застосування теорії стійкості руху О. М. Ляпунова стало можливим після доведення в 1930 р. О. О. Андроновим і О. А. Віттом нової теореми для з’ясування питання стійкості періодичних розв’язків [46]. Цього ж року вони вперше застосували теорію стійкості О. М. Ляпунова до вивчення питання захоплення в регенеративному приймачі (дослідження стійкості періодичних розв’язків) [47].

О. О. Андроновим також перенесено в теорію коливань поняття «біфункційного значення параметра», «точки біфункції», «зміни стійкості». Вперше ці поняття з’явились 1885 р. в мемуарі А. Пуанкаре про фігури рівноваги небесних тіл, де він розглянув залежність стану рівноваги консервативних систем від параметра в зв'язку з теорією рівноваги обертальної рідкої маси. На першій Всесоюзній конференції з коливань, яка відбулася в Москві в листопаді 1931 р., О. О. Андронов стисло, без доведень, виклав результати дослідження зв'язку, який існує між теорією залежності стаціонарних режимів катодного генератора від параметрів і теорією біфуркацій А. Пуанкаре. Далі він поширив цю теорію (теорію біфуркацій) на випадок коливальних систем, близьких до лінійних консервативних систем, а також побудував теорію «м'якого» та «жорсткого» збудження коливань [48].

О. О. Андронов у праці «Граничні цикли Пуанкаре і теорія коливань» також ввів у теорію нелінійних коливань метод точкових відображень, який американський вчений Дж. Біркгофф зробив основним інструментом теоретичного дослідження динамічних систем [49]. Дж. Біркгофф довів теорему, яка отримала назву «останньої теореми Пуанкаре» і була опублікована 1927 р., що періодичні рухи можуть слугувати основою для вивчення всіх рухів у задачі трьох тіл [50]. У 1930 р. О. О. Андронов та О. А. Вітт встановили відповідність між коливаннями в системах з багатьма степенями вільності і рекурентними рухами Біркгоффа. Результати застосування апарату точкових відображень до нелінійних задач ввійшли в перше видання «Теорії коливань» [51]. В ній було розглянуто прості моделі маятникових годинників і автоколивання лампового генератора з Z-характеристикою залежності анодного струму від напруги на сітці, розв'язання нелінійних задач зводилось до розгляду точкового відображення прямої на пряму. Л. І. Мандельштам зазначив, що праця О. О. Андронова відкриває можливість побудови загальної теорії нелінійних коливань: «Тут ми маємо справді адекватний нашим нелінійним задачам математичний апарат, що не містить «лінійних згадувань», нехай достатньо не розроблений. Спираючись на цей апарат, можна буде створити нові поняття, специфічні для нелінійних систем, можна буде виробити нові керуючі точки зору, які дозволять мислити нелінійно» [52, с. 6].

В якісній теорії диференціальних рівнянь і методі точкових перетворень Л. І. Мандельштам бачив ту базу, на основі якої подальший розвиток загальної теорії нелінійних коливань «буде слугувати <…> тому, що в складній галузі нелінійних коливань ще в більшій мірі, ніж це має місце зараз, викристалізуються свої специфічні загальні поняття, положення і методи» [52, с. 11–12]. Таким чином О. О. Андроновим була знайдена загальна якісна теорія нелінійних систем, яка поклала початок розвитку нелінійного мислення. На її основі він розвинув методи огляду незагасаючих коливань в нелінійних автономних системах, побудувавши строгу теорію автоколивань [42, с. 85–124]. О. О. Андронов писав: «Ідеї вироблення нелінійного мислення, яке опирається на тверду математичну базу, ідея створення наочних фізичних уявлень і понять, які мають в основі адекватні нелінійним фізичним об'єктам математичні уявлення і поняття, є основною ідеєю наукової творчості Л. І. Мандельштама в галузі теорії нелінійних коливань» [53, с. 107].

У 1937 р. О. О. Андронов разом з Л. С. Понтрягіним в праці «Грубі системи» розробили і ввели поняття грубої динамічної системи як системи, стійкої до малих змін її правих частин [54]. В цій праці було сформульовано вимогу стійкості за Ляпуновим. О. О. Андронов писав, що рухи, які є реальними коливаннями, повинні бути стійкими по відношенню до малих змін початкових умов. У 1938 р. введено поняття негрубої динамічної системи, для якої малі зміни параметрів приводять до зміни структури розбиття її фазової площини на траєкторії [55, 56]. Крім того, такі терміни, як «стійке положення рівноваги», «стійкі періодичні та квазіперіодичні рухи», «стійкість у великому та малому», введено О. О. Андроновим на основі понять Пуанкаре та Ляпунова. На основі запроваджених понять грубої і негрубої систем О. О. Андронов розширив задачу Пуанкаре: не тільки з'ясування можливого характеру і поведінки окремої траєкторії, але і виявлення властивостей розбиття фазового простору динамічної системи на траєкторії. О. О. Андронова цікавив не тільки статистичний розгляд структури розбиття фазового простору динамічної системи, але і розгляд змін цієї структури розбиття при зміні самої системи, тобто при зміні функцій, що стоять в правих частинах рівнянь, які описують рух цієї системи і залежать від параметрів системи.

В 1937 р. Л. І. Мандельштам написав передмову до монографії О. О. Андронова, О. А. Вітта і С. Е. Хайкіна «Теорія коливань», де вказав на принципово нове в теорії нелінійних коливань, зумовлене застосуванням до нелінійних задач якісної теорії диференціальних рівнянь Пуанкаре [52, с. 11]. У зв'язку з цим виникла задача – за допомогою геометричної побудови інтегральних кривих, що визначаються диференціальними рівняннями, знайти найбільш характерні, якісні властивості функцій, які характеризують стани і зміни цих станів. У цій книзі автори писали, що «якісне інтегрування істотно полегшить кількісне інтегрування, точніше, полегшить кількісне розв'язання тих питань, які виникають у фізиці коливань» [52, с. 84].

Однак при застосуванні апарату точкових відображень, якісних методів Ляпунова–Пуанкаре виникали труднощі. Для їх подолання радянські вчені використовували метод малого параметра та метод усереднення. Метод усереднення полягає в тому, що праві частини диференціальних рівнянь коливального руху заміняли «згладженими», усередненими функціями, які не містили явно часу та повільно змінювальних параметрів. Отримані в результаті усереднення рівняння можна або проінтегрувати або спростити, що дозволяло зробити кількісні та якісні висновки відносно даного руху.

Не даючи математичного обґрунтування, метод усереднення (метод варіації сталих) в різних формах застосовували для визначення періодичного розв'язку лише при коливаннях з одним степенем вільності К. Гаусс, Дж. Лагранж, Ш. Делоне, Дж. Хілл, Б. Ван-дер-Поль та інші. Рівняння, які отримували в результаті усереднення, легко інтегрувались або спрощувались, що дозволяло робити висновки про досліджуваний рух. У 1682 р. І. Ньютон знайшов формулу руху маятника при наявності опору, яка співпадає з першим наближенням, отриманим методом усереднення, у 1835 р. М. В. Остроградський – в першому наближенні розв'язок нелінійного диференціального рівняння другого порядку, який збігається з отриманим методом усереднення.

В 1931 р. Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі застосували метод малого параметра в праці про резонанс другого роду, а в 1934 р. вони обґрунтували метод усереднення і застосували його в системах з двома і більшою кількістю степенів вільності [57], розглянули частинний випадок, коли праві частини рівнянь є періодичними функціями часу. Припустивши, що праві частини є функціями регулярними, Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі встановили, що різниця між відповідними розв'язками точних і усереднених рівнянь може бути при достатньо малому значенні параметра як завгодно малою на достатньо великому інтервалі часу (для частинного випадку диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами спроби обґрунтування методу усереднення були зроблені в 1927 р. П. Фату для руху системи, що знаходиться під впливом періодичних сил з малим періодом). У 1934 р. вони також математично строго обґрунтували метод Ван-дер-Поля, який для окремих випадків був строго математично обґрунтований ще 1930 р. О. О. Андроновим та О. А. Віттом [47]. Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі вказали на можливість його застосування і показали, що він в окремому випадку є різновидом методу малого параметра.

Починаючи з цього періоду, з'являється чимало праць, присвячених не тільки розв'язанню конкретних задач за допомогою методу малого параметра, а і подальшому його розвитку та обґрунтуванню. Так, в 30-х роках метод малого параметра до дослідження процесів встановлення неперіодичних режимів у системах, близьких до лінійних консервативних, застосували Л. І. Мандельштам, М. Д. Папалексі та ін.; до дослідження нелінійних систем, близьких до консервативних, – Л. С. Понтрягін та ін.; до дослідження неконсервативних систем спеціального типу, близьких до лінійних, – О. А. Вітт, Б. В. Булгаков; до систем, близьких до лінійних систем з періодично змінними параметрами спеціального типу, – Г. С. Горелік, Л. І. Мандельштам, С. М. Ритов.

Виходячи з існування «періодичних розв'язків другого роду» Пуанкаре, з періодом, кратним періоду діючої сили, на основі методу малого параметра Пуанкаре, Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі встановили можливість збудження і підтримання в регенерованій системі, яка працює в певному режимі і знаходиться під дією гармонічної е.р.с., коливань кратного періоду, що відповідають розв'язку другого роду, відкрили резонанс $n$-го роду [58, с. 13–62]. Теорія таких явищ охоплює і синхронізацію в обертоні, явище затухання коливань, автопараметричні і дробні резонанси, комбінаційні резонанси, явище асинхронного збудження [59, 60]. В 1934 р. Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі побудували генератор змінного струму [58, с. 85–116], розробили теорію параметричної генерації коливань періодичною зміною параметра – ємності або самоіндукції в системах з малою глибиною модуляції і малою нелінійністю [61, с. 130–137]. Л. І. Мандельштам для розгляду слаболінійних систем запропонував умови стрибка, покладені в основу теорії розривних коливань. Ці умови дозволили О. О. Андронову, О. А. Вітту та С. Е. Хайкіну провести послідовний аналіз процесів в мультивібраторі та інших релаксаційних системах. Тісний зв'язок О. О. Андронова зі школою Л. І. Мандельштама зберігся і після 1931 р., коли він переїхав до Нижнього Новгорода. Тут він створив свою дочірню наукову школу, в якій також працювали Г. С. Горелік, С. М. Ритов та інші представники школи Л. І. Мандельштама. Учні Л. І. Мандельштама, в першу чергу О. А. Вітт, С. Е. Хайкін, Г. С. Горелік, С. М. Ритов та інші взяли участь в розробці методів і застосуванні їх до актуальних задач. О. О. Андронов і О. А. Вітт застосували методи Ляпунова–Пуанкаре до дослідження існування «порогу» захоплення, що мало практичне значення. Цю задачу раніше досліджував Б. Ван-дер-Поль. На основі цієї задачі О. А. Вітт та С. Е. Хайкін розробили новий спосіб дослідження інтенсивності полів радіостанцій. К. Ф. Теодорчик та С. Е. Хайкін перенесли їх результати в акустику і розробили новий спосіб вимірювання звукових полів. Метод малого параметра застосували С. Стрелков (1935), О. А. Вітт (1937), Г. С. Горелік (1939) до задачі про стабілізацію частоти, до теорії генераторів змінного струму, розв'язання задач, які набули актуальності в зв'язку з розвитком техніки надвисоких частот. Ці задачі описуються системами з розподіленими параметрами (нелінійні задачі в частинних похідних).

У 1938 р. С. М. Ритов поряд з випадками, коли параметри змінюються з періодом, порівняним з власними періодами системи, проаналізував випадок, коли період зміни параметрів системи великий. Було досліджено питання, що стосуються поведінки регенеративної системи під дією зовнішньої електрорушійної сили. Для важливих випадків параметричного генерування змінних струмів існуючих методів було недостатньо.

Зокрема, величина потужності і коефіцієнт корисної дії параметричних генераторів зростають з величиною глибини модуляції параметра, тому ні загасання, ні величину $\omega^2 - \omega_0^2$ не можна вважати малими. Це привело Л. І. Мандельштама в 1945 р. до розвитку нової форми методу малого параметра.

Таким чином, в результаті прийняття нового якісного, геометричного підходу до коливальних процесів школою Л. І. Мандельштама закладено фундамент зовсім нової фізичної дисципліни – загальної теорії коливань, з своїми поняттями, термінологією, математичним апаратом, обґрунтуванням, методами оцінки процесів, які протікають в динамічній системі.

Л. І. Мандельштам зазначав: «Можна без перебільшення сказати, що майже немає тієї галузі науки, в якій коливання не відігравали тієї чи іншої ролі, не кажучи про те, що низка галузей фізики і техніки повністю базується на коливальних явищах» [51, с. 9]. Він розумів вчення про коливання дуже широко, вважав, що поряд з «національними» мовами механіки, акустики, оптики, електродинаміки існує «інтернаціональна мова теорії коливань», яка охоплює всі ці галузі і дозволяє, маючи інтуїцію в одній з них, легко розібратися в інших. В останні роки свого життя, зокрема в 1944 р., Л. І. Мандельштам висловив припущення, що вчення про коливання відіграло першорядну роль у розвитку всієї фізики і чимало основних фізичних відкриттів, починаючи з відкриття Коперника, мали коливальну природу. З цієї широкої точки зору всі праці Л. І. Мандельштама відносяться до теорії коливань [62, с. 401–403]. Крім того Л. І. Мандельштам підкреслював, що загальні закономірності, з якими має справу теорія нелінійних коливань, не можна вважати чисто математичними: «Насамперед саме фізика вчить нас, як «допитувати» диференціальні рівняння. В теорії коливань математичний образ, наприклад, граничний цикл, має надзвичайно наочний не тільки геометричний, але й фізичний зміст… До того ж ця фізична наочність та інтуїція може бути достатньо розгалуженою і багатою і може спиратися на радіотехнічний, електротехнічний, оптичний і тому подібний матеріал» [63, с. 449].

Коливальний підхід – найбільш суттєва ознака, що характеризує теорію коливань і відокремлює її від інших дисциплін у розумінні Л. І. Мандельштама. «Що це за ознаки, за якими виділяють вчення про коливання?» Л. І. Мандельштам підкреслює, що ці ознаки принципово відрізняються від тих, за якими фізику розділяють на оптику, акустику, електрику і магнетизм і т.п. Ми відокремлюємо коливання не за ознакою фізичних явищ, які ми однаково сприймаємо, а за формою закономірностей. А історія і сучасна ситуація в точному природознавстві свідчать, що ці закономірності фактично бувають однаковими в найрізноманітніших галузях, що ми маємо справу з ізоморфізмом закономірностей» [63, с. 448].

Для остаточного виділення нелінійних коливань в окрему теорію треба було визначити її задачі та предмет досліджень. Л. І. Мандельштам зазначав: «Визначення в науці – одне з найважчих речей. Намагання дати точне і повне визначення якої-небудь галузі науки зазвичай закінчуються поразкою. Взагалі виникає питання, чи доцільно відокремлювати колючим дротом жорстких визначень окремі галузі науки і тим самим ускладнювати їх взаємне проникнення? Я не вважаю, що треба... Зате є досить бажаним виділити ті керівні точки зору, які дозволяють нам об’єднати цілий клас проблем. Знаходження таких керівних точок зору – річ суттєва. Вони дозволяють дати струнку, цілісну теоретичну концепцію, зв’язати в єдине ціле проблеми, які здаються різнорідними, надати планомірний характер подальшим дослідженням… Нас цікавлять у більшості випадків не коливання самі по собі, а дія коливальних процесів на системи, взаємодія різних коливальних систем між собою» [64, с. 54].

Задачі теорії нелінійних коливань було поставлено. Формування предмету відбувалося не дуже швидко. З 40-х рр. XX ст. розпочинається третій етап сучасного вчення про коливання. Він пов’язаний з подальшим розвитком методів теорії коливань, їх строгим обґрунтуванням і широким застосуванням в різних галузях природознавства й техніки, чітким визначенням об’єкту досліджень. Л. І. Мандельштам вважав: «немає сумніву, що те, що ми називаємо нині коливальними процесами, дуже різноманітні. Але отримало розвиток вчення про коливання, мабуть, на понятті – сьогодні воно є окремим поняттям в галузі коливань – періодичних або майже періодичних … процесів» [62, с. 409]. Г. С. Горелик щодо цього писав: «Було б даремною тратою праці провести чітку межу між коливаннями і «не коливаннями».» [65, с. 25]. В 1962 р. С. Е. Хайкін писав: «Загальна риса всіх коливальних рухів полягає в тому, що вони являють собою рухи, які багаторазово повторюються або приблизно повторюються через певні проміжки часу» [66, с. 578]. У 1972 р. Ю. І. Неймарк запропонував формалізацію поняття коливальної закономірності. Під коливальним явищем розуміють те, що пов'язано з фактом руху, який встановився, або те, що зв'язано з процесом переходу від одного руху, що встановився, до іншого [67, с. 159]. Було відокремлено три типи коливальних закономірностей, сформульовано їх властивості, побудовано математичні моделі.

Таким чином, для наукової школи Л. І. Мандельштама властиве глибоке проникнення в фізику коливань, якісне їх вивчення, коливальний підхід до явищ різної природи, дослідження всієї сукупності явищ, можливих у динамічній системі при будь-яких початкових умовах, геометризація цього уявлення, вивчення перетворень, що мають місце у фазовому просторі при зміні параметрів динамічної системи. Л. І. Мандельштам писав: «Спільність коливальних процесів, їх різноманітність і водночас специфічна своєрідність відіграють суттєву роль у встановленні внутрішніх зв'язків між різнорідними, на перший погляд, явищами» [52, с. 9].

Отже, можна вважати, що Л. І. Мандельштам завершив розпочатий Дж. Релеєм процес виділення вчення про коливання в окрему наукову дисципліну. Працями Л. І. Мандельштама та його учнів було створено та обґрунтовано якісні, топологічні уявлення різних рухів динамічних систем, метод дослідження стійкості станів рівноваги і періодичних рухів, метод поетапного розгляду зі «зшиванням» окремих етапів руху і різні модифікації цих методів тощо. Зокрема, О. О. Андроновим та О. А. Віттом побудовано строгу теорію захоплення, Л. І. Мандельштамом, О. О. Андроновим, М. О. Леонтовичем проведено аналіз поведінки систем для випадку повільної зміни параметрів, О. О. Андроновим, М. О. Леонтовичем з'ясовано умови, при яких періодична зміна параметрів системи призводить до збудження в ній коливань з частотою, близькою до власної частоти системи і жорстко пов'язаною з частотою зміни параметра, В. В. Мігуліним відкрито та досліджено комбінаційний резонанс і комбінаційну синхронізацію тощо.

О. О. Андронов, як і його вчитель Л. І. Мандельштам, також створив школу з теорії нелінійних коливань, ядро якої сформували співробітники Фізико-технічного інституту при Горьківському університеті, де він працював. Школа О. О. Андронова виникла через кілька років після початку формування школи Л. І. Мандельштама. Мета досліджень в школі О.О. Андронова – побудова теорії коливань, яка базується на апараті якісної теорії диференціальних рівнянь Пуанкаре, на апараті точкових відображень, на теорії стійкості руху Ляпунова та на представленнях Біркгоффа про всі можливі типи поведінки динамічної системи.

В школі О. О. Андронова досліджувалися в основному сильно нелінійні системи, тобто системи, в яких нелінійність відіграє фундаментальну роль; паралельно розвивалися також два напрями досліджень: побудова теорії нелінійних коливань та розробка загальної теорії динамічних систем. О. О. Андронов виділив клас нелінійних задач, які можуть бути розглянуті як кусково-лінійні і при дослідженні яких цей метод стає більш ефективним. Поєднавши метод припасовування і теорію точкових перетворень Пуанкаре–Брауера–Біркгоффа, О. О. Андронов разом з колегами А. Г. Майєром, Г. С. Гореліком, М. М. Баутіним дослідив дві групи нелінійних задач з теорії автоматичного регулювання: вплив сил сухого тертя на процес прямого і непрямого регулювання; вплив нелінійних характеристик сервомоторів на процес регулювання. При розв’язанні цих задач метод припасовування, який раніше слугував для знаходження періодичних розв’язків кусково-лінійних систем, об’єднаний з методом січної поверхні Пуанкаре, утворив математичну базу теорії точкових відображень. Так кусково-лінійна апроксимація нелінійних характеристик дозволила розбити фазовий простір динамічної системи на області, в кожній з яких поведінка динамічної системи може бути описана системою лінійних диференціальних рівнянь. При переході відображуючої точки з однієї області фазового простору в іншу отримані розв’язки «склеюються» («припасовуються») за неперервністю, як це робилося в методі припасовування. При цьому була отримана відповідь на старе питання Л. І. Мандельштама: дослідження стійкості періодичних розв'язків зводиться до дослідження системи рівнянь в кінцевих різницях відомими на той час методами. За допомогою методу точкових відображень описано та вивчено властивості кусково-лінійних систем з ударними взаємодіями, системи з змінною структурою, вивчено нові типи рухів, можливі в таких системах, нові типи станів рівноваги і періодичних рухів, нові типи біфуркацій.

Загальнотеоретичні основи методу точкових відображень в теорії нелінійних коливань було викладено О. О. Андроновим у 1944 р. на засіданні Відділення фізико-математичних наук АН СРСР у доповіді «Теорія точкових перетворень Пуанкаре-Брауера-Біркгофа та теорія нелінійних коливань». Метод точкових відображень сприяв правильному математичному опису часових ходів. О. О. Андроновим та Ю. І. Неймарком у 1946 р. проведено дослідження годинників як нелінійної коливальної системи з двома степенями вільності. Найбільш повне дослідження динаміки часових пристроїв виконано в працях учня О. О. Андронова М. М. Баутіна, які є продовженням і розвитком коливального підходу в теорії годинників, започаткованого в монографії «Теорія коливань» (1937). М. М. Баутіну вдалося також розв'язати поставлену у 1944 р. Л. І. Мандельштамом задачу про причини відмінності точності ходу для годинників з маятником (годинників Галілея і Гюйгенса).

Отже, в школі О. О. Андронова застосовувався геометричний підхід (досліджувалася структура розбиття фазового простору динамічної системи на траєкторії), параметричний підхід (досліджувалася залежність зміни структури розбиття фазового простору на траєкторії від параметрів системи), коливальний підхід (досліджувалися загальні закономірності динамічних процесів у системах довільної природи). Сукупність геометричного і параметричного підходу характеризує школу О. О. Андронова, а коливальний підхід – насамперед школу Л. І. Мандельштама. Ця сукупність підходів до дослідження різноманітних рухів динамічної системи є нелінійним коливальним мисленням, в розумінні Л. І. Мандельштама та О. О. Андронова. Напрям розвитку теорії нелінійних коливань в школах Л. І. Мандельштама і О. О. Андронова називають московсько-горьківським.

Паралельно з цими методами в Україні М. М. Криловим та його учнем М. М. Боголюбовим був розвинутий новий метод дослідження нелінійних коливань, в основу якого покладено побудову асимптотичних розкладів, створено асимптотичну теорію нелінійних коливань як окремий напрям загальної теорії коливань.

## 2. М. М. КРИЛОВ І КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ВУАН. ПОЧАТОК НАУКОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ М. М. БОГОЛЮБОВА

Асимптотичні методи розв'язання нелінійних задач Микола Митрофанович Крилов і його учень Микола Миколайович Боголюбов почали розробляти на Кафедрі математичної фізики ВУАН. Для з'ясування передумов створення нелінійної механіки окреслимо основні моменти їх життя і наукової діяльності та розглянемо роботу Кафедри математичної фізики ВУАН.

М. М. Крилов народився 29 листопада 1879 р. в Санкт-Петербурзі, дитинство його пройшло в Київській губернії, в родовому маєтку батька. В 1909 р. М. М. Крилов був зарахований до Київського кадетського корпусу, де математика стала його улюбленим навчальним предметом. Тому після закінчення корпусу він подав 1897 р. ректору Київського університету прохання про зарахування його вільним слухачем фізико-математичного факультету, що було можливим лише для осіб певного соціального статусу. Вступ до університету вимагав знання класичних мов, які не вивчалися в кадетському корпусі.

В цьому ж році М. М. Крилов поступив до Петербурзького гірничого інституту, який закінчив 1902 р. Він отримав премію ім. Т. А. Тиме за твір з геометричних застосувань псевдо-еліптичних інтегралів і був залишений за пропозицією І. П. Долбні при інституті. Цього ж року він виїхав за кордон для вдосконалення своїх математичних знань. В 1906 – 1910 рр. у Сорбонні (Франція) М. М. Крилов слухав лекції Пуанкаре, Пікара, Дарбу, Лебега, Адамара. Тут 1908 р. він зацікавився нелінійними рівняннями, відвідавши лекції А. Пікара та ознайомився з ідеями нового методу Рітца [68]. В 1909 р. М. М. Крилов опублікував свою першу працю «Про проблему поперечних коливань пружного стрижня», в 1910 р. – ще дві: «Про можливості розкладання довільних функцій однієї дійсної змінної в ряди ортогональних функцій» і «Про розкладання в ряди за фундаментальними функціями, які зустрічаються в проблемі поперечних коливань пружних неоднорідних стрижнів».

Повернувшись до Росії, М. М. Крилов захистив 1910 р. дисертацію на звання ад'юнкт-професора Гірничого інституту по кафедрі математики, оскільки вищі технічні навчальні заклади не мали права присуджувати наукові ступені. Це звання дозволяло викладати лише в інституті, де його присуджено. В 1912 р. М. М. Крилова обрано професором Гірничого інституту, де він викладав з незначними перервами до 1917 р. За цей період він опублікував понад 40 праць. Більшість з них стосувалися розкладів довільних функцій в ряди, теорії тригонометричних рядів і рівнянь замкнутості, збіжності інтерполяційних функцій і квадратур, методу Рітца. Декілька його праць містять дослідження з теорії хвиль, інтегральних рівнянь та збіжності рядів. У 1915 р. на Київщині він написав працю «Про мінімальну задачу в теорії диференціальних рівнянь коливань пружного неоднорідного стрижня». У 1917 р. за обґрунтування метода Рітца М. М. Крилову Радою Київського університету присуджено ступінь доктора математики. В 1918 р. він став завідуючим кафедри математики в Таврійському філіалі Київського університету, в організації якого брав безпосередню участь. Тут М. М. Крилов організував математичний кабінет і заснував журнал «Записки математичного кабінету Таврійського університету». В 1918–1922 рр. він – професор цього філіалу.

02.01.1922 р. М. М. Крилова обрано академіком фізично-математичного Відділу ВУАН і під нього створено Кафедру математичної фізики, якою він завідував до 1945 р. [69, с. 479]. В 20–30 рр. на Кафедрі математичної фізики проводилися дослідження з наближеного розв'язання задач математичної фізики, варіаційного числення, теорії інтерполяції, теорії майже періодичних функцій. Академік А. Данжуа про наукову діяльність М. М. Крилова писав: «він одночасно був відомим математиком, фізиком та інженером. Йому були добре відомі сучасний математичний аналіз у найрізноманітніших галузях, проблеми сучасної фізики і, наостанок, практичні потреби техніки» [70, с. 208].

М. М. Крилов значну увагу приділяв проведенню наукових семінарів в Інституті будівельної механіки ВУАН та при Науково-дослідних кафедрах математики і сільськогосподарської механіки. Працював семінар і при Кафедрі математичної фізики ВУАН. Наприкінці 1923 р. до цього семінару від семінару Д. О. Граве перейшов 14-річний М. М. Боголюбов.

М. М. Боголюбов народився 21 серпня 1909 р. у Нижньому Новгороді. Його батько був професором богослов'я, мати – викладачем музики. В 1921 р. з родиною переїхав до Києва. По закінченні семирічної школи М. М. Боголюбов самостійно займався вивченням фізики та математики, з 1923 р. брав участь у семінарі Кафедри математичної фізики Київського університету під керівництвом академіка Д. О. Граве. На цей семінар прийшов М. М. Крилов і помітив математичні здібності виступаючого з доповіддю М. М. Боголюбова. У п'ятнадцять років Микола Миколайович написав першу наукову працю з дослідження поведінки розв'язків лінійних диференціальних рівнянь на нескінченності (1924), в наступному році був прийнятий аспірантом Кафедри математичної фізики ВУАН. В 1928 р. він захистив працю «Про деякі нові методи у варіаційному численні став працювати на Кафедрі математичної фізики ВУАН. В 1930 р. він одержав з варіаційного числення премію Болонської АН і загальними зборами фізико-математичного відділу ВУАН за поданням М. М. Крилова та Д. О. Граве йому була присуджена ступінь доктора математичних наук.

У 20-х рр. XX ст. М. М. Боголюбов написав низку математичних праць з прямих методів варіаційного числення, теорії майже періодичних функцій, наближених розв'язань диференціальних рівнянь з граничними умовами [71]. М. М. Боголюбов побудував нову теорію рівномірних майже періодичних функцій. При застосуванні різницевого методу до варіаційного числення він розвинув апроксимаційний метод до знаходження власних значень і власних функцій граничної задачі, до розв'язання рівнянь в частинних похідних.

Бурхливий розвиток електро- і радіотехніки (проблеми стійкої генерації незагасаючих коливань, трансформації частоти тощо), авіації, машинобудування, швидкісного транспорту, механіки складних коливальних систем вимагали розробки нових методів дослідження нелінійних коливань. Тому на Кафедрі математичної фізики змінюється напрям наукових досліджень. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов залишають свої дослідження з наближених методів розв'язання рівнянь математичної фізики, прямих методів варіаційного числення, теорії майже періодичних функцій і починають займатися нелінійними проблемами. Часто можна почути, що цей крок зумовлений ще й тим, що М. М. Крилов був інженером за освітою [72]. 11 грудня 1925 р. на засіданні Фізико-математичного відділу ВУАН М. М. Крилов доповів працю М. М. Боголюбова «Про обчислення вимушених коливань, які задовольняють деяким нелінійним диференціальним рівнянням», яка була опублікована в 1927 р. [73]. У 30-ті рр. М. М. Боголюбов і М. М. Крилов розробили нові методи нелінійної механіки та загальної теорії динамічних систем. Протягом 1932–1937 рр. вони опублікували понад 30 спільних праць, присвячених розв'язанню проблем нелінійних коливань. Їх розробки починають цікавити іноземних вчених, у 20-х рр. налагоджуються наукові міжнародні зв'язки ВУАН.

Так, в 1922 р. М. М. Крилов їздив у Західну Європу для встановлення зв'язків з науковими центрами, постачання ВУАН іноземною науковою літературою. В 1924 р. він був головою Секції аналізу на Міжнародному математичному конгресі в Торонто (Канада). Його праці зацікавили іноземних вчених і невдовзі він отримав запрошення для читання лекцій від декількох іноземних університетів. У 1926–1927 рр. М. М. Крилов виступав з доповідями і лекціями з наближеного інтегрування диференціальних рівнянь у наукових центрах Європи – в Неаполі, Болоньї, Парижі, Коімбрі, Страсбурзі [74, с. 28]. В 1926 р. з Італії він відправив до ВУАН іноземні видання, домовився про міжнародний обмін книгами, заклав основи міжнародних відносин ВУАН з науковими центрами Західної Європи. В Коімбрі (Португалія) він прочитав вісім лекцій для викладачів математичного факультету університету, за які ректор цього університету написав згодом М. М. Крилову лист з подякою. У 1928 р. М. М. Крилов був головою Секції математичної фізики Міжнародного математичного конгресу (Болонья), брав участь у святкуванні відкриття Інституту Анрі Пуанкаре. За ефективність закордонних поїздок М. М. Крилова 1929 р. обрано головою Комісії закордонних наукових зношень ВУАН. Цього ж року він став академіком АН СРСР.

М. М. Крилов вважав історію науки, зокрема, математики, важливою складовою університетської математичної освіти, інструментом наукових досліджень. У 1939 р. на Кафедрі математичної фізики він створює математичний кабінет ім. Г. Ф. Вороного і М. В. Остроградського, куди передав частину власної бібліотеки. Цього року М. М. Крилову присвоєно звання заслуженого діяча науки УРСР (1939).

У 30-х рр. відбулися зміни в структурі ВУАН, які вплинули на напрямки роботи Кафедри, головним завданням якої з 1927 р. було створення нових методів розв'язання нелінійних задач. У 1930 р. замість трьох Відділів ВУАН стало два: природничо-технічних, куди увійшла Кафедра математичної фізики, і соціально-економічних наук. У 1931 р. прийнято рішення про об'єднання установ Академії наук у цикли. Кафедра математичної фізики була віднесена до індустріально-технічного циклу. При обгорненні другого п'ятирічного плану ВУАН прийшли до висновку, що на зміну циклам повинні прийти наукові інститути як більш розвинена форма суспільної наукової роботи. В 1934 р. на базі академічних Кафедр і Комісій створюється 21 Інститут, в тому числі Інститут математики ВУАН (на базі Кафедр чистої математики, прикладної математики і математичної статистики), директором якого стає Д. О. Граве. Кафедру математичної фізики було прикріплено до Інституту будівельної механіки, в якому розроблялися методи розрахунку статики і динаміки конструкцій. 21 лютого 1936 р. Раднарком УСРР затвердив новий статут Академії, за яким ВУАН було перейменовано на Академію наук УСРР. За новим статутом Академія знов поділялась на три Відділи: суспільних наук, математичних та природничих наук, технічних наук. Кафедра математичної фізики АН УСРР перейшла до Інституту математики АН УСРР.

# 3. СТВОРЕННЯ М. М. КРИЛОВИМ І М. М. БОГОЛЮБОВИМ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ (30-ті рр. ХХ ст.)

Як вже вказувалось вище, основоположниками методів, за допомогою яких можна досліджувати нелінійні коливальні процеси, були А. Пуанкаре та О. М. Ляпунов. Завдяки школі Л. І. Мандельштама розроблені ними методи до початку 30–х років широко застосовувалися в теорії коливань тільки для вивчення чисто періодичних режимів. У зв'язку з швидким розвитком техніки на початку ХХ ст. виникла необхідність створення нових методів, придатних для побудови вищих наближень; методів для якісного та кількісного вивчення процесів, що не є чисто періодичними (так званих квазіперіодичних і майже періодичних), які дозволяють досліджувати нестаціонарні процеси, процеси становлення, перехідні процеси.

У 1927 р. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов почали дослідження з операційного числення та створення за його допомогою математичного апарату розв'язання нелінійних задач. Зокрема, цього року М. М. Крилов надіслав професору Ц. Хайаші (Японія) замітку «Про інтегрування в деяких випадках нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики», яка була надрукована в «Працях університету Тогоку». А на початку 1930 р. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов узагальнили теорему Хевісайда* про розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних.

З 1927 р. найголовнішим напрямом діяльності Кафедри математичної фізики стає розробка асимптотичних методів та їх застосування в радіо- та електротехніці в результаті розширення та нового підходу до застосування методу малого параметру, який зародився в небесній механіці. Ці дослідження привели до створення нового напряму в теорії нелінійних коливань – нелінійної механіки. Працюючи над різноманітними спеціальними

* У 1892 р. англійський інженер і фізик О. Хевісайд опублікував праці, присвячені застосуванню символічного числення до розв'язання задач теорії поширення електричних коливань в дротах.

темами, які пропонувалися галузевими інститутами, зокрема дослідними інститутами Ради народного господарства УРСР, Держплану СРСР, Інституту фізики і біофізики (Москва), Інституту прикладної математики (Берлін), М. М. Крилов та М. М. Боголюбов синтезували різноманітні спеціальні прийоми, створивши нові асимптотичні методи, придатні для вивчення як періодичних, так і квазіперіодичних режимів [75, с. 105].

Ще в другій половині 20-х рр. – першій половині 30-х рр. М. М. Боголюбов багато часу приділяв вивченню спеціальної технічної літератури з електротехніки, електроніки, динаміки літака, динамічного розрахунку будівельних конструкцій, досліджував (разом з М. М. Криловим) застосування теорії коливань у техніці. Зокрема, 23 лютого 1929 р. вони прочитали доповідь «До теорії повної синхронізації», 12 жовтня 1929 р. – «Про наближене розв’язання диференціальних рівнянь в частинних похідних еліптичного типу». М. М. Крилов вивчав роботу осцилографа, зауважуючи, що аналогічні індикатори графічного запису мають прилади для визначення тиску пари, вібрографи, сейсмографи. Ці дослідження він виклав 16 листопада 1929 р. у доповіді «Теорія частинної та повної синхронізації мажорацій середньоквадратичної похибки…» М. М. Крилов та М. М. Боголюбов прочитали доповіді про коливання в синхронних машинах.

У 1929–1930 рр. на Кафедрі математичної фізики ВУАН досліджуються проблеми електростатики, зв’язані з технікою безпеки високовольтованих ліній, електричного струму, питання, що стосуються рамних конструкцій. У плані Кафедри на другу п’ятирічку головними відмічені основні проблеми нелінійної механіки.

Протягом 1931–1932 рр. М. М. Боголюбов кілька разів приїздив до Харкова, щоб на Авіаційному та на інших заводах перевірити правильність отриманих теоретичних результатів. Про результати застосування нових методів до питання про повздовжню стійкість літака при постійному куті атаки з врахуванням лобового опору повітря доповіли М. М. Крилов та М. М. Боголюбов на ІІІ Всесоюзній конференції з аеродинаміки в Москві. Ці методи вперше надруковано 1932 р. у їх спільній монографії «Дослідження повздовжньої стійкості аероплану» [76]. В ній викладено «метод малих дільників» для дослідження нерезонансних випадків. Вже у 1932 р. на замовлення Харківського авіаційного інституту за допомогою цього математичного апарату досліджено поздовжню стійкість літака. За вказівками Кафедри математичної фізики ВУАН у лабораторії Харківського авіаційного інституту зроблено такі обчислення для низки літаків і отримано вирази для швидкості та кута нахилу траєкторії.

Ці нові методи ефективно застосовувались також до питань боротьби з резонансом в машинобудівництві, до дослідження ряду питань теорії пружності за завданнями Харківського інституту споруджень. Наприклад, розглянуто питання про визначення частоти власних поперечних коливань стрижня, який знаходиться під впливом періодичних нормальних сил, прикладених до одного з кінців стрижня, також проведено розрахунки вібрацій і розрахунки на резонанс рамних конструкцій під дизелі та під інші потужні джерела коливань, стиснутих стояків аероплана тощо. Ці задачі призводили до необхідності розв’язання системи нелінійних рівнянь у частинних похідних з нелінійними граничними умовами. Тому перед Кафедрою постала проблема розробки нових методів нелінійної механіки для систем з нескінченною кількістю степенів вільності [77, с. 21–22].

З «Доповідної записки завідувача Кафедри математичної фізики ВУАН акад. М. М. Крилова до Президії ВУАН з обґрунтуванням необхідності наукового обміну зі вченими Західної Європи з питань нелінійної механіки» отримуємо також відомості про закордонні зв’язки Кафедри при розробці асимптотичної теорії нелінійних коливань [78, с. 104–106]. З цього наукового напряму вони зацікавили іноземних вчених і в 1930 р. були запрошені на Аахенський аеродинамічний конгрес та для читання лекцій в Аахенському аеродинамічному інституті. У 1932 р. М. М. Крилов та М. М. Боголюбов також запрошені для доповіді на Всесвітній електричний конгрес в Парижі, на Всесвітній математичний конгрес в Цюриху, де вказали на необхідність вивчення нелінійних коливань [79, с. 44], в 1933 р. – на Міжнародний конгрес з нелінійних коливань, на Міжнародну радіотехнічну конференцію в Лондоні, для читання лекцій в Сорбонні, але не змогли прийняти участь у їх роботі. У 1934 р. М. М. Крилов мав низку запрошень, зокрема, на Міжнародну радіотехнічну конференцію в Лондон, для читання лекцій з наукових досліджень у Бельгії (Брюсселі), в Паризькому університеті (Сорбонна) [78, с. 105].

Зокрема, на початку 1932 р. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов надіслали на конференцію до Паризької академії наук три повідомлення, мета яких – встановити нові методи, придатні для дослідження як періодичних, так і квазіперіодичних коливань. Ця конференція, на яку М. М. Крилов і М. М. Боголюбов одержали спеціальне запрошення для доповіді про одержані ними результати з теорії нелінійних коливань, відбулась в Парижі з ініціативи Ван-дер-Поля, між яким і М. М. Криловим існували дружні стосунки. Вони вели переписку, ділилися науковою інформацією в галузі операційного числення та теорії нелінійних коливань [80]. У відповідних надрукованих повідомленнях вони дослідили квазіперіодичні режими, які виникають в електронному генераторі під дією зовнішньої періодичної сили. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов вперше розробили метод одержання наближеного розв'язку нелінійного рівняння, яке описує процес перетворення енергії постійного струму (коливання нульової частоти) в енергію змінного струму (коливання високої частоти) в генераторі під впливом періодичної зовнішньої сили. Було також представлено результати дослідження складних явищ резонансу і демультиплікації частоти в системах томсонівського типу. Методи дослідження цих нелінійних задач радіотехніки являли собою подальшу розробку методів Ляпунова і Біркгоффа [81, 82, 83]. На конференції з нелінійних коливань 1933 р. у Парижі Ван-дер-Поль високо оцінив праці українських вчених у новій галузі математичної фізики.

Розвиток цих результатів викладений в першій спільній монографії М. М. Крилова та М. М. Боголюбова з нелінійних коливань «Нові методи нелінійної механіки» (1934), яка подана до редакції 1932 р. В ній вони отримали нову формулу для власної частоти стаціонарних коливань в генераторі, яка дає вираз для нелінійної поправки, що має важливе значення для вивчення проблеми параметричної стабілізації частоти [84, с. 147–167]. Ця проблема є актуальною у зв'язку зі збільшенням кількості радіостанцій, що вимагає незмінності частот осциляторів і точності їх обчислення. В монографії також викладено загальні методи дослідження транзисторних режимів поза резонансом і отримано умови стійкості, розглянуто явище жорсткого і м'якого збудження, явище затягування та проведено їх аналіз за допомогою графічних побудов [84, с. 168–184]. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов вивчили явища резонансу в електронному генераторі, примусової синхронізації та затягування частоти в резонансі [84, с. 185–219].

В додатку цієї монографії «Символічні методи нелінійної механіки в їх застосуванні до дослідження резонансів в електричному генераторі» (1934), стисло викладено нові, ще не опубліковані в повному обсязі, методи дослідження загального резонансного нелінійного випадку електронного генератора під впливом зовнішніх електрорушійних сил [84, с. 219–231]. Ці методи є узагальненням символічних методів для нелінійних систем і ввійшли в наступну монографію М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Символічні методи нелінійної механіки в їх застосуванні до дослідження резонансу в електричному генераторі» (1934) [85]. В останній досліджувалися актуальні проблеми радіотехніки: демультиплікаційні резонанси, примусова синхронізація, аномальні умови самозбудження, теорія нелінійних фільтрів тощо [84, с. 231–241]. Застосування резонансного методу для більш складних систем дозволяє дослідити такі явища нелінійного резонансу, як синхронізацію, демультиплікацію частот тощо.

В результаті розроблення наближених прийомів відшукання точкового відображення М. М. Крилов і М. М. Боголюбов встановили зв'язок методу точкових відображень з іншими методами уточнення породжуючого розв'язку, які використовуються при дослідженні нелінійних коливань: методом Ван-дер-Поля, методом усереднення, асимптотичними методами М. М. Крилова та М. М. Боголюбова [84].

На важливості вивчення нелінійних коливань також наголошувалось у вступі до монографії «Нові методи нелінійної механіки в їх застосуванні до вивчення роботи електронних генераторів» (1934), «чим і може бути пояснена, як вважають автори, необхідність виділення загальної сукупності питань з теорії нелінійних коливань в особливу науку, яку можна було б назвати Нелінійною Механікою». Далі вказується: «обґрунтування цієї групи питань в окрему науку – нелінійну механіку зумовлюється також ще існуванням цілої низки автономних методів, створених спеціально для вивчення нелінійних коливань, а саме методів Пуанкаре–Ляпунова, а також нових методів, розроблених авторами цієї книги» [84, с. 5].

В доповіді «Основні проблеми нелінійної механіки» М. М. Крилова та М. М. Боголюбова 12 січня 1934 р. на сесії ВУАН дано короткий історичний нарис розвитку методів розв'язання нелінійних задач. Зокрема, вказувалося на властивості лінійних коливань, на лінійний резонанс при виконанні закону пропорційності між діючою силою і спричинюваним нею ефектом та на принцип суперпозиції, характерний тільки для лінійних коливань [77, с. 6]. При появі нелінійного збурення систематично збільшується або зменшується амплітуда коливань залежно від випромінювання чи поглинання енергії. В цій доповіді вказувалося і на непридатність принципу лінеаризації до дослідження нелінійних процесів: «Коли інженери та фізики беруть іноді в руки «сокиру» і обрубують нелінійні члени у відповідних рівняннях, то це часто пояснюється не суттю справи, а нестачею належного математичного апарату, придатного для трактування нелінійних коливань» [77, с. 7]. На проміжку часу, значно більшому у порівнянні з «власними» періодами системи, ці члени суттєво впливають на коливальний процес. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов почали розробляти прості прийоми, які дозволяють визначати перші члени розкладів за степенями малого параметра, виходячи з елементарних енергетичних міркувань (без попереднього складання точних диференціальних рівнянь) та фізичних уявлень про характер коливального процесу.

В цій доповіді М. М. Крилов і М. М. Боголюбов також зазначили: «Такий апарат для дослідження нелінійних проблем і дала між іншим Кафедра математичної фізики ВУАН у цілому ряді праць, в більшості ще не опублікованих, і тим самим було започатковано нову галузь математичної фізики – «Нелінійну Механіку» як спеціальну науку про нелінійні коливання» [77, с. 8]. Вони обґрунтували необхідність розробки нових методів для дослідження основних проблем нелінійної механіки та для кількісного і якісного дослідження явищ резонансу в радіотехніці, зробивши ґрунтовний аналіз методів малого параметра (методів теорії збурень, методу А. Пуанкаре, методу Пуассона). М. М. Крилов і М. М. Боголюбов з'ясували причини появи секулярних членів і малих дільників у розкладах, що робило їх незастосовними для якісного аналізу коливань на нескінченному проміжку часу. Вони вказували, що «А. Пуанкаре і О. М. Ляпунов повинні розглядатися як засновники цього нового розділу механіки, який, як ми вважаємо, необхідно назвати нелінійною механікою і метою якого є створення загальної теорії нелінійних коливань» [77, с. 85]. І далі: «Ці дослідження коливань закладають основу нелінійної механіки <…> нової галузі математичної фізики, яка зразу застосовується до всіх тих галузей науки, де досліджуються нелінійні коливання» [77, с. 87].

Таким чином, на початку розробки асимптотичних методів нелінійної механіки М. М. Крилов і М. М. Боголюбов не намагалися їх математично обґрунтовувати. За допомогою асимптотичних розкладів стало можливим будувати не тільки перше, але й вищі наближення; досить прості формули для їх обчислень дозволяли досягти практичних результатів.

У своїй монографії «Про деякі формальні розклади нелінійної механіки» (1934) вони з'ясували причини появи секулярних членів у розкладах за степенями малого параметра на прикладі рівняння з малим нелінійним параметром в правій частині та довели, що наявність секулярних членів у розкладах робить їх непридатними для якісної характеристики розв'язків на необмеженому інтервалі часу, зокрема – при з'ясуванні властивостей періодичності, стійкості тощо [86, с. 5]. Тому розклади треба будувати так, щоб кожний їх член мав певну властивість, наприклад, періодичність, асимптотичність тощо. З таких розкладів можна зробити відповідні висновки про якісний характер досліджуваного інтеграла загального рівняння, який містить дві довільні сталі, тобто розв'язки, які не можна обчислити даним методом розкладу.

Цей інтеграл можна застосовувати до обчислення стаціонарних розв'язків [86, с. 17].

У цій монографії для випадку коливальних систем з одним степенем вільності М. М. Крилов і М. М. Боголюбов розглянули також явища нелінійного резонансу та явища, супроводжуючі його: синхронізацію коливань, демультиплікацію частот тощо [86, с. 38–55]. Вони узагальнили асимптотичні методи для обчислення нестаціонарних розв'язків коливальних систем з багатьма степенями вільності [86, с. 56–62], дослідили стаціонарні і транзиторні режими за допомогою розкладів за степенями малого параметра, критерії стійкості квазіперіодичних коливальних процесів [86, с. 62–90]. Викладені в їх монографії «нестрогі методи для вивчення властивостей розв'язків диференціальних рівнянь, які базувалися на застосуванні розбіжних розвинень, можуть бути перебудовані на способи для встановлення існування точних квазіперіодичних розв'язків. Таким чином, розбіжні розвинення можуть бути використані не тільки з метою наближеного розв'язання, як в астрономії, а навіть і для теоретичного дослідження поведінки розв'язку на всій дійсній осі» [86, с. 89].

Отже, М. М. Крилов і М. М. Боголюбов застосували асимптотичні методи до розв'язання нелінійних рівнянь на практиці. Математичне ж обґрунтування цих методів пов'язане з розвитком загальної теорії динамічних систем, створення якої розпочалося в 30-х рр.

Так, у 1930-х рр. М. М. Боголюбов досліджував нормальні структури точних розв'язків рівнянь і застосовував при цьому деякі топологічні методи, зокрема, дослідження А. Пуанкаре щодо характеристик на поверхні тора, доповнені 1932 р. французьким математиком Л. Данжуа відносно відображення тора на себе. В дослідженнях Л. Данжуа доведено існування і розглянуто властивості квазіперіодичних розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. М. М. Боголюбов дійшов висновку про те, що майже періодичність є скоріше за все винятком, аніж правилом. При цьому виникла потреба вивчення різних середніх значень динамічних змінних, які розглядаються як функції часу [87; 88]. Це є предметом дослідження ергодичної теорії, витоки якої лежать у статистичній механіці. Статистична механіка вивчає закономірності систем з великою, майже нескінченною кількістю частинок. Одним з припущень, яке лежать в її основі, є постулат про ергодичність, згідно якого середні характеристики систем частинок за часом і фазовим простором збігаються. Наприкінці 30-х рр. Дж. Фон Нейман і Г. Біркгофф довели ергодичні теореми, пов'язані з ергодичною гіпотезою Больцмана. При доведенні вони припустили наявність в динамічній системі інваріантної міри. Для гамільтонових систем такою мірою, згідно з теоремою Ліувілля, є звичайний об'єм фазового простору. Проте чи існує інваріантна міра у довільної динамічної системи, тоді було невідомо.

Загальна теорія міри в нелінійній механіці зумовила подальший розвиток теорії динамічних систем і дозволила пояснити властивості стаціонарних рухів, таких як рекурентність, тобто сильну стійкість за Пуассоном, спектральність тощо. Загальна теорія міри відкрила серію досліджень М. М. Крилова та М. М. Боголюбова з питань топологічної динаміки.

Один з творців ергодичної теорії Дж. фон Нейман надіслав їм листа, в якому з радістю вітав авторів з успіхом [72, с. 12]. Ці результати М. М. Боголюбова з абстрактної теорії динамічних систем та нелінійної механіки стали вихідними в дослідженні багатьох питань статистичної механіки, розробку яких він почав 1939 р. з М. М. Криловим.

Результати досліджень з ергодичної теорії були використані в монографії М. М. Крилова і М. М. Боголюбова «Застосування методів нелінійної механіки до теорії стаціонарних коливань» (1934) при створенні методу інтегральних багатовидів у нелінійній механіці. В ній вони розглянули докладні дослідження автоколивальних систем зі стаціонарними квазіперіодичними коливаннями. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов встановили відповідність властивостей квазіперіодичності і стійкості точних розв'язків і відповідних властивостей їх перших наближень [89, с. 24–51; с. 266–275, с. 293–305]. Це дало можливість застосовувати перше наближення не тільки для наближених обчислень, але і для встановлення якісних структурних властивостей точних розв'язків [89, с. 268]. М. М. Боголюбов і М. М. Крилов довели, що рівняння першого наближення можна отримати з точних шляхом усереднення головного члена правих частин цих рівнянь за часом [89, с. 54]. При цьому вони встановили, що рівняння Ван-дер-Поля при достатньо малому значенні параметра має стійкий періодичний розв'язок з певною частотою збудження. В дослідженнях вони використовували доведення існування інваріантної кривої деякого точкового перетворення [89, с. 74–90]. Зв'язок між існуванням цієї кривої і властивостями квазіперіодичності розв'язків відповідних диференціальних рівнянь встановлено ще в працях Біркгоффа з теорії канонічних систем з двома степенями вільності [50]. Однак йому в розглянутих випадках не вдалося дати конкретних критеріїв для доведення існування інваріантної кривої. У цій монографії М. М. Боголюбов і М. М. Крилов ввели поняття інтегрального багатовиду, заклали основи методу інтегральних багатовидів нелінійної механіки [89, с. 323–337], дослідили точні стаціонарні розв'язки системи з двома степенями вільності [89, с. 312–337], побудували загальні алгоритми асимптотичного інтегрування нелінійних рівнянь другого порядку. В теорії інтегральних багатовидів розглядають не індивідуальні розв'язки, а інтегральні багатовиди – не криві, а гіперповерхні, досліджують деякі функціональні рівняння, які визначають функції, які характеризують багатовиди. Інтегральний багатовид є більш стабільним по відношенню до малих змін правих частин в порівнянні з індивідуальними розв'язками. В зв'язку з цим, розглядаючи інтегральні багатовиди, можна довести ряд теорем, які для індивідуальних розв'язків можна отримати тільки при достатньо жорстких умовах, що накладаються на праві частини рівнянь. Якщо знайдено інтегральний багатовид для нелінійної системи рівнянь, то можна звести розгляд такої системи до рівнянь на багатовиді, розміри якого менші розмірів вихідного фазового простору. При наявності стійкого інтегрального багатовиду, до якого з часом наближаються довільні розв'язки системи, можна розглядати розв'язки, які лежать на інтегральному багатовиді гіперповерхні.

За допомогою асимптотичних розкладів отримують наближене представлення не загального розв'язку рівняння, а лише деякої двопараметричної сім'ї частинних розв'язків. Цікавим є встановлення критеріїв, при яких ця двопараметрична сім'я має властивість стійкості. Ця властивість полягає в тому, що довільний розв'язок системи прямує при збільшенні часу до розв'язків сім'ї. Цю властивість інтегрального багатовиду притягувати до себе всі близькі розв'язки покладено в основу методу інтегрального багатовиду. Цей метод полягає в виділенні із всієї сукупності розв'язків багатовиду розв'язків, які мають менший порядок ніж вихідна система і певні характерні властивості.

Якісне дослідження стає більш простим, якщо розв'язок лежить на багатовидах меншого числа вимірів за вихідний фазовий простір.

Ідеї теорії інтегральних багатовидів містяться в працях А. Пуанкаре, О. М. Ляпунова, О. Перрона. Зокрема, О. Перрон розглядав систему, для якої встановив існування двох інтегральних багатовидів, при цьому основним припущенням була гіперболічність лінійного наближення. В класичних працях О. М. Ляпунова з теорії стійкості поняття інтегрального багатовиду неявним чином використовуються при вивченні критичних випадків. Шукана функція повинна задавати наближений інтегральний багатовид досліджуваної системи.

М. М. Крилов і М. М. Боголюбов показали, що розглядувана сім'я квазіперіодичних розв'язків не аналітична і тому відповідні формальні розклади за степенями малого параметра є розбіжними. Виходячи з фізичних міркувань, вони вказали однозначний спосіб вибору функцій розкладу розв'язку, провели аналіз алгоритму цього способу в першому наближенні [89, с. 275–281]. При дослідженні квазіперіодичних розв'язків системи двох автономних рівнянь М. М. Крилов і М. М. Боголюбов не тільки довели існування інваріантного тору, але й знайшли причину неаналітичної залежності тора від малого параметра. Вони також довели, що рівняння коливань електронного генератора при наявності зовнішнього періодичного збудження мають квазіперіодичні розв'язки. Поєднавши розроблені методи з результатами А. Пуанкаре і А. Данжуа з теорії динамічних систем на торі, вони зробили якісний аналіз автоперіодичних коливальних систем другого порядку, встановивши наявність квазіперіодичних розв'язків і описавши властивості їх стійкості. М. М. Боголюбов і М. М. Крилов зауважили, що, застосовуючи методи, викладені в першому розділі своєї монографії, можна розглянути резонансні випадки і встановити властивості асимптотичності формальних розкладів по відношенню до точних розв'язків [89, с. 89; с. 309–310].

Проте на Другому всесоюзному математичному з'їзді (в Ленінграді, 24–30 червня 1934 р.) дійсний член АН СРСР Андрій Андрійович Марков зробив спробу довести непридатність для практичних цілей і помилковість праць Кафедри математичної фізики ВУАН. В своїй доповіді «Про теорію стаціонарних коливальних процесів академіка М. М. Крилова та доктора М. М. Боголюбова» [89, с. 90–100] він вказав на помилковість з математичної точки зору результатів досліджень М. М. Крилова та М. М. Боголюбова, викладених в їх монографії «Дослідження поздовжньої стійкості аероплана» (1932). На цей виступ М. М. Крилов і М.М. Боголюбов дали чітку відповідь: «…ми зовсім не розглядали в нашій монографії питання збіжності розкладів, розв'язки, про які йдеться у вказаних двох твердженнях, є, за загальноприйнятою термінологією, формальними розв'язками, причому, зрозуміло, що ці формальні розв'язки, як про це буде написано в подальшому, цілком застосовні тільки в нерезонансному випадку. Ці формальні розв'язки співпадатимуть з точними за умови збіжності відповідних розкладів. Хоч А. А. Марков у своїй доповіді зазначає відсутність в нашій монографії доведення збіжності, проте довільно вважає, що наші результати відносяться не до формальних, а до точних» [89, с. 91]. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов довели, що зауваження А. А. Маркова стосовно існування точок розбіжності даних рядів не мають жодного значення для практичного застосування асимптотичних методів [89, с. 99]. За допомогою вони звернулися на заводи та науково-дослідні інститути, які користувалися розробками Кафедри математичної фізики, щоб ті написали їй свої відгуки.

У грудні 1934 р. на конференції з динаміки конструкцій при Інституті будівельної механіки відмічались значення праць Кафедри математичної фізики з основ нелінійної механіки, що створює підґрунтя для інженерних розрахунків коливальних систем і віброконструкцій. На цій конференції були сформульовані актуальні питання, які вимагали вирішення. На Кафедрі математичної фізики були поставлені наступні задачі: розробка теоретичних питань існування квазіперіодичних розв'язків диференціальних рівнянь нелінійної механіки; з'ясувати способи заміни нелінійних елементів коливальних систем лінійними зі збереженням енергетичного балансу; вивчити питання резонансу в багатоколінчатих валах з нелінійною муфтою; підбір нелінійності для максимального зменшення резонансу. Вказувалось, що праці Кафедри мають принципове значення щодо розробки основ нелінійної механіки, яка забезпечує теоретичну основу для інженерних розрахунків коливальних систем. На цій конференції М. М. Боголюбов виступив з доповіддю «Нові методи нелінійної механіки і їх застосування».

У 1935 р. проведено розрахунок коливань рамкових конструкцій, знайдені формули другого наближення для визначення частоти стаціонарних коливань в електронних генераторах дозволили визначити вплив обертонів на стабільність частоти. Досліджувались внутрішні резонанси в системах з багатьма степенями вільності, резонанси поділу частоти, розроблялись питання використання нелінійних елементів для боротьби з резонансом у машинобудуванні.

Метод інтегральних багатовидів отримав подальший розвиток в монографії «Наближені методи нелінійної механіки в застосуванні до вивчення збурень періодичних рухів і до різноманітних резонансних явищ, що сюди відносяться» (1935) [90]. В ній викладено теорію збурень сімей періодичних рухів та ідею одночастотного методу нелінійної механіки, при якому всі точки системи коливаються з однаковою частотою. Він застосовується при дослідженні коливальних систем з багатьма степенями вільності, в яких наявність внутрішнього та зовнішнього тертя, зовнішніх збуджуючих сил призводить до швидкого зникнення вищих частот, тобто до встановлення основного тону коливань (коливань однієї частоти). Питання обґрунтування цього методу тісно пов'язане з теорією інтегральних багатовидів. Розв'язок системи з багатьма степенями вільності, отриманий за допомогою одночастотного методу, являє собою двопараметричну сім'ю частинних розв'язків.

У 1935–1936 рр. Кафедру математичної фізики за кордоном представив М. М. Боголюбов і прочитав лекції з нелінійної механіки в Інституті Анрі Пуанкаре, в Французькому і Бельгійському математичних товариствах, у Бельгійському науково-дослідному інституті. У вересні 1935 р. на Першій Міжнародній топологічній конференції у Москві М. М. Боголюбов виступив з доповіддю «Загальна теорія міри та її застосування до вивчення динамічних систем нелінійної механіки», в якій використав важливі результати з теорії міри та функціонального аналізу. Професор Вейль (Франція) свою доповідь «Про характеристики на торі і замкнені поверхні» присвятив застосуванню теорем М. М. Крилова та М. М. Боголюбова в даній галузі.

В праці «Інваріантні і транзитивні міри в нелінійній механіці» (1936) М. М. Крилов та М. М. Боголюбов ввели важливе поняття ергодичної множини і довели, що в компактному просторі існує множина, яка може бути розбита на ергодичні множини, які є інваріантними при перетвореннях групи, і на кожному з них можна визначити нормовану, інваріантну і транзитивну міри [91]. Вони довели ряд теорем розбиття інваріантної міри на міри, локалізовані в ергодичних множинах [92].

Результати цих досліджень викладені у їх праці «Загальна теорія міри в нелінійній механіці» (1937) [93]. В ній М. М. Крилов і М. М. Боголюбов дали строге обґрунтування методу усереднення, виходячи з ергодичної теорії, у випадку, коли праві частини рівнянь, які усереднюють, є квазіперіодичними функціями часу. Ця праця є першим визначним результатом з функціонального аналізу на Україні, її можна вважати початком розвитку функціонального аналізу в колишньому Радянському Союзі.

Створення асимптотичних методів теорії нелінійних коливань було завершено в монографії М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Вступ до нелінійної механіки» (1937) [94]. Вони дали обґрунтування принципу усереднення, відкинувши умову періодичності функцій правих частин рівнянь. Так, метод інтегральних багатовидів дав можливість М. М. Крилову та М. М. Боголюбову встановити відповідність між розв’язками точних (вихідних) рівнянь та відповідних до них наближених (усереднених) рівнянь. Останні отримувались при заміні правих частин складних диференціальних рівнянь усередненими функціями, які не містили явно час і швидко змінних параметрів системи. При отриманні рівнянь перших наближень вони знайшли зв'язок асимптотичного алгоритму з методом усереднення, який відіграв значну роль при побудові асимптотичних розкладів, встановленні різних оцінок похибок [94, с. 237–246]. Переваги отриманих після усереднення рівнянь у тому, що вони не містять явно часу в правих частинах, тобто є автономними.

В цій праці розглянуто також широке застосування асимптотичних методів в радіотехніці, що робить її популярною для інженерних спеціальностей.

При розробці асимптотичних методів особливу увагу М. М. Боголюбов і М. М. Крилов приділили побудові простих та ефективних прийомів, які дозволили, виходячи з елементарних міркувань, одержувати наближені формули. Вони створили нові методи, придатні для дослідження нелінійних неконсервативних коливальних систем. У 1939 р. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов працювали над проблемою статистичної теорії коливань в аспекті теми про дослідження лінійних та нелінійних вібраційних систем, що знаходяться під впливом випадкових сил. Було показано, що сили, які складаються з великого числа гармонічних компонентів з майже неперервним частотним спектром можуть бути зручною моделлю для випадкових сил. Для розгляду впливу таких сил був розроблений метод, який значно удосконалює пертурбаційні методи, застосовані Кафедрою математичної фізики до канонічних систем класичної і квантової механіки. Цим методом на Кафедрі з'ясували вплив спільної дії періодичної та випадкової сили на нелінійну систему, яка перебуває в резонансі.

М. М. Крилов і М. М. Боголюбов отримали формули другого наближення для визначення частоти стаціонарних коливань в електронних генераторах. Це дозволило визначити вплив обертонів на стабільність частоти, дослідити резонанси поділу частоти, внутрішні резонанси в системах з багатьма степенями вільності. Було розв'язано задачі про поздовжню стійкість літака, стійкість паралельної роботи електричних машин тощо. Особливу увагу приділено теорії резонансу в зв’язку з використанням нелінійних елементів для усунення резонансу в машинобудуванні.

Таким чином, М. М. Крилов і М. М. Боголюбов, використовуючи класичні результати А. Пуанкаре, О. М. Ляпунова, Б. Ван-дер-Поля, побудували нові асимптотичні методи дослідження нелінійних коливань в загальних неконсервативних коливальних системах, заклали основи нового підходу до проблем нелінійних коливань, нової гілки в теорії нелінійних коливань. Новий науковий напрям значно розширив можливості строгого вивчення нелінійних коливальних систем, дозволив відкрити і дослідити нові явища, які виникають в нелінійних системах.

# РОЗВИТОК НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ В УКРАЇНІ
# (40-60-ті рр. XX ст.)

Нові асимптотичні методи строго математично обґрунтовуються, відбувається їх подальший розвиток М. М. Боголюбовим, школою його учня Ю. О. Митропольського. В цьому періоді відбувається створення на основі теорії нелінійних коливань фізики нелінійних процесів.

## 1. РОЗВИТОК АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ В ПРАЦЯХ М. М. БОГОЛЮБОВА (40-60-ті рр. XX ст.)

У 40-х рр. в зв'язку з війною відбулися зміни у структурі і роботі Академії наук УРСР. Більшу частину її інститутів евакуйовано спочатку в Харків, потім на Схід. До осені 1943 р. М. М. Крилов знаходився в Уфі, потім переїхав до Москви. Прогресуюча хвороба на туберкульоз, різке погіршення зору обмежили його наукову діяльність. У ці роки він відходить від досліджень з нелінійної механіки і розробляє питання математичного аналізу, зокрема узагальнення функцій комплексної змінної, теорію комплексів Галуа, теорію кватерніонів (1947 р.). У 40-х рр. М. М. Боголюбов продовжував розвивати методи нелінійної механіки.

У 1928–1973 рр. він працював в НАН України (з 1966 по 1973 рр. – директор Інституту теоретичної фізики НАН України), 1945–1956 рр. – завідувач відділу Інституту математики НАН України, 1946–1949 рр. – декан механіко-математичного факультету Київського університету. Одночасно, з 1948 р., М. М. Боголюбов працював у Математичному інституті ім. В. А. Стеклова АН СРСР, з 1956 р. – в Об'єднаному інституті ядерних досліджень (в 1965–1988 рр. – директор).

М. М. Боголюбов – член багатьох іноземних академій (у Болгарії, Німеччині, Польщі, США тощо), академік АН України (1948), академік АН СРСР (1953). Отримав безліч нагород, зокрема Державну премію СРСР (1947, 1953, 1984).

Розглянемо його математичні ідеї і результати в галузі нелінійної механіки. В 30–60 рр. XX ст. М. М. Боголюбов працював над розвитком методів нелінійної механіки, використовуючи вказані вище математичні результати, дослідження А. Пуанкаре, О. М. Ляпунова, Б. Ван-дер-Поля та результати, отримані в астрономії.

У 1945–1950 рр. М. М. Боголюбову належить створення строгої теорії методу усереднення.

У праці М. М. Боголюбова «Про деякі статистичні методи в математичній фізиці» (1945) викладений алгоритм отримання асимптотичних наближень і їх похибок для вивчення впливу випадкової сили на гармонічний вібратор та для дослідження системи великої кількості зв'язаних гармонічних вібраторів [95]. Цей алгоритм увійшов в історію як метод усереднення М. М. Боголюбова. Для застосування цього методу диференціальне рівняння коливального процесу зводять до форми, в якій похідні невідомих функцій за часом пропорційні деякому малому параметру. В цій монографії викладено обґрунтування цього методу [95, с. 5–83], дано строге визначення інтегрального багатовиду й запропонований сам метод [95, с. 70–83]. Для випадку, коли серед власних чисел матриці нема з додатною дійсною частиною, М. М. Боголюбов запропонував оригінальний розв'язок шляхом застосування вищих наближень асимптотичних розкладів. Не встановлено лише відповідності властивостей стійкості наближених і точних розв'язків для випадку, коли дійсні частини всіх характеристичних чисел матриці дорівнюють нулю. В цьому місці цієї монографії є згадування про монографію, яку не вдалося знайти: «Цей, … досить важливий і математично цікавий випадок може бути інколи досліджений з допомогою переходу до рівнянь вищих наближень, які були наведені в праці М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Теорія збурень в нелінійній механіці» [95, с. 64]. Можливо, вона втрачена в роки війни і тільки 1950 р. в збірнику праць Інституту будівельної механіки АН УРСР з'явилась стаття з цією ж назвою [96]. В ній М. М. Боголюбов, як і в попередній монографії «Про деякі статистичні методи в математичній фізиці», виклав теорію методу усереднення до диференціальних рівнянь в стандартній формі, максимально застосовуючи його на практиці. Для ефективної побудови наближеного розв'язку він дослідив рівняння першого наближення різними способами, зокрема за допомогою принципу усереднення, розглянув цей принцип до дослідження руху фізичного маятника навколо положення рівноваги та до дослідження коливальної пружної системи з від'ємним тертям. За допомогою принципу усереднення М. М. Боголюбов побудував і вищі наближення: рівняння другого наближення отримуються усередненням точних рівнянь, в обидві частини яких підставлене удосконалене перше наближення за часом [96, с. 28]. Для прикладу М. М. Боголюбов розглянув синхронний рух маятника, для якого розгляд другого наближення з'ясовує питання щодо стійкості. Розроблена формальна методика наближених розв'язків може бути безпосередньо перенесена на випадки, коли диференціальні рівняння не записані в стандартній формі. Наближення третього і вищого порядку рідко застосовується в зв'язку з складністю їх побудови. М. М. Боголюбов коротко розглянув питання похибки отриманих наближених розв'язків, зауваживши, що це питання розглянуто в монографії «Про деякі статистичні методи в математичній фізиці» [96, с. 33–34].

Далі, в цій монографії, М. М. Боголюбов перейшов до застосування доведених теорем, встановив існування стійкого інтегрального багатовиду для досліджуваного випадку на основі третьої теореми і другого наслідку [95, с. 66–67], дослідив випадок від'ємних характеристичних чисел системи [95, с. 67–68]. Для частинного випадку диференціального рівняння другого порядку розглянув отримані локальні методи [95, с. 70–83]. В цій монографії М. М. Боголюбов за допомогою методу інтегральних багатовидів показав, що якщо усереднена система має інтегральний багатовид, то й вихідна система має інтегральний багатовид. Він зауважив, що третя та четверта теореми встановлюють для точних рівнянь існування інтегральних багатовидів для рівнянь першого наближення, однак з них безпосередньо не випливає вказівок щодо структури індивідуальних розв'язків на даному інтегральному багатовиді. Задача дослідження структури таких розв'язків значно спрощується, оскільки кількість вимірів інтегрального багатовиду, що розглядається, менша ніж фазового простору для досліджуваних рівнянь [95, с. 68]. Крім того, побудова навіть локальної теорії інтегральних багатовидів, яка узагальнює локальну теорію А. Пуанкаре, є сама по собі цікавою незалежно від проблем обґрунтування принципу усереднення. Адже за допомогою методу інтегрального багатовиду були проведені теоретико-якісні дослідження властивостей розв'язків диференціальних рівнянь в стандартному вигляді, які містять малий параметр, сформульовані та доведені основні теореми існування і стійкості багатовидів, які покладені в основу всіх подальших досліджень. М. М. Боголюбов розробив також способи отримання асимптотичних оцінок впливу випадкової сили на гармонічний вібратор і дослідження системи великої кількості пов'язаних гармонічних вібраторів [95, с. 92–114].

В багатьох задачах, пов'язаних з теорією нелінійних коливань, цікавим є не тільки знаходження інтегрального багатовиду, але й дослідження поведінки інтегральних кривих, які лежать на цих багатовидах. М. М. Боголюбову в монографії «Про деякі статистичні методи в математичній фізиці» (1945) також належить ідея розгляду диференціальних рівнянь нелінійної механіки на інтегральних багатовидах.

Отримав розвиток асимптотичний метод нелінійної механіки при дослідженні як детермінованих нелінійних коливань в системах з розподіленими параметрами і запізненням, так і випадкових коливань в нелінійних системах із запізненням, зокрема, дослідження періодичних і квазіперіодичних систем з запізненням. Розроблені асимптотичні методи М. М. Боголюбов поширив у 1946 р. на статистичну механіку, якою зацікавився ще в 1939 р., та теорію кінетичних рівнянь в працях «Проблеми динамічної теорії в статистичній фізиці» [97] та «Застосування методів нелінійної механіки до проблем кінетики» [98].

При розгляді нескінченного ланцюга рівнянь, які містять малий параметр і визначають функції розподілу комплексів молекул, можна застосувати асимптотичні методи і в якості «рівнянь m-го наближення» отримати кінетичні рівняння різного степеня точності. Ці методи дістали подальший розвиток і привели до багатьох важливих результатів і в статистичній механіці. В праці «Методи нелінійної механіки в статистичній фізиці» (1947) [99] в схемі асимптотичних розкладів за степенями малого параметра рівняння першого наближення (узагальнені рівняння Ван-дер-Поля) є звичайними рівняннями гідродинаміки ідеальної рідини, рівняння другого наближення – рівняннями гідродинаміки в'язкої рідини. Таким чином виникла можливість точнішого теоретичного розрахунку коефіцієнтів в'язкості і теплопровідності для реальних газів, виходячи з аналізу молекулярної взаємодії [99, с. 215–216].

У 1948 р. М. М. Боголюбов запропонував оригінальний метод дослідження одночастотних процесів нелінійних коливальних систем з багатьма степенями вільності. Якщо навіть коливання описуються диференціальними рівняннями, близькими до лінійних, застосування асимптотичних методів, розроблених М. М. Криловим та М. М. Боголюбовим, вимагає попереднього розв'язання сукупності лінійних диференціальних рівнянь з кількістю невідомих, пропорційною кількості степенів вільності, що має труднощі при застосуванні цих методів. Крім того, в багатьох випадках в коливальних системах з багатьма степенями вільності наявність тертя, зовнішніх збуджуючих сил призводить до швидкого зникнення вищих частот, тобто до встановлення основного тону коливань. М. М. Боголюбов навів схему побудови частинного розв'язку нелінійної системи рівнянь у вигляді асимптотичних рядів, припускаючи, що в цій системі при $e=0$ можливі незатухаючі коливання з деякою частотою $\omega$, яка залежать тільки від двох постійних $a$ та $u$. Він наклав ще ряд додаткових умов на ці параметри і запропонував частинний розв'язок системи з багатьма степенями вільності, який відповідає одночастотному коливальному режиму в цій системі, шукати у вигляді асимптотичних рядів. Таким чином М. М. Боголюбов розробив метод побудови асимптотичних розкладів, який дозволяє розглядати коливальну систему з багатьма степенями вільності як коливальну систему з одним степенем вільності. Він отримав наближене подання не загального розв'язку системи рівнянь, а лише двопараметричної сім'ї частинних розв'язків.

До ідеї одночастотного методу, який значно розширив застосування асимптотичних методів нелінійної механіки, М. М. Боголюбов звернувся в праці «Одночастотні вільні коливання в нелінійних системах з багатьма степенями вільності» (1949) [100]. Суть викладеного М. М. Боголюбовим одночастотного методу полягає в тому, що розв'язок нелінійної системи рівнянь з багатьма степенями вільності шукається у вигляді двопараметричної сім'ї функцій. Цей метод є прикладом використання поведінки розв'язків на інтегральному багатовиді.

Запропонований і розроблений М. М. Боголюбовим метод побудови одночастотних розв'язків отримав подальший розвиток і застосування при побудові розв'язків коливальних систем з багатьма степенями вільності та з нескінченою кількістю степенів вільності, строге математичне обґрунтування.

У 1949 р. М. М. Боголюбов проводив розробку теоретичних основ термоядерного синтезу і брав участь у створенні ядерної зброї. Але, буваючи в Києві, М. М. Боголюбов консультував співробітників Інституту математики, які працювали над докторськими дисертаціями в галузі теорії коливань (В. О. Кононенко, Г. С. Писаренко) та в напрямку теорії диференціальних рівнянь з малим параметром (К. В. Задирака, С. Ф. Фещенко, Ю. В. Благовещенський). З утворенням 1957 р. у Дубні міжнародного центру в галузі ядерної фізики, Об'єднаного інституту ядерних досліджень, М. М. Боголюбов організував і став керівником лабораторії теоретичної фізики, а в 1966 р. став першим директором створеного ним Інституту теоретичної фізики АН УРСР у Києві.

На першій математичній школі в м. Каневі 1963 р. М. М. Боголюбов прочитав дві лекції «Про квазіперіодичні розв'язки в задачах нелінійної механіки», в яких після тривалої перерви повернувся до нелінійної механіки [101]. М. М. Боголюбов за допомогою методу інтегральних багатовидів, а також нових результатів А. М. Колмогорова і В. І. Арнольда з проблем стійкості рухів, Ю. Мозера з прискореної збіжності встановив умови існування квазіперіодичних розв'язків і їх властивості аналітичності відносно параметра. Вперше ідея прискореної збіжності цих розкладів в методі дотичних (метод Ньютона). В лекціях запропоновано теорію збурень стійких квазіперіодичних розв'язків неконсервативних систем диференціальних рівнянь (зокрема, встановлення властивостей аналітичності по відношенню до параметра), викладено ідею доведення існування інваріантного тора [102].

М. М. Боголюбов довів фундаментальну теорему про існування квазіперіодичного розв'язку для певної n-вимірної системи диференціальних рівнянь і таким чином узагальнив свої попередні дослідження про існування квазіперіодичного розв'язку у випадку двох частот, які базувалися на теорії Пуанкаре-Данжуа траєкторій на торі.

З 1965 р. М. М. Боголюбов зосереджує свої зусилля на розв'язанні найактуальніших задач фізики високих енергій. Цими лекціями завершується розробка ним нелінійної механіки.

На їх основі в роботах академіка Юрія Олексійовича Митропольського, який є одним з перших учнів М. М. Боголюбова, та його учнів було створено метод прискореної збіжності в задачах нелінійної механіки [103]. Результати, отримані М. М. Боголюбовим в м. Каневі, покладені в основу монографії «Метод прискореної збіжності в нелінійній механіці» (1969) завдяки своєму великому теоретичному вмісту і широкому практичному застосуванню набули світового визнання і широкого практичного застосування.

## 2. ПОЧАТОК ФОРМУВАННЯ ШКОЛИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ М. М. БОГОЛЮБОВА

Фундаментальні результати М. М. Боголюбова з нелінійної механіки отримали подальший розвиток і узагальнення в працях його учнів академіків АН України Ю. О. Митропольського, В. О. Кононенка, Г. С. Писаренка[2], Й. З. Штокала[3], які склали ядро його теоретичної школи в цьому напрямі в Україні. Праці В. О. Кононенка присвячені теорії автоколивальних систем і нелінійних систем зі змінними параметрами, вивченню взаємодії

[2] Н. 12.11.1910, хутір Скрильники Кобилянського повіту Полтавської губернії – 9.01.2001, Київ. Учений-механік, фундатор наукової школи з механічних коливань, міцності матеріалів та елементів конструкцій в екстремальних умовах експлуатації. Академік Національної академії наук України (1964), заслужений діяч науки УРСР (1973), лауреат Державних премій УРСР (1969, 1980) і СРСР (1982).

З 50-х рр. очолював відділ Інституту металокераміки та спеціальних сплавів (нині Інститут проблем матеріалознавства НАН України), був заступником директора з наукової роботи. Паралельно зав. кафедри опору матеріалів Київського політехнічного інституту, був головою спеціалізованої вченої ради при Інституті проблем міцності НАН України. З 1957 р. – член-кореспондент, а з 1964 – дійсний член АН УРСР. У 1966 р. за ініціативою Георгія Степановича створено Інститут проблем міцності АН УРСР. Був директором цієї установи понад двадцять років, а в 1988 р. став його почесним директором.

Він підготував 45 докторів і 180 кандидатів наук. Автор понад 800 наукових публікацій, серед яких 50 монографій, підручників та довідників.

[3] Н. 04 (16).11.1897, с. Скоморохи Сокальського р-ну Львів. обл. – 05.01.1987, м. Київ. Вчений в галузі звичайних диференціальних рівнянь, історії вітчизняної математики. Знайдені ним ефективні критерії стійкості та нестійкості систем лінійних рівнянь з майже періодичними коефіцієнтами в критичному випадку дістали світове визнання. Чл.-кор. АН УРСР (1948), акад. АН УРСР (1951), заслужений діяч науки УРСР (1968), чл.-кор. Міжнародної академії історії наук в Парижі (1965), почесний акад. Міжнар. академії історії наук (1978). Лауреат премії ім. М. М. Крилова АН УРСР (1973). 1931 закінчив Дніпропетров. фіз.-хім.-матем. ін-т (нині – ун-т), 1935 – аспірантуру наук.-дослід. Ін-ту математики і механіки при Харків. ун-ті. 1935 захистив канд. дис. Одночасно 1931–41 – асистент, доц. по кафедрі математики вузів м. Харкова. 1942–46 – с.н.с., вчений секретар Ін-ту математики АН УРСР. 1943 захистив докт. дис. 1946–49 – зав. відділу, заст. директора Ін-ту математики АН УРСР. Одночасно 1944–51, 1956–72 – проф., зав. каф. Київ. ун-ту. 1949–56 – чл. Президії АН УРСР, уповноважений Президії АН УРСР у Львові, Голова Львів. філіалу АН УРСР, 1956–63 – зав. відділу історії математики Ін-ту математики АН УРСР, 1963–86 – зав. сектора історії природознавства і техніки Інституту історії АН УРСР, зав. відділу історії природознавства Ін-ту історії АН УРСР, 1957–67 – голова Термінологічної комісії при Президії АН УРСР. Досліджував теорію диференціальних рівнянь, операційне числення, історію розвитку вітчизняної математики.

коливальних систем з джерелом енергії, теорії коливань твердих тіл [104]. Г. С. Писаренко застосував асимптотичні методи Крилова і Боголюбова до дослідження коливань слаболінійних механічних систем з розподіленими параметрами [105]. Й. З. Штокало використав ідеї методу усереднення і отримав ефективні критерії стійкості лінійних диференціальних рівнянь з квазіперіодичними коефіцієнтами. Він створив метод асимптотичного розщеплення, який має особливе значення при дослідженні стійкості складних керованих об'єктів, що описуються системами лінійних диференціальних рівнянь. Цей метод С. Ф. Фещенко з учнями поширив на системи інтегральних, інтегро-диференціальних і диференціально-різницевих рівнянь [106].

# 3. НАУКОВА ШКОЛА Ю. О. МИТРОПОЛЬСЬКОГО

## 3.1. Ю. О. Митропольський – вчений, людина, педагог

Розглянемо процес становлення Ю. О. Митропольського як вченого, наукового лідера, педагога, особливості його творчості, притаманні йому риси, які сприяли організації навколо нього наукової школи з нелінійної механіки.

Він народився 3 січня 1917 р. у с. Чернишівка (нині – Гоголівського району Полтавської області), в с. Шишаки відбулося його хрещення та був складений метричний запис [107, с. 147]. У 1919 р. родина Митропольських переїхала до Києва, де 1932 р. Юрій Олексійович закінчив семирічну школу № 62. Раптова смерть батька змусила Ю. О. Митропольського залишити навчання. В 1932–1936 рр. він працював на Київському консервному заводі, 1936 р. вступив до 9-го класу середньої школи № 70, яку закінчив 1938 р. з відзнакою. Про визначення свого подальшого навчання Ю. О. Митропольський писав: «…за допомогу у виборі життєвого шляху я дуже вдячний вчителеві математики нашої школи Михайлу Михайловичу Шапошникову... Це був скромний, надзвичайно добрий і терплячий до учнів педагог, відданий своїй справі трудівник. Давно вже помічено: авторитет учителя нерідко відіграє вирішальну роль у виборі школярами професій» [108]. В 1938 р. Ю. О. Митропольський вступив до механіко-математичного факультету Київського університету. Одночасно з навчанням працював учителем математики в 28 та 101 київських середніх школах. У ці роки на механіко-математичному факультеті викладали Б. Я. Букрєєв, академік НАНУ Г. В. Пфейффер, В. Є. Дьяченко, М. М. Боголюбов і М. О. Лаврентьєв.

З початком Великої Вітчизняної війни, після 3-го курсу навчання, він був 7 липня 1941 р. мобілізований і направлений в 39-й автобронетанковий запасний полк Південно-Західного фронту. У листопаді 1941 р., згідно з Наказом Міністра оборони СРСР, Юрій Олексійович отримав відпустку і був зарахований на 5-й курс Казахського університету. По закінченню університету в березні 1942 р. був направлений до Рязанського артилерійського училища. З 1943 р. і до кінця Великої Вітчизняної війни він перебував на фронті, був командиром взводу артилерійської розвідки 800-го Окремого розвідувального артилерійського дивізіону, а з травня 1944 р. на посаді ад’ютанта командира 137 артилерійської бригади першої Ударної Армії, брав участь у боях.

Прагнення до безкорисливого служіння народу Ю. О. Митропольський унаслідував від діда по батьківській лінії, лікаря, соратника знаменитого клініциста С. П. Боткіна, нахил до ракетної справи – від діда по матері, який визволяв Болгарію від турків і від свого батька Олексія Савовича – добровольця Червоної армії, учасника Громадянської війни [108]. За звільнення Риги Ю. О. Митропольський отримав перший орден Червоної зірки (1944), другий орден Червоної Зірки – за участь в розгромі курляндського угруповання німецьких військ (1945) [109, с. 8], нагороджений був також низкою медалей.

Невдовзі відбулася перша зустріч Ю. О. Митропольського з М. М. Боголюбовим у Київському університеті. Юрій Олексійович прийшов до Миколи Миколайовича як до декана механіко-математичного факультету довідатись про можливість вступу до аспірантури. «Зустрівся я з Миколою Миколайовичем у приміщенні школи на вул. Леніна (нині – вул. Богдана Хмельницького), де в другу зміну читалися лекції для студентів КДУ…, – згадує Юрій Олексійович. – Микола Миколайович проходжувався коридором на протязі години і розмовляв зі мною. Докладно розпитав мене про мою родину, про мої інтереси, які лекції я слухав в університеті в Алма-Аті. Я сказав йому, що слухав курс теорії стійкості, який читав К. П. Персидський та курс функціонального аналізу, який читав С. Г. Міхлін, що С. Г. Міхлін та К. П. Персидський пропонували мені вступити до аспірантури» [110, с. 149].

Після розмови М. М. Боголюбов погодився взяти Ю. О. Митропольського до аспірантури і одночасно запропонував йому вакантну посаду молодшого наукового співробітника в його відділі в Інституті будівельної механіки АН УРСР. Юрій Олексійович згадував: «Звісно, я охоче погодився, бо знав, який це визначний вчений і як з ним цікаво співробітничати. Відтоді, власне, й почалася моя наукова спеціалізація, якій залишаюся вірним» [108].

Працювати у відділі було привабливо: дисертацію можна подати раніше, зарплата була вища за аспірантську стипендію, тому Юрій Олексійович погодився з цією пропозицією. В 1946–1948 рр. він був молодшим науковим співробітником, у 1948–1950 рр. – старшим науковим співробітником Інституту будівельної механіки АН УРСР. У ці роки під керівництвом М. М. Боголюбова, а згодом і у співдружності з ним, сформувалися основні навики наукової роботи Ю. О. Митропольського. Взаємні контакти, наукове спілкування з вчителем перетворило молодого вченого на справжнього дослідника. М. М. Боголюбов казав: «Молодим людям, які вступають в науку, я хотів би сказати, що вони вибирають собі прекрасну, але тяжку дорогу. Навіть найбільш вдалі наукові долі складаються з перешкод, безсонних ночей, наукових помилок і оман. Я хотів би побажати майбутнім молодим вченим виробити в собі твердий характер, без якого, на мій погляд, неможливо досягти значних успіхів на шляху до пізнання» [111, с. 13].

Юрій Олексійович вважав М. М. Боголюбова вченим, за масштабом наукової думки порівнюваним з такими корифеями, як А. Пуанкаре, О. М. Ляпунов, А. М. Колмогоров [112, с. 145]. Основна риса наукового стилю М. М. Боголюбова полягала у вмінні оцінити ключовий характер проблеми і одночасно її розв'язність та створити адекватний математичний апарат для її розв'язання [112, с. 148]. Його творчості властиве поєднання методів математики і фізики. Поєднання глибоких теорії з практикою було характерним і для наукових праць вчителя М. М. Боголюбова М. М. Крилова, інженера за освітою. Про М. М. Крилова та М. М. Боголюбова Юрій Олексійович каже: «Це мої головні вчителі. Вважаю для себе за честь продовжувати їх справу» [108]. Ю. О. Митропольський зазначив, що М. М. Боголюбов володів рідкісною інтуїцією при розв'язанні різноманітних задач механіки та фізики. І властивість схоплювати суть механічних і фізичних процесів у поєднанні зі знанням математики дозволила йому розробити найефективніші методи конкретних розрахунків, які характеризувались високою математичною досконалістю і фізичністю [113, с. 652]. М. М. Боголюбов мав особливий метод наукового пошуку, він ніколи не розмінювався на наукові «дрібниці», хоч і красиві, а вмів у кожний момент знайти найбільш важливу та актуальну задачу, вирішення якої, з одного боку, вже назріло, а з іншого – було необхідне як через внутрішню логіку розвитку самої науки, так і з точки зору застосувань [114]. Сам М. М. Боголюбов казав, що його даремно хвалять за таку кількість робіт у різноманітніших напрямках.

Ю. О. Митропольський швидко ввійшов у наукову атмосферу школи М. М. Боголюбова і почав вивчати резонансні явища в нелінійних коливальних системах з повільно змінними параметрами, виходячи з асимптотичних методів М. М. Крилова та М. М. Боголюбова. Наукова і педагогічна діяльності Ю. О. Митропольського завжди гармонійно доповнювали одна одну. У 1949–1990 рр. він викладав на механіко-математичному факультеті Київського університету ім. Т. Г. Шевченка, завідував кафедрою диференціальних рівнянь (1951–1953 рр. та 1956–1958 рр.). Основні результати з методу інтегральних багатовидів були темами дипломних і курсових робіт студентів, загальних і спеціальних курсів, які читав Юрій Олексійович. Зокрема, це курси: теорія коливань, нелінійна механіка, коливання систем з розподіленими параметрами, механіка тіла змінної маси, математична фізика та спеціальні функції (для фізиків), загальний курс диференціальних рівнянь (для геологів), теорія поля, інтегральні багатовиди. Деякі з цих курсів було опубліковано в «Лекціях з методу усереднення в нелінійній механіці» (1966) [115], «Лекціях з застосування асимптотичних методів до розв'язання рівнянь в частинних похідних» (разом з Б. І. Мосеєнковим, 1968 р.) [116], «Лекціях з методу інтегральних багатовидів в нелінійній механіці» (разом з О. Б. Ликовою, 1969 р.) [117], «Лекціях з теорії коливань системи з запізненням» (разом з Д. І. Мартинюком, 1969 р.) [118]. Вперше в Києві було прочитано курс теорії стійкості за Ляпуновим. Його лекції завжди були наповнені новими ідеями, останніми здобутками науки. Велика ерудиція Юрія Олексійовича, вміння зіставити важливу проблему з задачами математики і механіки, сприяти її ефективному розв'язанню зацікавлювали творчу молодь [109, с. 14].

В 1951 р. він захистив дисертацію на ступінь доктора технічних наук «Повільні процеси в нелінійних коливних системах з багатьма степенями вільності». Після захисту Ю. О. Митропольський працював в Інституті математики АН УРСР старшим науковим співробітником (1950–1953), завідувачем відділу математичної фізики (1953–2001), заступником директора (1951, 1955–1958), директором (1958–1988). Під його керівництвом Інститут математики НАН України став одним з найавторитетніших інститутів у світовій науці.

Юрій Олексійович систематично, особливо в «дні науки» читав лекції про роль математики в науково-технічному прогресі, в підвищенні культури. З його ініціативи організовано Республіканську наукову конференцію «Математика й науково-технічний прогрес» (1973), на якій він виступив з основною доповіддю «Значення математики в науково-технічному прогресі». На цій конференції було порушено проблеми математизації знань, питання впровадження математичних методів у техніку. Ю. О. Митропольський був ініціатором і організатором двох конференцій, присвячених математичним проблемам біології (1979, 1982).

Він був головою оргкомітету з проведення студентських олімпіад «Математика й науково-технічний прогрес». Ю. О. Митропольський приділяв значну увагу популяризації математичних знань і досягнень, виступав з науково-популярними лекціями по радіо, телебаченню. Як член Всесоюзного товариства «Знання» систематично виступав з лекціями перед інженерами, викладачами математики, студентами, учнями старших класів середніх навчальних закладів, під час зимових канікул викладав учителям математики. З його ініціативи в Інституті математики було організовано Університет для читання деяких сучасних розділів математики для викладачів математики в технічних інститутах і для економістів, а також університет для школярів старших класів по неділях.

Він був керівником методологічного семінару в Інституті математики АН УРСР, на базі якого проводив Всеукраїнські наукові конференції, присвячені методології математичних наук. Зокрема, було проведено загальноміську конференцію, присвячену працям А. Пуанкаре, пов’язаним з принципом відносності.

Юрій Олексійович приділяв багато уваги удосконалюванню структури Інституту математики. Було створено нові відділи, одержали розвиток нові напрямки: алгебра, топологія, теоретична фізика. Це стимулювало розвиток досліджень в галузі алгебри, теорії ймовірностей, теорії функцій, функціонального аналізу, механіки спеціальних систем, низки напрямів прикладної математики.

Багато часу він приділяв підготовці наукових кадрів через аспірантуру. Починаючи з 1958 р. в Інституті різко збільшився прийом до аспірантури і протягом 30 років Інститутом підготовлено близько 500 кандидатів і 80 докторів наук. Інститут підготував також ряд докторів і кандидатів наук для країн ближнього й далекого зарубіжжя.

В 1976 р. він був запрошений у Марокко на 1-й Панафриканський математичний конгрес, на пленарному засіданні якого доповів про підготовку математичних кадрів вищої кваліфікації в Україні – кандидатів і докторів наук [109, с. 23].

Багато часу він приділяв підготовці наукових кадрів через аспірантуру. Ю. О. Митропольський був науковим лідером, який зібрав навколо себе колектив молодих дослідників. Під його керівництвом близько 100 аспірантів захистили кандидатські дисертації, 25 стали докторами наук. У тому числі він підготував 12 кандидатів наук для В'єтнаму, Узбекистану, Грузії, Болгарії, Югославії, 7 докторів і професорів для В'єтнаму, Узбекистану і Югославії. За допомогою висловлень учнів, колег, друзів Юрія Олексійовича виділимо його основні характерні риси як наукового лідера.

Особливістю творчості Ю. О. Митропольського є розробка нових методів розв'язання нелінійних задач з їх конкретним практичним застосуванням. Наукові праці Ю. О. Митропольського характеризуються теоретичною глибиною, практичною цінністю. Зокрема, академік АН УРСР В. М. Гріднєв відмічає, що «дослідження Ю. О. Митропольського характеризуються глибиною теоретичного аналізу і, разом з цим, доведенням теорії до повного розв'язання актуальних прикладних задач» [119]. Розроблені ним методи вірізняються ясністю і доступністю схеми. Академік РАН В. О. Ільїн, академік НАН Білорусії М. О. Ізобов, А. А. Мартинюк та А. М. Самойленко пишуть: «характерна риса творчості Ю. О. Митропольського – всебічне дослідження проблеми, що розглядається, – від алгоритму побудови наближеного розв'язку до теоретичного обґрунтування запропонованого методу» [120, с. 4]. Академік АН БССР М. П. Еругин, академік АН УРСР В. С. Королюк, О. Б. Ликова відмічають, що Ю. О. Митропольський «…завжди дає зручний алгоритм для побудови наближених розв'язків і глибоке теоретичне обґрунтування методу. Крім того, Юрія Олексійовича завжди цікавить фізична суть досліджуваних явищ» [121, с. 179].

Багато сил і часу він віддавав своїм учням, в кожному з них знаходив серйозного опонента [110, с. 276]. На питання, які якості він цінує в своїх учнях, Ю. О. Митропольський відповів: працьовитість, ретельність, акуратність, чесність [122]. Характерною рисою педагогічного таланту Юрія Олексійовича є вміння підмічати здібності молодих людей і залучати їх до великої науки [123, с. 14].

Учень Ю. О. Митропольського академік НАН України А. А. Мартинюк відмічає, що «характерними рисами Юрія Олексійовича були його повсякденна увага до проблем, які виникали в творчих колективах і намагання їх розв'язати (або краще – попередити їх появу) виключно на ґрунті справедливості і взаєморозуміння. Всі знали, що Юрій Олексійович є взірцем коректності і справедливості»*. До рис Ю. О. Митропольського як вченого він відносить «широту наукових інтересів, глибоке розуміння проблем нелінійної механіки і теорії нелінійних коливань, його відповідальність за використання результатів наукових досліджень». Для Юрія Олексійовича як учителя характерним є «доброзичливість, турбота про розпочате дослідження, повага до думки інших фахівців». З виключно людських якостей доцільно виділити «виключну інтелігентність і порядність, простоту в спілкуванні і безмежну відданість своїй справі»*. Учень Юрія Олексійовича, академік А. М. Самойленко казав, що «у нього такий склад розуму, що він не лише мислитель, а він ще… і практик, який бачить проблему не в математичних формулах, а в деяких образах… Юрій Олексійович бачить і теорію» [124].

В пошуках найбільш ефективних методів дослідження задач він звертає особливу увагу на фізичний бік даної проблеми, на її актуальність, практичне застосування, на динамічний характер досліджуваного явища. Юрій Олексійович надає також важливого значення аналітичним методам дослідження, які приводять до кількісних [109, с. 29]. Як стверджує сам Ю. О. Митропольський, між фундаментальною математикою і прикладною межі немає. І не повинно бути. Інакше це не математика, а гра в формули, яка не має ніякого змісту. Математика одна. І починається вона іноді з постановки задачі, що виходить з інженерних посилань. Вплив математики на розвиток виробництва ніколи не буває одностороннім. Відбувається взаємодія ідей. Чим більше інститут працює на виробництво, тим ширше русло фундаментальних досліджень, тим вони цікавіші [122].

Ю. О. Митропольський стверджував, що всі більш-менш перспективні ідеї приходили до нього під час відпусток [125]. «Юрій Олексійович ще студентом поставив математичну задачу, яка потім вилилась в цілу теорію, теорія, засновниками якої по суті являються Боголюбов, Митропольський. Це теорія імпульсних систем. У світі признана ця теорія як одне з надбань української математичної науки», – каже А. М. Самойленко. Також він зауважує: «складні резонанси… гальмували прогрес саме в

* Тут і надалі приватне повідомлення автору

досягненні великих швидкостей і роботи, методи Юрія Олексійовича там грали колосальну роль. … Метод Крилова–Боголюбова–Митропольського – візьміть підручники по теорії коливань, у всьому світі – КБМ» [124]. Академік НАН України Б. Е. Патон писав у характеристиці на Ю. О. Митропольського: «Політично грамотний. Морально стійкий, скромний, принциповий. Користується заслуженим авторитетом і повагою серед співробітників» [119]. Він також вказував, що Юрій Олексійович «разом з тим в своїй науковій діяльності намагався не загострювати стосунки, схильний згладжувати конфлікти». «Людина, яка одночасно є і вченим, і громадянином, і патріотом», – каже Б. Е. Патон [124]. Академік УРСР Ф. П. Белянкін відзначав: «Митропольський є здібним, ініціативним науковим працівником, який має широку ерудицію в галузі нелінійної механіки» [119]. М. М. Боголюбов зазначав про свого учня, що Ю. О. Митропольський «є досвідченим і талановитим керівником молодих наукових кадрів» [119]. В. Г. Бар'яхтар, декан фізико-математичного факультету КПІ, академік НАН України зазначає, що «Юрій Олексійович користується великою повагою та любов'ю серед колег, аспірантів, студентів, усіх, хто з ним спілкується. Його енергія, знання, мудрість, привітність, доброта, щирість, задушевність вражають і захоплюють» [126]. Про його людяність, скромність, тактовність не складають легенд, бо вони природні в ньому, як і талант математика [170]. Тут доречним є висловлення П. Л. Капіци: «Історія науки показує, що крупний вчений – це не обов'язково велика людина, але крупний вчитель не може не бути великою людиною» [127, с. 139].

В працях Ю. О. Митропольського вперше в світовій літературі викладено строгу теорію дослідження нестаціонарних коливальних процесів як з однією так і з багатьма степенями вільності. Дослідження цих процесів є актуальним у зв'язку з розрахунками на стійкість швидкохідних силових і виконуючих агрегатів з врахуванням всіх явищ, які відбуваються під час коливання конструкцій, мостів, деталей, при модуляції коливань високої частоти коливаннями більш низьких частот тощо. Проблема вивчення нестаціонарних явищ виникає при зміні частот, мас та інших параметрів нелінійної коливальної системи, тобто при «неусталених» режимах, зокрема при проходженні через резонанс, при дослідженні коливань в системах зі змінною масою і жорсткістю, в системах зі змінними з часом зв'язками, коливань шахтних підіймальних канатів, мостів, які знаходяться під впливом рухомих навантажень і пульсуючих сил, в електронних прискорювачах, при розрахунку траєкторій ракет на активній ділянці руху тощо.

В більшості випадків нестаціонарні процеси в коливальних системах з багатьма степенями вільності описуються нелінійними диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами. Це такі системи, багато параметрів яких, наприклад, власні частоти, коефіцієнти тертя, ефективні маси системи тощо, та зовнішні сили системи довільно залежать від часу. При розгляді таких систем здебільшого можна застосувати те, що параметри системи змінюються повільно в порівнянні з одиницею часу порядку періоду власних коливань. Такі системи описуються нелінійними диференціальними рівняннями з повільно змінними параметрами. Виникають питання побудови відповідного математичного апарату дослідження таких рівнянь за допомогою розробки асимптотичних методів нелінійної механіки. Ю. О. Митропольський створив зручні для практичного застосування схеми розрахунків таких задач, зробивши тим самим значний внесок у розвиток асимптотичних методів нелінійної механіки.

З першої праці Ю. О. Митропольського «Власні коливання в нелінійних системах з повільно змінними параметрами» (1948) починається наукова діяльність Ю. О. Митропольського в подальшому розвитку асимптотичних методів нелінійної механіки [128]. В його праці «Застосування символічних методів до дослідження нелінійних систем з повільно змінними параметрами» (1949) викладено ефективний метод розрахунку нелінійних коливальних систем, які містять один елемент з нелінійною характеристикою. Розроблена схема розрахунків дозволяє досліджувати як стаціонарні режими, так і процеси становлення коливань [129].

Асимптотичні методи можна застосовувати при побудові наближених розв'язків для коливальних систем, які містять малий параметр як з однією, так і з багатьма степенями вільності, а також для систем з розподіленими параметрами. Важливі результати

Ю. О. Митропольський отримав при використанні асимптотичних методів до дослідження коливальних явищ в системах саме з розподіленими параметрами (диференціальні рівняння в частинних похідних). На ефективність такого поширення асимптотичних методів вперше звернули увагу М. М. Крилов та М. М. Боголюбов ще в 1935 р. при розв'язанні задачі про коливання валів і стрижневих систем.

Однак застосування асимптотичних методів для побудови наближених розв'язків для системи з багатьма степенями вільності вимагає попереднього розв'язання сукупності диференціальних рівнянь з кількістю невідомих, пропорційною числу степенів вільності. Тому виникають труднощі практичного застосування цих методів, для подолання яких М. М. Боголюбов у 1949 р. розробив метод асимптотичного інтегрування, за допомогою якого досліджуються коливання з однією частотою в нелінійних системах з багатьма степенями вільності [130]. В таких системах наявність внутрішнього і зовнішнього тертя та зовнішніх збуджуючих сил призводить до встановлення коливань основного тону, або інтенсивних коливань іншої, але певної частоти. Тому при вивченні систем з багатьма степенями вільності доцільно розглядати одночастотний режим, коли всі координати системи виконують коливання з однаковою частотою. Одночастотний метод дістав істотного розвитку в циклі праць Ю. О. Митропольського 1949–1960 рр. Цей метод полягає в тому, що знаходиться не загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь, а тільки частинний, який залежить від двох довільних сталих і відповідає певному коливальному процесу в системі з багатьма степенями вільності.

Ю. О. Митропольський вперше строго і систематично застосував асимптотичні методи до дослідження нестаціонарних процесів в системах з розподіленими параметрами. У 1949 р. з'являється його публікація «Дослідження коливань в нелінійних системах з багатьма степенями вільності і повільно змінними параметрами» з вивчення нестаціонарних явищ, які виникають у коливальних системах з багатьма степенями вільності при повільній зміні частот та інших параметрів. В ній він узагальнив метод М. М. Боголюбова дослідження одночастотних коливань в нелінійних системах з багатьма степенями вільності, виклав основи побудови наближених розв'язків систем диференціальних рівнянь з багатьма степенями вільності і повільно змінними параметрами у випадку одночастотного режиму [131, с. 85–92].

Основою використання одночастотного методу був метод енергетичної інтерпретації, оскільки рівняння коливань для систем з багатьма параметрами є рівняннями в частинних похідних. Згідно з методом енергетичної інтерпретації, при розгляді віртуальної роботи при варіаціях амплітуди і фази коливання рівняння першого і другого наближень складаються, виходячи з виразів для віртуальної роботи, яка виконується силами збурень, та кінетичної і потенціальної енергій без попереднього складання точних диференціальних рівнянь руху [131, с. 92–94]. Це дозволило перенести одночастотний метод на системи з розподіленими параметрами і дослідити нестаціонарні коливання стрижнів, пластинок, лопаток турбін, балок тощо [131, с. 94–98].

Асимптотичний метод, який містився в працях М. М. Крилова та М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольський узагальнив для рівнянь з повільно змінними параметрами, знайшов формальні розклади рівняння нелінійного вібратора в першому та другому наближенні, розглянув окремий випадок, коли на нелінійний вібратор діє синусоїдальна сила зі змінною частотою [132]. Питання ж асимптотичної збіжності наближених розв'язків, зокрема її математичне обґрунтування, він виклав у праці «Повільні процеси в нелінійних коливальних системах з багатьма степенями вільності» (1950) [133]. В ній дано оцінку похибки і доведено теорему, яка встановлює властивості стійкості сім'ї розв'язків, котрі відповідають одночастотним процесам, що розглядаються. У 1951 р. Ю. О. Митропольський захистив дисертацію з такою самою назвою на ступінь доктора технічних наук [134].

В працях Ю. О. Митропольського «Дослідження коливань в нелінійних системах з багатьма степенями вільності і повільно змінними параметрами» (1949) та «Повільні процеси в нелінійних коливальних системах з багатьма степенями вільності» (1950) на основі розвитку й узагальнення одночастотного методу та розробки методу дослідження систем з повільно змінними параметрами запропоновано загальний метод дослідження нестаціонарних коливань в системах з розподіленими параметрами. Ці розробки Ю. О. Митропольського разом з асимптотичними методами М. М. Крилова та М. М. Боголюбова отримали міжнародне визнання як асимптотичні методи Крилова–Боголюбова–Митропольського [135, с. 6].

У праці «Вимушені коливання в нелінійних системах при проходженні через резонанс» (1953) Ю. О. Митропольський дослідив різноманітні складні явища, які спостерігаються в нелінійних системах при проходженні через резонанс, зокрема вплив тертя на амплітуду при різних швидкостях проходження через резонанс [136]. В цій праці та праці «Повільні процеси в нелінійних коливальних системах з багатьма степенями вільності» (1950) він розробив асимптотичний алгоритм для коливальних систем з повільно змінними параметрами, який дозволив виявити відмінності при проходженні через резонанс в нелінійних коливальних системах. Завдяки цьому можна було вивчати нестаціонарні явища, які виникають при зміні частот та інших параметрів нелінійної системи, зокрема досліджувати явища повільного проходження через резонанс у системах типу «центрифуги», в роторах турбомашин, гіроскопічних пристроях тощо.

Одночастотний метод застосовано Ю. О. Митропольським при знаходженні асимптотичних розв’язків для систем рівнянь з гіроскопічними членами. Складені в цьому випадку рівняння першого наближення для амплітуди і фази одночастотного процесу дали можливість точно проаналізувати низку явищ у гіроскопічних системах при нестаціонарному режимі. В статті «Про коливання в гіроскопічних системах при проходженні через резонанс» (1953) Ю. О. Митропольський дослідив проблему побудови асимптотичних розв’язків при наявності в досліджуваній системі диференціальних рівнянь гіроскопічних членів і кратних власних частот при походженні через резонанс за допомогою асимптотичних методів Крилова–Боголюбова 1937 р. та методики, викладеної в праці «Повільні процеси в нелінійних коливальних системах з багатьма степенями вільності» (1950) [137]. В праці Ю. О. Митропольського «Про нестаціонарні коливання в системах з багатьма степенями вільності» (1954) узагальнюється метод Б. В. Булгакова щодо приведення системи з гіроскопічними членами до нормальних координат. Ці результати ввійшли в написану спільно з М. М. Боголюбовим монографію «Асимптотичні методи в теорії нелінійних коливань» (1955) [138].

У цій монографії М. М. Боголюбов і Ю. О. Митропольський досліджували за допомогою одночастотного методу систему колінчатого вала, а в монографії «Проблеми асимптотичної теорії нестаціонарних коливань» Ю. О. Митропольський досліджував цим методом крутильні коливання колінчатого вала авіаційного двигуна при невстановленому режимі. У цій же роботі за допомогою асимптотичного методу розглянуті коливання гнучкого вала, що несе на кінцях маси, які змінюються залежно від часу.

Результати досліджень коливань за допомогою одночастотного методу також підсумовано в монографіях Ю. О. Митропольського «Нестаціонарні процеси в нелінійних коливальних системах» (1955) [139] та «Проблеми асимптотичної теорії нестаціонарних коливань» (1964) [140].

Розроблені схеми дозволили досліджувати неусталені коливання роторів на пружних підшипниках, при запуску та припиненні роботи моторів, коливання шахтних підйомних канатів, коливання в колах зі змінною ємністю і індуктивністю тощо. Для коливань у гіроскопічних системах при проходженні через резонанс розв’язується проблема побудови асимптотичних розв'язків при наявності в досліджуваній системі диференціальних рівнянь гіроскопічних членів і кратних власних частот та розробляються зручні для практичного застосування розрахункові схеми. Аналіз нелінійного вібратора при проходженні через резонанс дозволив виявити затягування амплітуди стрибка та розрив амплітуди, биття тощо. Вдалось проаналізувати і сукупну дію звичайного та параметричного резонансів.

В передмові до монографії «Проблеми асимптотичної теорії нестаціонарних коливань» (1964) Ю. О. Митропольський висловлює «щиру подяку своєму вчителю академіку М. М. Боголюбову, бесіди з яким багато в чому сприяли роз’ясненню низки питань, що розглядаються при розробці викладеної теорії» [140, с. 10]. В цій монографії, яка включає зміст монографії «Нестаціонарні процеси в нелінійних коливальних системах» (1955), систематично викладено математичне обґрунтування розробленого ним методу дослідження нестаціонарних процесів у нелінійних коливальних системах з повільно змінними параметрами, необхідною умовою застосовності якого є вимога повільної зміни параметрів системи по відношенню до «власних періодів» коливань. Це обґрунтування зводиться до встановлення точності отриманих наближень та до з'ясування стійкості отриманих двопараметричних сімей частинних розв'язків. Ця стійкість полягає в «притяганні» цією сім'єю розв'язків довільних розв'язків даної системи, початкові значення яких належать достатньо малому околу даної двопараметричної сім'ї.

В монографії також викладено зручні прийоми для складання рівнянь в першому наближенні, в основу яких покладено використання методів усереднення, гармонічного балансу та енергетичної інтерпретації, розглядаються питання з теорії диференціальних рівнянь, які містять малий параметр. Розроблено алгоритми побудови асимптотичних розв'язків для більш складних нелінійних рівнянь другого порядку з повільно змінними параметрами, які дали можливість виявити і докладно вивчити ряд нових явищ у нестаціонарних коливальних процесах в нелінійних коливальних систем з одним степенем вільності. При дослідженні коливань нелінійного вібратора під час проходження його через резонанс виявлено специфіку явищ нелінійних систем: захоплення, розриви амплітуд, биття тощо, розглянуто приклади проходження через резонанс колінчастого валу, явища, які виникають під час проходження через резонанси при запуску центрифуги та інших гіроскопічних пристроїв, спільний вплив звичайного і параметричного резонансів, а також явища, які спостерігаються при проходженні через обидва резонанси.

В статті «Про деякі рівняння, близькі до точно інтегрованих» (1959) Ю. О. Митропольський розвинув оригінальний метод побудови рівнянь першого наближення, виходячи безпосередньо з виразу функції в правій частині [141]. В статті «Дослідження нестаціонарних коливань в нелінійних системах» (1963) Ю. О. Митропольський наводить основну ідею побудови асимптотичних розкладів для випадку нелінійної коливальної системи з повільно змінними параметрами, методику якої викладено в його попередніх працях [128, 131, 132, 139, 142].

Теореми щодо обґрунтування одночастотного методу стали основою для розвитку методу інтегральних багатовидів, основи якого закладено в 1945 р. М. М. Боголюбовим. Ю. О. Митропольський одержав теореми, які встановлювали критерії стійкості вивчених двопараметричних сімей частинних розв'язків (1950) [132]. У ряді важливих випадків вони мають «сильну стійкість», яка полягає в тому, що будь-який розв'язок вихідної системи з часом прямує до сім'ї наближених розв'язків. Цю властивість він розвинув у 1957–1958 рр. у теорію інтегральних багатовидів. Безпосередньо з багатовидами ми маємо справу при побудові наближених двопараметричних розв'язків, які відповідають одночастотному режиму в нелінійній системі, оскільки частинні розв'язки залежать від двох довільних сталих і являють собою параметричне представлення деякого двовимірного інтегрального багатовиду.

Вперше ж поняття інтегрального багатовиду та його строге визначення запроваджено М. М. Криловим і М. М. Боголюбовим у монографії «Застосування методів нелінійної механіки до теорії стаціонарних коливань» (1934). Ідея методу інтегральних багатовидів у нелінійній механіці міститься в праці М. М. Боголюбова «Про деякі статистичні методи в математичній фізиці» (1945). В ній розглянуто лише властивості розв'язків диференціальних рівнянь в стандартній формі на нескінченному проміжку часу. В 1947 р. М. М. Боголюбов запропонував замість конкретного розв'язку системи диференціальних рівнянь розглядати деяку двопараметричну сім'ю розв'язків, яка лежить на двовимірному інтегральному багатовиді.

В теорії інтегральних багатовидів мають справу з функціональними рівняннями, які визначають функції, що характеризують шукані інтегральні багатовиди, тоді як в теорії Ляпунова–Пуанкаре досліджується сумісність системи звичайних диференціальних рівнянь з скінченою кількістю невідомих і малим параметром. В цій теорії розглядають не індивідуальні розв'язки, на які впливають малі зміни правих частин рівнянь, а інтегральні багатовиди – гіперповерхні, що більш стійкі по відношенню до малих змін правих частин рівнянь. Якісне дослідження розв'язків системи значно спрощується, коли вони лежать на багатовиді з меншою кількостю вимірів, ніж вихідний фазовий простір. Тобто метод інтегральних багатовидів являє собою новий підхід до якісної теорії диференціальних рівнянь. Тут розглядають дві системи диференціальних рівнянь – точні рівняння і наближені (різниці між правими частинами яких – величина асимптотично мала) – і встановлюють відповідність між інтегральними багатовидами цих рівнянь.

Питання існування і стійкості інтегральних багатовидів для точних розв'язків має велике значення і для вивчення їх індивідуальних розв'язків, оскільки замість всього фазового простору можна розглядати розв'язки, які лежать на інтегральному багатовиді. Частинні розв'язки залежать від двох довільних сталих і являють собою параметричне представлення деякого двовимірного інтегрального багатовиду. Якщо дійсна частина хоча б одного з коренів рівнянь додатна, то багатовид має властивість відштовхування всіх близьких до нього розв'язків, за винятком тих, початкові значення яких лежать на особливому точковому багатовиді, вимірність якого менша вимірності всього фазового простору. Розглядаючи інтегральні багатовиди, можна довести низку теорем для індивідуальних розв'язків при досить жорстких умовах, що накладаються на праві частини відповідних диференціальних рівнянь.

В праці «Про деякі диференціальні рівняння, які зустрічаються в теорії релаксаційних коливань*» (1957) Ю. О. Митропольський досліджував нелінійні диференціальні рівняння, які розглядали А. Пуанкаре і А. Данжуа. Він звів вихідну релаксаційну систему рівнянь на багатовиді до одного рівняння, в результаті аналізу розв'язків якого отримав критерії існування зон параметричного резонансу для розглядуваної релаксаційної системи, знайшов явище квазісинхронізації, уточнив у другому наближенні частоту синхронних коливань тощо [143].

Ю. О. Митропольський також поширив метод інтегральних багатовидів на нелінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами. В праці «Про стійкість однопараметричної сім'ї

---

* Релаксаційні коливання – періодичний в часі процес, при якому відносно повільна зміна фазового стану об'єкта чередується майже миттєвою, практично стрибкоподібною зміною його фазового стану.

розв'язків системи рівнянь зі змінними коефіцієнтами» (1958) він обґрунтував одночастотний метод для коливальних систем, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями з повільно змінними параметрами [144]. Довів фундаментальну теорему, яка встановлює існування і властивості інтегрального багатовиду, розглянув існування і властивості одновимірного інтегрального багатовиду системи диференціальних рівнянь, до якої приводять багато задач про нестаціонарні коливання в системах з багатьма степенями вільності і повільно змінними параметрами. Цікавими також є питання топологічного вивчення структур інтегральних багатовидів, які отримуються для різних видів диференціальних рівнянь, що описують складні коливальні явища (миттєві зміни деякої величини).

В праці «Про періодичні розв'язки системи нелінійних диференціальних рівнянь з недиференційованими правими частинами» (1959) доведено теорему про обґрунтування за допомогою методу усереднення законності побудови наближених періодичних розв'язків для диференціальних рівнянь, праві частини яких не диференційовані [145]. До таких рівнянь приводять задачі визначення періодичних розв'язків для системи, нелінійна характеристика яких складена з відрізків прямих.

Ю. О. Митропольському належить також низка теорем про існування та властивості інтегральних багатовидів для нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами у скінченно- та нескінченновимірних випадках. В останньому випадку сформульовано теорему, в якій обґрунтовано застосування одночастотного методу до систем з розподіленими параметрами [146, 147]. В подальших працях Ю. О. Митропольського в цьому напрямку досліджуються інтегральні багатовиди диференціальних рівнянь з повільно змінними параметрами, інтегральні багатовиди рівнянь, близьких до рівнянь зі змінними коефіцієнтами в гільбертовому просторі, тощо.

Отже, Ю. О. Митропольський отримав результати щодо існування і властивостей інтегральних багатовидів нелінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними параметрами та обґрунтував застосування одночастотного методу до дослідження систем з розподіленими параметрами.

В 1961 р. на Міжнародному симпозіумі з нелінійних коливань у Києві М. М. Боголюбов і Ю. О. Митропольський виклали результати розвитку методу інтегральних багатовидів за період з 1945 р. Вони показали актуальність застосування методу інтегральних багатовидів у дослідженні багатовимірних динамічних систем та вказали шляхи подальшого розвитку інтегральних багатовидів і необхідність поширення цього методу на нескінченновимірні системи рівнянь, на рівняння з запізнюючим аргументом, на сингулярнозбурені системи та ін.

В статті М. М. Боголюбова та Ю. О. Митропольського «Метод інтегральних багатовидів в нелінійній механіці» (1963) розглянуто властивості розв'язків диференціальних рівнянь в стандартній формі на нескінченому інтервалі часу за допомогою методу інтегральних багатовидів [148]. В ній викладено основні результати щодо розвитку та узагальнення методу інтегральних багатовидів, його застосувань, наведено характерні типи диференціальних рівнянь нелінійної механіки [148, с. 96–100], для яких викладено деякі основні теореми про існування і властивості інтегральних багатовидів [148, с. 119–132]. М. М. Боголюбов і Ю. О. Митропольський застосували теорію інтегральних багатовидів до багатьох актуальних задач нелінійної механіки: дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (коливання балок, валів, оболонок, роторів турбін, пластин тощо), які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних [148, с. 138–153]. Метод інтегральних багатовидів М. М. Боголюбов і Ю. О. Митропольський поширили на системи з запізнюючим аргументом, зокрема на випадок малого запізнення та запізнення, яке повільно змінюється.

Ця стаття вплинула на подальший розвиток методу інтегральних багатовидів в нелінійній механіці, зокрема в працях відділу математичної фізики і теорії нелінійних коливань Інституту математики АН УРСР Ю. О. Митропольського, К. В. Задираки, О. Б. Ликової, В. І. Фодчука тощо, та в працях іноземних авторів: Дж. Хейла, А. Стокса, М. Маркуса, В. Кайнера, А. Келлі, Я. Курцвейля, А. Халаная тощо [148].

На третій конференції з нелінійних коливань (Берлін, 1964) її керівник Ю. О. Митропольський доповів методи доведення існування і встановлення властивостей інтегральних багатовидів для диференціальних рівнянь в банахових просторах у зв'язку з дослідженням одночастотних процесів у коливальних системах з розподіленими параметрами, які описуються диференціальними рівняннями.

Виходячи з ідей М. М. Крилова та М. М. Боголюбова про послідовні заміни, Ю. О. Митропольський розробив алгоритм для дослідження лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь з квазіперіодичними правими частинами, досліджував структуру розв'язків нелінійних систем на тороїдальному багатовиді та в його околі. Важливі результати отримані Ю. О. Митропольським у 1964–1965 рр. при дослідженні поведінки траєкторій на тороїдальних багатовидах [149, 150]. Він розвинув метод прискореної збіжності, основою якого є метод послідовних замін змінних, започаткований М. М. Криловим і М. М. Боголюбовим у 1934 р.

Ю. О. Митропольський продовжив дослідження М. М. Боголюбова з методу прискореної збіжності, розробив алгоритм для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з квазіперіодичними правими частинами, дослідив структуру розв'язків нелінійних систем на тороїдальному багатовиді та в його околі. В статті «Про побудову загального розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь за допомогою методу, який забезпечує «прискорену» збіжність» (1964) він застосовував метод прискореної збіжності при розв'язанні низки задач нелінійної механіки [151].

Результати досліджень Ю. О. Митропольського з методу прискореної збіжності покладено в основу досліджень системи диференціальних рівнянь з квазіперіодичними коефіцієнтами, вивчення інваріантних тороїдальних багатовидів тощо. Ці розробки викладено в спільній з М. М. Боголюбовим, Ю. О. Митропольським та А. М. Самойленком монографії «Метод прискореної збіжності в нелінійній механіці» (1969) [152] та монографії Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, В. Г. Куліка «Дослідження дихотомії нелінійних систем диференціальних рівнянь за допомогою функцій Ляпунова» [153]. В праці М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка викладено результати, отримані М. М. Боголюбовим у 1963 р. з розвитку методу послідовних замін і дослідження квазіперіодичних розв'язків [152, с. 11–58], результати Ю. О. Митропольського з побудови загального розв'язку системи нелінійних рівнянь методом послідовних замін, досліджено поведінку цього розв'язку в околі квазіперіодичного розв'язку. Розвиваючи метод прискореної збіжності, Ю. О. Митропольський розробив спосіб побудови загального розв'язку нелінійної системи в околі квазіперіодичних розв'язків, дослідив структуру гладких траєкторій на торі довільної вимірності, привів лінійні системи з квазіперіодичними коефіцієнтами до систем з сталими, дослідив багаточастотні коливання в слабконелінійних системах. Праці з розробки методу прискореної збіжності та розвитку принципу зведення в теорії лінійних диференціальних рівнянь з квазіперіодичними коефіцієнтами було відзначено премією ім. М. М. Крилова НАН України (1969).

Ю. О. Митропольський звів розгляд вихідної системи рівнянь до вивчення одного рівняння на багатовиді та вивів критерії існування зон параметричного резонансу для дослідження релаксаційної системи, виявив явище квазісинхронізації, уточнив у другому наближенні частоту асинхронних коливань тощо [154, 155]. Він також поширив метод інтегральних багатовидів на нелінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами [156]. Доведено фундаментальну теорему, що встановлює існування і властивості інтегрального багатовиду, розглянуто питання існування і властивостей одновимірного інтегрального багатовиду системи диференціальних рівнянь, до якої приводять чимало задач про нестаціонарні коливання в системах з багатьма степенями вільності і повільно змінними параметрами.

Метод інтегральних багатовидів Ю. О. Митропольський поширив на нескінченновимірні системи, на системи з розподіленими параметрами, сингулярно-збурені системи з аргументом, який відхиляється тощо [115, 147, 157, 158, 159, 160, 161].

Ю. О. Митропольський розробляв метод усереднення, поширив його на різноманітні класи диференціальних рівнянь, які містять «малий» і «великий» параметри, на рівняння у функціональних просторах, рівняння з аргументом, який відхиляється, на інтегро-диференціальні рівняння, на стохастичні диференціальні рівняння, системи рівнянь, які описують багаточастотні коливання при різному співвідношенні власних і зовнішніх частот збурення.

Як відомо, широке застосування в практиці метод усереднення набув після виходу монографії М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Вступ до нелінійної механіки» (1937). Важливі результати було отримано Ю. О. Митропольським з розвитку цього методу, застосування його до систем нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, з недиференційованими і розривними правими частинами тощо. Вони викладені в монографії «Лекції з методу усереднення в нелінійній механіці» (1966) [115]. Створення ж строгої теорії методу усереднення належить М. М. Боголюбову. Праці Ю. О. Митропольського з розвитку методу усереднення підсумовано в монографії [162].

На основі методу інтегральних багатовидів Ю. О. Митропольський обґрунтував одночастотний метод для нелінійних коливальних систем, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями з повільно змінними параметрами. Він довів теореми про існування і властивості інтегральних багатовидів для нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, для нескінченного випадку довів теорему, яка обґрунтовує застосування одночастотного методу до систем з розподіленими параметрами. Ю. О. Митропольським докладно вивчено й проаналізовано: коливання маятника в нелінійній постановці при наявності змінної довжини; нелінійного вібратора, який перебуває під впливом зовнішньої періодичної сили зі змінною частотою. Він відкрив і пояснив специфічні зміни амплітуди і фази при різних режимах проходження через резонанс, явища затягування амплітуди в резонансній області при впливі зовнішньої періодичної сили з вібруючою частотою й ін.

У зв’язку з розвитком нових напрямків у фізиці плазми, радіофізиці та оптиці особливе значення набули дослідження нелінійних хвильових процесів у розподілених динамічних системах. Ю. О. Митропольський запропонував разом з учнем О. К. Лопатіним новий підхід до опису хвильових і коливальних процесів, що ґрунтується на класичному асимптотичному методі, в основу якого покладено вивчення групових властивостей інтегральних багатовидів, використання властивостей групових алгебр у переході до гільбертових просторів, які узагальнюють розклади в класичні ряди Фур’є [163]. Це забезпечує простоту і зв'язок з асимптотичними методами нелінійної механіки. За допомогою цього підходу побудовано загальний розв'язок певної системи нелінійних диференціальних рівнянь, досліджено його поведінку в околі квазіперіодичного розв'язку, вивчено задачу про зведення нелінійної системи рівнянь до лінійної з сталими коефіцієнтами. Поєднуючи одночастотний метод з методом поділу змінних Фур'є та методом усереднення, Юрій Олексійович створив метод, який враховує специфіку розподілених систем і дозволяє будувати наближені розв'язки для систем з розподіленими параметрами при наявності нелінійності, випадкових збурень, нелінійності в крайових умовах, запізнення, повільно змінних параметрів. Він побудував строгу теорію наближених асимптотичних розв'язків для нелінійних диференціальних рівнянь, близьких до рівнянь гіперболічного типу, розглянув також аналітичні методи, які дають можливість кількісного дослідження [164, 165, 166, 167].

Таким чином, наукові праці Ю. О. Митропольського відносяться до таких напрямків: розвиток асимптотичних методів дослідження систем, які описують нестаціонарні коливальні процеси; одночастотного методу для систем з багатьма степенями вільності; методу інтегральних багатовидів у нелінійній механіці та розгляд стійкості руху; методу прискореної збіжності в задачах нелінійної механіки; методу усереднення для рівнянь з повільно змінними параметрами, а також рівнянь із недиференційованими та розривними правими частинами, для рівнянь із аргументом, що запізнюється, для рівнянь з випадковими збуреннями та ін.; методу усереднення при дослідженні систем нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних, які описують коливальні процеси в гіроскопічних системах, і сильно нелінійних систем; розвиток асимптотичних методів для систем з розподіленими параметрами, асимптотичних методів аналізу нелінійних систем з випадковими параметрами. В працях Юрія Олексійовича метод побудови асимптотичних наближень для рівнянь з повільно змінними параметрами та метод дослідження одночастотних коливань отримали строге математичне обґрунтування. Він розглянув питання асимптотичної збіжності наближених розв'язків, приділяючи особливу увагу доведенню низки тонких теорем існування і стійкості одно- та двопараметричних сімей розв'язків. Ю. О. Митропольський зробив значний внесок в теорію звичайних диференціальних рівнянь, розробивши методи доведення теорем існування інтегральних багатовидів.

Ю. О. Митропольський також займався дослідженнями з історії нелінійної механіки та історії математики в Україні. Зокрема, велике значення мають його статті і доповіді з розвитку математичних досліджень в Інституті математики АН УРСР, в яких вказано широке застосування асимптотичних методів нелінійної механіки, викладені основні результати, вказане місце нелінійної механіки у сучасній науці, її завдання. Він був керівником делегації українських істориків науки на XII Міжнародному конгресі з історії та філософії науки в Парижі (1968). Юрій Олексійович – член редколегії історико-наукових праць: «Історія Академії наук Української РСР», «Історія вітчизняної математики» (у чотирьох томах), «Нариси розвитку математики в СРСР». Ю. О. Митропольський був одним з ініціаторів і відповідальним редактором видання у Києві повного зібрання праць академіка М. М. Крилова, зібраних праць у трьох томах академіка М. М. Боголюбова; з його ініціативи протягом 25 років (1961–1986) в Інституті математики АН УРСР видавалися збірники праць семінарів і препринти, тематичні й міжвідомчі збірники, редагуванню яких він приділяв значну увагу.

Ю. О. Митропольському належить ідея проведення літніх математичних шкіл. У 1963 р. була проведена Інститутом математики АН УРСР спільно з Математичним інститутом ім. В. А. Стеклова АН СРСР перша в Радянському Союзі літня математична школа в Каневі (15 червня – 15 липня). З того часу такі школи проводяться спільно з Інститутом математики АН УРСР та Інститутом імені В. А. Стеклова АН СРСР регулярно Президією АН УРСР, в основному в Криму в Кацивелі. В літніх школах створюються всі умови для довготривалого і невимушеного спілкування вчених з молоддю, що суттєво відрізняється від спілкування на різних конференціях.

Юрій Олексійович читав також спецкурси за запрошенням у літніх міжнародних математичних школах, зокрема, лекції з методу усереднення в нелінійній механіці (1972, Бресанона, Італія), з нелінійних диференціальних рівнянь (1980, м. Тренто, Італія), у Міжнародному математичному центрі імені С. Банаха (Польща, 1981, 1992), брав участь у дискусіях з італійськими вченими Д. Г. Граффі, Дж. Сансоне, Р. Конті.

За редакцією Юрія Олексійовича систематично виходило чимало журналів та збірників праць всіх математичних конференцій (у тому числі – міжнародних), які проводив Інститут математики АН УРСР.

Ю. О. Митропольський приділяв багато уваги розширенню наукових зв'язків Інституту математики з іноземними математичними центрами, розвитку нових методів дослідження і їх прикладному спрямуванню. З 1953 р. Юрій Олексійович очолює семінар з математичної фізики, диференціальних рівнянь і теорії нелінійних коливань при Інституті математики АН УРСР, на якому заслуховуються, зокрема, дисертаційні роботи вчених, працюючих у наукових центрах не тільки України, але й інших країн.

Ще в 60-х Ю. О. Митропольський привернув увагу іноземних учених. Радянський академік за кордоном ставав уособленням політичної системи і часто все залежало від його власної мудрості і почуття гумору. Юрій Олексійович віддавав перевагу наполегливості і досконалої організації науки перед спонтанністю і романтикою [124]. Луїс А. Пайпс, професор Каліфорнійського університету (США) зазначив: «Вже під час першої зустрічі з академіком Митропольським мене вразила його скромність. Ця риса не так уже часто зустрічається серед вчених зі світовим ім'ям. Він не любить розповідати про себе, про свої успіхи, бажає говорити більше про колектив учених, з якими працює. А жаль… У його біографії можна знайти багато повчального і незвичайного, хоча, можливо, – на ваш погляд, – це звичайна біографія радянської людини тисяча дев'ятсот сімнадцятого року народження» [170, с. 91].

Юрій Олексійович був ініціатором і організатором міжнародних симпозіумів і конференцій з нелінійних коливань, які проходили в Києві, Берліні, Празі, Варшаві. Перша з таких конференцій, керівником якої був Ю. О. Митропольський, була проведена Інститутом математики 1958 р. у Києві. Крім аналітичних і якісних методів теорії нелінійних коливань, належна увага надавалась також застосуванням цих методів. Міжнародним союзом з теоретичної і прикладної механіки (IUTAM) було ухвалене рішення провести з 12 по 18 вересня 1961 р. Міжнародний симпозіум з нелінійних коливань у Києві. Місце проведення обране у зв'язку з тим, що Київ є колискою наукової школи, створеної М. М. Боголюбовим.

У 1961 р. з ініціативи Ю. О. Митропольського було прийнято рішення спільно з провідними вченими академій наук СРСР, Німеччини, Польщі та Чехії систематично проводити міжнародні конференції з нелінійних диференціальних рівнянь і нелінійних коливань по черзі (через 3 роки) в одній з цих країн. В IX конференції взяли участь біля 600 вчених з 30 країн світу.

Ю. О. Митропольський неодноразово виступав в наукових центрах і університетах Угорщини, Польщі, США, Китаю, В'єтнаму, Чехословаччини, Мексики, Канади, Італії, Сербії із циклами лекцій, присвячених асимптотичним методам нелінійної механіки.

Багато уваги Ю. О. Митропольський приділив організації Інституту прикладної математики в Донецьку, Інституту прикладних проблем математики і механіки у Львові, Інституту геотехнічної механіки в Дніпропетровську, також організації Обчислювального центру АН УРСР у Києві, пізніше перетвореного в Інститут кібернетики АН УРСР.

Він був членом експертної комісії з математики ВАК (1953–1963), членом комітету з Державних премій України в галузі науки і техніки при Кабінеті Міністрів України (з 1969), членом президії Національного комітету СРСР з теоретичної і прикладної механіки (1961–1991), членом Національного комітету Росії з теоретичної і прикладної механіки (з 1991). Ю. О. Митропольський був у складі (інколи головою) комісій із присудження академічних премій АН СРСР ім. О. М. Ляпунова, премії імені М. О. Лаврентьєва), очолював комісію з диференціальних рівнянь при ОМ АН СРСР. Юрій Олексійович Митропольський був почесним директором Інституту математики НАН України (з 1988), професором (1955), почесним доктором Київського університету (1999), академіком НАН України (1961), заслуженим діячем науки України за внесок в розвиток вітчизняної науки і підготовку наукових кадрів (1967), академіком Болонської АН (1971), академіком АН СРСР (нині

Російської академії наук, 1984), головою бюро відділення фізико-математичних наук АН УРСР (1961–1963), академіком-секретарем Відділення математики, механіки і кібернетики АН УРСР (до 1982 р. – Відділення математики, механіки й кібернетики АН УРСР) (1963–1983), академіком-секретарем Відділення математики і кібернетики АН УРСР (1983), академіком-секретарем Відділення математики АН УРСР (1988–1993).

Нагороджений Ленінською премією (1965), Державними преміями УРСР в галузі науки і техніки (1980, 1996, 2000), преміями ім. М. М. Крилова (1969), ім. М. М. Боголюбова за роботи з нелінійної механіки (1993), ім. М. О. Лаврентьєва НАН України (1999), орденом Ярослава Мудрого п'ятого ступеню в зв'язку з п'ятиріччям незалежності України (1996), орденом Ярослава Мудрого IV ст. за визначні заслуги з розвитку вітчизняної науки, створення національних наукових шкіл, зміцнення науково-технічного потенціалу (2002), орденом Богдана Хмельницького (2001). Відзнака НАН України «За наукові досягнення» (2006), Срібна медаль «За заслуги перед наукою і людством» АН Чехословаччини (1971). Президентом В'єтнаму нагороджений «Медаллю Дружби» за вагомий внесок у розвиток наукового співробітництва і підготовку кадрів (2000). Золота медаль ім. О. М. Ляпунова АН СРСР (1986, 1996), Срібна медаль ім. М. В. Остроградського (2001), Золота медаль імені Вернадського Національної Академії Наук України (2007). Присвоєно звання Герой України з врученням ордена Держави (2007).

Життя Юрія Олексійовича Митропольського обірвалося 14 червня 2008 р. Ю. О. Митропольський опублікував близько 750 праць. Серед них понад 50 фундаментальних монографій, в більшості перекладених на іноземні мови. Розробки з дослідження систем з повільно змінними параметрами, які ввійшли до його фундаментальної монографії «Проблеми асимптотичної теорії нестаціонарних коливань» та результати М. М. Крилова та М. М. Боголюбова з асимптотичних методів отримали світове визнання і дістали назву – асимптотичні методи Крилова–Боголюбова–Митропольського.

## 3.2. Формування наукової школи Ю. О. Митропольського як дочірньої школи М. М. Боголюбова в галузі математичної фізики

Розгляд закономірностей розвитку науки в результаті вивчення діяльності наукових шкіл дозволяє більш глибоко простежити формування багатьох наукових понять, ідей, теорій, повніше усвідомити процес розвитку науки. Існує чимало визначень поняття «наукова школа». Під ним розуміють дослідницький колектив, напрямок в науці (М. Г. Ярошевський), особливу наукову атмосферу (П. К. Анохін), своєрідний образ мислення (М. М. Семенов), неформальний науковий колектив, який формується при визначному вченому (К. А. Ланге), співтовариство вчених, які розробляють певну науково-дослідну програму (В. Б. Гасілов), специфічну форму організації наукових досліджень, основою якої є самоорганізація (Є. З. Мірська) тощо.

Ю. О. Храмов вперше на основі аналізу історико-наукового матеріалу, висловлювань вчених, в яких містяться ті чи інші риси наукової школи, розробив робочу модель сучасної наукової школи, виділив її характерні риси, розкрив умови, які приводять до виникнення наукової школи [168, 169]. Згідно з цією моделлю сучасну наукову школу визначимо як неформальну творчу співдружність учених різних поколінь високої кваліфікації на чолі з науковим лідером, об’єднаних спільністю підходів до розв’язання проблеми, стилем роботи та мислення, оригінальністю ідей та методів їх реалізації, яка дістала значні результати та завоювала авторитет і громадське визнання в даній галузі знання. Найповніше відображають специфіку і характерні особливості таких творчих об’єднань та є критеріями для пошуку в історії науки співтовариств подібного типу такі основні ознаки наукової школи:

– наявність наукового лідера – видатного вченого, який володіє вмінням відбирати творчу молодь;

– стиль роботи;

– стиль мислення;

– наукова ідеологія, наукова концепція, науково-дослідна програма;

– особлива наукова атмосфера;

– висока кваліфікація дослідників, значущість одержаних ними наукових результатів, високий авторитет у даній галузі.

В попередньому підрозділі реконструйовано портрет Ю. О. Митропольського як вченого, людини, педагога. Він багато сил і часу віддавав своїм учням, в яких цінував працьовитість, ретельність, акуратність, чесність, помічав здібних молодих людей і залучав їх до науки. Ю. О. Митропольський був відповідальний за розпочате дослідження, скромний, тактовний, поважав думки інших фахівців, простий у спілкуванні, користувався повагою серед колег, аспірантів, студентів. Зокрема, А. М. Самойленко, характеризуючи свого вчителя, вказував: «Ю. О. Митропольський – талановитий організатор науки, досвідчений педагог, вихователь наукових кадрів» [122]. Вражає простий перелік наукових результатів Юрія Олексійовича: розвиток методу дослідження одночастотних процесів у коливальних системах; створення й математичне обґрунтування алгоритмів побудови асимптотичних розкладів нелінійних диференціальних рівнянь, що описують нестаціонарні коливальні процеси; дослідження систем нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливальні процеси в гіроскопічних системах і сильно нелінійних системах; розвиток теорії інтегральних багатовидів; розробка методу усереднення для рівнянь із повільно змінними параметрами, з недиференційованими і розривними параметрами; розвиток методу прискореної збіжності в задачах нелінійної механіки; розвиток звідності нелінійних диференціальних рівнянь із квазіперіодичними коефіцієнтами.

Всі ці якості дозволили Ю. О. Митропольському стати лідером наукового колективу, відмінна риса якого – глибокий теоретичний аналіз, доведення теорії до розв'язання актуальних задач [110, с. 272].

Використовуючи модель наукової школи Ю. О. Храмова, проведемо ідентифікацію неформального наукового колективу, очолюваного Ю. О. Митропольським з науковою школою. Її створенню сприяли безпосередньо:

– активна робота Ю. О. Митропольського на відповідальних посадах завідувача відділу математичної фізики (1953–2001) та заступника директора (1951, 1955–1958) і директора (1958–1988)

Інституту математики НАН України, завідувача кафедри диференціальних рівнянь (1951–1953 рр. та 1956–1958 рр.) Київського університету ім. Т.Г. Шевченка. Багато уваги він приділив також організації Інституту прикладної математики в Донецьку, Інституту прикладних проблем математики і механіки у Львові, Інституту геотехнічної механіки в Дніпропетровську тощо;

– викладацька робота Ю. О. Митропольського на механіко-математичному факультеті Київського університету (1949–1990 рр.). Його лекції завжди були наповнені новими ідеями, останніми досягненнями науки. Основні результати з методу інтегральних багатовидів були темами дипломних і курсових робіт студентів, загальних і спеціальних курсів Юрія Олексійовича: теорії коливань, нелінійної механіки, коливання систем з розподіленими параметрами, механіки тіла змінної маси, математичної фізики та спеціальних функцій (для фізиків), загального курсу диференціальних рівнянь (для геологів), теорії поля, інтегральних багатовидів.

– Ю. О. Митропольський значну увагу приділяв популяризації математичних знань і досягнень, виступав з науково-популярними лекціями по радіо, телебаченню, перед інженерами, викладачами математики, студентами, учнями старших класів середніх навчальних закладів. З 1953 р. при Інституті математики АН УРСР почав роботу семінар з математичної фізики і теорії нелінійних коливань, керівником якого він був.

– Юрій Олексійович одержав фундаментальні результати з розвитку асимптотичних методів нелінійної механіки, якісних методів теорії диференціальних рівнянь, дослідження коливальних явищ в нелінійних системах;

– Ю.О. Митропольський користувався високим авторитетом серед вчених. Він був організатором міжнародних симпозіумів і конференцій з нелінійних коливань в Києві, Берліні, Празі, Варшаві;

– колективна розробка запропонованих ним наукових ідей, надання учням свободи наукової творчості, вміння їх зацікавити.

Зокрема, у кабінеті Ю. О. Митропольського навпроти письмового столу висіла дошка, списана формулами. Наукові суперечки виникали у цьому кабінеті мало не щогодини. І тоді дошки ставало замало: йшли у хід папірці з директорського столу, коробки від сигарет… [170, с. 86].

Праці Ю. О. Митропольського характеризуються теоретичною глибиною, практичною цінністю, всебічним дослідженням проблеми. В його школі продовжувалися традиції наукової теоретичної школи М. М. Боголюбова, особливістю якої була фундаментальність і широта охоплення актуальних проблем теоретичної та математичної фізики.

Як згадував Ю. О. Митропольський, на початку 50-х рр. М. М. Боголюбов сказав: «Юрію Олексійовичу, я відходжу від нелінійної механіки, мої наукові інтереси тепер зосереджуються в напрямі теоретичної фізики, а нелінійну механіку я віддаю Вам» [107, с. 150]. Проте їхня співпраця плідно розвивалася. «Одним з найбільш істотних внесків у розвиток нелінійної механіки, та, відповідно, школи з нелінійної механіки, вже після того, як Микола Миколайович основні зусилля спрямував на розвиток питань теоретичної фізики, – писав Ю. О. Митропольський – стала наша спільна монографія «Асимптотичні методи в теорії нелінійних коливань», що виходила з 1955 р. чотирма виданнями в СРСР та була перекладена на п'ять мов (німецьку, французьку, англійську, японську та китайську)» [171, с. 150].

Таким чином, вже на початку 50-х рр. склалися сприятливі умови і структури для формування наукової школи Ю. О. Митропольського: «науковий лідер – вищий учбовий заклад – інститут – семінар». В такій структурі найефективніше працює колектив дослідників на чолі з науковим лідером. Ю. О. Митропольський вмів відбирати творчу молодь, залучати її до наукової роботи.

Вироблення стилю і методу досліджень, підходу до розуміння явищ, наукової ідеології сприяє перетворенню наукового колективу у творчу співдружність, відрізняє одну наукову школу від іншої. Особливість школи Ю. О. Митропольського – всебічність і глибина теоретичного аналізу проблеми, що розглядається, практична цінність і актуальність дослідження. А. А. Мартинюк, характеризуючи стиль і методи досліджень Ю. О. Митропольського, відмічає, що вони «є продовженням традицій, започаткованих М. М. Криловим і М. М. Боголюбовим. Це, насамперед, точні постановки задач нелінійної механіки і строгі методи їх розв'язання. Намагання отримати остаточний результат у формі, придатній для інженерних застосувань, є однією з вражаючих рис його творчого методу»*.

У А. М. Самойленка з Юрієм Олексійовичем з перших днів спільної роботи відносини складалися за формулою вчитель-учень. Ю. О. Митропольський нагадував, що доповідь треба розповідати вільно, легко, тоді можна керувати увагою аудиторії, завоювати її [122]. А. М. Самойленко також вказував на доступність учнів до Ю. О. Митропольського, зокрема, Д. І. Мартинюк міг серед ночі зателефонувати до Юрія Олексійовича і сказати, що він десь неправильно щось зробив. «Приблизно те ж саме ви почуєте з уст любого з ким би ви зустрічалися. Якщо вони кажуть, що він така відкрита людина – не вірте… Юрій Олексійович дуже складна, дуже складна індивідуальність», – каже А. М. Самойленко [124].

Таким чином, в Києві з 50-х рр. почала зароджуватись наукова школа Ю. О. Митропольського, яка користувалася великим авторитетом як на Україні, так і за її межами. На підтвердження цього доктор технічних наук К. Рагулькіс писав: «Ю. О. Митропольський зробив значний внесок в теорію нелінійних коливань. Створена і очолювана ним школа з розвитку асимптотичних методів в теорії нелінійних коливань є провідною» [110, с. 267].

Ядро наукової школи Ю. О. Митропольського складають: академік НАН України А. М. Самойленко, який є директором Інституту математики НАН України, засновником наукової школи з теорії багаточастотних коливань та теорії імпульсних систем; академік НАН України О. М. Шарковський – завідувач відділу теорії динамічних систем Інституту математики АН УРСР; академік НАН України А. А. Мартинюк – завідувач відділу Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка. Багато серед його учнів професорів: В. О. Гробов, В. П. Рубаник, П. М. Сеник, В. І. Фодчук, А. Ф. Шестопал, А. А. Березовський, Г. П. Хома, К. Я. Кухта, Д. І. Мартинюк, В. Г. Самойленко, О. Б. Ликова, О. К. Лопатін, Т. Г. Стрижак, а також Ф. У. Носиров, Е. Ф. Файзибаев (Узбекистан), Степанович-Хедрик Катица (Сербія), Нгуен Донг Ань, Нгуен Тіен Кхіем (В’єтнам).

* Приватне повідомлення автору.

Школа Ю. О. Митропольського мала певний вплив на рівень вищої освіти, готуючи висококваліфікованих фахівців у галузі диференціальних рівнянь. Учень Юрія Олексійовича А. М. Самойленко очолив вже дочірню школу з інтегральних і диференціальних рівнянь, в якій застосовуються методи, розроблені в школі Ю. О. Митропольського. А. М. Самойленко підготував близько 76 кандидатів і 24 докторів наук. Серед його учнів – доктори наук М. О. Перестюк, М. Й. Ронто, В. Л. Кулік, І. О. Парасюк, В. Б. Мосеєнков, С. Д. Борисенко, Р. І. Петришин, Я. А. Прикарпатський, В. І. Ткаченко, О. М. Станжицький, Ю. В. Теплинський та ін. Вчені цієї школи підтримують тісні наукові контакти з математиками багатьох країн світу, зокрема Росії, Німеччини, Угорщини, Болгарії, Греції, США, Канади, проводять спільні наукові конференції, виконуючи разом математичні проекти.

## 3.3. Внесок наукової школи Ю. О. Митропольського

Ідеї і методи наукової спадщини Ю. О. Митропольського в галузі нелінійної механіки використовувались і розвивались його учнями. З 1953 р. при Інституті математики АН УРСР почав роботу семінар з математичної фізики і теорії нелінійних коливань, керівником якого був Ю. О. Митропольський.

Так, на ньому учень Ю. О. Митропольського Борис Ілліч Мосеєнков (Київський університет) показав застосування асимптотичних методів до рівнянь в частинних похідних з нелінійними крайовими умовами і можливість їх використання для дослідження одночастотних коливань. Доповіді іншого учня Ю. О. Митропольського – Петра Михайловича Сеника[4] (Львів) було присвячено

[4] В 1961 р. захистив кандидатську дисертацію «Розв'язання прямої задачі динаміки в теорії нелінійних коливань асимптотичним методом», а в 1969 р. – докторську дисертацію «Покращені асимптотичні наближення в теорії суттєво нелінійних стаціонарних рухів».

У період з 1970 р. по 1977 р. завідував кафедрою механіки та автоматизації машинобудування Інституту інженерної механіки та транспорту у Львові завідував д.ф.-м.н., проф. Сеник П. М. Розробив теорію спеціальних періодичних Ateb-функцій. Вона знайшла своє застосування для дослідження сильно нелінійних коливань систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами. Його учні захистили 6 кандидатських та одну докторськуу дисертацію.

коливальним процесам в слабколінійних і суттєво нелінійних системах. Доповіді учня Ю. О. Митропольського Зелмана Єфимовича Філлера (Донецьк) присвячено асимптотичним методам розв’язання систем диференціальних рівнянь, які описують динаміку коливних систем з двигуном обмеженої потужності, учнів Олексія Костянтиновича Лопатіна[5] і Дмитра Івановича Мартинюка[6] –

[5] Доктор фізико-математичних наук, професор. Докторську дисертацію «Теоретико-груповий підхід в асимптотичних методах нелінійної механіки» захистив у 1988 р.

Спеціаліст в галузі диференціальних рівнянь та нелінійних коливань. Лауреат державної премії України в галузі науки і техніки (1996 рік). Звання одержано за цикл праць «Нові математичні методи в нелінійному аналізі».

Має дві наукові монографії (одна англійською мовою), два підручники, 80 наукових робіт, підготував чотирьох аспірантів.

Працює в Національній академії управління на кафедрі інформаційних технологій та інформатики.

[6] Д. Мартинюк народився 11 березня 1942 року в селі Іванківці Дунаєвецького району Хмельницької області в селянській сім’ї.

Середню освіту юнак здобував у Іванківській семирічній та в Горчичнянській середній школах, навчався в Кам'янець-Подільському державному педагогічному інституті. Після закінчення інституту був зарахований асистентом кафедри вищої математики фізико-математичного факультету. У 1965 році Д. І. Мартинюк вступив до аспірантури Інституту математики АН УРСР, де під керівництвом Ю. О. Митропольського почав займатися дослідженням диференціальних рівнянь із запізненням. У 1967 році достроково закінчив аспірантуру та в жовтні того ж року успішно захистив кандидатську дисертацію «Періодичні розв’язки нелінійних систем диференціальних рівнянь з аргументом, що запізнюється».

З 1 вересня 1967 року Дмитро Іванович зарахований асистентом кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського державного університету, у 1968 році обраний на посаду старшого викладача, а в 1969 році – доцента цієї кафедри. З 1979 по 1983 рік він виконував обов’язки заступника завідувача кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь з наукової роботи.

У 1982 році Д. І. Мартинюк захистив докторську дисертацію на тему «Періодичні і квазіперіодичні розв’язки диференціально-різницевих і різницевих рівнянь», і через рік його було обрано за конкурсом на посаду професора кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь.

Працюючи на цій посаді, Дмитро Іванович читав курси звичайних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь, спеціальні курси з теорії диференціальних рівнянь із запізненням, різницевих рівнянь. Ці спеціальні курси відзначалися широким використанням новітніх наукових досягнень. З 1988 до 1995 рік Д. І. Мартинюк очолював кафедру математичної фізики механіко-математичного факультету. Серед його учнів 9 кандидатів наук.

У 1995 році за власним бажанням Дмитро Іванович залишає посаду завідувача кафедри математичної фізики, повертається на кафедру інтегральних та диференціальних розвитку методу усереднення. Поширенню принципу усереднення і асимптотичних методів нелінійної механіки на нелінійні коливальні системи, які знаходяться під дією випадкових сил, присвячено доповіді учня Ю. О. Митропольського Віктора Григоровича Коломійця. Ці дослідження актуальні в радіотехніці, радіофізиці, акустиці, вимірювальній техніці, гідроаеромеханіці тощо. Учень Юрія Олексійовича Віктор Іванович Климчук застосував принципи усереднення та асимптотичні методи до гіроскопічних систем.

Велике значення для роботи семінару мало видання «Праць семінару з математичної фізики і теорії нелінійних коливань» (1963) [172, 173], а також публікація значної кількості виголошених на ньому доповідей в міжвузівському збірнику «Математична фізика» [174] та збірнику «Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань» (1971) [175]. В останньому містилися дослідження з розробки нових алгоритмів для отримання асимптотичних розкладів розв’язків нелінійних систем та застосування асимптотичних методів. Зокрема, розглянуто задачі про поперечні коливання балки під дією системи мас і прикладених до них пульсуючих сил. Результати, отримані співробітниками відділу протягом 60-тих рр. оформлено у вигляді 13 монографій і збірників, значної кількості статей в періодичних виданнях, 27 кандидатських і 4 докторських дисертацій. Крім того, співробітниками відділу, зокрема Ольгою Борисівною Ликовою[7], проведено роботу по підготовці до видання тритомного збірника праць М. М. Крилова, праць Міжнародного симпозіуму з нелінійних коливань в трьох томах та першого тому праць М. М. Боголюбова.

---

рівнянь, де і працює до останнього дня свого життя – 27 жовтня 1996 року. На механіко-математичному факультеті Дмитро Іванович пропрацював понад 29 років. У травні 2002 року Інститутом математики НАНУ, Київським національним університетом імені Тараса Шевченка та Кам’янець-Подільським державним педагогічним університетом була проведена міжнародна конференція – П’яті Боголюбовські читання – присвячена 60-річчю від дня народження Д. І. Мартинюка.

[7] У 1957 році захистила кандидатську дисертацію «Про існування і поведінку інтегральних багатовидів для систем нелінійних диференціальних рівнянь, що містять малий параметр».

У 1985 році захистила докторську дисертацію «Інтегральні багатовиди в теорії нелінійних диференціальних рівнянь».

Учень Ю. О. Митропольського академік НАН України Олександр Миколайович Шарковський[8] заклав основи топологічної теорії одновимірних динамічних систем. Він розвинув новий підхід до вивчення нелінійних крайових задач.

У працях Ю. О. Митропольського та його учнів 1957–1958 рр. набули розвитку ідеї М. М. Боголюбова з інтегральних багатовидів. Зокрема, було досліджено інтегральні багатовиди нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними параметрами. На основі методу інтегральних багатовидів дано обґрунтування одночастотного методу для нелінійних коливальних систем, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями з повільно змінними параметрами.

За допомогою методу інтегральних багатовидів проведено теоретико-якісні дослідження диференціальних рівнянь, що містять малий параметр. Розвитку і узагальненню методу інтегральних багатовидів присвячений цикл доповідей Ю. О. Митропольського та його учениці О. Б. Ликової. Цікавими є праці О. Б. Ликової, в яких для різних класів нелінійних диференціальних рівнянь доведено існування і встановлені властивості локальних інтегральних багатовидів. Локальний багатовид – це частина інтегральної поверхні, тобто багатовид на деякій області, яка є підмножиною області визначення розв'язків вихідних рівнянь. У результаті зміни параметрів багатовиду з часом багатовид може вийти з області свого визначення. В 1964 р. О. Б. Ликова довела існування двовимірного локального інтегрального багатовиду, який має властивість умовної стійкості, на якому розгляд вихідної

[8] Народився 7.12.1936 в м. Києві. Закінчив з відзнакою КДУ ім Т. Г. Шевченка (1958), аспірантуру Інституту математики АН УРСР достроковим захистом кандидатської дисертації (1961), захистив докторську дисертацію (1969).

Член-кореспондент АН УРСР (1978), дійсний член НАН України (2006). Завідувач відділом диференціальних рівнянь Інституту математики АН УРСР (1974-1989), відділом теорії динамічних систем Інституту математики (з 1989), який створено з його ініціативи. Читав загальні курси та лекції з теорії динамічних систем на механіко-математичному факультеті КДУ ім. Т. Г. Шевченка (1968-1984), професор (1976), в Національному педагогічному університеті ім. М. Драгоманова (з 2002). Верховної Ради (1984).

Автор майже 250 наукових праць, з них п'ять монографій, які написані у співавторстві з учнями.

нескінченновимірної системи зводиться до розгляду двох рівнянь. Також методом інтегральних багатовидів встановила існування квазіперіодичних розв'язків у канонічній системі Гамільтона, що зазнає впливу малих збурень. Особливо цінним є запровадження нею поняття локального інтегрального багатовиду, формулювання умов, які забезпечують його існування, та аналіз поведінки розв'язків на і-му околі таких багатовидів. У працях О. Б. Ликової метод інтегральних багатовидів застосовано до дослідження питань стійкості, проведено аналіз структури розв'язків рівнянь певного типу на двовимірному багатовиді в «резонансному» і «нерезонансному» випадках [176, 177, 178].

У дослідженнях Ю. О. Митропольського та О. Б. Ликової (1965) цей метод застосовано для доведення існування квазіперіодичного розв'язку деякої системи рівнянь, близької до гамільтонової.

В 1968 та 1973 рр. О. Б. Ликова досліджувала застосування інтегральних багатовидів до розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, близьких до інтегрованих, та для систем з нескінченною кількістю степенів вільності [179, 117, 161]. Книга Ю. О. Митропольського та О. Б. Ликової «Лекції з методу інтегральних багатовидів» (1969) містить результати М. М. Боголюбова та авторів з теорії інтегральних багатовидів і з дослідження поведінки інтегральних кривих на багатовидах для рівнянь, які містять малий параметр, а також результати співробітників відділу математичної фізики Інституту математики АН УРСР К. В. Задираки та В. І. Фодчука[9] (учня Ю. О. Митропольського) [180, 181, 182, 183]. Ці наукові дослідження проведені в контексті результатів, отриманих в галузі інтегральних багатовидів іноземними вченими, зокрема С. Ділiберто, Дж. Хейлом, В. Кайнером, А. Келлі, Р. Сакером.

[9] Василь Іванович Фодчук (1936 – 1992). Доктор фізико-математичних наук, профессор. Завідував кафедрою прикладної математики Чернівецького національного університету ім. Ю. Федьковича. в 1972 – 1992 рр. Випускник кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету. В 1972 р. захистив докторську дисертацію „Асимптотичні методи нелінійної механіки в теорії диференціально-різницевих рівнянь». Під його керівництвом захистили кандидатські дисертації сім аспірантів: А. Холматов, М. С. Бортей, Я. Й. Бігун, І. М. Черевко, І. І. Клевчук, І. В. Якімов, М. М. Попов. Має 130 публікаціях і монографії «Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння» (1996 р.).

При застосуванні до дослідження рівнянь, які описують поведінку інтегральних кривих на багатовиді, методу усереднення вивчено явище синхронізації, спостережуване в нелінійній системі. Ці дослідження викладено в монографії Ю. О. Митропольського і О. Б. Ликової «Інтегральні багатовиди в нелінійній механіці» (1973). Розглянуто рівняння, близьке до точно інтегрованого, для нього доведено існування і встановлено властивості двовимірного інтегрального багатовиду. Ю. О. Митропольський і О. Б. Ликова досліджували також методом інтегральних багатовидів поведінку розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, які описують повільні і швидкі рухи в околі положення рівноваги, також сім'ю періодичних розв'язків відповідних вироджених рівнянь. Для випадку гільбертового простору сформульовано і доведено теорему, аналогічну до основної теореми М. М. Боголюбова про існування одновимірного інтегрального багатовиду для рівняння в стандартній формі. Розглянуто рівняння, близьке до точно інтегрованого, доведено для нього існування і встановлено властивості двовимірного інтегрального багатовиду. Досліджено вплив малого збурення на релаксаційну систему, застосовано метод інтегральних багатовидів до дослідження стійкості при постійно діючих збуреннях, вивчено нерегулярно-збурені системи диференціальних рівнянь (системи з малим параметром при старшій похідній, які зустрічаються в актуальних задачах радіотехніки, автоматичного регулювання, хімічної кінетики), властивості інтегральних багатовидів для систем з аргументом, що запізнюється, застосування методу інтегральних багатовидів до доведення існування і стійкості обмеженого розв'язку нерегулярно-збуреної системи з запізненням.

Дослідження спектральної теорії лінійних операторів дозволило розвинути теорію інтегральних багатовидів для різних класів нелінійних диференціальних рівнянь в банаховому просторі.

Результати досліджень коливань у системах з розподіленими параметрами за допомогою асимптотичних методів вперше підсумовано в монографії Ю. О. Митропольського та його учня Бориса Ілліч Мосеєнкова «Дослідження коливань у системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи)» (1961) [184]. Цей метод переноситься на задачі дослідження одночастотних коливальних процесів в системах з розподіленими параметрами

[184, с. 38–120]. Обґрунтування його дано лише для систем з скінченним числом степенів вільності, тому перед авторами постала необхідність його загального математичного обґрунтування. За допомогою методу усереднення в енергетичній інтерпретації Ю. О. Митропольський і Б. І. Мосеєнков в цій праці досліджували ряд важливих практичних задач.

Поряд з новими результатами в монографії викладені попередні дослідження авторів з побудови асимптотичних розкладів та енергетичного методу, розглянуто деякі важливі для практики задачі, в яких досліджуються згинні та згинно-крутильні коливання, стаціонарні режими, нестаціонарні (при проходженні через резонанс), зокрема поперечні коливання стрижня під дією осьової квазігармонічної сили з сталою і змінною частотами [184, с. 39–44], поперечні коливання балки під дією рухомого вантажу і квазігармонічної сили [184, с. 45–50], поперечні коливання обертового валу подвійної жорсткості в перехідному режимі обертання [184, с. 51–73].

В цій монографії викладені і результати Б. І. Мосеєнкова з дослідження явищ при проходженні через параметричний резонанс у різних випадках дії зовнішньої сили, поперечно-крутильні коливання турбінної лопатки (стрижня несиметричного перерізу) з врахуванням внутрішнього тертя (результати М. В. Василенка) [184, с. 85–101], згинно-крутильні коливання стрижня з врахуванням внутрішнього розсіяння енергії результати Г. С. Писаренка) [184, с. 102–120] тощо. Зокрема, Г. С. Писаренко – учень М. М. Боголюбова один з перших застосував асимптотичні методи до дослідження нестаціонарного режиму поперечних коливань у системах з врахуванням розподілених мас, дослідив коливання стрижнів, лопаток турбін та інших деталей машин [185].

Ю. О. Митропольським дано перше систематичне і строге застосування асимптотичних методів до дослідження систем з розподіленими параметрами. Він розв’язав задачу про спільний вплив на стрижень (або балку) поздовжньої сили зі змінною частотою й поперечним навантаженням, що рухається з пульсуючою силою, задачу про коливання пластини, яка перебуває під впливом періодичних збурень і інших. Побудовано графіки проходження через резонанс. Основні результати, отримані

Ю. О. Митропольським разом з Б. І. Мосеєнковим у цьому напрямку ввійшли в монографії [186, 116]. Досліджуючи системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, близькі до «квазідифузійного» векторно-матричного рівняння, Юрій Олексійович та Д. Г. Кореневський в праці «Дослідження нелінійних коливань в системах з розподіленими параметрами і запізненням» (1968) виявили і докладно вивчили ряд нових властивостей коливальних процесів (явище параметричного резонансу тощо), які не мають аналогій в коливальних системах без запізнення [187]. Дослідження Ю. О. Митропольського та Б. І. Мосеєнкова стали основою для розгляду явищ у різних системах з нестаціонарними коливаннями в працях інших учнів Ю. О. Митропольського.

У фундаментальній монографії Ю. О. Митропольського та Б. І. Мосеєнкова «Асимптотичні розв'язки рівнянь в частинних похідних» (1976) розглянуто нелінійні крайові задачі з врахуванням нелінійності в рівняннях руху і крайових умовах, нелінійним рівнянням гіперболічного типу з врахуванням впливу випадкових сил і запізнення [188]. В ній особливої уваги заслуговує енергетичний метод. Було розглянуто згинні, крутильні, згинно-крутильні коливання в механічних пружних системах з врахуванням різних нелінійних характеристик і збурень. Доведено теореми про існування майже періодичних розв'язків хвильових рівнянь. Метод усереднення поширено на системи нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу. Ці результати отримали широке застосування при дослідженні нестаціонарних коливань в механічних системах з розподіленими параметрами, при дослідженні взаємодії хвиль в дисперсійному середовищі тощо. Досліджено асимптотичні властивості розв'язків інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь.

Учень Ю. О. Митропольського Григорій Петрович Хома (Тернопіль)[10] дослідив нестаціонарні коливання в механічних системах з розподіленими параметрами при поширенні хвиль у

---

[10] Професор кафедри вищої математики Тернопільської академії народного господарства.

У 1970 р. захистив кандидатську дисертацію «Про застосування принципу усереднення до гиперболічних систем першого порядку і гіперболічних рівнянь m–го порядку». У 1987 р. – докторську дисертацію «Конструктивні методи дослідження періодичних розв'язків хвильових рівнянь».

стратифікаційному середовищі та взаємодії їх у дисперсійному середовищі, розробив конструктивні методи дослідження періодичних розв'язків хвильових рівнянь [189, 190, 191, 192].

Асимптотичні методи застосовувались учнями Ю. О. Митропольського для побудови наближених розв'язків рівнянь, близьких до рівнянь з періодичними коефіцієнтами, а також до дослідження одночастотних коливань. Учень Ю. О. Митропольського О. М. Шарковський у 1968 р. вивчав цим методом динамічні системи, учень А. М. Самойленко[11] у 1962 р. досліджував рівняння з нерегулярною правою частиною. А. М. Самойленко застосував і обґрунтував 1963 р. метод усереднення для систем нелінійних диференціальних рівнянь з розривною правою частиною.

У 1963 р. М. М. Боголюбов розробив новий варіант методу послідовних замін змінних, який об'єднав метод прискореної збіжності з методом інтегральних багатовидів. У працях Ю. О. Митропольського побудовано загальний розв'язок нелінійних диференціальних рівнянь на торі. Ці дослідження розвинув А. М. Самойленко, в працях якого суттєва увага приділялася побудові теорії тороїдних багатовидів. Він побудував теорію збурень компактних інваріантних багатовидів динамічних систем, вивчив траєкторії в околі гладких компактних тороїдних інваріантних багатовидів динамічних систем,

---

[11] Народився 2.01.1938 в с. Потіївка Житомирської області. Закінчив механіко-математичний факультет Київського університету імені Тараса Шевченка за спеціальністю «математика» (1960). Аспірант Інституту математики АН УРСР (1960-63 рр.).

Кандидат фізико-математичних наук (1963, кандидатська дисертація – «Застосування асимптотичних методів до дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з нерегулярною правою частиною»), доктор фізико-математичних наук (1968, диференціальні рівняння, докторська дисертація «Деякі питання теорії періодичних і квазіперіодичних систем»). Працював в Інституті математики АН УРСР (1963-1974), в Київському університеті (з 1967). Старший науковий співробітник Інституту математики (1965-1974). Професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського університету (1974), завідувач кафедри диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського університету (1974 – 1987), завідувач відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України (з 1987), директор Інституту математики НАН України (з 1988). Член-кореспондент НАН України зі спеціальності «математика» (1978), дійсний член НАН України (1995).

Ю. О. Митропольський разом з А. М. Самойленком дослідив структуру диференційованих траєкторій на торі довільного розміру, розглянув питання звідності рівнянь з квазіперіодичними коефіцієнтами в працях «До питання про структуру траєкторій на тороїдальних багатовидах» (1964) [193, 194] та «Про побудову розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з квазіперіодичними коефіцієнтами за допомогою методу прискореної збіжності» (1965) [195]. А. М. Самойленко та Ю. О. Митропольський розглянули питання про приведення траєкторій на гладкому тороїдальному багатовиді довільного розміру та побудови фундаментальної матриці розв'язків лінійних систем з квазіперіодичними коефіцієнтами. Вони довели, що майже кожну систему з квазіперіодичними коефіцієнтами, які досить мало відрізняються від постійних, можна звести до системи з сталими коефіцієнтами. У дослідженнях М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського та А. М. Самойленка розвинутий метод послідовних замін з прискореною збіжністю названо методом прискореної збіжності. Ці результати ввійшли в монографію М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського та А. М. Самойленка «Метод прискореної збіжності в нелінійній механіці» (1969) [152].

Дослідження інваріантних тороїдальних багатовидів систем диференційних рівнянь з аргументом, що відхиляється, систем рівнянь з миттєвою дією, систем (диференціально-різницевих) рівнянь дозволили Ю. О. Митропольському і А. М. Самойленку в 70-х рр. з'ясувати особливості виявлення запізнення, імпульсної дії на багаточастотний коливальний процес, вказати умови існування та стійкості такого процесу, обґрунтувати застосування асимптотичних методів для їх аналізу [196, 197, 198, 199, 200].

А. М. Самойленко узагальнив принцип усереднення для рівнянь з нерегулярною правою частиною, дослідив неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра, отримав низку результатів з теорії інтегральних багатовидів, запропонував новий підхід до теорії збурень інваріантних тороїдальних багатовидів динамічних систем, пов'язаний з використанням функції Гріна для лінеаризованої задачі [201]. Він дістав світове визнання завдяки створенню теорії збурень інваріантних торів нелінійних динамічних систем на основі запровадженого нового математичного об'єкту – функції Гріна задачі про інваріантні тори, розробці асимптотичних методів інтегрування та аналізу багаточастотних коливань.

У 1965 р. А. М. Самойленко розвинув чисельно-аналітичний метод дослідження періодичних розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, який дозволяє знаходити їх періодичні розв'язки у вигляді рівномірно збіжної послідовності періодичних функцій. На основі цього методу учнем Ю. О. Митропольського Борисом Петровичем Ткачом[12] у 1967–1969 рр. вивчались особливості коливальних систем з розподіленими параметрами, а також розв'язки гіперболічних рівнянь в частинних похідних другого порядку з аргументами нейтрального типу, що відхиляються [202, 203].

Для дослідження коливальних систем з багатьма степенями вільності Ю. О. Митропольським і А. М. Самойленком розроблено й обґрунтовано на основі чисельно-аналітичного методу алгоритми асимптотичного інтегрування. Ці алгоритми доведено до практичних реалізацій на ЕОМ. Було досліджено квазіперіодичні коливання, явище внутрішнього резонансу, які виникають в багаточастотних системах. Обґрунтування можливості застосування цих методів для вивчення сильно нелінійних систем із запізненням та з'ясування впливу запізнення на існування розв'язків досліджено учнем Ю. О. Митропольського Д. І. Мартинюком[6] [118, 204, 205].

Наукові інтереси Д. І. Мартинюка були головним чином пов'язані з дослідженням квазіперіодичних розв'язків та інваріантних тороїдальних багатовидів для різницевих рівнянь та диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється. Він зробив вагомий внесок у розвиток теорії нелінійних коливань систем із запізненням, якісної теорії різницевих рівнянь.

Розвиваючи дослідження А. М. Самойленка[11], його учень М. Й. Ронто в 1976 р. розробив чисельно-аналітичні методи

[12] У 1968 р. захистив кандидатську дисертацію «Коливання систем з розподіленими параметрами нейтрального типу». У 1991 році – докторську дисертацію «Періодичні і квазіперіодичні розв'язки систем з розподіленими параметрами».

У 1991 р. захистив докторську дисертацію «Періодичні і квазіперіодичні розв'язки систем з розподіленими параметрами».

розрахунку періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь електричних кіл. Ці результати він виклав у спільній з А. М. Самойленком монографії «Чисельно-аналітичні методи дослідження періодичних розв’язків» [206].

На початку 50-х рр. у М. М. Боголюбова виникла ідея поширення асимптотичних методів на коливальні системи з післядією, які в більшості випадків описуються диференціальними рівняннями з аргументом, що відхиляється. До дослідження таких систем приводять фізичні і технічні задачі, в яких сила, що діє на матеріальну точку, залежить від швидкості і положення цієї точки не тільки в даний момент, але й і в попередній. Ці ідеї М. М. Боголюбова було розвинуто Ю. О. Митропольським спільно з Д. І. Мартинюком, Д. Г. Кореневським, В. І. Фодчуком. Вони розробили асимптотичні методи для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, та розглянули різні випадки сталих і повільно змінних коефіцієнтів цих рівнянь, дослідили явище резонансу. Ці дослідження викладені в монографіях Ю. О. Митропольського та Д. І. Мартинюка «Періодичні та квазіперіодичні коливання систем з запізненням» (1979) [207] та монографії Ю. О. Митропольського та А. М. Самойленка «Системи еволюційних рівнянь з періодичними та умовно періодичними коефіцієнтами» (1984) [208].

Розвитком цих досліджень займалися також А. М. Самойленко та його учень Микола Олексійович Перестюк[13].

---

[13] Н. 1946 року в с. Плоска Хмельницької області. У 1968 році закінчив механіко-математичний факультет Київського університету. Незмінно працює на кафедрі з 1969 року. 1972 року успішно захистив кандидатську дисертації на тему «Деякі питання дослідження нелінійних систем диференціальних рівнянь з миттєвими змінами».

У наукових дослідженнях молодого вченого центральне місце посідали питання теорії імпульсних систем та теорії інваріантних множин диференціальних і різницевих рівнянь. У 70-х та на початку 80-х років разом А. М. Самойленком ним були одержані результати пріоритетного характеру, що стосувались існування періодичних розв’язків нелінійних систем з імпульсною дією, обґрунтування методу усереднення та відшукання умов стійкості для таких систем. В цей час по суті відбувалося створення нового напрямку в теорії звичайних диференціальних рівнянь. У подальшому Миколі Олексійовичу вдалося досягти значних успіхів у розробці теорії майже періодичних розв’язків та теорії інтегральних множин для імпульсних систем.

У 1986 році М. О. Перестюк захистив докторську дисертацію «Коливні розв’язки диференціальних рівнянь з імпульсною дією та їх стійкість». Через рік йому було присуджено учене звання професора.

Розробляючи асимптотичні методи, А. М. Самойленко у 80-х рр. розробив фундаментальні та сильні алгоритми побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь для розривних та імпульсних систем. Для останніх вперше було доведено фундаментальні теореми М. М. Боголюбова з обґрунтування методу усереднення на скінченному та нескінченному інтервалі часу, встановлено ознаки існування розривних граничних циклів, доведено теореми існування розв'язків, які відповідають коливальним режимам [209, 210, 211]. В результаті ним створено теорію інтегральних багатовидів імпульсних систем [212].

Значний внесок у розвиток асимптотичних методів міститься у працях Ю. О. Митропольського та його учня В. Г. Коломійця, присвячених дослідженню впливу випадкових збурень на коливальні процеси в нелінійних системах [213, 214, 215, 216, 217]. Вони дали строге математичне обґрунтування методу усереднення стохастичних диференціальних рівнянь у стандартній формі [213, 214, 215]. Дослідженню нелінійних систем, що описуються нелінійними стохастичними диференціальними рівняннями, присвячена праця 1967 р. С. А. Василишина та В. Г. Коломійця. Вплив на коливальні процеси в нелінійних системах випадкових збурень описується стохастичними диференціальними рівняннями, розв'язками яких є дифузійні марковські процеси. Використовуючи послідовно асимптотичні методи нелінійної механіки та методи теорії марківських процесів, Юрій Олексійович і В. Г. Коломієць дослідили вплив «білого шуму» на автономні та неавтономні квазілінійні коливальні системи, які описуються різноманітними рівняннями, визначили ряд характеристик випадкових коливальних процесів (частоту коливань, стаціонарну густину розподілу амплітуди, яка використовується при аналізі стійкості стаціонарних амплітуд тощо). Цим питанням присвячено численні статті Ю. О. Митропольського і В. Г. Коломійця, а також монографія Ю. О. Митропольського і Нгуєн Донг Аня [218]. Поява цієї праці вплинула на подальший розвиток методу інтегральних багатовидів у нелінійній механіці, зокрема на праці самого Ю. О. Митропольського.

В дослідженнях Ю. О. Митропольського, В. П. Рубаника[14], В. І. Фодчука[9], В. Г. Коломійця, Д. Г. Кореневського та інших вчених асимптотичні методи нелінійної механіки узагальнюються і успішно застосовуються до вивчення одночастотних і багаточастотних коливань у складних коливальних системах. Зокрема, в праці В. П. Рубаника «Застосування асимптотичних методів до дослідження багаточастотних коливань в нелінійних системах» викладено результати досліджень багаточастотних резонансних коливань при наявності внутрішніх і комбінаційних резонансів, при впливі багаточастотних збуджуючих сил тощо [219]. Досліджено флуктуації двохчастотних автоколивань в струнному генераторі з додаванням у першому рівнянні флуктуаційного члена. В 1962 р. у працях В. П. Рубаника[14] та В. І. Фодчука[9] метод усереднення застосовувався до диференціально-різницевих рівнянь [220, 221, 222]. Доповіді В. І. Фодчука 1963 р. присвячено деяким питанням диференціальних рівнянь з запізнюючим аргументом і малим параметром, зокрема дослідженню інтегральних багатовидів, поширенню асимптотичних методів і принципу усереднення на диференціальні рівняння з запізнюючим аргументом. Обґрунтування заміни системи усередненою системою дано в працях А. Халаная 1960 р. на основі узагальнення основної теореми Боголюбова.

Поширенню методів інтегральних багатовидів на нескінчені системи рівнянь, на різні класи рівнянь, які містять «малий» і «великий» параметр, на рівняння у функціональних просторах присвячено статті Ю. О. Митропольського, О. Б.Ликової[7], Дж. Хейла, Я. Курцвейля та ін. Проблема дослідження інтегральних багатовидів у системах з запізненням досліджувалася в працях А. Халаная [223], В. І. Фодчука, Дж. Хейла [224], Ю. О. Митропольського [157, 158, 225, 226, 227]. Для систем

[14] З 1953 до 1960 роки завідував кафедрою диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету В. Ним розроблено декілька наближених методів дослідження коливань у квазілінійних систем із запізненням, за допомогою яких проведено вивчення процесів проходження коливної системи із запізненням через основний, дробовий та комбінаційний резонанси.

У 1953 р. Василь Павлович Рубаник захистив кандидатську дисертацію «Резонансні явища в деяких нелінійних системах». У 1964 р. захистив докторську дисертацію «Коливання квазілінійних систем з зв’язками, що запізнюються».

диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній (сингулярно збурених рівнянь), для систем з повільними і швидкими змінними нові результати містяться в працях Дж. Хейла, Ю. О. Митропольського, О. Б. Ликової, докторській дисертації К. В. Задираки. До сингулярно збурених рівнянь приводять актуальні задачі радіотехніки, автоматичного регулювання, хімічної кінетики тощо.

Теореми А. Халаная та В. П. Рубаника В. І. Фодчук у 1965 р. узагальнив на більш широкий клас певного виду рівнянь. За допомогою методу гармонічної лінеаризації йому вдалося 1968 р. поширити метод побудови інтегральних багатовидів на рівняння з запізненням та довести їх стійкість [228, 229]. Він розвинув метод інтегральних багатовидів до дослідження диференціально-різницевих і диференціально-функціональних рівнянь, розглянув застосування цього методу [230]. В системах управління технологічними процесами післядія пов'язана з переносом тепла та матеріалом, кінцевим часом руху виробу від одного пристрою до іншого або кінцевим часом обробки інформації. В радіотехнічних та електронних пристроях запізнення зумовлено кінцевою швидкістю руху носіїв електричних зарядів і часом проходження електромагнітними хвилями відстаней, які у високочастотних пристроях стають порівняльними з періодом коливань і нехтувати цим запізненням не можна. Для характеристики внутрішнього тертя матеріалів у механічних системах, в радіоелектронних системах для отримання додаткових ефектів вводиться запізнення. В. П. Рубаник застосував метод усереднення до систем із запізненням. За допомогою методу усереднення він побудував наближені розв'язки квазілінійних систем із запізненням, яке входить в малі нелінійні члени як для випадку вільних коливань системи, так і для вимушених при наявності в системах резонансів [231, 232]. У монографії В. П. Рубаника «Коливання складних квазілінійних систем з запізненням» (1969) розглядаються складні квазілінійні системи з запізненням, які описуються рівняннями в частинних похідних та пов'язані з ними звичайні диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється. В монографії викладено і результати учнів В. П. Рубаника.

Ю. О. Митропольський з учнем О. К. Лопатіним[5] поширив асимптотичні методи на дослідження хвильових рівнянь. Тут ними було розглянуто рівняння Клейна-Гордона, яке перебуває під дією малих збурень, з повільно змінними параметрами, з періодичним збуренням; а також модельне рівняння Брезертона при наявності повільно змінних параметрів [233, 234].

О. К. Лопатін вивчив вплив гармонік в методі гармонічного балансу асимптотично розділяючи рівняння для амплітуд при кожній гармоніці на незалежні [235]. Істотним розвитком Ю. О. Митропольським та О. К. Лопатіним методу усереднення М. М. Боголюбова є новий підхід до дослідження диференціальних рівнянь із малим параметром [236]. Вони запропонували алгоритм перетворення збуреної системи на спеціально побудовану систему порівняння та модальний підхід опису хвильових і коливальних процесів, що ґрунтується на класичному асимптотичному методі. В основу цього методу покладено властивості групових алгебр і перехід до гільбертових просторів, узагальнюючий розклади в класичні ряди Фур'є. Ідею нового підходу закладено в самому методі усереднення, однак для її реалізації необхідно було залучення істотно нового апарату – теорії неперервних груп перетворень. Відповідно до цього підходу метод усереднення варто інтерпретувати як метод усереднення, що перетворює систему вихідних рівнянь (збурених) з нерозділеними змінними в систему з розділеними повільними й швидкими змінними. Така властивість асимптотичного поділу рухів у методі усереднення має яскраво виражений теоретико-груповий характер. Отримані тут Ю. О. Митропольським результати частково базуються на запропонованому А. Я. Повзнером підході до узагальнення асимптотичних методів нелінійної механіки, який використовує ряди Лі як перетворення. Теоретико-груповий підхід до теорії асимптотичних методів, спираючись на результати А. Я. Повзнера, який в основу свого методу поклав відому формулу Кемпбелла–Хаусдорфа, розвинено О. К. Лопатіним. Результати цих досліджень лягли в основу монографії Ю.О. Митропольського та О. К. Лопатіна[5] «Теоретико-груповий підхід в асимптотичних методах нелінійної механіки» (1988). Поширюючи аналітичні методи дослідження систем диференціальних рівнянь на теорію збурень, вони вперше розв'язали задачу збурення на алгебрі Лі та побудували оператор проектування на алгебру централізатора системи нульового наближення, що узагальнює операцію усереднення [237, 238]. Цей підхід суттєво узагальнює метод усереднення М. М. Боголюбова. Було розглянуто широкий клас звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними. Спільно з А. М. Самойленком[11] Ю. О. Митропольський розробив аксіоматичну теорію методу усереднення. Вони встановили оцінку близькості точного розв'язку та його n-го наближення.

Формула Кемпбелла-Хаусдорфа і спеціальні припущення про спектральні оператори, кожен з яких асоційований з усередненою системою, дозволили розробити конструктивний алгоритм і сформулювати низку теорем про поділ змінних на швидкі й повільні в перетвореній системі та одержати інші результати. Вперше розроблена теорія збурень для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних загального вигляду. Для систем з повільними і швидкими змінними доведено декомпозованість при загальних умовах, які накладаються на праві частини. Розглянуто задачу асимптотичного розщеплення системи рівнянь n-го порядку руху літального апарату, коли в нульовому наближенні рівняння розділяються на незалежні підсистеми поздовжнього і бокового руху [109].

Істотні продовження досліджень з теорії тороїдальних інваріантних багатовидів виконано учнем Ю. О. Митропольського Віктором Леонідовичем Куликом[15] [239]. Він вивчив проблеми стійкості нелінійних розширень динамічних систем на торі.

Ю. О. Митропольський розглянув інтегральні багатовиди диференціальних рівнянь з повільно змінними параметрами, рівнянь зі змінними коефіцієнтами в гільбертовому просторі. Спільно з А. М. Самойленком[11], О. Б. Ликовою[7] і В. І. Фодчуком[9] він встановив теореми існування інтегральних багатовидів для різних класів диференціальних рівнянь, запропонував методи їх побудови, дослідив властивості розв'язків в околі багатовидів і на самих багатовидах. Було досліджено інтегральні багатовиди

[15] У 1988 р. захистив докторську дисертацію «Дихотомія линийних систем диференціальних рівнянь і функція Ляпунова».

нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, близьких до точно інтегрованих, рівнянь з швидкими і повільними змінними, рівнянь з запізненням, сингулярно збурених рівнянь, їх застосування до задач стійкості тощо. За допомогою методу інтегральних багатовидів визначено оптимальні стаціонарні режими в складних динамічних системах.

Ю. О. Митропольський разом з учнями поширив і обґрунтував метод усереднення на нелінійні диференціальні рівняння з повільно змінними параметрами, на рівняння, близькі до точно інтегрованих, а також на рівняння в функціональних просторах, на інтегро-диференціальні і стохастичні диференціальні рівняння, на функціонально-диференціальні і диференціальні рівняння з частинними похідними тощо. Результати в цьому напрямку викладені в монографії «Метод усереднення в нелінійній механіці» та «Метод усереднення в дослідженнях резонансних систем» (1992). Спільно з А. М. Самойленком Ю. О. Митропольський розробив аксіоматичну теорію методу усереднення. Вони встановили оцінку близькості точного розв'язку і його n-наближень.

В результаті аналізу основних варіантів асимптотичних методів Ю. О. Митропольським, А. М. Самойленком[11], А. І. Скрипником, П. М. Сеником[5], Валерієм Григоровичем Самойленком[16] сформульовано характерні особливості та закономірності асимптотичних методів і запропоновано загальну схему побудови асимптотичних розкладів, яка дозволяє розробити нові варіанти асимптотичних методів. Зокрема, на оператор усереднення і на допоміжний диференціальний оператор накладаються три додаткові умови і досліджується кільце функцій з класу $C^{\infty}$. Доведено, що дана схема містить класичний алгоритм методу усереднення, оцінено близькість точного розв'язку та його m-го наближення. Виходячи з цього запропоновано алгоритм асимптотичного інтегрування для дослідження слабконелінійних диференціальних рівнянь.

[16] У 1982 р. захистив кандидатську дисертацію «Дослідження оберненої періодичної задачі для нелінійних диференціальних рівнянь і диференціально-різницевих рівнянь і метод усереднення». У 1992 р. – докторську «Аналіз нелінійних динамічних систем і їх малих деформацій на функціональних багатовидах».

Наукові результати Ю. О. Митропольського та його школи мали широке застосування. Одночастотний метод М. М. Боголюбова та Ю. О. Митропольського застосовується у монографії В. О. Гробова [17] «Нестаціонарні коливання роторів турбомашин при переході через критичні числа обертів» (1959). Дослідженню згинних коливань залів швидкохідних турбін присвячена його монографія «Асимптотичні методи розрахунку згинних коливань валів турбомашин» (1961). За допомогою одночастотного методу та принципу усереднення в ній розглядаються різні задачі, пов'язані з коливаннями гнучкого вала.

Роботи Ю. О. Митропольського та його учнів з інтегральних багатовидів відразу знайшли подальший розвиток у працях науковців інших країн. К. А. Бреусом на основі асимптотичних методів нелінійної механіки знайдено перетворення змінної, що переводить дану канонічну систему зі змінними коефіцієнтами до нової канонічної системи диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами, встановлено структуру розв'язків цих систем. Побудову асимптотичних розв'язків сильно нелінійних систем, близьких до точно інтегрованих, розглядав Є. Ф. Файзибаев.

Теорія інтегральних багатовидів є одним з центральних напрямків у якісній теорії диференційних рівнянь, який успішно розвивається як в Україні, так і за кордоном, в багатьох напрямках: теорія локальних інтегральних багатовидів та дослідження структури локальних інтегральних багатовидів, інтегральні багатовиди в банаховому просторі, дослідження інтегральних багатовидів сингуляторних (збурених) диференційних рівнянь, застосування теорії інтегральних багатовидів до досліджуваних питань стійкості, використання методів теорії інтегральних багатовидів у фізиці, особливо для побудови теорії адіабатичних інваріантів[*].

---

[17] У 1953 році Гробов Владимир Александрович (м. Рига) захистив докторську дисертацію «Дослідження нестаціонарних коливань роторів турбомашин при переході через критичні числа оборотів».

[*] Адіабатичний інваріант – наближена величина, яка з'являється, коли сили або зв'язки в гамильтоновій системі змінюються за часом неперервно, але повільно в порівнянні з періодами системи.

Результати, отримані Ю. О. Митропольським та його школою в галузі асимптотичних методів нелінійної механіки застосовувалися для розрахунку прискорювачів заряджених частинок, резонансних явищ в електричних системах, при проходженні через резонанс у роторах турбомашин, центрифугах та інших коливальних системах, зокрема для розрахунку коливальних явищ у гіроскопічних системах, розрахунку орбіт супутників і траєкторій ракет, суднових і газових турбін, авіаційних двигунів, турборезонансних двигунів, роторів, в теорії автоматичного регулювання, динаміці канатів, теорії стійкості плазми в неоднорідних і змінних полях, в теоретичній радіофізиці тощо.

На третій конференції з нелінійних коливань (Берлін, 1964) про результати застосування методів М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського до кількісного і якісного дослідження систем диференціально-різницевих рівнянь з малим параметром, доповів Ж. Хейл (США). Він і його співробітники в 1960–1961 рр. вивчали різноманітні аспекти вивчення інтегральних багатовидів для різних систем нелінійних рівнянь. Метод інтегральних багатовидів знайшов подальший розвиток також у працях математиків США, використовувався при розв’язанні різних проблем з теорії диференціальних рівнянь з малим параметром.

К. Г. Валєєв (Київський інститут інженерів громадянської авіації) на семінарі математичної фізики і теорії нелінійних коливань при Інституті математики доповів про стробоскопічний метод побудови асимптотичних розв’язків диференціальних рівнянь, В. М. Волосов (Москва) – про застосування методу усереднення для систем з швидкими і повільними змінними. М. Й. Ронто – про розвиток теорії методу усереднення та його застосування до різноманітних систем. Крім того, на п’ятій літній математичній школі в Ужгороді в 1967 р. В. М. Волосов прочитав спецкурс «Асимптотичні методи дослідження стаціонарних резонансних режимів нелінійних коливальних систем», А. Б. Васильєва – «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній», А. М. Зверкин – «диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється», С. М. Шиманов «Деякі питання теорії коливань систем з запізненням».

Розроблені Ю. О. Митропольським методи використовуються при дослідженні коливань турбінної лопатки при змінній частоті збудження, для дослідження систем регулювання з повільно змінними параметрами, для дослідження резонансних явищ в електричних колах тощо. Зокрема, результати Ю. О. Митропольського, викладені в монографії «Нестаціонарні процеси в нелінійних коливальних системах» (1955), а також у статтях, серед яких особливо варто вказати статті «Повільні процеси в нелінійних коливальних системах» (1950) та «Дослідження коливань нелінійної системи з повільно змінними параметрами» (1950) на початку 50-х рр. були використані групою вчених під керівництвом академіка В. Й. Векслера при розробці синхрофазотрона на 10 Гэв, запущеного в 1957 р. в Об'єднаному інституті ядерних досліджень. В його доповіді «Прискорювачі елементарних частинок» (1957) про фізичні основи цього синхрофазотрона досліджується вплив різного роду збурень, особливо вказується на питання резонансного розкачування синхротронних коливань у процесі прискорення.

Крім того, ученими наукової школи з фізики високих енергій академіка В. Й. Векслера за допомогою методів Ю. О. Митропольського досліджено резонансне і шумове розкачування синхротронних коливань у процесі прискорення, при цьому виявлено найнебезпечнішу складову гармоніку, яка може призвести до суттєвого розкачування фазових коливань. Ці методи використовувалися при дослідженні диференціальних рівнянь руху заряджених частинок в магнітному полі циклотрона з просторовою варіацією напруженості магнітного поля, дослідження випадків резонансу в прискорювачі з розрізним магнітом та повільними фазовими коливаннями.

Асимптотичні методи нелінійної механіки, розвинені М. М. Криловим, М. М. Боголюбовим і Ю. О. Митропольським, широко застосовуються в радіо- і електротехніці. Зокрема, за допомогою цих методів у 1965 р. Ф. П. Жарковим були проінтегровані диференціальні рівняння, які описують процеси в параметронах.

Одним з перших ефективних застосувань асимптотичних методів нелінійної механіки є розрахунок драглайна, виконаний

1953 р. С. А. Козаком. При повільному русі вантажу ця задача описується диференціальним рівнянням з повільно змінними коефіцієнтами.

Е. Г. Голоскоков і А. М. Філіппов в праці «Нестаціонарні коливання механічних систем» (1968) застосували методи нелінійної механіки для вивчення нестаціонарних коливань валів. Багато задач про коливання пружних тіл, наприклад пружних валів, роторів турбомашин, приводять до нелінійних рівнянь у частинних похідних. Для дослідження процесів у таких системах широко застосовуються методи нелінійної механіки. В 1977 р. Б. І. Мосеєнков разом з І. А. Максимюк досліджували за допомогою методів Крилова-Боголюбова-Митропольського явище параметричного резонансу в напівпровідникових кристалах [240]. На основі асимптотичних методів нелінійної механіки Г. С. Савиним і його співробітниками були складені та наближено проінтегровані основні рівняння динаміки непружної нитки. Методи нелінійної механіки використовуються при дослідженні коливальних рухів залізничного транспорту. Так, диференціальні рівняння руху локомотива асимптотичним методом досліджував Т. А. Тібілов (1961), рівняння руху залізничного вагона – А. Д. Патер (1961, Голландія).

Зараз дослідження з теорії нелінійних коливань проводяться на Україні та за кордоном. Асимптотичні методи є одними з найбільш потужних сучасних, математично обґрунтованих аналітичних методів. Асимптотичні методи нелінійної механіки застосовуються в задачах фільтрації і масопереносу в пористих середовищах, в комп'ютерній техніці, зокрема, для розрахунку резонансних ланцюгів мікроелектроніки, для створення комп'ютерних програм.

# ВИСНОВКИ

В монографії вперше систематизовано матеріал з історії вчення про коливання (світовий контекст), розроблено його періодизацію та використано цей контекст як тло, на якому розглядається історія становлення нелінійної механіки.

Встановлено, що наприкінці XVI ст – 80-ті рр. XVII ст. відбувалося нагромадження окремих відомостей про коливання, виконувалися перші наукові дослідження періодичних процесів.

Наприкінці XVII – останній чверті XVIII ст. тривали наукові дослідження періодичних процесів, що являли собою окремі, не пов'язані між собою спроби експериментального та математичного вивчення коливань. Коливання почали досліджувати теоретично І. Ньютон (1687), Б. Тейлор (1715), Ж. Д'Аламбер (1746), Л. Ейлер (1741–1766), експериментально – Е. Хладні та Ж. Савер (XVIII ст.).

Вперше нелінійна задача з'являється в книзі І. Ньютона «Початки» (1687). В середині XVIII – XIX ст. в астрономії зароджується метод малого параметра, придатний для дослідження періодичних процесів, який дістав подальший розвиток при розв'язанні нелінійних диференціальних рівнянь (М. В. Остроградський, К. Вейєрштрасс, А. Ліндштедт). Наприкінці XIX ст. О. Коші, У. Томсон і П. Тет, Е. Роус, Дж. Максвелл застосували метод лінеаризації до розв'язання інженерних задач.

Ж. Лагранж в праці «Аналітична механіка» (1787) звів деякі задачі теорії малих коливань до лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, заклавши тим самим основи теорії лінійних коливань. У 1885 р. А. Пуанкаре розробив геометричний метод якісного описання руху, розглянув питання стійкості систем диференціальних рівнянь другого порядку. В працях «Про криві, які визначаються диференціальними рівняннями» (1885) і «Нові методи небесної механіки» (1892–1899) А. Пуанкаре створив теорію якісних методів дослідження диференціальних рівнянь, яка містила також узагальнений метод Лагранжа.

В 1892–1902 рр. О. М. Ляпунов розробив строгий математичний апарат, що дозволив з'ясувати питання стійкості руху. Він розв'язав деякий клас систем нелінійних рівнянь та визначив поведінку інтегральних кривих рівнянь руху поблизу положення рівноваги. Одним з перших застосував якісні методи до дослідження нелінійних диференціальних рівнянь у 1900 р. П. Боль.

В 1877 р. Дж. Релей систематизував і узагальнив вчення про коливання, завершивши формування теорії лінійних коливань.

З 1907 по 1928 рр. центром досліджень у галузі коливань стала Західна Європа. В першій чверті XX ст. у зв'язку з потребами електро- і радіотехніки нелінійні задачі розв'язувались за допомогою різних нестрогих методів: квазілінійних методів (Г. Мьоллер, Г. Баркгаузен, 1920 р.), методу припасовування (М. Д. Папалексі, 1911 р.), методу Ван-дер-Поля (1920–1923 рр.), строгих методів розв'язання нелінійних задач (Е. і А. Картани, А. Л'єнар, 1925–1928 рр.). У 1926 р. Б. Ван-дер-Поль вперше графічно дослідив сильно синусоїдальні автоколивання, використовуючи фазову площину, розглянув в граничному випадку розривні коливання.

В монографії розкрито формування загальної теорії нелінійних коливань в школі Л. І. Мандельштама – вихідця з України.

Наприкінці 20-х – початку 30-х рр. XX ст. радянські вчені Л. І. Мандельштам, О. О. Андронов, О. А. Вітт перенесли існуючі методи розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь на дослідження коливальних процесів та розробили нові методи. В 1927 р. О. О. Андронов вказав, що граничні цикли Пуанкаре – це автоколивання, переніс основи математичного апарату А. Пуанкаре та метод точкових відображень в теорію коливань. У 1930 р. О. О. Андронов і О. А. Вітт застосували теорію стійкості О. М. Ляпунова до дослідження стійкості періодичних розв'язків. У 1931 р. Л. І. Мандельштам вперше застосував термін «нелінійні коливання». У 1934 р. Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі строго математично обґрунтували метод Ван-дер-Поля, показали, що цей метод в окремому випадку становить різновидність методу малого параметра.

На початку 30-х рр. в Горькому (нині Нижній Новгород) формується школа О. О. Андронова. Якщо в школі Мандельштама вивчались загальні закономірності динамічних процесів у системах довільної природи, то в школі Андронова – досліджувалися структури розбиття фазового простору на траєкторії і залежність зміни цієї структури від параметрів системи.

В монографії також досліджено роботу Кафедри математичної фізики ВУАН в 20-30 рр., де були закладені основи нового напряму теорії коливань – нелінійної механіки (асимптотичної теорії нелінійних коливань). Докладно досліджено розробку М. М. Криловим та М. М. Боголюбовим асимптотичної теорії нелінійних коливань, або нелінійної механіки, в 30-ті рр. XX ст., розкрито передумови її створення на Кафедрі математичної фізики ВУАН. Доведено, що цей напрям є новою гілкою теорії нелінійних коливань.

У 1932 р. М. М. Крилов і його учень М. М. Боголюбов подали три доповіді до Паризької академії наук, в яких обґрунтували створення нової гілки в теорії коливань – нелінійної механіки як спеціальної науки про нелінійні коливання. Ці результати вони виклали в першій спільній монографії «Нові методи нелінійної механіки» (1934). В праці «Застосування методів нелінійної механіки до теорії стаціонарних коливань» (1934) М. М. Крилов і М. М. Боголюбов ввели поняття інтегрального багатовиду в нелінійну механіку, заклали основи методу інтегральних багатовидів, сформулювавши критерії існування інваріантної кривої деякого точкового перетворення. В монографії «Наближені методи нелінійної механіки в застосуванні до вивчення збурень періодичних рухів і до різноманітних резонансних явищ, що сюди відносяться» (1935) викладено ідею одночастотного методу нелінійної механіки. В праці «Загальна теорія міри в нелінійній механіці» (1937) М. М. Крилов і М. М. Боголюбов дали строге обґрунтування методу усереднення, коли праві частини рівнянь, які усереднюють, є квазіперіодичними функціями часу.

При розробці асимптотичних методів М. М. Крилову і М. М. Боголюбову вдалося створити формальний метод побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь з малим параметром, який дозволив одержати розв'язок не тільки в першому наближенні, а і в вищих наближеннях. У праці «Вступ до нелінійної механіки» (1937) М. М. Крилов та М. М. Боголюбов обґрунтували принцип усереднення, відкинувши умову періодичності функцій правих частин рівнянь. М. М. Крилов та М. М. Боголюбов знайшли зв'язок асимптотичних методів з методом усереднення, сформулювали основні принципи методу еквівалентної лінеаризації, встановивши його зв'язок з методом малого параметра за допомогою правила, яке назвали принципом гармонічного балансу.

Показано подальший розвиток нелінійної механіки в працях М. М. Боголюбова (40-і рр.). Зокрема, ним розроблено новий математичний апарат для дослідження консервативних коливальних систем з малим параметром, доведено низку теорем для таких систем, які дозволяють строго вивчити питання існування і стійкості квазіперіодичних розв’язків. М. М. Боголюбову належить побудова строгої теорії методу усереднення (1945–1950) та методу інтегральних багатовидів. У 1948 р. він запропонував ідею одночастотного методу для дослідження нелінійних коливальних систем з багатьма степенями вільності, в 1963 р. започаткував створення нового напрямку в теорії диференціальних рівнянь – методу прискореної збіжності. В 40 рр. XX ст. з’явились перші учні М. М. Боголюбова, почала створюватись його наукова школа в галузі математичної фізики. Фундаментальні результати М. М. Боголюбова з нелінійної механіки отримали подальший розвиток в працях його учнів: Ю. О. Митропольського, В. О. Кононенка, Г. С. Писаренка, Й. З. Штокала, С. Ф. Фещенка, А. М. Федорченка та ін., які склали ядро його теоретичної школи в цій галузі в Україні.

В монографії розкрито риси Ю. О. Митропольського як наукового лідера, розглянуто його внесок в теорію нелінійних коливань. Він побудував строгу теорію нестаціонарних коливальних процесів в системах з однією і з багатьма степенями вільності, строго обґрунтував і розвинув запропонований М. М. Боголюбовим одночастотний метод для систем з багатьма степенями вільності (1949–1960), метод прискореної збіжності, метод усереднення, метод інтегральних багатовидів (1957–1963), поширив асимптотичні методи на нелінійні системи з повільно змінювальними параметрами та на нелінійні системи з розподіленими та випадковими параметрами. З теорії інтегральних багатовидів Ю. О. Митропольським на початку 50-х рр. XX ст. запропоновано і строго обґрунтовано метод побудови двопараметричної сім'ї частинних розв'язків з багатьма степенями вільності і повільно змінними параметрами, доведено теореми про сильну стійкість таких сімей розв'язків. Він розвинув методи М. М. Крилова та М. М. Боголюбова дослідження нестаціонарних одночастотних коливань в системах, які описуються рівняннями в символічній формі, на нелінійні системи томпсонівського типу. За допомогою методу послідовних замін було побудовано загальний розв'язок системи нелінійних рівнянь, вивчено його поведінку в околі квазіперіодичного розв'язку.

В монографії вперше проведено ідентифікацію неформального творчого колективу на чолі з Ю. О. Митропольським з науковою школою, яка почала формуватися в 50-х рр. XX ст., виділено характерні її риси, внесок школи в теорію нелінійних коливань. Показано, що деякі учні Ю. О.Митропольського стали засновниками нових наукових напрямків і дочірніх шкіл.

# ДОДАТКИ

## Хронологія формування і розвитку вчення про коливання

**1657.** Г. Галілей встановив ізохронність малих коливань маятника, провів аналогію між коливаннями маятника і звуковими коливаннями.

**1660.** Р. Гук відкрив закон пружності.

**1673.** Х. Гюйгенс показав, що коливання маятника з великою амплітудою не ізохронні, а коливання з малою амплітудою ізохронні лише приблизно, сконструював маятниковий годинник, спостерігав явище параметричного резонансу, яке пізніше було назване «вимушеним консонансом». Це явище є однією з найхарактерніших властивостей автоколивальних систем, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями.

**1687.** І. Ньютон в праці «Початки» показав, що коливання рідини схожі з коливаннями маятника. Він вперше застосував термін «довжина хвилі», записав формулу, що визначає величину згасання малих коливань маятника при будь-якому опорі середовища. В його аркушах було знайдено розкладання руху Місяця в ряд, що давав правильні перші два його члени. Заклав основи математичного апарату дослідження коливань.

**1752.** Л. Ейлер в праці «Дослідження нерівностей Юпітера і Сатурна» виклав метод знаходження збурених значень ексцентриситетів і довгот перігеліїв орбіт, який був початком теорії представлення вікових збурень в тригонометричній формі.

**1766-1788.** Ж. Лагранж досліджував вікові зміни орбіт в тригонометричній формі. Заклав основи теорії малих (лінійних) коливань – звів деякі задачі теорії малих коливань до лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Вперше поставив задачу про стійкість руху. Свої дослідження виклав в книзі «Аналітична механіка», в якій застосовував строгий математичний апарат без побудов і міркувань геометричного чи фізичного характеру.

**1773.** П. Лаплас довів, що Ж. Лагранж відкидав члени тригонометричного ряду, які не можна відкидати. Таким чином, П. Лаплас отримав точніші формули. Теорія П. Лапласа є простішою за теорію Ж. Лагранжа.

**1802-1805**. К. Ф. Гаусс створив метод тригонометричного інтерполювання.

**1835.** М. В. Остроградський розробив ідею простішого виключення секулярних членів в розкладах в тригонометричні ряди.

**Середина XIX ст.** К. Вейєрштрасс за допомогою еліптичних функцій знайшов точний розв'язок задачі з маятником.

**1868.** Дж. Максвел досліджував корені характеристичного рівняння для лінеарізованих рівнянь руху системи прямого регулювання.

**1877-1878.** Дж. У. Стретт застосував метод виключення секулярних членів у розкладах за степенями малого параметра, вказав на нелінійність диференціальних рівнянь, за допомогою яких можна описати автоколивальні системи. Широко використав електричні аналогії. В книзі Дж. Релея «Теорія звука» (1877) вперше розгорнуто і систематично викладено загальне вчення про коливання, завершується формування теорії лінійних коливань.

**1877, 1879, 1884.** Е. Роус, У. Томсон, П. Тет, М. Є. Жуковський користувались першим наближанням і відкидали члени вище першого порядку, зводячи нелінійні задачі до лінійних, намагалися побудувати загальну теорію стійкості руху.

**1881.** І. А. Вишнеградський сформулював нелінійну задачу прямого регулювання, розв'язок якої отримав лише для лінійного випадку.

**1885.** А. Леонте, вивчаючи автоколивання в примітивних регуляторах прямої дії, дослідив їх фазовий простір і накреслив для нього інтегральні криві та граничні цикли, не даючи їм назви.

**1885.** А. Пуанкаре розробив геометричний метод якісного опису руху, ввів поняття особливої точки, граничних циклів, індексу.

**1890-1899.** А. Пуанкаре показав, що всі тригонометричні ряди, до яких приводить метод малого параметру, розходяться. Назвав такі ряди асимптотичними. Узагальнив метод малого параметру. У творах «Про криві, які визначаються диференціальними рівняннями» і «Нові методи небесної механіки»

А. Пуанкаре створив теорію якісних методів дослідження диференціальних рівнянь.

**1892-1902.** О. М. Ляпунов розробив строгий математичний апарат для з'ясування питання стійкості руху, розв'язав деякий клас систем нелінійних рівнянь та визначив поведінку інтегральних кривих рівнянь руху поблизу положення рівноваги.

**1906.** П. Г. Боль одним з перших застосував якісні методи Ляпунова-Пуанкаре до дослідження диференціальних рівнянь, вперше поширив результати Ляпунова-Пуанкаре на більш загальний клас квазіперіодичних розв'язків диференціальних рівнянь.

**1907-1928.** Г. Мьоллер, Г. Баркгаузен заміняли нелінійні члени рівняння лінійними, пристосовуючи лінійні методи до нелінійних задач (квазілінійні методи).

**1909.** Опублікована перша праця М. М. Крилова з теорії коливань «Про проблему поперечних коливань пружного стержня»

**1910.** Опубліковані ще дві праці М. М. Крилова з теорії коливань: «Про можливості розкладання довільних функцій однієї дійсної змінної в ряди ортогональних функцій» і «Про розкладання в ряди за фундаментальними функціями, які зустрічаються в проблемі поперечних коливань пружних неоднорідних стержнів».

**1911.** М. Д. Папалексі першим використав метод припасовування для розв'язання нелінійної задачі про випрямляч.

**1920-1923.** Б. Ван-дер-Поль вказав на незастосовність до задач радіотехніки методу лінеаризації. Запропонував метод «повільно змінних коефіцієнтів», не обґрунтувавши його.

**1926.** Б. Ван-дер-Поль вперше графічно дослідив сильно синусоїдальні автоколивання, розглянув в граничному випадку розривні автоколивання.

**1925, 1928.** Е. і А. Картани, А. Льєнар аналітично, методом ізоклін, підтвердили результати, отримані Б. Ван-дер-Полем. Розглянули з якісної точки зору питання про зв'язок математичної форми диференціального рівняння з фізичними властивостями даної автоколивальної системи.

**1927.** О. О. Андронов захистив дисертацію «Граничні цикли Пуанкаре і теорія збурень», вказавши, що граничні цикли Пуанкаре – автоколивання. Таким чином, він переніс основи математичного апарату А. Пуанкаре в теорію коливань.

* П. Фату обґрунтував метод усереднення для частинного випадку диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

**1927.** М. М. Крилов та М. М. Боголюбов почали дослідження з операційного числення та створення за його допомогою математичного апарату розв'язання нелінійних задач. М. М. Крилов надіслав професору Хайаші (Японія) замітку «Про інтегрування в деяких випадках нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики».

**1930.** О. О. Андронов і О. О. Вітт довели нову теорему для з'ясування питання стійкості періодичних розв'язків, що зробило можливим застосування теорії стійкості руху О. М. Ляпунова. Вони вперше застосували теорію стійкості О. М. Ляпунова до вивчення питання захоплення в регенеративному приймачі.

**1931.** А. І. Берг, Ю. Б. Кобзарєв розвивають квазілінійні методи у застосуванні до задач радіотехніки

* О. О. Андронов стисло, без доказів виклав результати дослідження зв'язку, який існує між теорією залежності стаціонарних режимів катодного генератора від параметрів і теорією біфуркацій А. Пуанкаре. Він поширив теорію біфуркацій на випадок коливальних систем, близьких до лінійних консервативних систем, а також побудував теорію «м'якого» та «жорсткого» збудження коливань.

* Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі застосували метод малого параметру при дослідженні резонансу другого роду.

**1932.** М. М. Крилов та М. М. Боголюбов дослідили квазіперіодичні режими, які виникають в електронному генераторі під дією зовнішньої періодичної сили.

* Вперше було надруковано нові асимптотичні методи у монографії М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Дослідження повздовжньої стійкості аероплану».

**1934.** Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі використали метод усереднення в системах з двома і більшою кількістю ступенів вільності, строго математично обґрунтували метод Ван-дер-Поля. Вони вказали можливості його застосування і показали, що він в окремому випадку є різновидом методу малого параметру.

* О. О. Андронов та О. О. Вітт встановили відповідність між коливаннями в системах з багатьма ступенями вільності і рекурентними рухами Біркгофа.

* О. О. Андронов та О. О. Вітт строго математично обґрунтували метод Ван-дер-Поля для частинних випадків.

**1934-1937.** М. М. Боголюбовим спільно з М. М. Криловим розроблено асимптотичну теорію нелінійних коливань.

* Надрукована монографія М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Символічні методи нелінійної механіки в їх застосуванні до дослідження резонансі в електричному генераторі» (1934). Результати, викладені в ній, є важливими для розвитку теорії нелінійних коливань і відносяться до таких актуальних проблем радіотехніки, як дослідження демультиплікаційних резонансів, примусової синхронізації, аномальних умов самозбудження, теорії нелінійних фільтрів тощо.

* Надрукована монографія М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Про деякі формальні розклади нелінійної механіки» (1934), в якій з'ясовано причини появи секулярних членів в розкладах за степенями малого параметра на прикладі рівняння з малим нелінійним параметром в правій частині і доведено, що наявність секулярних членів в розкладах робить їх непридатними для якісної характеристики розв'язків на необмеженому інтервалі часу.

* Вперше поняття інтегрального багатовиду уведене М. М. Криловим і М. М. Боголюбовим у монографії «Застосування методів нелінійної механіки до теорії стаціонарних коливань» (1934). В ній розглянуто автоколивальні системи зі стаціонарними квазіперіодичними коливаннями, доведено, що рівняння коливань електронного генератора при наявності зовнішнього періодичного збудження мають квазіперіодичні розв'язки. М. М. Крилов та М. М. Боголюбов встановили відповідність властивостей квазіперіодичності і стійкості точних розв'язків і відповідних властивостей їх перших наближень, заклали основи методу інтегральних багатовидів нелінійної механіки, сформулювавши

критерії існування інваріантної кривої деякого точкового відображення, дослідили точні стаціонарні розв'язки системи з двома степенями вільності, створили загальні алгоритми асимптотичного інтегрування нелінійних рівнянь другого порядку.

* Надрукована перша спільна монографія М. М. Крилова та М. М. Боголюбова з нелінійної механіки «Нові методи нелінійної механіки» (1934). В їх доповіді «Основні проблеми нелінійної механіки» на засіданні Сесії Всеукраїнської академії наук дано визначення нової гілки в теорії нелінійних коливань, названої ними механікою нелінійних коливань, або, скорочено, нелінійною механікою.

**1935.** На Першій міжнародній конференції у Москві М. М. Крилов та М. М. Боголюбов прочитали доповідь «Загальна теорія міри та її застосування до вивчення динамічних систем нелінійної механіки», в якій використовують важливі результати з теорії міри та функціонального аналізу.

* Надруковано монографію М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Наближені методи нелінійної механіки в застосуванні до вивчення збурень періодичних рухів і до різноманітних резонансних явищ, що сюди відносяться» (1935). В ній викладена теорія збурень сімей періодичних рухів та ідея одночастотного методу нелінійної механіки, який відіграв важливу роль в практичному застосуванні нових методів.

**1937.** М. М. Крилов та М. М. Боголюбов довели існування інваріантної міри для кожної динамічної системи на компактному фазовому просторі.

* Надруковано монографію М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Вступ до нелінійної механіки» (1937), в якій завершено створення асимптотичних методів. В ній розглядається рівняння, права частина якого є квазіперіодичною функцією часу (випадок неконсервативних динамічних систем). При отриманні рівнянь перших наближень М. М. Боголюбов та М. М. Крилов дали обґрунтування принципу усереднення, відкинувши умову періодичності функцій правих частин рівнянь, знайшли зв'язок асимптотичного алгоритму з методом усереднення, в результаті сформулювали принцип усереднення, виклали основні принципи

методу еквівалентної лінеаризації, встановили зв'язок цього методу з методами розкладу за степенями малого параметра.

* Надруковано монографію М. М. Крилова та М. М. Боголюбова «Загальна теорія міри в нелінійній механіці» (1937) М. М. Крилов та М. М. Боголюбов довели застосовність метода усереднення і в випадку, коли праві частини рівнянь, які усереднюють, є квазіперіодичними функціями часу.

**1937.** О. О. Андронов разом з Л. С. Понтрягіним розробили і ввели поняття грубої динамічної системи в праці «Грубі системи».

**1939.** М. М. Боголюбов та М. М. Крилов заклали основи ергодичної теорії в загальних метричних просторах.

**1944.** О. О. Андроновим у доповіді «Теорія точкових перетворень Пуанкаре-Брауера-Біркгофа і теорія нелінейних коливань» викладені загальнотеоретичні основи методу точкових відображень в теорії нелінійних коливань.

**1945.** Л. І. Мандельштам створив нову форму методу малого параметру, де наближанням є періодичний розв'язок деякого лінійного рівняння з періодичними коефіцієнтами.

**1945.** М. М. Боголюбов побудував строгу теорію методу усереднення. В праці М. М. Боголюбова «Про деякі статистичні методи в математичній фізиці» (1945) викладений алгоритм отримання наближень певного виду, який увійшов в історію як метод усереднення нелінійної механіки М. М. Боголюбова. В цій монографії дано строге визначення інтегрального багатовиду та запропонований сам метод. В ній математично обґрунтовуються методи нелінійної механіки шляхом встановлення відповідності між розв'язками точних і усереднених рівнянь.

**1946.** О. О. Андроновим та Ю. І. Неймаком було проведено дослідження годинників як нелінійної коливальної системи з двома степенями свободи. Найбільш повне дослідження динаміки часових пристроїв виконано в працях учня О. О. Андронова М. М. Баутіна, праці якого є продовженням і розвитком коливального підходу до теорії годинників.

**1949.** Надрукована праця Ю. О. Митропольського «Застосування символічних методів до дослідження нелінійних систем з повільно змінювальними параметрами», в якій запропоновано ефективний метод розрахунку нелінійних коливальних систем, які мають один елемент з нелінійною характеристикою. Ця схема дозволяє досліджувати як стаціонарні процеси так і процеси встановлення коливань.

* Надрукована праця Ю. О. Митропольського «Дослідження коливань в нелінійних системах з багатьма степенями вільності і повільно змінювальними параметрами», в якій викладені основи побудови наближених розв'язків систем диференціальних рівнянь з багатьма степенями вільності в випадку одночастотного режиму. Для більш зручного застосування асимптотичних методів Ю. О. Митропольський запропонував декілька методів побудови рівнянь в першому наближенні: метод типу «лінеаризації», метод «гармонічного балансу», метод енергетичної інтерпретації тощо. Згідно методу енергетичної інтерпретації рівняння першого і другого наближень складаються виходячи з виразів для віртуальної роботи та кінетичної і потенціальної енергії, тобто не розглядаючи точних рівнянь цього руху. Це дозволило перенести одночастотний метод на системи з розподіленими параметрами і дослідити нестаціонарні коливання стержнів, пластинок, лопаток турбін, балок тощо.

* Надрукована праця Ю. О. Митропольського «Одночастотні вільні коливання в нелінійних системах з багатьма степенями вільності» (1949), в якій він повернувся до ідеї одночастотного методу, який значно розширив область застосування асимптотичних методів нелінійної механіки. Суть викладеного М. М. Боголюбовим одночастотного методу полягає в тому, що розв'язок нелінійної системи рівнянь шукається у вигляді двупараметричної сім'ї функцій. Починаючи з 1949 року одночастотний метод докладно розроблявся й одержав обґрунтування у великому циклі досліджень Ю. О. Митропольського. Результати цих досліджень підсумовані в названі вище його монографіях «Нестаціонарні процеси в нелінійних коливальних системах» і «Проблеми асимптотичної теорії нестаціонарних коливань».

**1953.** В статті «Про коливання в гіроскопічних системах при проходженні через резонанс» Ю. О. Митропольський дослідив проблему побудови асимптотичних розв'язків при наявності в досліджуваній системі диференціальних рівнянь гіроскопічних членів і кратних власних частот.

* Надрукована праця Ю. О. Митропольського «Вимушені коливання в нелінійних системах при проходженні через резонанс», в якій досліджено різноманітні складні явища, які спостерігаються в нелінійних системах при проходженні через резонанс. Ю. О. Митропольський запропонував новий підхід до опису хвильових і коливальних процесів, в основу якого покладено асимптотичний метод. Він дослідив властивості групових алгебр в переході до гільбертових просторів, які узагальнюють розклади в класичні ряди Фур'є.

**1955.** Опублікована монографія Ю. О. Митропольського «Нестаціонарні процеси в нелінійних коливальних системах».

* Опублікована монографія Ю. О. Митропольського та М. М. Боголюбова «Асимптотичні методи в теорії нелінійних коливань».

**1957.** В праці Ю. О. Митропольського «Про деякі диференціальні рівняння, які зустрічаються в теорії релаксаційних коливань» зведена вихідна релаксаційна система рівнянь на багатовиді до одного рівняння, в результаті аналізу розв'язків якого отримано критерії існування зон параметричного резонансу для розглядуваної релаксаційної системи, знайдено явище квазісинхронізації, уточнено в другому наближенні частоту синхронних коливань тощо.

**1958.** В праці Ю. О. Митропольського «Про стійкість однопараметричної сім'ї розв'язків системи рівнянь з змінювальними коефіцієнтами» обґрунтовано одночастотний метод для нелінійних коливальних систем, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями з повільно змінювальними параметрами.

**1959.** В статті Ю. О. Митропольського «Про деякі рівняння, близькі до точно інтегрованих» розвинуто оригінальний метод побудови рівнянь першого наближення, виходячи безпосередньо з виразів функцій, які стоять у правій частині рівняння.

**1961.** Опублікована монографія Ю. О.Митропольського та Б. І. Мосєєнкова «Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами».

**1969.** Опублікована монографія Ю. О. Митропольського, М. М. Боголюбова та А. М. Самойленка «Метод прискореної збіжності в нелінійній механіці».

**1964.** Опублікована монографиия Ю. О. Митропольського «Проблеми асимптотичної теорії нестаціонарних коливань».

**1968.** В праці Ю. О. Митропольського та Д. Г. Кореневського «Дослідження нелінійних коливань в системах з розподіленими параметрами і запізненням» досліджуються системи диференціальних рівнянь в частинних похідних. Виявлено і детально вивчено ряд принципово нових властивостей коливальних процесів, зокрема явище параметричного резонансу, які не мають аналогів в коливальних системах без запізнення. Метод побудови асимптотичних наближень розв'язків для рівнянь з повільно змінювальними параметрами, а також дослідження одночастотних коливань отримали строге математичне обґрунтування.

**1972.** Ю. І. Неймарк запропонував формалізацію поняття коливальної закономірності. Під коливальним явищем розуміють те, що пов'язане з фактом руху, який встановився, або те, що зв'язано з процесом переходу від одного руху, що встановився, до іншого.

**1973.** Ю. О. Митропольський розвинув загальну теорію інтегральних багатовидів у нелінійній механіці.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Винтельбанд В. История древней философии / В. Винтельбанд – К., 1995. – С. 58.
2. Клайн М. Математика. Поиск истины / Клайн М. – М.: Мир, 1988. – 259 с.
3. Асмус В. Ф. Античная философия / Асмус В. Ф. – М.: Высш. школа, 2005. – 400 с.
4. Аристотель. Физика // Аристотель. Сочинения. [Пер. И. Д. Рожанского] – М.: Мысль. – Т. 3. – 1981 – С. 52–261.
5. Галилей Г. Избранные труды / Галилей Г. – М.: Наука, 1964. – Т. 2. – 456 с.
6. Le Opere di Galileo Galilei. – 1938. – V.XIX, Firenze. – P. 648–649.
7. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике / Гюйгенс Х. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 377 с.
8. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Ньютон И. – М.: Наука, 1989. – 687 с.
9. Фарадей М. Экспериментальные исследования по электричеству. [в 3-х т.] – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947–1959.
   Т.1. – 848 с.; Т.2. – 538 с.; Т.3. – 831 с.
10. Популярные речи Г. Гельмгольца. / Ч. 1. – С.-Петербург, Издание К. Л. Риккера. – 1898. – 146 с.
11. Стретт Д. В. Теория звука. [В 2-х т.] / Стретт Д. В. – М.-Л.: Гостехиздат, 1955–57.
    Т. 1. – 503 с.; Т.2. – 475 с.
12. Крылов А. Н. О Ньютоновской теории Луны / Крылов А. Н. // Собрание трудов. – М.–Л.
    Т. 7. – 1936 – С. 661–685.
13. Лагранж Ж. Аналитическая механика / Лагранж Ж. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
    Т.1. – 594 с., Т.2. – 440 с.
14. Крылов А. Н. Собрание трудов / Крылов А. Н. – М.-Л.
    Т.5. – 1936. – 574 с.

15. Остроградский М. В. Полное собрание трудов / Остроградский М. В. – К.: Изд. АН УССР.
Т.2. – 1961 – С. 71–75.
16. Тихомандрицкий М. Речь в пам'ять К. Вейерштрасса / М. Тихомандрицкий // Сборник оттисков № 274.
17. Стретт Д. В. Теория звука. [В 2-х т.] / Д. В. Стретт – М.-Л.: Гостехиздат, 1955–57.
Т.1. – 503 с; Т.2. – 475 с.
18. Пуанкаре А. Избранные труды. [В 2-х т.] / А. Пуанкаре – М.: Наука, 1971–72.
Т.1. – 771 с; Т.2. – С. 9–457.
19 Жуковський Н. Е. О прочности движения / Жуковський Н. Е. Собрание сочинений. [В 2-х кн.] – М.-Л.: Гостехиздат.
Т.1 (общая механика, математика и астрономия). – 1948 – С. 67–160.
20. Maxwell J. G. On Governores (1868) / J. G. Maxwell // The scientific papers, V. II, P., 1927. – P. 104–105.
21. Андронов А. А. О задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования / А. Андронов и А. Майер // Доклады Академии наук СССР. – 1945.– Т. 47, № 5. – С. 345–348; те саме: Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А. // Собрание трудов. – М.: Из-во АН СССР, 1956. – С. 246–249.
22. Moller H.G. // Ub. Storgsfreien Gleichstromenepfang m.d. Schwingaudion Jahrbuch f. drahtlosen Telegraphie & Teleph. – 1921. – Bd. 17. – S.256–258.
23. Баркгаузен Г. Введение в учение о колебаниях с приложением к механическим и электрическим колебаниям / Баркгаузен Г. – М.-Л.: Госэнергизд., 1934. – 115 с.
24. Кобзарев Ю. Б. Квазипериодические режимы при резонансе деления 1:2 / Ю. Б. Кобзарев // ЖТФ. – 1935. – Т. 5, вып. 4. – С. 627–631.
25. Кобзарев Ю. Б. О квазилинейном методе трактовки явлений в генераторах почти синусоидальных колебаний / Ю. Б. Кобзарев // ЖТФ. – 1935. – Т. 5, вып. 2. – С. 216–249.
26. Кобзарев Ю. Б. К теории резонанса деления / Ю. Б. Кобзарев // ЖТФ.– 1935. – Т. 5, вып. 3. – С. 518–529.
27. Берг А. И. Избранные труды / А. И. Берг – М.-Л.: Энергия, 1964. Т.1. – 168 с.

28. Берг А. И. Работа лампового генератора со смешанной нагрузкой / А. И. Берг // Вестник электротехники. – 1931. – № 8. – С. 234–241.
29. Берг А. И. Теоретические исследования и расчет лампового генератора при перенапряженном режиме / А. И. Берг // Известия электропромышленности слабого тока. – 1934. – №9. – С. 1–7.
30. Папалекси Н. Д. Собрание трудов / Папалекси Н. Д. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – 426 с.
31. Van-der-Pol. Selected papers. – Amsterdam, 1960.
32. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов / Мандельштам Л. И. – М.: Изд. АН СССР, 1948 – Т.1. – 1948. – 352 с.; Т.3. – 1950. – 422 с.
33. Картан Э. Интегральные инварианты / Картан Э. – М.-Л.: Гостехиздат, 1940. – 216 с.
34. Peierls R. E. Kinet. Theor. d. Warmeleitg. in Kristallen / R. E. Peierls // Annals.Phisik. – 1930. – V. 3. – 47 S.
35. Peierls R. E. Kinet. Theor. d. elektr.&therm. Leitfahigk. v. Metallen / R. E. Peierls // Annals.Phisik. – 1930. – V. 4. – 28 s.
36. Koga // Proc. Inst. Eng. / Koga – 1924. – V. 15.– S. 669–723.
37. Пуанкаре Анри. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / Пуанкаре Анри. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 392 с.
38. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения / Ляпунов А. М. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 368 с.
39. Боль П. Собрание трудов / Боль П. – Рига: Зинатие, 1974. – 517 с.
40. Мандельштам Л. И. Вопросы электрических колебаний систем и радиотехники / Л. И. Мандельштам // Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов / Мандельштам Л. И. – М.: Изд. АН СССР, 1948.– Т. 3.– С. 52–86; те саме // УФН. – 1933. – 13, вып 2. – С. 161–194.
41. Некоторые исследования в области нелинейных колебаний, проведенные в СССР, начиная с 1935 г. / [Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Горелик Г. С., Рытов С. М.] // Успехи физических наук.– 1947. – Т. 33, вып. 3. – С. 335–352.
42. Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 537 с.

43. Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний / А. А. Андронов // Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А.– М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 41–43.
44. Андронов А. А. Примечания / А. А. Андронов // Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / Пуанкаре А. – М.: Гостехтеориздат, 1947. – С. 371–390.
45. Леонтович Е. Общая качественная теория / Е. Леонтович, А. Г. Майер // Пуанкаре Анри О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. / Пуанкаре А. – М.: Гостехтеориздат, 1947. – С. 267–300.
46. Андронов А. А. Об устойчивости по Ляпунову / А. А. Андронов, А. А. Витт // Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 140–141.
47. Андронов А. А. К математической теории захватывания / А. А. Андронов, А. А. Витт // Журн. прикл. физики. – 1930. – Т. 7, вып. 4. – С. 3–17, те саме: // Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 70–84.
48. Андронов А. А. Применение теории Пуанкаре о «точках бифуркаций» и «смене устойчивостей» к простейшим автоколебательным системам / А.А. Андронов, А. Г. Любина // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1935. – Т. 5, вып. 3/4. – С. 296–306. те саме // Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 125–139.
49. Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний / А.А. Андронов // Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 32–33.
50. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы / Биркгоф Дж. Д. – М.: Гостехиздат, 1940. – 320 с.
51. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, С. Э. Хайкин – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 519 с.
52. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 915 с.
53 Академік Л. И. Мандельштам. [сборник] К 100-летию со дня рождения – М.: Наука, 1979. – 312 с.
54. Андронов А. А. Грубые системы / А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин // Докл. АН СССР.– 1937. – Т. 14, № 5. – С. 247–252.

те саме // Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 183–187.

55. Андронов А. А. К теории изменения качественной структуры разбиения плоскости на траектории / А. А. Андронов, Е. Н. Леонтович // Докл. АН СССР.– 1938. – Т. 21, № 9.– С. 247–252. те саме // Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 217–221.
56. Андронов А. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметров / А. А. Андронов, Е. Н. Леонтович // Ученые записки Горьковского университа. – 1939. – вып. 6. – С. 3–32, те саме // Андронов А. А. Собрание трудов / Андронов А. А. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 188–216.
57. Мандельштам Л. И. Об обосновании одного метода приближенных решений диференциальных уравнений / Л. И. Мандельштам, М. Н. Папалекси // Мандельштам Л. И. Собрание сочинений / Мандельштам Л. И. – Т. 2. – С. 130–138.
58. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов / Мандельштам Л. И. – М.: Изд-во АН СССР, 1948–1956.
Т.1. – 352 с.; Т.2. – 396 с.; Т.3 – 423 с.; Т.4. – 512 с.
59. Мандельштам Л. И. О явлениях резонанса n-го рода / Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов Т. 3 / Мандельштам Л. И. – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – С. 113–116.
60. Мандельштам Л. И. Об установлении колебаний при резонансе n-го рода / Л. И. Мандельштам // Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т.2 / Л. И. Мандельштам. – М.: Изд-во АН СССР, 1949. – С. 117–129.
61. Мандельштам Л. И. Об обосновании одного метода приближенных решений диференциальных уравнений / Л. И. Мандельштам // Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов Т. 2 / Мандельштам Л. И. – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – С. 130–137.
62. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Мандельштам Л. И. – М.: Наука, 1972. – 437 с.
63. Андронов А. А. Л. И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний / А. А. Андронов // Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 441–472.

64. Мандельштам Л. И. Вопросы электрических колебательных систем и радиотехники / Л. И. Мандельштам // Успехи физических наук. – 1933. – 13, вып. 2. – С. 161–194, те саме: // Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. / Т. 3. / Мандельштам Л. И. – М.: Из-во АН СССР, 1950. – С. 52–86.
65. Горелик Г. С. Колебания и волны / Г. С. Горелик. – М.: Физматгиз, 1959. – 572 с.
66. Хайкин С. Э. Физические основы механики / Хайкин С. Э. – М.: Наука, 1971. – 752 с.
67. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний / Неймарк Ю. И. – М.: Наука, 1972. – 472 с.
68 Литвинко А. С. Історико-науковий аналіз формування та розвитку Київської школи математичної та теоретичної фізики М. М. Боголюбова: дис. … канд. ф.-м. наук: 01.05.05 / Литвинко Алла Степанівна – К., 1997. – 174 с.
69 Історія НАН України (1918–1923). Документи і матеріали. – К.: Наук. думка, 1993. – 376 с.
70. Боголюбов Н. Н. Миколай Митрофанович Крылов (к восьмидесятилетию со дня рождения) / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский // УМЖ. – 1960. – Т. 12, №2. – С. 205–208.
71. Боголюбов Н. Н. Избранные труды. [В 3-х т.] / Н. Н. Боголюбов – Киев: Наук. думка, 1969–1971.
Т.1. – 647 с.; Т.2. – 522 с.; Т.3. – 487 с.
72. Митропольський Ю. О. Творчий вклад академіка М. М. Боголюбова в розвиток математики, нелінійної механіки і теоретичної физики / Ю. О. Митропольський, В. Г. Бар'яхтар, Д. Я. Петрина // Вісник АН УРСР. – 1985. – №11. – С. 9–21.
73 Боголюбов А. Н. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов / А. Н. Боголюбов. // Историко-математические исследования. – 1996. – Втор. серия, вып. 1 (36), №3. – С. 118–127.
74 Історія НАН України (1924–1928). Документи і матеріали. – К.: НБУВ, 1998. – 762 с.
75 Історія НАН України (1929–1933). Документи і матеріали. – К.: Наук. думка, 1998. – 538 с.
76. Крылов Н. М. Исследование продольной устойчивости аэроплана / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – М.-Л.: Гос. авиац. и автотракт. изд-во, 1932. – 60 с.

77. Крилов М. М. Основні проблеми нелінійної механіки. Теорія і застосування в різних технічних і фізичних науках. Доповідь на січневій сесії ВУАН / М. М. Крылов, М. М. Боголюбов // Сб. оттисков 162, 173, 175, 189 – 1934. – 28 с.
78 Історія НАН України (1934–1937). Документи і матеріали. – К.: Наук. думка, 2003. – 829 с.
79. Про наукові праці Кафедри математичної фізики ВУАН за останні роки. Статті та рецензії радянських і закордонних учених про ці праці. Додаток до «Журналу Індустріально-технічного циклу». – Т. 3, вип. 2. – К.: Видавництво ВУАН, 1933. – 134 с. (Природничо-технічний відділ).
80. Литвинко А. С. Історико-науковий аналіз формування та розвитку Київської школи математичної та теоретичної фізики М. М. Боголюбова: дис. …канд. ф.-м. наук: 01.05.05. / Литвинко Алла Степанівна. – К., 1997. – 174 с.
81. Kryloff N. M. Les phenomenes de demoultiplscation de frequence en radiotechnique / N. M. Kryloff, N. Bogoliuboff // C.R. Acad. Sci. – 1932. – V. 194. – N. 13. – P. 1019–1122.
82. Kryloff N. M. Quelques exemples d'oscillations non lineaires / N. M. Kryloff, N. N. Bogoliubof // C.R. Acad. Sci. – 1932. – V. 194. – N. 11. – P. 957–962.
83. Kryloff N. M. Sur le phenomene de l'entrainement en radiotechnique / N. M. Kryloff, N. N. Bogoliubof // C.R. Acad. Sci. – 1932. – V. 194. – N. 13. – P. 1064–1066.
84. Крылов Н. М. Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электронных генераторов / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – М.: ОНТИ ГТТИ, 1934. – 243 с.
85. Крылов Н. М. Символические методы нелинейной механики в их приложении к исследованию резонанса в электронном генераторе / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – Л.: Из-во АН СССР, 1934. – 34 с.
86. Крилов М. М. Про деякі формальні розклади нелінійної механіки / М. М. Крилов, М. М. Боголюбов. – К.: ВУАН, 1934. – 89 с.
87. Боголюбов Н. Н. Sur l'approximation des fonctions par les sommes trigonometriques / Н. Н. Боголюбов // ДАН СССР. – А. – 1930. – № 6. – С. 147–152.

88. Боголюбов Н. Н. Sur l'approximation trigonometriques des fonctions dans lintervalle infini / Н. Н. Боголюбов // Изв. АН СССР. – 1931. – №1/2. – С. 23–54.
89. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – К.: Изд-во ВУАН, 1934. – 108 с.
90. Kryloff N. Methodes approchees de la mecanique non lineaire dans leur application a l'etude de la perturbastion des mouvements periodiques et de drivers phenomenes de resonance s'y rapportant. / N. Kryloff et N. Bogoluboff – Kiev: publie par l'Acadenie des scienties d'Ukraine, 1935.
91. Kryloff N. Les mesures invariantes et transitives dans la mecanique non lineaire (Инвариантные и транзинивные меры в нелинейной механике) / N. Kryloff, N. Bogolioboff // Мат. сборник. – 1936. – Т. 1 (43), №5. – С. 707–711.
92. Крылов Н. М. La theorie generalle de la mesure dans son application a letude des systems de la mecanique non linearie / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов // Annals of Math. – 1937. – V. 38. – P. 65.
93. Боголюбов Н. Н. Общая теория меры в нелинейной механике / Н. Н. Боголюбов // Боголюбов Н. Н. Избранные труды. [В 3-х т.] Т. 1. / Боголюбов Н. Н. – К.: Наук.думка, 1969. – С. 411–464. те саме: // Крилов М. М. Загальна теорія міри в нелінійній механіці / М. М. Крилов, М. М. Боголюбов // Збірник праць з нелінійної механіки. – К.: Вид-во АН УРСР, 1937. – С. 55–112.
94. Крылов Н. М. Введение в нелинейную механику (Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики) / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов // Зап. Каф. математической физики АН УССР. – 1937. – Т. 1–2. – 364 с. Те саме (скорочено): // Н. Н. Боголюбов собрание трудов. Т. 1. / Н. Н. Боголюбов – С. 338–410.
95. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике / Боголюбов Н. Н. – К.: Изд-во АН УССР, 1945. – 137 с.
96. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике / Н. Н. Боголюбов // Сборник трудов института строит. механики АН УССР. – 1950. – Т. 14. – С. 9–34.

97. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике / Н. Н. Боголюбов – М.-Л.: ГИТТЛ, 1946. – 117 с.
98. Боголюбов М. М. Застосування методів нелінійної механіки до проблем кінетики. / М. М. Боголюбов – К.: Вид-во АН УРСР, 1948. – 17 с. (Збірник праць Інституту будівельної механіки, № 8).
99. Боголюбов М. М. Методи нелінійної механіки в статистичній фізиці / Боголюбов М.М. // Сборник оттисков № 327. – 16 с.
100. Боголюбов Н. Н. Одночастные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы / Н. Н. Боголюбов // Сб. тр. Ин-та строит. механики АМ УССР. – 1949.– Т. 10. – С. 9–21.
101. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский – [3-е изд.] – М.: Физматгиз, 1963. – 410 с.
102. Боголюбов Н. Н. О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики / Н. Н. Боголюбов // Труды первой летней матем. школы. – Киев: Наук. думка, 1964. – Т. 1. – С. 11–101.
103. Митропольский Ю. А. О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего ускоренную сходимость / Ю. А. Митропольский // Укр. мат. журнал. – 1964. – Т. 16. – № 4. – С. 475–501.
104. Гориев Р. О. Колебания твердых тел / Р. О. Гориев, В. О. Кононенко. – М.: Наука, 1976. – 431 с.
105. Писаренко Г. С. Рассеяния энергии при механических колебаниях / Г. С. Писаренко. – К.: Изд-во АН УССР, 1962. – 436 с.
106. Фещенко С. Ф. К вопросу о численном расщеплении систем однородных линейных дифференциальных уравнений / С. Ф. Фещенко, Л. Д. Николенко // Укр. мат. журн. – 1961. – Т. 13, № 3. – С. 109–113.
107. Боголюбов М. О. Юрій Олексійович Митропольський (до 80-річчя з дня народження) / М. О. Боголюбов, О. Б.Ликова // Інститут математики НАН України. Нариси розвитку. – Київ: Ін-тут математики, 1997. – С. 147–155.

108. Рудник В. У академіка Ю. О. Митропольського – ювілей. Лицар математики / В. Рудник // Прапор комунізму, субота 3 січня 1987 р.
109. Мейнарович Е. В. Юрий Алексеевич Митропольский (к 90-летию со дня рождения) / Е. В. Мейнарович. – К.: Ин-тут математики, 2005. – 231 с.
110. Три проблемы Митропольского // Один раз в жизни: О лауреатах Ленинской премии 1965 года. – М.: АПН, 1966. – С. 267–279.
111. Боголюбов А. Н. Киев, тридцатые годы / А. Н. Боголюбов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2000. – Т. 31, вып. 7 А. – С. 16–21; Выступление ректора Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова В. А. Садовничего // там же. – С. 12–13.
112. Литвинко А. С. Н. Н. Боголюбов – ученый, учитель, человек / А. С. Литвинко // Праці Інституту математики НАН України. – 2001. – Т. 39. – С. 145–154.
113. Митропольский Ю. А. Николай Николаевич Боголюбов: [математик]. К 75-летию со дня рождения / Ю. А. Митропольский // УМЖ. – 1984. – Т. 36, №5. – С. 651–652.
114. Митропольский Ю. А. М. М. Боголюбов [Физик]: К 50-летию со дня рождения / Ю. А. Митропольский, С. В. Тябликов // УФН. – 1959. – Т. 69, вып. 1. – С. 159–164.
115. Митропольский Ю. А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике / Митропольский Ю. А. – К.: Наук. думка, 1966. – 469 с.
116. Митропольский Ю. А. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеєнков. – К.: Ин-т математики, 1968. – 404 с.
117. Митропольский Ю. А. Лекции по методу интегральных многообразий / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова. – К.: Изд-во АН УССР, 1968. – 416 с.
118. Митропольский Ю. А. Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969. – 309 с.

119. Матеріали до обрання Ю. О. Митропольського у члени-кореспонденти НАН України. – Архів відділу наукових і керівних кадрів Президії НАН України.
120. Люди науки. Юрий Алексеевич Митропольский (к 80-летию со дня рождения) / [В. А. Ильин, Н. А. Изобов, А. А. Мартынюк та ін.] // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, №1. – С. 3–5.
121. Еругин Н. П. Юрий Алексеевич Митропольский: (К 60-летию со дня рождения) / Н. П. Еругин, С. В. Королюк, О. Б. Ликова // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, №1. – С. 177–184.
122. Легостаева Л. Рассказы об ученых. Мыслю – значит существую / Л. Легостаева // Правда Украины. – 1977. – 7 янв. – С. 4.
123. Исследования Ю. А. Митропольского в области теории нелинейных колебаний и теории нелинейных дифференциальных уравнений // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – 1977. – С. 7–14.
124. Фільм 8. Золоті імена української науки. – К., «Спейс-Інформ» (тиражування, прокат, розповсюдження), 2003.
125. Самойленко А. М. Превыше многих благ / А. М. Самойленко // Комсомольская правда. – 1970, 26 мая.
126. Юрію Олексійовичу Митропольському – 90! / [В. Бар’яхтар, С. Борисенко, В. Булдигін, Н. Вірченко, С. Івисишен] // Київський Політехнік. – 18 січня 2007. – С. 3.
127. Научно-технический потенціал: структура, динамика, эффективность. – К.: Наук. думка, 1987. – 348 с.
128. Митропольский Ю. А. Собственные колебания в нелинейных системах с медленноменяющимися параметрами / Ю. А. Митропольский // Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН УССР. – 1949. – № 11. – С. 107–114.
129. Митропольский Ю. А. Применение символических методов к исследованию нелинейных систем с медленно меняющимися параметрами / Ю. А. Митропольский // Сборник трудов Ин-та строительной механики АН УССР. – 1949. – № 13. – С. 99–111.
130. Боголюбов Н. Н. Одночастотные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы / Н. Н. Боголюбов // Сб. трудов Ин-та строительной механики АН УССР. – 1949. – Т.10. – С. 9–21.

131. Митропольский Ю. А. Исследование колебаний в нелинейных системах со многими степенями свободы и медленно меняющимися параметрами / Ю. А. Митропольский // УМЖ. – 1949. – Т. 1, № 2. – С. 85–98.
132. Митропольский Ю. А. Исследование колебаний нелинейной системы с медленно меняющимися параметрами / Ю. А. Митропольский // Институт строительной механики АН УССР. Сборник трудов. – 1950. – №14. – С. 134–144.
133. Митропольский Ю. А Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы / Ю. А. Митропольский // Прикл. математика и механика. – 1950. – Т. 14, вып. 2. – С. 139–170.
134. Митропольский Ю. А Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы: автореф. дис. на соискание степени д-ра техн. наук: спец. / Ю. А. Митропольский. – Киев, 1950. – 50 с.
135. Развитие методов нелинейной механики в работах Ю. А. Митропольского // УМЖ. – 1987. – Т. 39, №1. – С. 5–13.
136. Митропольский Ю. А. Вынужденные колебания в нелинейных системах при прохождении через резонанс / Ю. А. Митропольский // Инженерн. сб. Ин-т механики АН СССР. – 1953. – Т. 15. – С. 89–98, те саме: сб. оттисков № 183.
137. Митропольский Ю. А О колебаниях в гироскопических системах при прохождении через резонанс / Ю. А. Митропольский // УМЖ. – 1953. – 5, № 3. – С. 333–349.
138. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский – М.: Гостехиздат, 1955. – 447 с.
139. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах / Митропольский Ю. А. – Киев: Изд-во АН УССР, 1955. – 284 с.
140. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний / Митропольский Ю. А. – М.: Наука, 1964. – 431 с.
141. Митропольский Ю. А. О некоторых уравнениях, близких к точно интегрирующимся / Ю. А. Митропольский // Автомат. управление и вычислит. техника. – М.: Машгиз, 1959. – Вып. 2. – С. 221–248.

142. Митропольский Ю. А. Исследование нестационарных колебаний в нелинейных системах / Ю. А. Митропольский // Международный симпозиум по нелинейным колебаниям Международного Союза по теоретической и прикладной механике. Труды. – К.: АН УРСР.
Т. 3. – 1963.– С. 241–274.
143. Митропольский Ю. А. О некоторых диференциальных уравнениях, встречающихся в теории релаксационных колебаний / Ю. А. Митропольский // УМЖ. – 1957. – Т. 9, №3. – С. 296–309.
144. Митропольский Ю. А. Об устойчивости однопараметрического семейства решений уравнений с переменными коефициентами / Ю. А. Митропольский // УМЖ. – 1958. – Т. 10, №4. – С. 389–393.
145. Митропольский Ю. А. О периодических решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями / Ю. А. Митропольский // ДАН СССР. – 1959. – Т. 28, №6. – С. 1118–1121.
146. Митропольский Ю. А. Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных дифференциальных уравнений / Ю. А. Митропольский // УМЖ. – 1958. – Т.10, №3. – С. 270–279.
147. Боголюбов Н. Н. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – 126 с.
148. Боголюбов Н. Н. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский // Международный симпозиум по нелинейным колебаниям Международного Союза по теоретической и прикладной механике. Труды. – К.: Изд-во АН УРСР.
Т. 1.– 1963. – С. 93–154.
149. Митропольський Ю. О. До питання про структуру траєкторій на тороїдальних многовидах / Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко // Доп. АН УРСР, Сер. А. – 1964.– № 8. – С. 984–986.
150. Митропольский Ю. А. О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью метода ускоренной сходимости

/ Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1965. – Т. 17, № 6. – С. 42–59.
151. Митропольский Ю. А. О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего «ускоренную» сходимость / Ю. А. Митропольский // Укр. мат. журн. – 1964. – Т. 16, № 4. – С. 475–501.
152. Боголюбов Н. Н. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко. – Киев: Наук. думка, 1969. – 245 с.
153. Митропольский Ю. А. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик. – Киев: Наукова думка, 1990. – 272 с.
154. Кореневский Д. Г. О резонансных явлениях, обусловленных начальными условиями в динамических системах с распределенными параметрами и запаздыванием по времени / Д. Г. Кореневский, Ю. А. Митропольский // Прикл. механика. – 1969. – 5. вып. 9. – С. 111–113.
155. Митропольский Ю. А. К исследованию явления параметрического резонанса в контуре с нелинейной индуктивностью / Ю. А. Митропольский, И. Г. Козубовская // Краевые задачи электродинамики проводящих сред. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1976. – С. 108–121.
156. Митропольский Ю. А. К исследованию многочастотных колебаний в системах с медленно изменяющимися параметрами и запаздыванием / Ю.А. Митропольский, Ле Суан Кан // Дифференциально-разностные уравнения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 74–100. (Сборник).
157. Митропольский Ю. А. Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук // Укр. мат. журн. – 1968. – 20, № 6. – С. 791–801.
158. Митропольський Ю. О. Про існування і стійкість обмеженого розв'язку сингулярно збуреної системи із запізненням / Ю. О. Митропольський, В. І. Фодчук // Доп. АН УРСР. – 1969. – Сер. А, № 3. – С. 210–213.
159. Bogoliubov N. N. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations / N. N. Bogoliubov, Ju. A. Mitropolsky. –

New York: Gordon and Breach Science Publ. (Delhi Hindustan Publishing Corp. India), 1961. – 537 p.

160. Боголюбов Н. Н. The Method of Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1961. – 117 с.
161. Митропольский Ю. А. Интегральные многообразия в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
162. Ю. А. Митропольский Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
163. Митропольский Ю. А. Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений, близких к уравнениям с переменными коэффициентами, в гильбертовом пространстве / Ю. А. Митропольский // Укр. мат. журн. – 1964. – Т. 16, № 3. – С. 334–338.
164. Боголюбов Н. Н. Аналитические методы теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский // Всесоюзный съезд по теоретической и прикл. механике. Труды. – М.-Л.: Изд-во АН СССР. – 1962. – С. 25–35.
165. Метод усреднения в нелинейной механике // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. [В 4-х т.] – Киев: Инст. математики АН УССР, 1969.
    Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний.– 1970. – С. 21–39.
166. Митропольский Ю. А. Двоякопериодические решения некоторых систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными / Ю. А. Митропольский, Б. П. Ткач // Аналитические методы исследования нелинейных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 108–114. (Сборник научных трудов)
167. Митропольский Ю. А. О влиянии запаздывания на устойчивость маятника с вибрирующей точкой подвеса / Ю. А. Митропольский, А. Ю. Швец // Аналитические методы исследования нелинейных колебаний – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 115–120. (Сборник научных трудов)
168. Храмов Ю. А. Школы в науке / Ю. А. Храмов // Вопросы истории естествознания и техники. – 1982. – №3. – С. 54–67.

169. Храмов Ю. А. История формирования и развития физических школ на Украине / Ю. А. Храмов.– К.: Феникс, 1991. – 216 с.
170. Резников О. Звичайна біографія. Творческий путь Ю. А. Митропольского – лауреата Ленинской премии. // Лауреати Ленінської премії. – К.: Політвидав, 1969. – С. 79–91.
171. Боголюбов М. О. Юрій Олексійович Митропольський (до 80-річчя з дня народження) / М. О. Боголюбов, О. Б. Ликова // Інститут математики НАН України. Нариси розвитку. – Київ: Ін-т математики, 1997. – С. 147–155.
172. Труды семинара по матфизике и нелинейным колебаниям. – К.: Из-во АН УССР, 1963. – 172 с.
173. Митропольский Ю. А. О приведении к стандартному виду / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Т. Г. Стрижак // Тр. семинара по мат. физике и нелинейным колебаниям. – Киев: Наук. думка.– 1968. – Т. 1, Вып. 2. – С. 4–20.
174. Митропольский Ю. А. Исследование поведения решений нелинейных уравнений в окрестности положения равновесия / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова // Математическая физика: Респ. межведомственный сб. – Киев: Наук. думка. – 1965. – С. 74-96.
175. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Асимптотические разложения квазипериодических решений в квазилинейных системах второго порядка / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко // Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1971. – С. 104–112; Лыкова О. Б. Об уравнениях, описывающих потоки на интегральных многообразиях // там же – С. 93–98.
176. Лыкова О. Б. Об исследовании решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в «нерезонансном» случае / О. Б. Лыкова // УМЖ. – 1958. – Т. 3, № 10. – С. 239–250.
177. Лыкова О. Б. К вопросу об устойчивости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений / О. Б. Лыкова // УМЖ – 1959. – Т, 3, № 11. – С. 251–255.
178. Лыкова О. Б. Исследование решений нелинейных систем, близких к интегрирующимся, с помощью метода интегральных многообразий / О. Б. Лыкова // Международный симпозиум

по нелинейным колебаниям Международного Союза по теоретической и прикладной механике. Труды. – К.: Изд-во АН УРСР. – 1963. – Т. 1. – С. 315–323.
179. Митропольский Ю. А. Об интегральном многообразии нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих медленные и быстрые движения / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова // Укр. мат. журн. – 1964. – 16, №2. – С. 157–163.
180. Задирака К. В. До питання про інтегральний багатовид нелінійної системи диференціальних рівнянь, яка містить малий параметр при деяких похідних / К. В. Задирака // Вісник КДУ. – 1959. – №2, вип. 2. – С. 45–52.
181. Задирака К. В. Поведение особо возмущенных автономных нелинейных дифференциальных систем вблизи семейства цилиндров / К. В. Задирака // УМЖ. – 1962. – Т. 14, №3. – С. 235–249.
182. Задирака К. В. О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы / К. В. Задирака // УМЖ. – 1965. – Т. 17, №1. – С. 47–63.
183. Фодчук В. И Теоремы существования и методы построения ограниченных решений и интегральных многообразий возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // IV Всесоюз. конф. по теории и приложеним дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тезисы докладов. – Киев: Наук. думка, 1975. – С. 237–238.
184. Митропольский Ю. О. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи) / Ю. О. Митропольский, Б. І. Мосеєнков – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1961. – 122 с.
185. Писаренко Г. С. Колебания упругих систем с учетом рассеянияч энергии в материале / Писаренко Г. С. – Изд-во АН УССР, 1955. – 237 с.
186. Mitropolsky Yu. A. The Monofrequency Method in the Dynamic Analysis of Structures / Yu. A. Mitropolsky, B. I. Moseenkov. – New York: A Special Research Report, 1967. – 104 p.
187. Митропольский Ю. А. Исследование нелинейных колебаний в системах с распределенными параметрами и запаздыванием / Ю. А. Митропольский, Д. Г. Кореневский // Мат. физика. – 1968. – Вып. 4. – С. 93–145.

188. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков – К.: Вища школа, 1976. – 589 с.
189. Митропольский Ю. А. О принципе усреднения для гиперболических уравнений вдоль характеристик / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома // Укр. мат. журн. – 1970. – т. 22, № 5. – С. 600–610.
190. Хома Г. П. Усреднение гиперболических систем первого порядка с запаздывающим аргументом вдоль характеристики / Г. П. Хома // IV Всесоюз. конф. по теории и приложеним дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тезисы докладов. – Киев: Наук. думка, 1975. – С. 241–242.
191. Митропольский Ю. А. Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома – Киев: Наук. думка, 1983.– 216 с.
192. Митропольский Ю. А. Асимптотическе исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, Н. И. Громяк – К.: Наук. думка, 1991.– 231 с.
193. Митропольський Ю. О. До питання про структуру траєкторій на тороїдальних багатовидах / Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1964. – № 8. – С. 984–986.
194. Самойленко А. М. Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными / А. М. Самойленко // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – К.: Наукова думка, 1977. – С. 181–191.
195. Митропольский Ю. А. О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью метода ускоренной сходимости / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1965. – 17, №6. – С. 42–59.
196. Митропольский Ю. А. Многочастотные колебания нелинейных систем / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко // VI Междунар. конф. по нелинейным колебаниям: Тез. докл. – Варшава; Познань, 1972. – С. 90–91.
197. Митропольский Ю. А. О существовании гладкого инвариантного тора некоторых нелинейных систем с запаздыванием /

Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, К. В. Цидыло // IV Всесоюз. конф. по теории и приложениям дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом (Киев, 23–26 сент. 1975 г.): Тез. докл. – Киев: Наук. думка, 1975. – С. 170–171.

198. Митропольский Ю. А. Об инвариантных тороидальных многообразиях нелинейных систем с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, К. В. Цидыло // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 207–214.

199. Митропольский Ю. А. К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1979. – Т. 31, № 1. – С. 42–53.

200. Митропольский Ю. А. Одночастотные колебания в системах со многими степенями свободы и с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, В. Г. Самойленко // Методы нелинейной механики и их приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 78–88.

201. Самойленко А. М. К вопросу о существовании функции Грина задачи об инвариантном торе / А. М. Самойленко, В. Л. Кулик // УМЖ. – 1975. – Т. 27, №3. – С. 348–359.

202. Ткач Б. П. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных с запаздывающим аргументом / Б. П. Ткач // Диф. уравнения. – 1967. – Т. 3, №10. – С. 1796–1800.

203. Ткач Б. П. О периодических решениях счетной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа / Б. П. Ткач // УМЖ, 1969. – Т. 21, №1. – С. 73–85.

204. Митропольский Ю. А. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк. – К.: Вища шк., 1974. – 247 с.

205. Митропольский Ю. А. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Д. И. Мартынюк – К.: Наук. думка, 1984. – 214 с.

206. Самойленко А. М. Численно-аналитические методы исследования решения краевых задач / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто – К.: Наук. думка, 1976. – 222 с.

207. Митропольский Ю. А. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк. – Киев: Вища шк., 1979. – 248 с.
208. Митропольский Ю. А. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами / Ю.А. Митропольский, А. М. Самойленко, Д. И. Мартынюк. – Киев: Наук. думка, 1984. – 216 с.
209. Митропольський Ю. О. До питання обґрунтування методу усереднення для рівнянь другого порядку з імпульсною дією / Ю. О. Митропольський, А. М. Самойленко, М. О. Перестюк // Укр. мат. журн. – 1977. – Т. 29, № 6. – С. 749–761.
210. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в системах с импульсным воздействием / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк // Укр. мат. журн. – 1985. – Т.37, №1. – С. 56–64.
211. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М Самойленко, Н. А. Перестюк – Киев: Вища школа, 1987. – 288 с.
212. Самойленко А. М. Диференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк – К.: Вища шк., 1987. – 288 с.
213. Митропольский Ю. А. Применение принципа усреднения к исследованию влияния случайных воздействий на колебательные системы / Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец // Мат. физика. – 1967. – Вып. 3. – С. 146–168.
214. Митропольский Ю. А. Применение вероятностных и асимптотических методов в теории колебаний стохастических систем / Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец // Мат. физика. – 1971. – Вып. 9. – С. 89–95.
215. Митропольский Ю. А. Усреднение в стохастических системах / Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23, №3. – С. 318–345.
216. Митропольский Ю. А. Применение асимптотических методов в стохастических системах / Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец // Приближенные методы исследования нелинейных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 102–147. // IV Всесоюз. конф. по теории и приложеним дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тезисы докладов. – Киев: Наук. думка, 1975.

217. Митропольский Ю. А. По применению асимптотических методов в существенно нелинейных стохастических дифференциальных уравнениях / Ю. А. Митропольский, В. Г. Коломиец // Мат. физика и нелинейн. мех. – 1993. – Вып. 18 (52). – С. 52–53.
218. Митропольский Ю. А. Нелинейные колебания в квазилинейных динамических системах произвольного порядка / Ю. А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань – К., Наукова думка, 1992. – 344.
219. Рубаник В. П. Применение асимптотических методов к исследованию многочастотных колебаний в нелинейных системах / В. П. Рубаник // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – К.: Наукова думка, 1977. – С. 173–181.
220. Рубаник В. П. Применение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциально-разностным уравнениям / В. П. Рубаник // УМЖ. – 1959. – Т. 11, №4. – С. 446–449.
221. Рубаник В. П. О существовании и свойствах ограниченного решения системы квазилинейных диференциально-разностных уравнений / В. П. Рубаник, В. И. Фодчук // УМЖ. – 1962. – Т. 14, № 1. – С. 87–92.
222. Рубаник В. П. Применение метода осреднения к одному класу нелинейных систем с запаздыванием / В. П. Рубаник // IV Всесоюз. конф. по теории и приложеним дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тезисы докладов. – Киев: Наук. думка, 1975. – С. 207–208.
223. Халанай А. Точечно-вырожденные дифференциальные уравнения с запаздыванием и теория управления / А. Халанай // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – К.: Наукова думка, 1977.– С. 246–250.
224. Хейл Ж. К. Некоторые замечания по методу усреднения и интегральные многообразия в эволюционных уравнениях / Ж. К. Хейл // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – К.: Наукова думка, 1977. – С. 250–257.
225. Фодчук В. И. О существовании и свойствах интегрального многообразия одной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / В. И. Фодчук // УМЖ. – 1962. – Т. 14, №2. – С. 227–231.

226. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы нелинейной механики применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом / Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук // Укр. мат. журн. – 1966. – Т. 18, № 3. – С. 65–84.
227. Митропольский Ю. А. Обоснование метода усреднения для дифференциально-разностных уравнении в гильбертовом пространстве / Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23, № 6. – С. 745–752.
228. Фодчук В. И. О существовании и свойствах интегрального многообразия одной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / В. И. Фодчук // УМЖ. – 1962. – Т. 14, №2. – С. 227–231.
229. Митропольский Ю. А. Об устойчивости интегральных многообразий для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук // УМЖ. – 1968. – Т. 20, №6. – С. 791–801.
230. Фодчук В. И. Метод интегральных многообразий в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / В. И. Фодчук // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – К.: Наукова думка, 1977. – С. 232–238.
231. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / Рубаник В. П. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
232. Рубаник В. П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием / Рубаник В. П. – Минск: Изд-во «Университетское». – 1985. – 143 с.
233. Митропольский Ю. А. Развитие асимптотического метода применительно к исследованию колебательных и волновых процессов / Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин // VII Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Берлин, 8-13 сент., 1975 г.: Сб. аннот. – Берлин, 1975. – С. 215.
234. Митропольский Ю. А. Развитие асимптотического метода применительно к исследованию колебательных и волновых процессов / Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин // VII Internationale Konferenz uber nichtlineare Schwingungen, Berlin, 8–13 Sept., 1975. – Beilin: Akad. – Verlag, 1977. – 1, 2. – S. 95–106.
235. Лопатин А. К. Исследования асимптотического взаимодействия колебательных составляющих в методе гармонического

баланса / А. К. Лопатин // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев, 1977. – С. 138–143.

236. Митропольский Ю. А. Векторные поля, алгебры и группы, порождаемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и их свойства / Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин. – Киев, 1985. – 63 с.
237. Митропольский Ю. А. Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений / Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин. – К.: Ин-т математики УССР, 1978. – 68 с.
238. Митропольский Ю. А. Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики / Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин – Киев: Наукова думка, 1988. – 271 с.
239. Кулик В. Л. Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений / В. Л. Кулик // Укр. матем. журн. – 1982. – Т. 34, №1. – С. 43–49.
240. Мосеенков Б. И. Изучение параметрического резонанса при освящении модулированным светом полупроводниковых кристалов / Б. И. Мосеенков, И. А. Максимюк // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – К.: Наукова думка, 1977. – С. 149–160.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**Кілочицька Тетяна Валентинівна**

# НАРИСИ ІСТОРІЇ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ В УКРАЇНІ (30–60 рр. ХХ ст.)

## Монографія


Верстка та макетування *О. І. Полковник*

Комп'ютерний набір *Т. В. Кілочицька*

*Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 23743-13583 ПР від 06.02.2019 р.*

Підписано до друку 23.12.2020 р. Формат 60×90 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 10,23. Обл.-вид. 9,02. Зам. № 924.
Редакційно-видавничий відділ НУЧК імені Т. Г. Шевченка
14013, м. Чернігів, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208
тел. 65-17-99. nuchk.tipograf@gmail.com