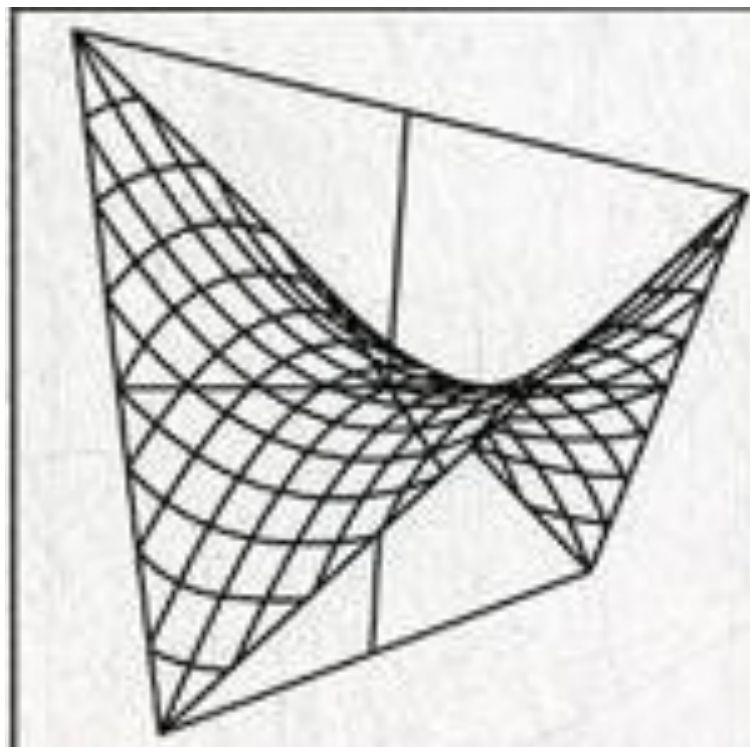


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ Т.Г.ШЕВЧЕНКА

КІЛОЧИЦЬКА ТЕТЯНА ВАЛЕНТИНІВНА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ



2011

Навчально-методичний посібник «Вища математика. Векторна алгебра та аналітична геометрія» написаний з використанням елементів історії математики. Він містить розроблені тестові завдання, підібрані з урахуванням технологічного напрямку спеціальностей педагогічних вищих навчальних закладів (зокрема зі спеціальності 6.010104 „Професійна освіта“).

Кожна лекція містить стисло викладений теоретичний матеріал з прикладами, малюнками, зразками розв’язування типових завдань.

Для студентів вищих педагогічних навчальних закладів зі спеціальності 6.010104 „Професійна освіта, істориків математики, методистів і всіх тих, хто цікавиться історією науки.

Рекомендовано до друку та використання в електронному вигляді Вченою радою ЧНПУ імені Т.Г.Шевченка (Протокол № 7 від 23 лютого 2011 року)

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор Ю.О.Храмов, завідувач відділу історії науки Центру досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки ім. Г.М.Доброва НАН України;

доцент, кандидат фізико-математичних наук М.М.Мурач, Чернігівський національний педагогічний університет імені Т.Г.Шевченка

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Розділ I. Елементи векторної алгебри

Лекція 1. <i>Вектори і лінійні операції з ними.</i>	8
Системи координат	8
Вектор. Колінеарні й компланарні вектори. Проекція вектора на вісь. Координати вектора і точки. Дії над векторами, що задані своїми координатами. Довжина вектора. Лінійні операції над векторами (додавання, віднімання і множення на число)	10
Розклад вектора на складові в просторі	12
Поділ відрізка у заданому відношенні	12
Тестові завдання	13
Лекція 2. <i>Множення векторів</i>	14
Скалярний добуток векторів.	14
Векторний добуток векторів.	15
Мішаний добуток трьох векторів.	16
Тестові завдання	17

Розділ II. Аналітична геометрія на площині

Лекція 3. <i>Лінії першого порядку на площині</i>	18
Поняття лінії на площині	18
Види рівнянь прямої на площині	18
Найпростіші задачі на пряму: взаємне розміщення двох прямих, кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої	20
Тестові завдання	21
Лекція 4. <i>Лінії другого порядку на площині</i>	23
Поняття про лінії другого порядку	23
Коло	24
Еліпс, його канонічне рівняння; дослідження форми еліпса за його рівнянням	25
Гіпербола, її канонічне рівняння; дослідження форми гіперболи за її рівнянням	26
Парабола	27
Тестові завдання	27

Розділ III. Аналітична геометрія в просторі

Лекція 5. <i>Площина</i>	29
Рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору. Загальне рівняння площини	29

Рівняння площини, що проходить через три точки	30
Кут між площинами	31
Відстань від точки до площини	31
Тестові завдання	32
Лекція 6. Пряма в просторі	33
Загальне рівняння прямої	33
Канонічне рівняння прямої	33
Параметричне рівняння прямої	33
Рівняння прямої, що проходить через дві точки	34
Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини	34
Кут між прямою і площиною	35
Тестові завдання	36

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З ДИСЦИПЛІНИ	37
--	-----------

ВСТУП

Одна з провідних тенденцій розвитку сучасної освіти є її гуманізація та гуманітаризація. Ця тенденція зумовлена соціальним запитом, адже в наш час необхідно постійно стимулювати мислення студентів, спонукати їх до вироблення власної життєвої позиції.

Кожна професійна діяльність потребує від спеціаліста певних якостей і здібностей. Тому важливим є також адекватний вибір професії у відповідності з нахилами і здібностями людини. Якщо ж казати про гармонійний розвиток особистості, то математика займає не останнє місце. Математика є не лише засобом науково-технічного прогресу, що зміцнює матеріальний потенціал суспільства, але і потужним засобом духовного зростання. Використання елементів історизму при викладанні вищої математики сприяє більш гуманітарному спрямуванню математичної освіти.

Недостатня математична освіта, низька математична культура XXI ст. можуть стати серйозною перешкодою на шляху до формування професійних якостей майбутнього випускника вищого навчального закладу. В наш час відбувається постійне скорочення годин, виділених на вивчення математики, збільшується розрив між рівнем математичних знань випускників ВНЗ і об'єктивними потребами сучасної науки і техніки, існує певна невідповідність шкільного курсу математики з вимогами до знань студентів у вищій школі. Для того, щоб вирішити останню проблему треба удосконалювати методику викладання математики, використовувати у навчанні інформаційні технології.

На першому занятті з вищої математики доцільно провести 5-10 хвилинне тестування для виявлення рівня підготовки студентів. На лекціях слід використовувати елементи наочності: графіки, логічні схеми, таблиці (об'єм сприйняття – 5-7 об'єктів на таблиці). Доцільно використовувати контекстне навчання (мотивація до засвоєння знань досягається розв'язуванням практичних задач), міждисциплінарний підхід до навчання, навчання на основі аналізу реальних життєвих ситуацій. Цього можна досягти введенням елементів історизму в навчальні дисципліни, зокрема в навчальну дисципліну «Вища математика». Адже, чим вище рівень розвитку мислення і творча активність студента, тим вище рівень сформованості його особистих та професійних якостей.

Однією з проблем у викладанні вищої математики є велике навантаження навчальної програми. Наприклад, в першому семестрі 1 курсу студенти вивчають такі розділи математики: лінійна алгебра, векторна алгебра, алгебра і теорія чисел, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної. З метою мотивації навчання і для більш швидкого і тривалого запам'ятовування у студентів слід більшість математичних понять вводити, розглянувши спочатку історичну задачу. Крім того, у викладанні курсу вищої математики повинні бути присутні короткі відомості про історію окремих розділів математики в контексті розвитку світової науки з обов'язковим висвітленням основних надбань української науки.

Введення елементів історії математики має метою:

- підвищення інтересу студентів до вивчення вищої математики, до наукової творчості;
- посилення міжпредметних зв'язків, гуманізації освіти;
- поглиблення розуміння нового матеріалу, розвиток критичного мислення;
- з'ясування ролі і місця математики в практичній діяльності людей різних історичних епох;
- визначення передумов створення нових математичних теорій, методів доведення теорем.

Виклад історичного матеріалу повинен бути продуманим і органічно поєднуватись з викладом основного матеріалу навчального курсу, доповнювати і не заважати його вивченню. Цікавий, вдало введений історичний матеріал з даної теми сприяє естетичному вихованню студентів. Історичний підхід дозволяє також врахувати напрям спеціалізації студентів.

Доцільно історичний матеріал викладати коротким історичним повідомленням (5-10 хв.). Такі повідомлення можуть бути:

- з історії окремого напрямку математики (фрагменти текстів праць видатних математиків, історичні задачі);
- бібліографічні відомості про окремого видатного математика, який працював в даному науковому напрямі (використання імені вченого в процесі вивчення матеріалів лекцій, виклад короткої бібліографічної довідки, висловлювання вчених про математику і математиків).

Короткі бібліографічні довідки про вчених доцільно викласти на початку лекції з метою мотивації і підвищення інтересу до навчання. Зокрема, при вивченні елементів алгебри слід пригадати Франсуа Вієта, юриста за освітою, який шляхом самоосвіти став батьком символічного числення. Він вперше став позначати буквами коефіцієнти рівнянь. Це дало можливість вивчати загальні властивості рівнянь і їх коренів.

Доцільно або зацікавити студентів і показати алгоритм міркувань, як вчений дійшов такого висновку, які методи використав при доведенні теореми.

При викладанні вищої математики слід також вказувати на роль наукових досліджень українських математиків та вихідців з України. Цінними для розвитку алгебри і геометрії є твори українського письменника, члена Кирило-Мефодіївського братства Миколи Івановича Гулака “Етюди про трансцендентні рівняння” (1852) та “Спроба геометрії чотирьох вимірів” (1877). Остання складається з двох частин: “Розмови про простір” та “синтетичної геометрії чотирьох вимірів” і є першою монографією з чотиривимірної евклідової геометрії в Російській імперії.

Можна дати студентам написати реферат про цих видатних вчених або коротко розповісти про цих видатних вчених. Творче життя вчених буде позитивним прикладом для студентів.

Доповідь на 5-10 хв. сприятиме виробленню життєвих пріоритетів студентів, мотивації навчання, гуманізації освіти.

При ознайомленні з історичним матеріалом треба обов'язково сказати студентам, що можна продовжувати наукове дослідження в цьому напрямі,

узагальнити отримані результати. Це пробуджуватиме інтерес студентів до самостійного наукового дослідження, створюватиме перспективу у навчанні, забезпечуватиме умови для кращого розуміння і запам'ятовування нового матеріалу студентами, сприятиме формуванню у них математичної культури, усвідомленню логіки побудови математичних теорій.

В процесі подання історичного матеріалу (історична задача, теорема) слід створювати проблемну ситуацію. При введенні нового математичного поняття бажано, при можливості, розглянути еволюцію цього поняття, щоб воно не здалося студентам введеним штучно, без потреб практики.

Доцільно сказати, що становлення класичної науки, зокрема математичної, відбувалося в XVII ст. В цьому столітті швидко розвиваються диференціальне та інтегральне числення, теорія диференціальних та інтегральних рівнянь. Виникненню диференціального та інтегрального числення сприяли введення в математику змінної величини та методу координат, розвиток методів розв'язання задач на обчислення площ, об'ємів тіл, визначення центрів тяжіння, дотичних тощо. Зв'язок математики з механікою, астрономією, фізикою розширив уявлення про неперервні величини, функціональні залежності.

На сучасному етапі розвитку освіти постає завдання подальшої науково-практичної розробки сучасних проблем гуманізації навчання та широкого впровадження відповідних психолого-педагогічних і методичних надбань у практику роботи вищих навчальних закладів. Тут доцільним є введення елементів історизму при викладанні дисциплін фундаментального циклу, зокрема вищої математики.

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Після великих географічних відкриттів (Америку – в 1492 р, морського шляху в Індію – в 1498 р.) активізувався розвиток виробництва, торгівлі. Мореплавство вимагало розробки і вдосконалення складання географічних карт, тригонометричних і астрономічних таблиць. Дослідження Галілея та Кеплера стимулювало створення аналітичної геометрії в середині XVII ст.

Походження назви “аналітична геометрія” пов’язують з тим, що французький математик Ф.Вієт буквену алгебру називав “аналітичним мистецтвом”. Термін “аналітична геометрія” введено французьким математиком С.Лакруа в четвертому виданні книги “Курс математики” (1807). Першою книгою “Аналітична геометрія” був підручник французького Г.Гарньє (1808).

Систематичний виклад аналітичної геометрії в просторі вперше міститься у другому томі швейцарського математика Л.Ейлера “Вступ до аналізу” (1748), який вважається першим курсом аналітичної геометрії.

У XVIII ст. завершено формування аналітичної геометрії як науки і як навчального предмету. Тут варто пригадати класичний підручник французького академіка С.Лакруа. З кінця XIX ст. до неї увійшли також поняття і операції векторної алгебри.

РОЗДІЛ I. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

ЛЕКЦІЯ 1. ВЕКТОРИ І ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ З НИМИ

План лекції

1.1. Системи координат.

1.2. Вектор. Колінеарні й компланарні вектори. Проекція вектора на вісь. Координати вектора і точки. Дії над векторами, що задані своїми координатами. Довжина вектора. Лінійні операції над векторами (додавання, віднімання і множення на число).

1.3. Розклад вектора на складові в просторі.

1.4. Поділ відрізка у заданому відношенні.

1.5. Тестові завдання

1.1. Системи координат

Основи координатного методу були вже у Стародавньому Вавілоні.

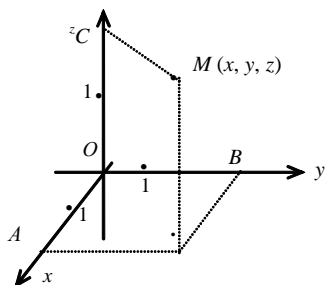
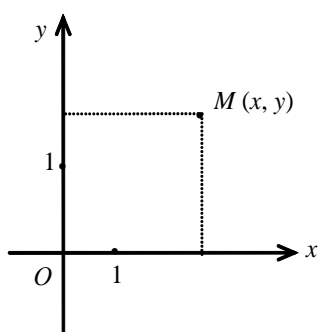
У II ст. до н.е. грецький дослідник Гіппарх запропонував визначити положення точки на земній поверхні географічними координатами (довгота і широта). Аполлоній Пергський (262 до н.е. – 190 до н.е.) у трактаті “Конічні перерізи” використав прямокутні координати і визначив відомі на той час лінії другого порядку: еліпс, гіперболу, параболу.

Розгляд складніших рухів за допомогою простіших призвів до створення системи координат, яку пізніше назвали декартовою. В праці французького

математика Р.Декарта «Геометрія» застосовується ортогональна* система координат (але без від'ємних абсцис), введено поняття змінної величини у двох розуміннях: 1) як відрізок змінної довжини, координати точки, яка своїм рухом описує плоску криву або 2) як числову змінну, яка виражає довжину.

Основоположником координатного методу і аналітичної геометрії вважають французького математика Р.Декарта. Він у праці «Геометрія» (1637) виклав основи цього методу. Ця праця є в основному алгебраїчною, але в ній міститься ідея аналітичної геометрії – алгебраїчний спосіб дослідження геометричних об'єктів за допомогою методу координат. Великий внесок у розвиток аналітичної геометрії зробив французький математик П.Ферма. Він раніше і точніше за Р.Декарта ввів прямолінійні координати. Однак праці Р.Декарта мали пріоритет, бо були опубліковані раніше. П.Ферма ввів рівняння прямої і кривих другого порядку, розглянув задачу про перенесення системи координат. Він вважав, що якщо два рівняння з двома невідомими відрізняються лише сталими коефіцієнтами, то вони виражають криві одного характеру.

Ідеї Р.Декарта і П.Ферма розвивалися іншими дослідниками, зокрема англійським вченим І.Ньютоном. Він в праці «Перелік кривих третього порядку» (1704) удосконалив метод координат, ввівши рівноправні осі координат. Швейцарський математик Г.Крамер у праці «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих» (1750) ввів вісь ординат, вважаючи її рівноправною віссю і використав поняття двох координат точки на площині. В 1731 р. французький математик А.Клеро в книзі «Дослідження про криві подвійної кривини» розпочав систематичне використання просторових координат.



Дамо означення декартової системи координат.

Три взаємно перпендикулярні осі Ox , Oy , які мають спільний початок точку O і однакову масштабну одиницю, утворюють прямокутну декартову систему координат на площині.

Якщо таких осей три: Ox і Oy , Oz , то маємо прямокутну декартову систему координат у просторі.

Осі Ox , Oy , Oz називаються відповідно *осями абсцис, ординат і аплікат*, точка O — *початок системи координат*. Декартовими координатами x , y , z довільної точки M у просторі є відповідно довжини OA , OB , OC .

Кожній точці площині можна поставити у відповідність впорядковану двійку чисел (x, y) , а в просторі — впорядковану трійку чисел (x, y, z) .

Французький математик Лагранж у творі «Аналітична механіка» (1788) показав застосування методу координат в фізиці. У першій главі цього тому вводиться система декартових координат у просторі, знаходиться відстань точки простору до початку координат, у другій главі виводяться рівняння циліндричних і конічних поверхонь, у третій досліджують-

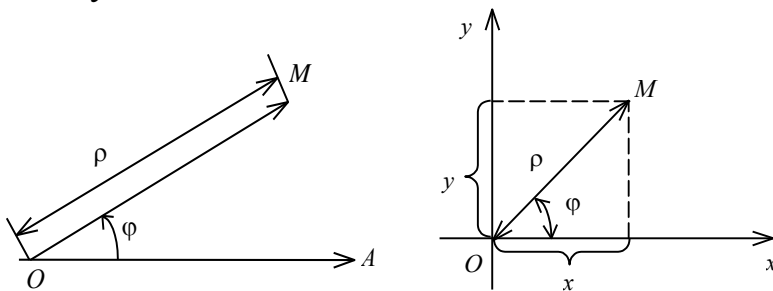
* Вісі системи координат перпендикулярні

ся плоскі перерізи кругового циліндра і конуса, у п'ятій главі виведено рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, параболоїдів.

Метод координат сприяв використанню в математиці змінних величин. На основі двовимірної та тривимірної геометрії була створена багатовимірна аналітична геометрія.

В геометрії набула широкого застосування полярна система координат.

Полярна система координат складається з деякої точки площини O (полюса O), і полярної осі (променя OA , що виходить з цієї точки) і одиниці масштабу.



Полярними координатами точки M є число ρ — відстань від полюса O до точки M (полярний радіус) і φ — кут між полярною віссю OA і радіусом OM (проти годинникової стрілки). $M(\rho, \varphi)$.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \leq \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки встановлюють формули:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Наприклад, знайти полярні координати точки $M(2, 2)$.

З останніх формул маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\arccos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Отже, полярні координати точки $M\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

1.2. Вектор. Лінійні операції над векторами

В архіві болонського математика XVI ст. Р.Бомбеллі було знайдено його праці з геометрії. Зокрема, він виконував арифметичні операції над геометричними величинами, вводячи одиничний відрізок, досліджував нульові і від'ємні площі.

Термін «вектор» (vector – тягти) введено Гамільтоном у 1846 році. Вперше поняття вектора як напрямленого відрізка знайшло застосування в механіці для зображення фізичних векторних величин: швидкості, прискорення, сили, моменту сили тощо.

Більш глибоке застосування вектора було пов'язане з його детальним вивченням. Праці К.Весселя (1745-1818), Аргана (1768-1822), К.Гауса (1777-

1855) з теорії комплексних чисел встановили зв'язок між операціями над комплексними числами і геометричними операціями над векторами у площині.

Відомі математики В.Гамільтон (1805-1865), Мебіус (1790-1868), Г.Грассмана (1809-1877) займалися застосуванням векторів у тривимірному і багатовимірному просторах. На початку ХХ ст. відбувався подальший розвиток векторного числення. Створені векторна алгебра, векторний аналіз, теорія поля, тензорний аналіз. На векторній основі викладено лінійну алгебру, аналітичну та диференціальну геометрію.

Вектором називається напрямлений відрізок. Вектор позначають малими латинськими літерами \vec{a}, \vec{b}, \dots , або \vec{AB} , де точка A — початок вектора, а точка B — його кінець.

Вектор, в якого початок і кінець збігаються, називається *нульовим вектором*.

Вектор \vec{AB} вважається заданим, коли відома його довжина $|\vec{AB}|$ (модуль) і напрям.

Два вектори вважаються рівними, якщо їх модулі рівні, і напрямки збігаються.

Два паралельних, однакових за довжиною, але протилежно направлених вектори \vec{a} та $-\vec{a}$ називаються протилежними векторами.

Якщо довжина вектора дорівнює одиниці, вектор називають одиничним.

Два вектори \vec{a} і \vec{b} називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два вектори \vec{a} і \vec{b} називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині.

Щоб знайти координати вектора \vec{AB} , треба від координат кінця цього вектора відняти координати початку. Якщо $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то координати вектора $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Наприклад: $A(2, -1, 3)$, $B(3, 4, 5)$, $\vec{AB} = (3 - 2; 4 - (-1); 5 - 3) = (1; 5; 2)$.

Довжина вектора дорівнює кореню квадратному з суми квадратів координат цього вектора:

Якщо $\vec{a} = (x; y; z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

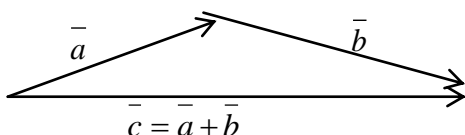
Наприклад $\vec{a} = (-3; 0; 4)$, $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = 5$.

Дії з векторами, що задані своїми координатами

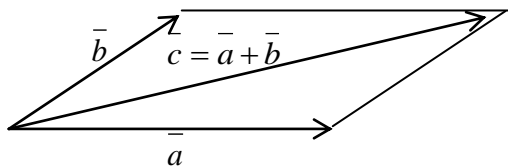
Над векторами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ означені такі операції:

1. *Додавання:*

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$



Правило трикутника



Правило паралелограма

Віднімання векторів.

Щоб від вектора \vec{a} відняти вектор \vec{b} , необхідно до вектора \vec{a} додати вектор, протилежний \vec{b} ($-\vec{b}$).

2. Множення вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ на дійсне число α :

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z).$$

Щоб помножити вектор \vec{a} на число α треба кожену координату вектора помножити на це число.

Властивості лінійних операцій над векторами:

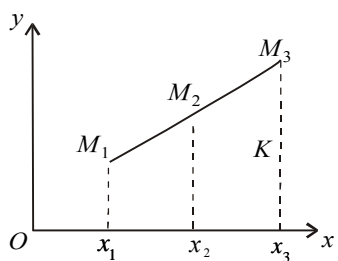
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.
4. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

1.3. Розклад вектора на складові в просторі

Візьмемо вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ такі, що за напрямком збігаються відповідно з осями Ox, Oy, Oz і по модулю дорівнюють одиниці: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Такі вектори називаються *одичними* векторами осей системи координат (ортами). Тоді вектор $\vec{a} = (x; y; z)$ можна подати у вигляді:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ – розклад вектора за одичними векторами.}$$

1.4. Поділ відрізка в заданому відношенні



Нехай задано координати точок $M_1(x_1, y_1)$ і $M_3(x_3, y_3)$.

Число μ — називається відношенням, в якому точка $M_2(x_2, y_2)$ ділить відрізок M_1M_3 , якщо

$$\mu = \frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|}. \quad (*)$$

Нехай μ – відоме число і треба знайти координати точки $M(x, y)$.

З теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, маємо:

$$\frac{|M_1 M_2|}{|M_2 M_3|} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_3 - x_2|} = \mu.$$

Оскільки числа $x_2 - x_1$ і $x_3 - x_2$ при $x_1 < x_3$ додатні, а при $x_1 > x_3$ — від'ємні, то знак модуля в останній рівності можна опустити:

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_3 - x_2|} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \mu.$$

Звідси:

$$x_2 = \frac{x_1 + \mu \cdot x_3}{1 + \mu}.$$

Аналогічно, формула для знаходження ординати:

$$y_2 = \frac{y_1 + \mu \cdot y_3}{1 + \mu}.$$

Наслідок. Якщо точка $M_2(x, y)$ — середина відрізка $M_1 M_3$, то $\mu = 1$ (див.*.) і

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}, y_2 = \frac{y_1 + y_3}{2}.$$

Наприклад. Дано координати точок $M_1(3, -1)$ і $M_3(1, 7)$. Середина відрізка $M_1 M_3$ є точка $M_2\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = M_2(2, 3)$.

1.5. Тестові завдання

1. Вектором називається:

А) напрямлений відрізок,

В) пара точок,

С) пряма

2. Сумою векторів $\bar{a}(-1, 2, 0)$ і $\bar{b}(3, 4, 1)$ є вектор:

А) $(2, 6, 1)$,

В) $(4, 2, -1)$,

С) $(2, 8, 0)$.

3. Різницею $(\bar{a} - \bar{b})$ векторів $\bar{a}(-1, 2, 0)$ і $\bar{b}(3, 4, 1)$ є вектор:

А) $(-4, -2, -1)$,

В) $(2, 6, 1)$,

С) $(-3, 8, 1)$.

4. Довжина вектора $\vec{a}(-1, 2, 0)$ дорівнює

A) $\sqrt{5}$,

B) $\sqrt{3}$,

C) 2.

5. Два вектори називаються колінеарними, якщо вони:

A) лежать в одній площині,

B) лежать на одній прямій,

C) лежать на одній прямій або паралельних прямих.

ЛЕКЦІЯ 2. МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ

План лекції

2.1. Скалярний добуток векторів.

2.2. Векторний добуток векторів.

2.3. Мішаний добуток трьох векторів.

2.4. Кут між двома векторами.

2.5. Тестові завдання

2.1. Скалярний добуток

Скалярним добутком векторів \vec{a} і \vec{b} називається число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута φ між цими векторами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$ або хоча один з векторів нульовий ($\vec{a} = 0, \vec{b} = 0$).

Якщо відомі координати векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ (сума добутків відповідних координат векторів).

З цієї формули і властивості (4) умова перпендикулярності векторів: $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

З означення скалярного добутку можна визначити кут φ між векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Приклад, знайти скалярний добуток векторів $\vec{a} = (-3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; -3; 1)$ та кут між ними.

Довжини цих векторів

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = -6 + 6 + 1 = 1.$$

Кут між векторами знайдемо за означенням скалярного добутку:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{14}.$$

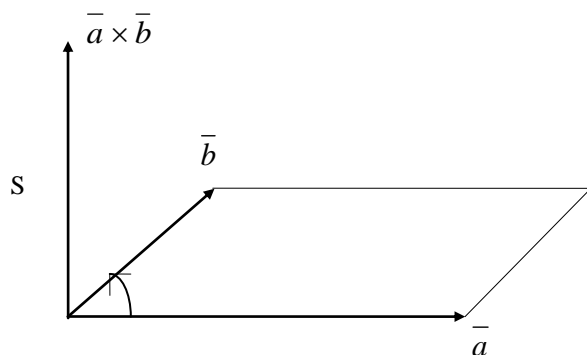
2.2. Векторний добуток

Векторним добутком вектора \vec{a} на вектор \vec{b} називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$, який задовольняє таким умовам:

1) довжина вектора знаходиться за формулою $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, де φ — кут між векторами;

2) вектор \vec{c} перпендикулярний до кожного з векторів \vec{a} і \vec{b} : $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} утворюють праву трійку векторів. Це означає, що \vec{c} направлений так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори \vec{a} і \vec{b} , то поворот вектора \vec{a} до вектора \vec{b} відбувається проти годинникової стрілки:



Геометричний зміст векторного добутку

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах (див. означення векторного добутку):

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, то вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні або хоча б один з них нульовий.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ — не комутативна властивість множення (переставна властивість не виконується).
3. $(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$.
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Якщо \vec{a} і \vec{b} задані своїми координатами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ та $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то векторний добуток обчислюється за допомогою визначника третього порядку:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a} = (-1; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2+0) - \vec{j}(-3-0) + \vec{k}(6+2) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k} = (2; 3; 8).$$

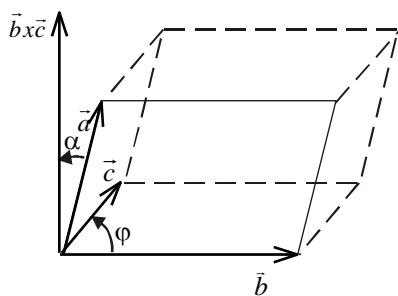
Площа трикутника, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{4+9+64} = \frac{\sqrt{77}}{2}.$$

2.3. Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора \vec{a} на векторний добуток векторів \vec{b} і \vec{c} , позначають $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Геометричний зміст мішаного добутку



Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} : $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

З цього можна записати умову компланарності трьох векторів \vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c} (лежать в одній площині, отже об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах $V=0$):

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

Якщо відомі координати векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то мішаний добуток цих векторів знаходять за формулою:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку:

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$ – не комутативна властивість (переставна властивість не виконується).
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, то вектори \vec{a} і \vec{b} компланарні або хоча б один з них нульовий.

Приклад. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a} = (-1; -1; 1)$, $\vec{b} = (2; 5; 1)$, $\vec{c} = (4; 3; -2)$. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ та об'єм піраміди, побудованої на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

$$\text{Мішаний добуток } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1(-10 - 3) + 1(-4 - 4) + 1(6 - 20) = -9.$$

Об'єм піраміди дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах $V_{\text{пір.}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

2.4. Тестові завдання

1. Скалярним добутком векторів є

- A) вектор,
- B) число,
- C) косинус кута між векторами.

2. Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 0, -5)$ дорівнює

- A) -19,
- B) 11,
- C) (-4, 0, -15).

3. Векторним добутком векторів є

- A) вектор,
- B) число,
- C) синус кута між векторами.

4. Векторний добуток векторів $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 0, -5)$ є

- A) -19,
- B) (-10, 7, -8),
- C) (-10, -7, -8).

5. Мішаний добуток векторів $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 0, -5)$, $\vec{c} = (1, -2, 0)$ є

- A) 24,
- B) (-24, 0, 0),
- C) -24.

6. Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює

- A) об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ,
- B) площі паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} ,
- C) площі трикутника, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} .

РОЗДІЛ II. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

ЛЕКЦІЯ 3. ЛІНІЇ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

План лекції

3.1. Поняття лінії на площині.

3.2. Різні види рівняння прямої.

3.3. Найпростіші задачі на пряму: взаємне розміщення двох прямих, кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої.

3.4. Тестові завдання

3.1. Поняття лінії на площині

Рівняння $F(x, y) = 0$ називається рівнянням деякої лінії в заданій системі координат, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

3.2. Види рівнянь прямої на площині.

1) Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай задано деяку пряму, точку $M(x_0; y_0)$, що належить цій прямій, вектор $\vec{n} = (A; B)$ перпендикулярний до неї.

Візьмемо точку $A(x, y)$ – довільну точку прямої.

Побудуємо вектор $\vec{MA} = (x - x_0, y - y_0)$, який буде перпендикулярний вектору \vec{n} . Отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю: $\vec{MA} \cdot \vec{n} = 0$ або в координатній формі:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – нормальне рівняння прямої, заданої точкою $M(x_0; y_0)$ та нормальним вектором $\vec{n} = (A; B)$.

2) Якщо в цьому рівнянні розкриємо дужки, то маємо $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої на площині, A, B, C – числа, причому $C = -Ax_0 - By_0$.

Ми бачимо, що в прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно x і y . Навпаки, це рівняння при довільних A, B, C (A і B одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy .

Геометричний зміст коефіцієнтів рівняння A і B .

В загальному рівнянні прямої коефіцієнти A і B – це координати векторів:

$\vec{p} = (-B; A)$ – напрямленого вектора даної прямої,

$\vec{n} = (A; B)$ – нормального (перпендикулярного вектора даної прямої).

Наприклад, рівняння $6(x - 3) - 2(y + 5) = 0$ визначає пряму, що проходить через точку $A(3, -5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (6; -2)$.

Дослідимо загальне рівняння прямої:

1. $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$, тоді $Ax + By = 0$ – пряма, що проходить через початок системи координат ($O(0, 0)$ лежить на цій прямій).

2. $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$, тоді $Ax + C = 0$, або $x = -\frac{C}{A}$ – пряма, паралельна осі Oy . Якщо ще і $C = 0$, то маємо $x = 0$ – рівняння осі Oy .

3. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, тоді $Bx + C = 0$, або $y = -\frac{C}{B}$ – пряма, паралельна осі Ox , якщо ще і $C = 0$, то маємо $y = 0$ – рівняння осі Ox .

3) Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Побудуємо вектора $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ і $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$. Ці вектора колінеарні, тобто відповідні координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} - \text{рівняння прямої, що проходить через дві задані}$$

точки.

Наприклад, рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2,4)$ і $M_2(-3,5)$:

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-4}{5-4}, \text{ тобто } \frac{x-2}{-5} = y-4.$$

4) Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_1(x_1, y_1)$ паралельно заданому вектору $\vec{q} = \{l, m\}$.

Точка $M(x, y)$ лежить на цій прямій тоді, коли вектори $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$ і $\vec{q} = \{l, m\}$ колінеарні, тобто відповідні координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} - \text{канонічне рівняння прямої.}$$

З цього рівняння можна отримати **параметричне рівняння прямої:**

$$\begin{cases} \frac{x - x_1}{l} = t, \\ \frac{y - y_1}{m} = t, \end{cases} \quad t \in R, \text{ де } t - \text{параметр.}$$

Наприклад, рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_1(-3,4)$ паралельно заданому вектору $\vec{q} = \{5,6\}$ є рівняння $\frac{x+3}{5} = \frac{y-4}{6}$.

Наприклад, задані точки $A_1(-1,3)$, $A_2(7,2)$, $A_3(-6,0)$. Знайти: 1) рівняння прямої A_1A_2 ; 2) рівняння прямої A_3H , паралельної до прямої A_1A_2 .

1) Запишемо рівняння прямої A_1A_2 (рівняння прямої, що проходить через дві задані точки):

$$\frac{x+1}{7+1} = \frac{y-3}{2-3}.$$

Тобто $\frac{x+1}{8} = \frac{y-3}{-1}$ – канонічне рівняння прямої A_1A_2 .

З цього рівняння можна знайти вектор, паралельний до цієї прямої. Він має координати $\vec{a}(8,-1)$.

2) Знайдемо рівняння прямої A_3H паралельної до прямої A_1A_2 .

Вектор $\vec{a}(8,-1)$ буде паралельний і до прямої A_3H . Підставимо в канонічне рівняння прямої координати точки A_3 і вектора \vec{a} :

$$\frac{x+6}{8} = \frac{y-0}{-1}, \text{ або}$$

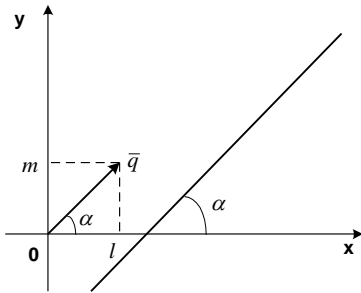
$$\frac{x+6}{8} = -y - \text{ канонічне рівняння прямої } A_3H.$$

3) **Рівняння прямої, що задана точкою $M_1(x_1, y_1)$ і кутовим коефіцієнтом $k = \operatorname{tg} \alpha$ (тангенсом кута нахилу прямої до осі ox).**

Для прямої, паралельної осі, кутовий коефіцієнт дорівнює нулю, а для прямої, перпендикулярної осі, кутовий коефіцієнт не існує (нескінченність).

Помножимо обидві частини канонічного рівняння прямої (п.4) на m і

врахуємо, що $\frac{m}{l} = k$. Отримаємо рівняння



$y - y_1 = k(x - x_1)$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ з кутовим коефіцієнтом k .

$$y - y_1 = kx - kx_1, \text{ або } y = kx + y_1 - kx_1.$$

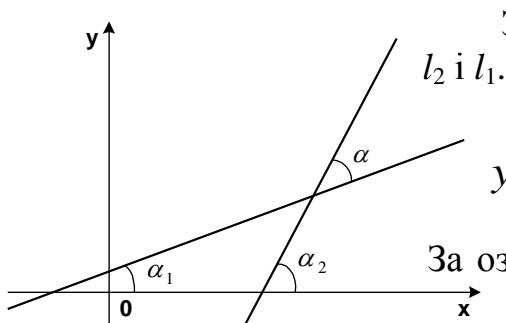
Якщо ввести позначення $b = y_1 - kx_1$, то маємо інший вигляд **рівняння прямої з кутовим**

коефіцієнтом: $y = kx + b$.

3.3. Найпростіші задачі на пряму: взаємне розміщення двох прямих, кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої.

Прямі можуть перетинатися, бути паралельними або співпадати.

Кутом між прямими l_1 і l_2 називається такий кут φ , поворот на який від першої прямої до другої відносно точки їх перетину до співпадання цих прямих відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.



Зрозуміло, що кут між l_1 і l_2 не дорівнює куту між l_2 і l_1 .

Нехай маємо прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$. Треба знайти кут α між ними.

За означенням кутового коефіцієнта прямої $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, крім того $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Отже:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут між прямими, заданими загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ визначається за формулою $\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Наприклад, якщо прямі задані рівняннями $3x + 4y - 2 = 0$ та $-x + y + 8 = 0$, то

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Якщо прямі задані рівняннями $y = 5x - 1$, $y = 6x - 8$, то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{6 - 5}{1 + 6 \cdot 5} = \frac{1}{31}.$$

Якщо кут φ — це кут між l_1 і l_2 , то кут між l_2 і l_1 дорівнюватиме $\pi - \varphi$.

З цієї формули легко отримати умови *паралельності* і *перпендикулярності* двох прямих $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$.

Умова паралельності:

Прямі l_1 і l_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow k_1 = k_2,$$

$$\text{або } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Коли $k_1 = k_2$ і $b_1 = b_2$ (або $A_1 = A_2, B_1 = B_2, C_1 = C_2$) прямі співпадають.

Наприклад, прямі $3x + 4y = -1$ та $6x + 8y = -2$ співпадають.

Прямі $y = 7x + 6$ і $3y = 21x + 18$ співпадають.

Прямі $3x + 4y = -1$ та $6x + 8y = -10$ паралельні.

Прямі $y = 7x + 6$ і $3y = 21x + 5$ паралельні.

Умова перпендикулярності:

Прямі l_1 і l_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), коли

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Підставляючи значення кутових коефіцієнтів, маємо:

$k_2 = -\frac{1}{k_1}$ або $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$ – умова перпендикулярності двох прямих.

Нехай задано деяку точку $M_0(x_0, y_0)$ і пряму $l: Ax + By + C = 0$. Якщо M_0 лежить на прямій, то $Ax_0 + By_0 + C = 0$. В іншому випадку **відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$** можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Наприклад, відстань від точки $M(1, 2)$ до прямої $3x + 4y - 1 = 0$

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

3.4. Тестові завдання

1. Рівняння прямої, що проходить через точку $M(1, -2)$, перпендикулярно вектору $(-3, 4)$:

А) $-3x + 4y + 11 = 0$,

В) $x - 2y + 5 = 0$,

С) $-3x - 4y - 5 = 0$

2. Рівняння прямої, що проходить через точку $M(1, 2)$, паралельно вектору $(-3, 4)$:

А) $-3x + 4y - 5 = 0$,

В) $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{4}$,

С) $-3(x-1) + 4(y-2) = 0$.

3. Рівняння прямої, що проходить через точки $A(1, 2)$ і $B(-5, 3)$:

А) $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{1}$,

В) $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{5}$,

С) $-6(x-1) = y-2$.

4. Прямі $x - 3y - 5 = 0$ і $2x - 6y + 5 = 0$:

А) перпендикулярні,

В) паралельні,

С) перетинаються.

5. Прямі $x - 2y + 5 = 0$ і $2x + y + 5 = 0$:

А) перпендикулярні,

В) паралельні,

С) співпадають.

6. Відстань від точки $M(-1, 3)$ до прямої $-3x + 4y - 5 = 0$

дорівнює

А) 2,

В) 0,

С) $\frac{4}{5}$.

ЛЕКЦІЯ 4. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

План лекції

4.1. Поняття про лінії другого порядку.

4.2. Коло.

4.3. Еліпс, його канонічне рівняння; дослідження форми еліпса за його рівнянням.

4.4. Гіпербола, її канонічне рівняння; дослідження форми гіперболи за її рівнянням.

4.5. Парабола.

4.6. Тестові завдання.

4.1. Поняття про лінії другого порядку.

Лінії другого порядку можна виявити в явищах навколишнього світу: по еліпсу рухаються планети Сонячної системи, по гіперболі або параболі — комети. Траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, є параболою; космічні кораблі, ракети, залежно від наданої їм швидкості, рухаються по колу, еліпсу, параболі чи гіперболі.

Більшість типів ліній другого порядку відомі давно, їх вивчав ще Аполлоній. Він утворював основні типи ліній другого порядку як плоскі перерізи кругового конуса, тому в математичній літературі лінії другого порядку відомі ще як конічні перерізи.

В основній праці Аполлонія із Перги «Конічні перерізи» вперше розглянуто еліпс, параболу і гіперболу як довільні перерізи площиною довільного кругового конуса. Він дослідив властивості цих фігур, що мало великий вплив на подальший розвиток астрономії, механіки, оптики і сприяли подальшим дослідженням Р.Декарта і П.Ферма з формування аналітичної геометрії. Так, у другій книзі «Геометрії» Р.Декарта міститься спроба класифікації кривих ліній. Він вважав, що в геометрії слід вивчати лінії, які описані неперервним рухом або декількома такими послідовними рухами. Такі лінії Декарт називав геометричними. Цей принцип класифікації в подальшому заклав основу важливої теореми кінематики механізмів (за допомогою плоских шарнірних механізмів, у яких рух перших ланцюжків повністю визначає рух інших, можна описувати дуги довільних алгебраїчних кривих).

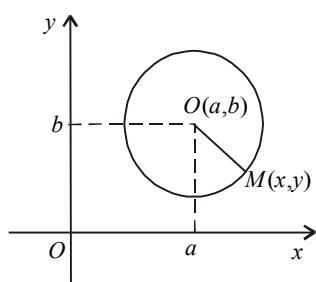
І.Ньютон також в праці «Перелік кривих третього порядку» (1704) створив основи дослідження властивостей кривих за властивостями рівнянь, що їх описують, ввів класифікацію рівнянь на основі показників степенів цих рівнянь. У нього порядок кривих був пов'язаний з можливою кількістю точок перетину кривої з прямою. І.Ньютон досліджував нові складні типи кривих. Він отримав, що при проектуванні з точки, яка є джерелом світла, на нескінчену площину тіні круга можна отримати всі конічні перерізи. Для кривих вищих порядків можна знайти простіші криві, які породжують їх за допомогою своєї тіні.

Рівняння довільної лінії другого порядку на площині в загальному випадку сучасною математичною мовою записується у вигляді:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

4.2. Коло

Відомі праці Архімеда «Книга про круги, що дотикаються», «Книга про будову круга, поділеного на сім рівних частин», «Книга лем».



Аполлоній із Перги ((262 — 190 до н. е., давньогрецький математик, один з представників александрійської школи) показав, що коло можна також задати як множину точок на площині, які мають однакове відношення відстаней до двох фокусів А і В. Про таке коло іноді кажуть, що воно задане двома точками.

Дамо означення кола.

Коло – це множина точок, розміщених на однаковій відстані від заданої точки O (центра). За означенням $OM = R$.

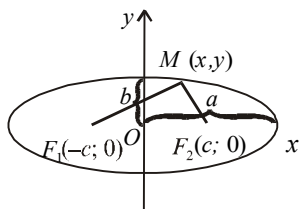
В координатній формі: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$. Піднесемо праву і ліву частину до квадрата і отримаємо канонічне рівняння кола з центром в точці $O(a, b)$ і радіусом R :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Наприклад, записати рівняння кола з центром в точці $O(-1,1)$, яке проходить через точку $M(2,3)$.

Знайдемо радіус кола: $|\overline{OM}| = R = \sqrt{(2+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$. Підставимо в канонічне рівняння кола і отримаємо канонічне рівняння кола $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$.

4.3. Еліпс – це множина точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок (*фокусів*), є величина стала і дорівнює $2a$ (більша відстані між фокусами).



Нехай $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокуси еліпса, $M(x, y)$ — точка еліпса, тобто за означенням $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, причому $2c < 2a \Rightarrow a > c$.

Тоді, підставляючи координати точок у останню рівність і роблячи елементарні перетворення, отримаємо:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - канонічне рівняння еліпса (з центром в початку координат), де $b^2 = a^2 - c^2$, a – велика півось еліпса, b – мала півось.

Один з приладів для механічного креслення еліпса – еліптичний циркуль сконструював італійський вчений Леонардо да Вінчі наприкінці XV ст.

Числові характеристики еліпса:

Ексцентриситет еліпса — це відношення відстані між фокусами до довжини великої осі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1; \text{ (за означенням } c < a \text{).}$$

Ексцентриситет характеризує ступінь витягнутості еліпса. Для кола $a = b \Rightarrow \varepsilon = 0$. Якщо ε наближається до одиниці, то еліпс витягується вздовж осі Ox (a – велика півось еліпса, b – мала півось).

Дві прямі, рівняння яких $x = \pm \frac{a}{e}$, називаються *директрисами еліпса*. Вони розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять зовні еліпса.

Наприклад, записати рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ox симетрично початку координат, якщо відомі півосі еліпса $a = 3$, $b = 2$. Знайти ексцентриситет, рівняння директрис.

Підставимо $a = 3$, $b = 2$ в канонічне рівняння еліпса, маємо $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ – рівняння еліпса.

Ексцентриситет еліпса

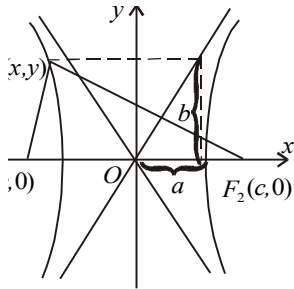
$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5.$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1,$$

$$\text{Рівняння директрис еліпса: } x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

4.4. Гіпербола - множина точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величиною сталою і дорівнює $2a$ (менша відстані між фокусами).

Нехай точки $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ — фокуси гіперболи, точка $M(x, y)$ належить гіперболі. Тоді $||MF_1| - |MF_2|| = 2a, a < c$. Підставляючи координати точок у останню рівність і роблячи елементарні перетворення, отримаємо канонічне рівняння гіперболи (з центром в початку координат):



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ де } b^2 = c^2 - a^2, a - \text{дійсна півось гіперболи, } b - \text{уявна півось.}$$

Властивості гіперболи:

1. Не перетинає вісь Oy .

2. Точки перетину з віссю Ox : при $y = 0$; $x = \pm a$. Отже, це точки $(-a, 0)$; $(a, 0)$.

3. Симетрична відносно осей ox і oy .

Числові характеристики гіперболи:

Ексцентриситет гіперболи відстані між фокусами до довжини $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ ($c > a$).

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2, \text{ або } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

З останньої рівності випливає, що для гіперболи ексцентриситет характеризує нахил віток гіперболи до осі Ox .

Асимптоти гіперболи — прямі, які наближаються до віток гіперболи, але ніколи їх не перетинають. У гіперболи їх дві.

$$y = \pm \frac{b}{a}x - \text{рівняння асимптов гіперболи.}$$

Директрисами гіперболи називаються дві прямі, рівняння яких $x = -\frac{a}{\varepsilon}$; $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Вони розміщені симетрично відносно осі Oy і проходять між вітками гіперболи.

Наприклад, записати рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі ox симетрично початку координат, якщо відомо відстань між фокусами $2c = 8$ і мала півось $b = 2$. Знайти ексцентриситет, рівняння директрис, асимптов.

З умови $2c = 8$ мала півось $b = 2$.

З рівняння $c^2 = a^2 + b^2$ знайдемо $a^2 = c^2 - b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$. Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі ox симетрично початку координат

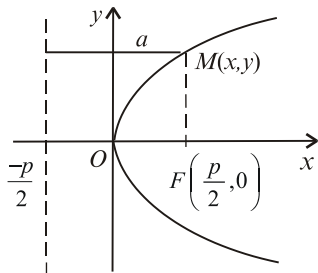
$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Ексцентриситет гіперболи знайдемо за формулою $e = \frac{c}{a} > 1$,

$$\text{Рівняння директрис гіперболи: } x = \pm \frac{\sqrt{12}}{4} = \pm 3.$$

Асимптоти гіперболи:

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{12}} x.$$



4.5. Парабола - множина точок площини, що містяться на однаковій відстані від даної точки (фокуса) і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою $r = d$.

Якщо це записати в координатній формі, то матимемо:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Після перетворень:

$y^2 = 2px$ – рівняння параболи з центром в початку координат, симетричної відносно осі ox .

Проводячи аналогічні міркування, можна отримати

$x^2 = 2py$ – рівняння параболи з центром в початку координат, симетричної відносно осі oy .

Директриса параболи описується рівнянням $x = -\frac{p}{2}$.

Наприклад, записати рівняння параболи, що проходить через точку $M(2,3)$ симетрично осі ox з вершиною в початку координат.

В рівняння параболи підставимо координати даної точки $M(2,3)$ і знайдемо параметр p :

$3^2 = 2p \cdot 2$, або $p = \frac{9}{4}$. Підставимо в рівняння параболи:

$$y^2 = 2 \cdot \frac{9}{4} x = 4,5x.$$

$y^2 = 4,5x$ – рівняння параболи.

Директриса цієї параболи $x = -\frac{4,5}{2} = -\frac{9}{4}$.

4.6. Тестові завдання

1. Траєкторія руху точки, яка при русі залишається на одній і тій же відстані R від заданої точки O є

- А) коло,
- В) пряма,
- С) еліпс.

2. *Еліпс* – це множина точок площини,

А) сума відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величина стала і дорівнює $2a$ (більша, ніж відстань між фокусами).

В) модуль різниці відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величина стала і дорівнює $2a$ (менша за відстань між фокусами).

С) що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою $r = d$.

3. Рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ox симетрично початку координат, півосі еліпса $a = 4$, $b = 3$:

А) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,

В) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,

С) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

4. *Гіпербола* – це множина точок площини,

А) сума відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величина стала і дорівнює $2a$ (більша, ніж відстань між фокусами).

В) модуль різниці відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величиною сталою і дорівнює $2a$ (менша за відстань між фокусами).

С) що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою $r = d$.

5. Рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі ox симетрично початку координат, якщо велика півось $a = 3$ і мала півось $b = 2$.

А) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,

В) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$,

С) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

6. *Парабола* – це множина точок площини,

А) сума відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величина стала і дорівнює $2a$ (більша, ніж відстань між фокусами).

В) модуль різниці відстаней яких від двох даних точок (фокусів), є величиною сталою і дорівнює $2a$ (менша за відстань між фокусами).

С) що містяться на однаковій відстані від даної точки фокуса і даної прямої, яка не проходить через фокус і називається директрисою $r = d$.

7. Рівняння параболи, що проходить через точку $M(2, 4)$ симетрично осі ox з вершиною в початку координат

А) $y^2 = 8x$,

В) $y^2 = 4x$,

С) $x^2 = 8y$.

Розділ III. Аналітична геометрія в просторі

В праці французького математика А.К.Клеро «Дослідження ліній двоякої кривини» (1731) вперше систематично і широко використано метод координат в просторі і виведено рівняння площини.

ЛЕКЦІЯ 5. ПЛОЩИНА

План лекції

5.1. Рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору. Загальне рівняння площини.

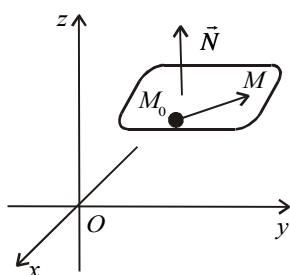
5.2. Рівняння площини, що проходить через три точки.

5.3. Кут між площинами.

5.4. Відстань від точки до площини.

5.5. Тестові завдання.

5.1. Рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору



Нехай в декартовій системі координат задано своїми координатами вектор $\vec{N} = (A, B, C)$, який перпендикулярний до деякої площини α , $\vec{N} \perp \alpha$, і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить площині. Знайдемо рівняння цієї площини.

Візьмемо точку $M(x, y, z)$ — довільну точку площини. Ця точка належить площині лише тоді, коли вектори $\vec{M_0M}$ і \vec{N} взаємно перпендикулярні. Умова перпендикулярності

векторів:

$$\vec{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \text{ - векторне рівняння площини.}$$

Запишемо це рівняння в координатній формі.

$\vec{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Підставимо координати векторів $\vec{M_0M}$ і \vec{N} в векторне рівняння площини і розпишемо скалярний добуток:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору.

Розкривши дужки і позначивши $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, дістанемо загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Розглянемо, як розміщена площина α відносно системи координат $Oxyz$.

1. $D = 0$. У цьому випадку рівняння має вигляд $Ax + By + Cz = 0$. Площина проходить через початок системи координат (точка $O(0, 0, 0)$ задовольняє це рівняння).

2. $C = 0, A \neq 0, B \neq 0, D \neq 0$. Тоді рівняння має вигляд $Ax + By + D = 0$ - площина α паралельна осі Oz .

$A=0, C \neq 0, B \neq 0, D \neq 0$ - площина α паралельна осі Ox .

$B=0, C \neq 0, A \neq 0, D \neq 0$ - площина α паралельна осі Oy .

3. $D=0, C=0, A \neq 0, B \neq 0$, то площина $Ax + By = 0$ містить вісь Oz (паралельна цій осі і проходить через початок координат).

$D=0, A=0, B \neq 0, C \neq 0$, то площина $Bu + Cz = 0$ містить вісь Ox (паралельна цій осі і проходить через початок координат).

$D=0, B=0, A \neq 0, C \neq 0$, то площина $Ax + Cz = 0$ містить вісь Oy (паралельна цій осі і проходить через початок координат).

4. Коли два коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю.

Нехай $A = B = 0, C \neq 0, D \neq 0$. Тоді площина $Cz + D = 0$ паралельна відразу осям Ox і Oy , а це означає, що вона паралельна площині Oxy . Якщо додатково і $D = 0$, то $z = 0$ — рівняння координатної площини Oxy .

$B = C = 0, A \neq 0, D \neq 0$. Тоді площина $Ax + D = 0$ паралельна відразу осям Oz і Oy , а це означає, що вона паралельна площині Oyz . Якщо додатково і $D = 0$, то $x = 0$ — рівняння координатної площини Oyz .

$A = C = 0, B \neq 0, D = 0$. Тоді площина $Bu + D = 0$ паралельна одночасно осям Oz і Ox , а це означає, що вона паралельна площині Oxz . Якщо додатково і $D = 0$, то $y = 0$ — рівняння координатної площини Oxz .

5.2. Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$, яка належить цій площині і побудуємо вектори $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$,

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Ці вектори компланарні (лежать в одній площині), отже умова компланарності: мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ - рівняння площини, що проходить через три}$$

точки.

Наприклад, знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;2;3), M_2(4;-1;-2)$ і $M_3(4;0;3)$.

Підставимо в рівняння площини, маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 4-1 & -1-2 & -2-3 \\ 4-1 & 0-2 & 3-3 \end{vmatrix} = 0.$$

або

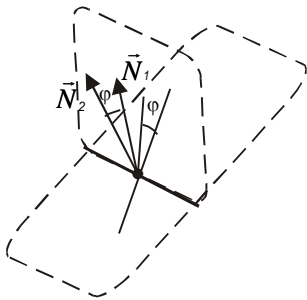
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Або

$10x + 15y - 3z - 31 = 0$ - *рівняння площини, що проходить через три точки.*

5.3. Кут між площинами

Розглянемо дві площини α і β , які задано відповідно рівняннями



$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Двогранний кут φ між площинами α і β дорівнюватиме куту між векторами \vec{N}_1 і \vec{N}_2 , перпендикулярними до цих площин, тому

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{N}_1 \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}.$$

Умова перпендикулярності двох площин (скалярний добуток векторів \vec{N}_1 і \vec{N}_2 дорівнює нулю):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

5.4. Відстань від точки до площини

За аналогією з формулою знаходження відстані від точки до прямої (див. Л.8, п.3) на площині можна записати формулу знаходження відстані від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Наприклад, відстань від точки $M(0, 4, 5)$ до площини $3x + 4y - 5z + 1 = 0$

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot (-5) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{50}}.$$

5.5. Тестові завдання

1. Рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(3;2;-1)$ і $M_3(4;0;3)$.

A)
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

B)
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C)
$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Вектор $(3, 2, -1)$

A) перпендикулярний до прямої $3x + 2y - z - 5 = 0$,

B) паралельний прямій $3x + 2y - z - 5 = 0$,

C) перпендикулярний до прямої $-3x - 2y + z - 5 = 0$,

3. Дві площини $\alpha: x + 2y + 3z + 4 = 0$, і $\beta: -2x + y + 1 = 0$

A) паралельні,

B) перпендикулярні,

C) перетинаються.

4. Дві площини $\alpha: x + 2y + 3z + 4 = 0$, і $\beta: 2x + 8y + 1 = 0$

A) паралельні,

B) перпендикулярні,

C) перетинаються.

5. Дві площини $\alpha: x + 2y + 3z + 4 = 0$, і $\beta: 4x + 8y + 12z + 1 = 0$

A) паралельні,

B) перпендикулярні,

C) перетинаються.

6. Відстань від точки $M(-2, 1, 0)$ до площини $\beta: 4x - y + 2z + 1 = 0$

$$A) \frac{8}{\sqrt{21}},$$

$$B) -\frac{8}{\sqrt{21}},$$

$$C) \frac{10}{\sqrt{21}}.$$

ЛЕКЦІЯ 6. ПРЯМА В ПРОСТОРИ

План лекції

6.1. Загальне рівняння прямої в просторі.

6.2. Канонічне рівняння прямої в просторі.

6.3. Параметричне рівняння прямої в просторі.

6.4. Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки.

6.5. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини.

6.6. Кут між прямою і площиною.

6.7. Тестові завдання.

6.1. Загальне рівняння прямої в просторі

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох площин у прямокутній системі координат:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Зрозуміло, що ці площини мають бути непаралельними, тобто їхні нормальні вектори \vec{n}_1, \vec{n}_2 — не колінеарні. Ця система називається **загальним рівнянням прямої**. Дістанемо ще деякі форми рівняння прямої.

6.2. Канонічне рівняння прямої в просторі

Нехай у системі координат $Oxyz$ задано пряму l і ненульовий вектор \vec{s} , колінеарний цій прямій. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій, а напрямний вектор \vec{s} заданий координатами $\vec{s} = (m, n, p)$. Тоді довільна точка $M(x, y, z)$ належатиме прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{M_0M}$ і \vec{s} колінеарні (відповідні координати цих векторів пропорційні):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \text{— канонічне рівняння прямої у просторі} \quad (6.2)$$

6.3. Параметричне рівняння прямої в просторі

У останньому рівнянні прямої позначимо через t кожне з рівних відношень. Тоді

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Звідси дістаємо:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \text{ — параметричне рівняння прямої.} \quad (6.3)$$

6.4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ належать прямій у просторі. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ можна розглядати як напрямний вектор прямої. Замінюючи ним вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ (теж є напрямним вектором цієї прямої) у рівнянні (2), дістанемо шукане рівняння прямої у просторі

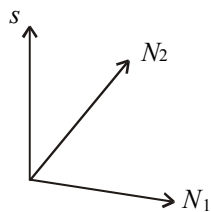
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ — рівняння прямої, що проходить через дві задані}$$

точки.

Маючи кілька рівнянь однієї й тієї ж прямої, поміркуємо, як дістати зв'язок між ними. Розглянемо, як із загального рівняння (1) вивести канонічне рівняння (2). Для цього потрібно знайти точку, яка лежить на прямій, і напрямний вектор \vec{s} прямої.

Щоб знайти точку, яка лежить на прямій, треба розв'язати систему (1).

Щоб знайти напрямний вектор \vec{s} прямої, пригадаємо геометричний зміст коефіцієнтів у рівнянні площини. Запишемо вектор $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ — перпендикулярний до першої площини, і $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — перпендикулярний до другої.



Напрямний вектор прямої \vec{s} перпендикулярний до обох цих векторів (мал.). Таким чином, $\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Використовуючи запис векторного добутку через визначник, дістаємо:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} B_1 C_2 - C_1 B_2 \\ C_1 A_2 - A_1 C_2 \\ A_1 B_2 - B_1 A_2 \end{pmatrix} = (m, n, p).$$

Знайшовши точку, яка лежить на прямій, і напрямний вектор \vec{s} прямої, залишається підставити їх координати в рівняння (2).

6.5. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Для знаходження кута між двома прямими

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

візьмемо до уваги, що вектори $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ колінеарні відповідним прямим і скористаємося формулою:

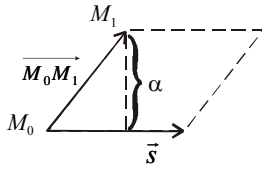
$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

З останньої формули випливає умова перпендикулярності двох прямих $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$,

а умову паралельності двох прямих дістанемо як умову колінеарності напрямних векторів \vec{s}_1 і \vec{s}_2 :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Розглянемо ще задачу знаходження відстані від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.



Шукану відстань можна розглянути як довжину висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ і \vec{s} (рис. 2.23). Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку векторів, на яких побудовано цей паралелограм. Шукану висоту, а отже, і відстань від точки до прямої можна знайти за формулою:

лою:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

6.6. Кут між прямою і площиною

Нехай задано пряму $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площину $Ax + By + Cz + D = 0$ у просторі.

Якщо

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C},$$

то пряма перпендикулярна до площини.

Якщо

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

то пряма паралельна площині.

Нехай пряма паралельна площині, тобто $Am + Bn + Cp \neq 0$. Знайдемо координати точки перетину площини і прямої. Перейдемо до параметричного рівняння прямої

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt$$

і підставимо значення x, y, z у рівняння площини:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

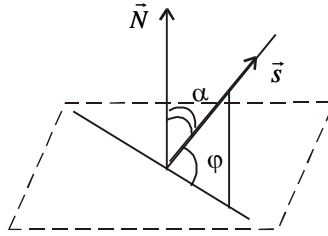
Звідси знайдемо значення параметра

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}, \quad Am + Bn + Cp \neq 0.$$

Підставимо знайдений параметр в параметричне рівняння прямої (3) і знайдемо координати точки перетину:

$$x = x_0 + mt_0, \quad y = y_0 + nt_0, \quad z = z_0 + pt_0.$$

Знайдемо кут між площиною і прямою.



Кут φ між площиною і прямою дорівнює куту між прямою і її проекцією на площину. Вектор $\vec{N}=(A,B,C)$ — перпендикулярний до площини, а кут α , який він утворює з вектором \vec{s} , разом з φ у сумі дорівнює 90° : $\alpha + \varphi = 90^\circ$.

Знайдемо кут α як кут між двома векторами.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N} \cdot \vec{s}}{|\vec{N}||\vec{s}|}.$$

Якщо $\alpha < 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos(90 - \varphi) = \sin\varphi$, а якщо $\alpha > 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos(90 - \varphi) = -\sin\varphi$, у будь-якому разі $\sin\varphi = |\cos\alpha|$. Отже,

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

6.7. Тестові завдання

1. Рівняння прямої, що проходить через точку $M(3,4,5)$ паралельно вектору $(2, -1, 3)$

A). $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-5}{3}$,

B). $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{5}$,

C). $\frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+5}{3}$

2. Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1,2,3)$ і $B(3,4,5)$

A). $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$,

B). $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}$,

C). $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

3. Пряма $\frac{x-4}{6} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+9}{-3}$ і площина $-12x + -2y + 6z + 8 = 0$

A) перпендикулярні,

B) паралельні,

C) перетинаються під непрямым кутом.

4. Пряма $\frac{x-4}{6} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+9}{-3}$ і площина $-3x - 6z + 8 = 0$

A) перпендикулярні,

B) паралельні,

C) перетинаються під непрямым кутом.

5. Кут між прямою $\frac{x-4}{6} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+9}{-3}$ і площиною $-12x - 2y + 6z + 7 = 0$ до-

рівнює

- A) нулю;
- B) перпендикулярний;
- C) гострий.

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

Курс вищої математики має загальноосвітнє значення і сприяє формуванню системи теоретичних знань і практичних навичок студентів з основ математичного апарату.

Мета навчальної дисципліни „Вища математика“ — допомогти студентам оволодіти необхідними математичними знаннями та навичками і вміти їх вільно застосовувати при вивченні загальної фізики, теоретичної механіки, теорії механізмів і машин, опору матеріалів, гідравліки, теплотехніки та ін.; ознайомити студентів з сучасними математичними методами, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичних методів і моделей, що сприяє розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Завдання вивчення навчальної дисципліни:

— дати необхідні теоретичні знання з вищої математики та навчити застосовувати їх на практиці;

— сформувати первинні навички математичного дослідження прикладних задач; виробити вміння при розв’язуванні задач самостійно розробляти і використовувати необхідні методи і засоби, а також спеціальну літературу;

— навчити самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне і алгоритмічне мислення, інтуїцію в питаннях застосування математики.

Вимоги до знань та вмінь

Знати: основні поняття вищої математики такі як матриці, визначники, вектори, границя та неперервність функції, похідна, диференціал, еластичність функції, інтеграли, розв’язки диференціальних рівнянь.

Вміти: вибирати математичні методи та моделі, методичні прийоми математичного аналізу для дослідження систем; застосовувати сучасні математичні методи для розв’язання практичних задач та набути навичок самостійного використання і вивчення математичної літератури.

Важливим елементом засвоєння математики й оволодіння її методами є самостійна робота студентів. Ця робота є неперервною складовою виконання поточних домашніх завдань і циклічної роботи з виконання індивідуальних модульних завдань. Результативність самостійної роботи студентів забезпечується ефективною системою контролю, яка включає опитування студентів за змістом лекцій, перевірку виконання поточних домашніх завдань, розв’язування задач біля дошки, захист індивідуальних модульних робіт.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Нормативна навчальна дисципліна "Вища математика" є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр".

Система контролю знань та умови складання заліку та іспиту

Дисципліна „Вища математика“ вивчається протягом трьох семестрів. У зв’язку з переходом до кредитно-модульної системи навчання вся дисцип-

ліна розбита на 15 кредитів. Кожний кредит завершується написанням контрольної роботи.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100 - бальною шкалою в кожному семестрі окремо.

Форми поточного контролю: оцінювання домашніх самостійних завдань (S_1); тестів та контрольних робіт виконаних студентами під час практичних занять (S_2).

Модульний контроль: модульні контрольні роботи.

В основу даної навчальної програми покладено:

— Програма навчальної дисципліни “Вища математика” (для студентів 1 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит” / Укл.: Якунін А.В. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 22 с.

— Програма „Высшая математика“ Для специальности № 2120 „Общетехнические дисциплины и труд“ //Программы педагогических институтов. Сб. № 18. – М.: Просвещение, 1979. – С.22 –28;

— Програми педагогічних інститутів: Вища математика. Для студентів спеціальності 03.02.00 „Праця“ / Уклад. І.П.Коваленко. – К., 1992

— та вимоги сучасних нормативних документів в галузі освіти:

— Закон України „Про освіту“;

— Закон України „Про загальну середню освіту“;

— Державна національна програма „Освіта“, Україна ХХІ століття.

СТРУКТУРА ПРОГРАМИ НАВЧАЛЬНОГО КУРСУ

„ВИЩА МАТЕМАТИКА“

1. ОПИС ПРЕДМЕТА КУРСУ

Курс: бакалавр (денна форма навчання)	Напрямок, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчального курсу
Кількість кредитів: 15 Модулів: 20 Змістовних модулів: 20 Загальна кількість годин: 540 год. Тижневих годин: I семестр – 7 II семестр – 7 III семестр – 4	6.010104 Професійна освіта Бакалавр	Нормативний навчальний курс I – III семестри Лекції (теоретична підготовка): 50 + 54 + 34 Практичні: 68 + 72 + 34 год. Самостійна робота: 98 + 90 + 40 год. Індивідуальна робота: (індивідуальні модульні завдання) Вид контролю: I семестр – залік II семестр – залік III семестр – екзамен

2. АНОТАЦІЯ ДО НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ

Весь курс розділено на 20 змістових модулів:

Змістовий модуль I. Множини. Комплексні числа

Тема 1. *Множини. Множина дійсних чисел.* Множина і її елементи. Операції над множинами. Простіша логічна символіка. Множина R дійсних чисел і її властивості. Зображення дійсних чисел на прямій. Обмежені й необмежені числові множини. Абсолютна величина дійсного числа та її властивості. Прямокутна система координат.

Тема 2. *Комплексні числа. Дії над комплексними числами.* Поняття комплексного числа. Зображення комплексних чисел. Арифметичні дії з комплексними числами в алгебраїчній формі. Модуль і аргумент комплексного числа, тригонометрична форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі.

Змістовий модуль II. Елементи лінійної алгебри

Тема 3. *Матриця. Властивості матриці.* Поняття матриці. Основні типи матриць. Дії над матрицями.

Тема 4. *Визначники.* Визначники другого та третього порядків. Властивості. Способи їх обчислення. Визначник n -го порядку. Ранг матриці. Обернена матриця.

Тема 5. *Розв'язування системи рівнянь з n -невідомими.* Поняття системи лінійних рівнянь. Розв'язування системи лінійних рівнянь матричним способом. Формули Крамера. Метод Гауса.

Змістовий модуль III. Елементи векторної алгебри

Тема 6. *Вектори і лінійні операції з ними.* Системи координат. Вектор. Операції над векторами (додавання, віднімання і множення на число. Колінеарні й компланарні вектори. Проекція вектора на вісь. Координати вектора і точки. Дії над векторами, що задані своїми координатами. Довжина вектора. Розклад вектора на складові в просторі. Поділ відрізка у заданому відношенні.

Тема 7. *Множення векторів.* Означення скалярного добутку векторів. Застосування скалярного добутку. Векторний добуток та його застосування. Мішаний добуток трьох векторів та його застосування. Кут між двома векторами.

Змістовий модуль IV. Аналітична геометрія на площині.

Тема 8. *Лінії першого порядку на площині.* Поняття лінії на площині. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Загальне рівняння прямої та його дослідження. Різні види рівняння прямої. Найпростіші задачі на пряму: взаємне розміщення двох прямих, кут між двома прямими, умови паралельності й перпендикулярності прямих, відстань від точки до прямої.

Тема 9. *Лінії другого порядку на площині*. Поняття про лінії другого порядку. Коло. Еліпс, його канонічне рівняння; дослідження форми еліпса за його рівнянням. Гіпербола, її канонічне рівняння; дослідження форми гіперболи за її рівнянням. Парабола, її канонічне рівняння; дослідження рівнянням параболі. Побудова точок еліпса, гіперболи і параболі за допомогою циркуля та лінійки.

Змістовий модуль V. Аналітична геометрія в просторі

Тема 10. *Площина*. Рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно даному вектору. Рівняння площини, що проходить через три точки. Загальне рівняння площини. Відстань від точки до площини.

Тема 11. *Пряма в просторі*. Загальне рівняння прямої. Канонічне рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини. Кут між прямою і площиною.

Змістовий модуль VI. Границя та неперервність

Тема 12. *Послідовності та їх границі*. Означення та приклади послідовності. Різні класи послідовностей. Поняття границі послідовності. Теореми про границі послідовностей. Число e . Натуральні логарифми.

Тема 13. *Функції та їх властивості*. Поняття функції. Числові функції та способи їх задання. Класифікація функцій за їх властивостями (монотонність, обмеженість, парність, непарність і періодичність функцій). Елементарні функції, їх властивості та графіки. Поняття про обернену та складену функцію.

Тема 14. *Границя функції та теореми про границі*. Поняття границі функції. Арифметичні властивості границь. Односторонні границі функції. Деякі важливі границі. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.

Тема 15. *Неперервність функції*. Поняття неперервності функції в точці. Арифметичні операції над неперервними функціями. Неperервність складеної та оберненої функції /без доведення/. Одностороння неперервність. Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація.

Тема 16. *Властивості функцій, неперервних на відрізку*. Поняття неперервності функції на відрізку. Основні властивості функцій, неперервних на відрізку (арифметичні дії над неперервними функціями).

Змістовий модуль VII. Похідна функції

Тема 17. *Означення похідної та її обчислення*. Задачі, що приводять до поняття похідної (задача про швидкість рухомої точки, задача про лінійну густину неоднорідного стрижня, задача про дотичну до кривої). Означення похідної, її геометричний і механічний зміст. Похідна складеної й оберненої функцій. Похідні основних елементарних функцій. Таблиця похідних. Похідна суми, добутку і частки. Правила диференціювання функцій.

Тема 18. *Диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків*. Диференціал функції, його геометричний зміст і властивості. Застосування диференціала до наближених обчислень. Похідні вищих порядків. Механічний

зміст другої похідної. Диференціали вищих порядків. Диференціювання параметрично та неявно заданих функцій.

Змістовий модуль VIII. Застосування похідної функції

Тема 19. *Теорема про середнє значення. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коші.*

Тема 20. *Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Інші види невизначеностей ($0, \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$).*

Тема 21. *Формула Тейлора. Теорема Тейлора. Розкладання деяких елементарних функцій за формулою Маклорена. Застосування формули Тейлора до наближених обчислень.*

Тема 22. *Застосування похідної до дослідження властивостей функції. Умови сталості та монотонності функції, екстремуми функцій. Опуклість кривої та точки перегину графіка функції. Поняття асимптот кривих. Схема дослідження та побудови графіка функції. Побудова графіків функцій. Найменше і найбільше значення функції на відрізку. Наближені методи розв'язування рівнянь.*

Змістовий модуль IX. Невизначений інтеграл

Тема 23. *Первісна. Невизначений інтеграл. Поняття первісної функції. Поняття невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів.*

Тема 24. *Основні методи інтегрування. Безпосереднє інтегрування. Метод підстановки. Метод інтегрування частинами.*

Тема 25. *Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування елементарних раціональних дробів. Розклад багаточленів на множники. Розкладання правильного дроби на суму елементарних раціональних дробів. Інтегрування раціональних функцій.*

Тема 26. *Інтегрування тригонометричних та деяких ірраціональних функцій. Універсальна тригонометрична підстановка. Частинні випадки знаходження інтегралів виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$. Інтегрування тригонометричних функцій виду $\sin^m x \cos^n x$. Інтеграли виду $\int \operatorname{tg}^m x dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x dx$, $\int \operatorname{tg}^m x \operatorname{sec}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x dx$. Тригонометричні підстановки. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.*

Змістовий модуль X. Визначений інтеграл

Тема 27. *Визначений інтеграл, його властивості та обчислення. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла (площа криволінійної трапеції, обчислення роботи змінної сили; обчислення маси неоднорідного лінійного стрижня). Означення визначеного інтеграла. Умови існування визначеного інтеграла. Основні властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца.*

Тема 28. *Основні методи обчислення визначеного інтеграла.* Обчислення інтегралів за формулою Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі (метод підстановки). Інтергування частинами. Наближені обчислення інтегралів.

Змістовий модуль XI. Застосування визначеного інтеграла

Тема 29. *Геометричне застосування визначеного інтеграла.* Площі плоских фігур у декартових і полярних координатах. Довжина дуги, диференціал дуги, поняття про кривизну плоскої кривої. Обчислення об'єму за площами паралельних перерізів. Об'єм тіла обертання. Площа поверхні обертання.

Тема 30. *Визначений інтеграл у задачах техніки.* Задачі на обчислення роботи змінної сили. Обчислення тиску рідини. Обчислення статичних моментів і координат центру мас. Теорема Гульдїна.

Змістовий модуль XII. Невласний інтеграл

Тема 31. *Невласний інтеграл.* Поняття невизначеного інтеграла з нескінченними межами. Ознаки збіжності невластних інтегралів. Невласний інтеграл від необмежених функцій.

Тема 32. *Застосування невластного інтеграла в техніці.*

Змістовий модуль XIII. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Тема 33. *Поняття функцій багатьох змінних, її границя і неперервність.* Поняття функцій багатьох змінних. Графік функції. Лінії рівня. Границя і неперервність функцій багатьох змінних.

Тема 34. *Частинні похідні, диференційованість та диференціал функції багатьох змінних.* Означення частинних похідних і знаходження їх. Геометричний зміст частинних похідних. Диференційованість функції. Диференціал функції. Поняття частинних похідних вищих порядків.

Тема 35. *Застосування похідних та диференціалу функції багатьох змінних.* Застосування диференціала до наближених обчислень. Рівняння дотичної і нормалі до поверхні. Екстремум функції декількох змінних - необхідні умови; достатні умови для випадку двох змінних.

Змістовий модуль XIV. Поверхні другого порядку

Тема 36. *Поверхні обертання другого порядку:* сфера, еліпсоїд, однопорожнинний параболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, еліптичний параболоїд. Рівняння циліндричної поверхні. Поняття про поверхні другого порядку.

Тема 37. *Поверхні другого порядку:* циліндр, конус і т.д. Дотична і нормаль до поверхні.

Змістовий модуль XV. Звичайні диференціальні рівняння.

Тема 38. *Поняття диференціального рівняння та його властивості.* Задачі, які приводять до поняття диференціального рівняння. Поняття диференціального рівняння. Загальні та частинні його розв'язки.

Тема 39. *Диференціальні рівняння першого порядку*. Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні функції й однорідні рівняння. Лінійні рівняння. Рівняння в повних диференціалах.

Змістовий модуль XVI. Диференціальне рівняння другого порядку

Тема 40. *Диференціальні рівняння другого порядку*. Диференціальні рівняння другого порядку. Загальні поняття. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку. Диференціальні рівняння вищих порядків.

Тема 41. *Лінійні диференціальні рівняння*. Загальна теорія лінійних рівнянь другого порядку. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Тема 42. *Застосування диференціальних рівнянь до вивчення коливних процесів*. Рівняння гармонічних коливань. Вимушені коливання.

Змістовий модуль XVII. Ряди

Тема 43. *Числові ряди*. Поняття числового ряду, частинні суми ряду, сума і залишок ряду. Збіжність і розбіжність рядів. Геометрична прогресія. Гармонічний ряд. Необхідна умова збіжності. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами (порівняльні, Д'Аламбера, Коші). Абсолютна й умовна збіжність рядів. Теорема Лейбніца для знакозмінних рядів.

Тема 44. *Степеневі ряди*. Означення. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневих рядів. Властивості степеневих рядів. Ряд Тейлора. Розкладання елементарних функцій у ряд Тейлора. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях. Степеневі ряди з комплексними членами.

Тема 45. *Функціональні ряди*. Збіжна та рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Змістовий модуль XVIII. Інтегральне числення функцій багатьох змінних

Тема 46. *Кратні інтеграли*. Задачі, що приводять до подвійного інтеграла. Означення подвійного інтеграла, його застосування, властивості. Обчислення подвійних інтегралів /геометричні міркування/. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах.

Тема 47. *Застосування подвійних інтегралів*. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії. Застосування подвійних інтегралів до задач фізики (обчислення статичних моментів, моментів інерції і координат центра маси пластинки).

Тема 48. *Потрійний інтеграл*. Означення потрійного інтеграла. Обчислення потрійного інтеграла. Застосування потрійних інтегралів.

Розділ XIX. Криволінійні та поверхневі інтеграли

Тема 49. *Криволінійні інтеграли*. Задачі, які приводять до поняття криволінійного інтеграла. Означення криволінійного інтеграла і його властивості. Криволінійний інтеграл першого роду. Криволінійний інтеграл другого роду. Зведення криволінійного інтеграла до визначеного інтеграла. Формула Гріна та її застосування.

Тема 50. *Поверхневі інтеграли*. Задача про масу зігнутої пластини. Визначення поверхневого інтеграла першого роду.

Змістовий модуль XX. Елементи теорії ймовірності

Тема 51. *Елементи комбінаторики.* Поняття упорядкованої множини. Розміщення, перестановки, сполучення. Розміщення, перестановки, сполучення з повтореннями. Основні принципи комбінаторики.

Тема 52. *Випадкові події.* Стохастичний експеримент, простір елементарних подій. Випадкові події – підмножина простору елементарних подій. Відношення між подіями. Статичне та класичне означення ймовірності. Найпростіші властивості ймовірності.

Тема 53. *Властивості ймовірності.* Теорема про додавання ймовірностей для несумісних подій. Умовні ймовірності та теорема множення ймовірностей. Теорема додавання ймовірностей двох довільних подій. Формула повної ймовірності та формули Байєса.

Тема 54. *Випадкові величини.* Поняття дискретної випадкової величини та закону її розподілу. Математичне сподівання. Дисперсія. Поняття неперервної випадкової величини і функції її розподілу. Щільність розподілу неперервної випадкової величини. Математичне сподівання і дисперсія неперервної випадкової величини. Два важливі розподіли випадкових величин (біномний розподіл, нормальний розподіл).

Тема 55. *Кореляційний зв'язок між випадковими величинами. Регресія.*

Встановлення залежності між випадковими величинами. Коваріація і коефіцієнт кореляції. Кореляційне поле, його побудова. Лінія регресії. Знаходження коефіцієнтів лінії регресії.

3. ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ

№	Змістовий модуль	Кількість годин			
		лекції	практ.	сам.роб.	всього
I СЕМЕСТР					
Змістовий модуль 1. Множини. Комплексні числа					
1.1	<i>Множини. Множина дійсних чисел.</i>	2		2	
1.2	<i>Комплексні числа. Дії над комплексними числами.</i>	2		4	
Змістовий модуль 2. Елементи лінійної алгебри					
2.1	<i>Матриця. Властивості матриці.</i>	2		4	
2.2	<i>Визначники.</i>	2		4	
2.3	<i>Розв'язування системи n рівнянь з n-невідомими.</i>	2		4	
Змістовий модуль 3. Елементи векторної алгебри					
3.1	<i>Вектори і лінійні операції з ними.</i>	2		4	
3.2	<i>Множення векторів.</i>	2		4	
Змістовий модуль 4. Аналітична геометрія на площині					
4.1	<i>Лінії першого порядку на площині.</i>	2		4	

4.2	Лінії другого порядку на площині.	2		4	
Змістовий модуль 5. Аналітична геометрія в просторі					
5.1	Площина.	2		4	
5.2	Пряма в просторі.	2		2	
Змістовий модуль 6 Границя та неперервність					
6.1	Послідовності та їх границі.	3		4	
6.2	Функції та їх властивості	2		4	
6.3	Границя функції та теореми про границі.	2		4	
6.4	Неперервність функції.	2		4	
6.5	Властивості функцій, неперервних на відрізку.	3		4	
Змістовий модуль 7. Похідна функції					
7.1	Означення похідної та її обчислення.	2		4	
7.2	Диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків.	4		4	
Змістовий модуль 8. Застосування похідної функції					
8.1	Теореми про середнє значення.	2		4	
8.2	Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя	2		4	
8.3	Формула Тейлора	2		4	
8.4	Застосування похідної до дослідження властивостей функції.	4		4	
	ВСЬОГО	50		98	
II СЕМЕСТР					
Змістовий модуль 9. Невизначений інтеграл					
9.1	Первісна. Невизначений інтеграл	2		2	
9.2	Основні методи інтегрування.	4		4	
9.3	Інтегрування раціональних функцій.	4		2	
9.4	Інтегрування тригонометричних та деяких ірраціональних функцій.	4		2	
Змістовий модуль 10. Визначений інтеграл					
10.1	Визначений інтеграл, його властивості та обчислення.	2		2	
10.2	Основні методи обчислен-	4		4	

	<i>ня визначеного інтеграла</i>				
Змістовий модуль 11. Застосування визначеного інтеграла					
11.1	<i>Геометричне застосування визначеного інтеграла.</i>	2		2	
11.2	<i>Визначений інтеграл у задачах техніки.</i>	2		2	
Змістовий модуль 12. Невласний інтеграл					
12.1	<i>Невласний інтеграл.</i>	2		2	
12.2	<i>Застосування невластного інтеграла в техніці</i>	2		4	
Змістовий модуль 13. Диференціальне числення функцій багатьох змінних					
13.1	<i>Поняття функцій багатьох змінних, її границя і неперервність.</i>	2		4	
13.2	<i>Частинні похідні, диференційованість та диференціал функції багатьох змінних.</i>	4		4	
13.3	<i>Застосування похідних та диференціалу функції багатьох змінних.</i>	4		4	
Змістовий модуль 14. Поверхні другого порядку					
14.1	<i>Поверхні обертання другого порядку</i>	2		4	
14.2	<i>Поверхні другого порядку: циліндр, конус і т.д.</i>	2		4	
Змістовий модуль 15. Звичайні диференціальні рівняння.					
15.1	<i>Поняття диференціального рівняння та його властивості</i>	2		2	
15.2	<i>Диференціальні рівняння першого порядку.</i>	2		4	
Змістовий модуль 16 Диференціальні рівняння другого порядку					
16.1	<i>Диференціальні рівняння другого порядку..</i>	2		4	
16.2	<i>Лінійні диференціальні рівняння.</i>	2		4	
16.3	<i>Застосування диференціальних рівнянь до вивчення коливних процесів.</i>	4		2	
	ВСЬОГО	54		90	
III СЕМЕСТР					
Змістовий модуль 17. Ряди					
17.1	<i>Числові ряди.</i>	2		4	

17.2	<i>Степеневі ряди. вищих порядків.</i>	2		4	
17.3	<i>Функціональні ряди.</i>	2		2	
Змістовий модуль 18. Інтегральне числення функцій багатьох змінних					
18.1	<i>Кратні інтеграли.</i>	2		2	
18.2	<i>Застосування подвійних інтегралів.</i>	2		2	
18.3	<i>Потрійний інтеграл.</i>	2		2	
Змістовий модуль 19. Криволінійні та поверхневі інтеграли					
19.1	<i>Криволінійні інтеграли.</i>	4		2	
19.2	<i>Поверхневі інтеграли.</i>	2		2	
Змістовий модуль 20. Елементи теорії ймовірності					
20.1	<i>Елементи комбінаторики.</i>	2		2	
20.2	<i>Випадкові події. Властивості ймовірності.</i>	2		2	
20.3	<i>Основні теореми теорії ймовірностей</i>	4		2	
20.3	<i>Випадкові величини. Характеристики випадкових величин</i>	4		2	
20.4	<i>Кореляційний зв'язок між випадковими величинами. Регресія.</i>	2		2	
	ВСЬОГО	34		40	

ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михані Г.О. Вища математика. Приклади і задачі. /Посібник. - К.,2002.-482 с.
2. Коваленко І.П. Вища математика. Підручник. – К., 2006.- 436 с.
3. Соколенко О.І. Вища математика. Підручник. – К., 2002. – 392 с.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних... - К.; Вища шк., 1986. – 348 с.
5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Елементи аналітичної геометрії. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. - К.: Вища шк., 1984. – 274 с.

Додаткова:

1. Anthony M., Biggs N. Mathematics for economics and finance. Methods and modelling. Cambridge University Press.
2. Андрощук А.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль VII. Ряди. Диференціальні рівняння. Навч.посібник. – К., 2005. – 150 с.
3. Антонечко В.Ф., Олешко Т. І., Паламарчук Ю.А. Вища математика.

- Модуль І. Лінійна алгебра: Навч.посібник. – К., 2005. – 210 с.
4. Вища математика: Зб. задач. Ч. I, II /За ред. Гаврильченко К.І., Полушкін С.П., Овчиннікова . –К., 2004. – 420 с.
 5. Ковтонюк І.Ю., Корнілович Є.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль VI. Інтегральне числення функції однієї змінної. Навч.посібник. – К., 2005. – 230 с.
 6. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль IV. Диференціальне числення функції однієї змінної. Навч.посібник. – К., 2005. – 190 с.
 7. Кремер Н. Высшая математика для экономистов. М.: ЮНИТИ, 1998.
 8. Грисенко М.В. Математика для экономистів: Навч. посібник.- К.: ВПЦ «Київський університет», 2005.- 586с.
 9. <http://www.limm.mgimo.ru/LIMM/Lectons/SemI.asp> - Лекции по математике (линейная алгебра, математический анализ). А.В.Степанов.
 - 10.<http://www.ispu.ru/library/math/sem1/index.htm> - Интерактивный компьютерный учебник: Пяртли А.С., Калугина Т.Ф. Высшая математика. Первый семестр.
 - 11.<http://www.ispu.ru/library/math/sem2/index.htm> - Интерактивный компьютерный учебник: Пяртли А.С., Калугина Т.Ф. Высшая математика. Второй семестр.