Л. О. Соколенко

НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник
для студентів університетів спеціальності
014 Середня освіта (Математика)

Частина 1

Чернігів – 2020

УДК 378:[373.5.013.3:51
С 59

Рецензенти:

Акуленко І. А. – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри алгебри і математичного аналізу Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького

Семенець С. П. – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри фізики та вищої математики Державного університету «Житомирська політехніка»

Кірман В. К. – кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри природничо-математичної освіти комунального закладу вищої освіти «Дніпровська академія неперервної освіти» Дніпропетровської обласної ради

Соколенко Л. О.

С 59 **Наукові основи шкільного курсу математики** : Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1. Чернігів : «Десна Поліграф», 2020. 144 с.

ISBN 978-617-7833-32-0 УДК 378:[373.5.013.3:51

Навчально-методичний посібник містить модульну програму навчальної дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики», та методичне забезпечення до її реалізації.

У посібнику представлений матеріал для проведення лекційних та практичних занять з «НОШКМ», на яких основні змістові лінії шкільного курсу математики розглядаються з точки зору вищої математики. Розкриті роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі, здійснено порівняльний аналіз ключових математичних понять шкільного курсу та їх властивостей з загальнонауковими.

Для проведення тематичних занять розроблені контрольно-смислові запитання та завдання репродуктивного, реконструктивного та творчого характеру. Відповіді на окремі запитання і завдання представлені у даному посібнику. Частина 1 містить матеріал по змістових модулях № 1, № 2.

Посібник призначений для студентів університетів, спеціальності 014 Середня освіта (Математика), вчителів та викладачів математики.

Рекомендовано до друку вченою радою Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка (Протокол № 5 від 26 грудня 2019 року)

ISBN 978-617-7833-32-0 © Соколенко Л. О., 2020

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Проблема професійної підготовки вчителя математики на даному етапі залишається досить актуальною, оскільки математична освіта має особливе значення у системі загальної освіти.

До складових системи професійної підготовки вчителя математики відносять: *змістову* (оволодіння спеціальними математичними знаннями); *технологічну* (оволодіння прийомами та методами навчання математики); *особистісну* (наявність особистісних якостей, необхідних для фахівця зазначеної професії) [1.24, с. 125].

Кожна з цих складових відіграє вагому роль у підготовці майбутнього вчителя, до того ж всі вони взаємопов'язані між собою.

Навчальна дисципліна «Наукові основи шкільного курсу математики (НОШКМ)», яка належить до дисциплін професійної і практичної підготовки студентів галузі знань 01 Освіта/Педагогіка, спеціальності 014 Середня освіта (Математика), призначена для одержання ними дієвих знань та оволодіння професійними компетентностями, які виходять за межі шкільного курсу математики.

Вивчаючи «НОШКМ» студенти магістранти оволодівають *спеціальними*, *методологічною, логічною, процедурною* компетентностями. Під *спеціальними компетентностями* розуміють володіння власне професійною діяльністю на достатньо високому рівні, здатність проектувати свій подальший професійний розвиток [1.1, с. 231].

Вчитель математики, який володіє спеціальними компетентностями: 1) демонструє знання основ математичних дисциплін, історії їх виникнення і розвитку, має уявлення про сучасні тенденції розвитку математики; 2) володіє професійною мовою предметної галузі знань, вміє коректно висловлювати та аргументовано обґрунтовувати положення предметної галузі знань; 3) володіє системою основних математичних структур і аксіоматичним методом; 4) розуміє роль і місце математики у системі наук її загальнокультурне значення; 5) володіє змістом і методами елементарної математики; 6) розуміє логіку розвитку шкільного курсу математики [1.7, с. 18].

Методологічна компетентність передбачає наявність уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв'язування індивідуально і суспільно значущих задач. Володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень, уміння розв'язувати типові математичні задачі свідчать про сформованість, відповідно, *логічної* та *процедурної* компетентностей [1.9, с. 5].

Навчальна дисципліна «НОШКМ» відноситься до методико-математичних дисциплін. Вона читається у багатьох ЗВО, серед яких Національний педагогічний університеті імені М. П. Драгоманова [1.8], Херсонський державний університет [1.23], Глухівський національний педагогічний університет імені Олександра Довженка [1.5], Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка [1.19], [1.20] та ін. за авторськими програмами викладачів. Завдяки викладанню цієї дисципліни фундаментальна математична підготовка стає теоретичною основою шкільного курсу математики.

Робочі програми згаданого курсу та аналогічних до нього курсів «Математика шкільного курсу математики», «Теоретичні основи взаємозв'язку шкільного курсу алгебри і початків аналізу та вузівського курсу математичного аналізу», «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» [1.12], [1.13] певним чином відрізняються.

У Чернігівському державному педагогічному інституті імені Т. Г. Шевченка (нині Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка) методичний спецкурс «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» на початку 90-х років минулого століття читав завідувач кафедри математичного аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Я. А. Ройтберг. Слід зазначити, що курс давав можливість випускникам фізико-математичного факультету осмислити зміст шкільного курсу алгебри і початків аналізу з точки зору математичного аналізу [1.12].

Подальша ґрунтовна робота, пов'язана з *теоретичними основами* елементарної математики, проводилась колективом викладачів фізико-математичного факультету Чернігівського педагогічного інституту імені Т. Г. Шевченка, а саме, професором Вивальнюком Л. М., професором Боровиком В. Н., доцентом Мурачем М. М., доцентом Соколенком О. І. Результатом цієї співпраці став навчальний посібник «Курс математики» [1.6]. В посібнику розглянуто фундаментальні математичні поняття «множина», «відповідність», «відношення»; математичні твердження та їх структура; алгоритми; цілі невід'ємні числа; розширення поняття про число; рівняння, нерівності, функції; елементи геометрії; величини та їх вимірювання.

Питанням, пов'язаним з теоретичними основами шкільного курсу математики, також присвячені посібники [1.4], [1.11] та ін. Матеріал викладений у цих посібниках використовується викладачами під час читання названих курсів.

Питання розвитку у майбутніх вчителів *науково-теоретичного мислення* під час навчання курсу «Елементарна математика» розглядаються в роботах професора Семенця С. П. [1.3], [1.10].

Методика і технологія організації та проведення окремих занять дисципліни «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» розроблена і представлена нами у статтях [1.13]–[1.18].

Предмет навчальної дисципліни «НОШКМ» – шкільна математика, яка розглядається з позицій загальних ідей та понять математики, логіки та дидактики математики, що складають її основу.

Курс «НОШКМ» має надати можливість студентам – майбутнім учителям математики усвідомити свій предмет з точки зору вищої математики, об'єднати розрізнені факти, систематизувати їх на основі загальних ідей математики, логіки та дидактики математики.

Мета курсу – систематизація знань студентів на основі загальних математичних, логічних та дидактичних ідей, які покладено в основу сучасного шкільного курсу математики.

Основні завдання курсу:

1. Проаналізувати курс шкільної математики з точки зору фундаментальних математичних ідей: множина, відповідність, відображення, відношення, математична структура, алгебраїчна операція тощо.

2. Показати розвиток понять числа, функції, величини, алгоритму, фігури, які відіграють важливу роль у курсі сучасної шкільної математики.

3. Розкрити роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі.

4. Сприяти усвідомленню студентами змісту теоретико-множинного, алгебраїчного, логічного аспектів у викладі основ шкільної математики.

5. Вчити встановлювати зв'язки між різними розділами математики, виконувати аналіз шкільної математики з точки зору відображених у ній фундаментальних математичних ідей та понять.

6. Вчити здійснювати порівняльний аналіз означень ключових математичних понять шкільного курсу математики з загальнонауковими.

7. Формувати готовність майбутнього вчителя математики викладати шкільний курс на належному рівні науковості та строгості, здійснювати навчальний процес за будь-яким альтернативним діючим підручником.

Міждисциплінарні зв'язки.

Курс *«Наукові основи шкільного курсу математики»* тісно пов'язаний з курсами алгебри та теорії чисел, математичного аналізу, математичної логіки, геометрії, елементарної математики, методики навчання математики в закладах середньої освіти (ЗСО) та закладах вищої освіти (ЗВО).

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

знати:

- зміст і методи елементарної та вищої математики;
- методи математичного дослідження;
- сучасні тенденції розвитку математики;

- роль і місце математики у системі наук та її загальнокультурне значення;
- логіку розвитку шкільного курсу математики;
- історію виникнення основних математичних понять шкільного курсу математики;
- означення математичних понять та підходи до формування математичних понять, які використовуються під час навчання шкільного курсу математики та фундаментальних математичних дисциплін;
- роль і місце найважливіших понять сучасної математики у шкільному курсі;
- основні теореми курсу вищої математики, які використовуються та можуть бути використані при побудові курсу шкільної математики;
- зміст теоретико-множинного, алгебраїчного, логічного аспектів у викладі основ шкільної математики;
- систему основних математичних структур та аксіоматичний метод;
- спеціальну мову, яка використовується у шкільній математиці.

вміти:

- аналізувати шкільну математику з точки зору вищої математики;
- встановлювати зв’язки між різними розділами математики;
- аналізувати логічні основи шкільної математики;
- конкретно висловлювати та аргументовано обґрунтовувати положення окремих математичних дисциплін;
- підбирати приклади та контрприклади для ілюстрації застосувань окремих теорем курсу вищої математики;
- розв’язувати вправи та задачі, використовуючи фундаментальні математичні поняття та методи і способи окремих дисциплін курсу вищої математики.

Курс «Наукові основи шкільного курсу математики» (НОШКМ) складається з двох частин: 1. «Наукові основи шкільних курсів математики, алгебри, алгебри і початків аналізу»; 2. «Наукові основи шкільного курсу геометрії».

Складовими першої частини курсу «Наукові основи шкільних курсів математики, алгебри, алгебри і початків аналізу» є такі **змістові модулі**:

Змістовий модуль № 1. Наукові основи змістових ліній «Числа» та «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики.

Змістовий модуль № 2. Деякі питання змістової лінії «Функції» ШКМ та змістової лінії «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» та наукові основи їх навчання.

До другої частини курсу «Наукові основи шкільного курсу геометрії» відноситься ***змістовий модуль № 3*** Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури» та «Геометричні величини» курсу геометрії загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання.

В цілому курс складається з 15-ти тем. Опрацювання цих тем відбувається під час проведення лекційних та практичних занять. Частина матеріалу виноситься на самостійне опрацювання студентів.

Навчально-методичний посібник «Наукові основи шкільного курсу математики» складається з двох частин. У частині 1 викладено матеріал, пов'язаний з науковими основами шкільних курсів «Математика», «Алгебра», «Алгебра і початки аналізу».

Розглянуті у посібнику теми містять: мету навчання, завдання, змістову структуру теми, **контрольно-смислові запитання і завдання репродуктивного характеру** (перша змістова самооцінка), **методичні завдання реконструктивного та творчого характеру** (для самостійної роботи), відповіді та вказівки до контрольно-смислових запитань та завдань репродуктивного характеру, зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру, список літератури до кожної з тем курсу.

Після розглянутих тем 1-10 у першій частині посібника представлені **комплекси завдань самостійної роботи** по змістовим модулям №1, №2.

В кінці посібника представлено **список літератури**, який містить науково-методичні роботи, що мають безпосереднє відношення до кожної з тем курсу та статті присвячені методиці та технології організації і проведення окремих занять курсу.

До цього списку літератури також включені чинні навчальні програми з математики для закладів середньої освіти та шкільні підручники, які використовуються під час опрацювання окремих тем курсу.

Серед **контрольно-смислових запитань і завдань репродуктивного характеру** (перша змістова самооцінка), **методичних завдань реконструктивного та творчого характеру** (для самостійної роботи) є такі, що опрацьовуються в аудиторії, використовуючи певні вказівки, та запитання і завдання, призначені для самостійної роботи студентів. Запитання та завдання, призначені для самостійної роботи студентів мають відповідні позначення біля їх номерів (°).

Використання цього посібника надасть можливість майбутньому вчителю продовжити вивчення окремих тем курсу «Методика навчання математики» на більш ґрунтовному рівні.

Автор висловлює глибоку вдячність професору Акуленко І. А., професору Семенцю С. П., доценту Кірману В. К. за цінні поради під час підготовки рукопису посібника до друку.

Л. О. Соколенко.

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА КУРСУ

Модуль 1.
НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНИХ КУРСІВ МАТЕМАТИКИ, АЛГЕБРИ, АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 1.
Наукові основи змістових ліній «Числа» та «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики

Тема 1. **Математика як наука. Методологічні основи математики.** Про методологію математики. Предмет математики та її характерні риси. Основні етапи розвитку математики (Період зародження математики. Математика сталих величин. Математика змінних величин. Сучасний період розвитку математики). Математичні методи пізнання. (Математика і дійсність. Математичні моделі дійсності. Абстракція ототожнення та ідеалізація у математиці). Аксіоматичний метод у математиці.

Тема 2. **Теорія множин і шкільна математика. Відповідності і відношення у шкільній математиці.** Розвиток теорії множин. Основні поняття теорії множин. Місце теми в програмі. Вимоги до математичної підготовки учнів. Порівняльний аналіз викладу теоретичного матеріалу, пов'язаного з множинами на різних ступенях навчання з загальнонауковими. З'ясування методичних особливостей системи задач, призначених для вивчення елементів теорії множин у шкільному та вузівському курсах математики. Створення такої системи. Аналіз ШКМ на предмет наявності в ньому відповідностей і відношень. Вивчення властивостей згаданих відповідностей і відношень у вузівському та ШКМ. Методика навчання: множин та операцій над ними, відношень включення, еквівалентності, порядку.

Тема 3. **Логічна структура арифметики та її навчання. Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел**. Розвиток арифметики в історії математики. Основні поняття арифметики. Місце теми в програмах для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 1-4 класи. Математика 5-9 класи. Вимоги до математичної підготовки учнів. Основні напрями повторення, систематизації, поглиблення уточнення і розширення відомостей про натуральні числа в курсі математики 5-6 класів. Особливості та відмінності у формуванні поняття про число, читанні та записуванні багатоцифрових чисел, зображенні натуральних чисел на координатному промені, порівнянні натуральних чисел на різних ступенях навчання (курс математики початкової школи, курс математики 5-6 класів, вузівський курс математики). Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел. Їх застосування в курсі математики початкової та основної школи. Алгебраїчні основи змістової лінії «Числа». Основні алгебраїчні операції шкільного курсу математики. Різні підходи до вивчення їх основних властивостей. Формування обчислювальних навичок. Подільність натуральних чисел. Властивості та ознаки. Найбільший спільний дільник (НСД) та найменше спільне кратне (НСК). Спільне та відмінне у вивченні цього матеріалу у шкільному та вузівському курсах математики.

Тема 4. **Розширення поняття про число в межах шкільного курсу математики.** Виникнення та основні етапи розвитку дробів. Розширення поняття числа в історії математики. Місце теми в програмі для загальноосвітньої школи. Вимоги до математичної підготовки учнів. Аналіз навчальних програм *фундаментальних математичних* дисциплін «Лінійна алгебра», «Алгебра і теорія чисел», «Числові системи» та *фахових* дисциплін «Елементарна математика», «Методика навчання математики в основній школі». Виділення основних понять теми. Аналіз введення і формування цих понять у шкільному та вузівському курсах математики. Методика навчання арифметичних дій над дробами, цілими, раціональними та дійсними числами в школі та її теоретичні основи. Створення тестових завдань, призначених для перевірки знань студентами теоретичних основ навчання окремих питань даної теми.

Тема 5. **Наукові основи змістової лінії «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики.** Місце теми в програмах для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. Математика 10-11 класи. Вимоги до математичної підготовки учнів. Виникнення і розвиток поняття рівняння (нерівність) в історії математики та їх застосування. Теоретичний матеріал з курсу математичної логіки, пов'язаний з висловлювальними формами та предикатами. Розгляд різних підходів до означення поняття рівняння (нерівності), що передбачають використання математичних понять (виразу, функції) та понять математичної логіки (висловлювальної форми, предиката). Відношення слідування та рівносильності на множині рівнянь (нерівностей) та їх властивості. Розгляд основних (типових) перетворень рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 2.
Деякі питання змістової лінії «Функції» ШКМ та змістової лінії «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» та наукові основи їх навчання

Тема 6. **Наукові основи змістової лінії «Функції» шкільного курсу математики.** Напрями які існують у тлумаченні поняття «функція» та їх суть. Означення поняття «функція» у діючих шкільних підручниках. Поняття «відображення» з яким ототожнюється поняття функції в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу. Означення поняття «відповідність» між множинами у різних посібниках для ЗВО. Функціональна відповідність. Використання методу доцільних задач перед введенням поняття «відображення». Математичні поняття, пов'язані з поняттям «відображення», введення яких ця задача робить більш наочним та сприяє їх формуванню. Формулювання означення ін'єктивної, сюр'єктивної, бієктивної функції на теоретико-множинній мові. Приклади. Обернене відображення. Означення, приклад, умова існування. Ототожнення понять «функція» та «відображення» у курсі вищої математики. Різні означення функції у вузівських підручниках та посібниках, родові поняття, відмінності у означеннях. Сталі, рівні (тотожні функції). Приклади. Числова функція у вузівському курсі вищої математики, родові поняття. Схожість у означеннях шкільного та вузівського курсів математики. Найпоширеніші способи задання функції у шкільному курсі математики та у вузівському курсі вищої математики.

Основні елементарні функції. Класифікація функцій за їх *будовою* (арифметичні операції над функціями, оборотна та обернена функції, складна функція або *суперпозиція* чи *композиція* функцій). Класифікація функцій за їх *властивостями* (обмежені й необмежені, монотонні, парні та непарні, періодичні функції). Класи елементарних функцій. Спільні підходи та особливості які існують під час навчання елементарних функцій у шкільному курсі математики та вузівському курсі вищої математики.

Тема 7. **Границя функції. Неперервність функції. Методичні підходи до навчання у школі та ЗВО.** Формування уявлення про границю функції в точці в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу. Визначеність функції та існування границі функції в точці. Роль прикладів та контрприкладів у формуванні понять. Означення границі функції в точці (за Коші, через існування околу, за Гейне). Геометрична інтерпретація. Теореми про границі функцій (про єдиність границі, арифметичні властивості границь, граничний перехід в нерівності, границю проміжної функції) та їх застосування. Односторонні границі функції. Деякі важливі границі. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Формування уявлення про неперервність функції в точці в курсі алгебри і початків аналізу 11 класу. Поняття неперервності функції в точці (еквівалентні означення). Теореми про функції, неперервні в точці. Одностороння неперервність. Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація. Властивості функцій, неперервних на відрізку (про обмеженість функції, існування найбільшого і найменшого значень функції, перетворення функції на нуль, проміжне значення) та їх застосування.

Тема 8. **Застосування похідної в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу.** Місце теми в програмі. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Застосування похідної до знаходження проміжків зростання і спадання та екстремумів функції. Загальна схема дослідження функції для побудови її графіка. Найбільше і найменше значення функції. Поняття опуклості і точок перегину диференційованої на інтервалі $(a; b)$ функції. Дослідження функції на опуклість і точки перегину. Асимптоти графіка функції. Розширена схема дослідження функції для побудови її графіка. Рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці. Застосування похідної до розв'язування задач прикладного змісту. Застосування похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей. Застосування похідної до доведення нерівностей.

Тема 9. **Первісна та інтеграл в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі математичного аналізу.** Місце теми в програмі. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Методика вивчення первісної. Невизначений інтеграл та його властивості. Приклади задач, що приводять до поняття інтеграла. Методика вивчення визначеного інтеграла. Його фізичний та геометричний зміст. Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об'ємів тіл. Застосування інтеграла до розв'язування прикладних задач.

Тема 10. **Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики в курсі алгебри 9-го класу, в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи та наукові основи їх навчання**. Місце теми в програмі. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. Перестановки. Розміщення. Комбінації. Методика введення основних понять теорії ймовірностей. Випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події (класичне, статистичне означення ймовірності). Методика використання формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій. Аксіоми теорії ймовірностей. Операції над подіями. Ймовірність суми подій. Незалежність подій. Умовна ймовірність. Ймовірність добутку подій. [Геометрична ймовірність та її застосування до розв'язування задач]. Випадкові події. Елементи математичної статистики.

Модуль 2.
НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 3.
Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури» та «Геометричні величини» курсу геометрії загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання

Тема 11. **Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Методи побудов перерізів многогранників.** Місце теми в програмі курсу геометрії 10 класу та в курсі проективної геометрії. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Суть способу паралельного проектування. Основні властивості паралельного проектування та наслідки з них. Побудова зображення плоских фігур (кола, трикутника та його комбінацій з колом, квадрата, ромба та їх комбінацій з колом та ін.). Побудова зображень просторових фігур (многогранників, тіл обертання). Переріз многогранників площинами. Метод слідів січних площин. Метод внутрішнього проектування.

Тема 12. **Координати і вектори у просторі.** Місце теми в програмі курсу геометрії 11 класу та курсу аналітичної геометрії. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів (студентів). Афінна та прямокутна декартова система координат у просторі. Методика вивчення координат у просторі: відстань між точками, поділ відрізка у даному відношенні, координати середини відрізка. Методика вивчення векторів у просторі. Дії над векторами. Скалярний добуток. Векторний та мішаний добутки, їх геометричні інтерпретації. Застосування методу координат і векторів до розв'язування геометричних задач.

Тема 13. **Наукові основи навчання прямих і площин у просторі.**

Пряма в просторі. Взаємне розташування прямих і площин. Рівняння прямої в просторі (заданої точкою і напрямним вектором; що проходить через дві дані точки; параметричні рівняння прямої; заданої як перетин двох площин). Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої. Відстань між двома мимобіжними прямими. Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Взаємне розміщення прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Основні задачі на пряму і площину у просторі.

Площина у просторі. Різні способи задання площини і відповідні їм рівняння (заданої точкою і напрямним підпростором; площини, яка проходить через три задані точки; у відрізках на осях; площини, заданої точкою і нормальним вектором; векторне рівняння площини). Нормальне рівняння площини. Загальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Розміщення площини відносно системи координат.

Відстань від точки до площини. Взаємне розташування площин. Відстань від точки до площини. Взаємне розміщення двох площин. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин.

Тема 14. **Наукові основи навчання многогранників та тіл обертання, комбінації геометричних тіл.** Аналіз діючих програм шкільного курсу геометрії на предмет вивчення многогранників та тіл обертання у стереометрії. Методика формування основних понять тем «Многогранники», «Тіла обертання» в шкільному курсі стереометрії. Співвідношення між числом плоских кутів, сумою їх і числом ребер і граней многогранника. Теорема Ейлера про залежність між числом ребер, граней і вершин опуклого многогранника та її застосування до класифікації правильних многогранників. Сфера, циліндр та конус як простіші поверхні обертання. Перерізи тіл обертання площинами та дотичні площини до тіл обертання. Зображення комбінацій просторових фігур.

Тема 15. **Наукові основи навчання геометричних величин у стереометрії.** Аналіз діючих програм шкільного курсу на предмет вивчення геометричних величин у стереометрії. Виділення геометричні величини, які розглядають у курсі геометрії 10-11 класів. Розгляд поняття «*об'єм тіла*» та його основних властивостей. Формування понять «*рівноскладені тіла*» та «*рівновеликі тіла*», встановлення взаємозв'язку між цими поняттями. Різні математичні та методичні підходи до виведення формул об'ємів та площ поверхонь: а) об'єму прямокутного паралелепіпеда; б) об'єму трикутної піраміди; в) площ поверхонь тіл обертання. Класифікація задач за рівнем складності залежно від профільної диференціації: на обчислення відстаней, величини кутів, площі поверхні, об'єму. Методика навчання учнів розв'язування задач на визначення об'ємів та площ поверхонь многогранників і тіл обертання.

Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	у тому числі				
		лекції	практ	лаб	інд	С.р.
1	2	3	4	5	6	7
Модуль 1. Наукові основи шкільних курсів математики, алгебри, алгебри і початків аналізу						
***Змістовий модуль № 1.* Наукові основи змістових ліній «Числа» та «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики**						
Тема 1. Математика як наука. Методологічні основи математики.	**8**	**-**	**-**			**8**
Тема 2. Теорія множин і шкільна математика. [Відповідності і відношення у шкільній математиці].	**11**	**2**	**2**			**7**
Тема 3. Логічна структура арифметики та її навчання. Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел.	**9**	**1**	**2**			**6**
Тема 4. Розширення поняття про число в межах шкільного курсу математики.	**10**	**1**	**2**			**7**
Тема 5. Наукові основи змістової лінії «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики.	**13**	**2**	**4**			**7**
Разом за змістовим модулем 1	**51**	**6**	**10**			**35**
***Змістовий модуль № 2.* Деякі питання змістової лінії «Функції» ШКМ та змістової лінії «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» та наукові основи їх навчання**						
Тема 6. Наукові основи змістової лінії «Функції» шкільного курсу математики.	**13**	**2**	**4**			**7**
Тема 7. Границя функції. Неперервність функції. Методичні підходи до навчання у школі та ЗВО.	**10**	**2**	**2**			**6**
Тема 8. Застосування похідної в ШКМ та курсі математичного аналізу.	**13**	**2**	**4**			**7**
Тема 9. Первісна та інтеграл в курсі алгебри і початків аналізу та в курсі	**13**	**2**	**4**			**7**

математичного аналізу.						
1	2	3	4	5	6	7
Тема 10. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи та наукові основи їх навчання.	**10**	**2**	**2**			**6**
Разом за змістовим модулем 2	**59**	**10**	**16**			**33**
Усього годин за модуль 1	**110**	**16**	**26**			**68**
Модуль 2. Наукові основи шкільного курсу геометрії						
Змістовий модуль № 3. **Деякі питання змістових ліній «Геометричні фігури» та «Геометричні величини» курсу геометрії загальноосвітньої школи та наукові основи їх навчання**						
Тема 11. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії. Методи побудов перерізів многогранників.	**10**	**1**	**2**			**7**
Тема 12. Координати і вектори у просторі.	**10**	**1**	**2**			**7**
Тема 13. Наукові основи навчання прямих і площин у просторі.	**12**	**2**	**2**			**8**
Тема 14. Наукові основи навчання многогранників та тіл обертання, комбінацій геометричних тіл.	**11**	**2**	**2**			**7**
Тема 15. Наукові основи навчання геометричних величин у стереометрії.	**12**	**2**	**2**			**8**
Разом за змістовим модулем 3	**55**	**8**	**8**			**37**
Усього годин за модуль 2	**55**	**8**	**8**			**37**
Всього:	**165**	**24**	**36**			**105**

Модуль 1.
НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНИХ КУРСІВ МАТЕМАТИКИ, АЛГЕБРИ, АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ № 1.
Наукові основи змістових ліній «Числа» та «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики

Тема 1. Математика як наука. Методологічні основи математики

Мета навчання: окреслити коло питань, які утворюють предмет методології математики; розглянути предмет математики та характерні риси математичної науки; згадати основні етапи розвитку математики, математичні методи пізнання та розкрити роль аксіоматичного методу у математиці; ознайомити студентів з предметом, метою і основними завданнями навчання курсу «НОШКМ».

Завдання.

1) Згадати питання, які утворюють предмет методології математики, методологічні знання загальнонаукового та конкретно наукового рівня.

2) Використовуючи відповідну наукову та навчально-методичну літературу, визначити предмет математики та її характерні риси.

3) Згадати основні етапи розвитку математики.

4) Охарактеризувати математичні методи пізнання.

5) Розкрити роль аксіоматичного методу у математиці.

6) Ознайомитись з предметом, метою і основними завданнями навчання курсу «НОШКМ».

Змістова структура теми

№	*Структурні елементи змісту*	*Де знайти відповідь*
1	Про методологію математики. Методологічні знання загальнонаукового та конкретно наукового рівня.	[1] – [3], [5]
2	Предмет математики та її характерні риси.	[4], [5]
3	Основні етапи розвитку математики (Період зародження математики. Математика сталих величин. Математика змінних величин. Сучасний період розвитку математики).	[4], [5]
4	Математичні методи пізнання. (Математика і дійсність. Математичні моделі дійсності. Абстракція ототожнення та ідеалізація у математиці).	[5]
5	Аксіоматичний метод у математиці.	[5]
6	Предмет, мета і основні завдання навчання курсу «НОШКМ».	

Контрольно-смислові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1°. Які тлумачення поняття «методологія» існують?

2°. Які види та рівні методології існують?

3°. Що є предметом математики? Які характерні риси математичної науки виділяють?

4°. Охарактеризуйте основні етапи розвитку математики.

5°. Які методи математичного пізнання дійсності існують? Охарактеризуйте метод побудови математичних моделей явищ, що вивчаються.

6°. Що таке абстракція ототожнення та ідеалізація? Як їх використовують у математиці?

7°. В чому полягає суть аксіоматичного методу? Наведіть приклади його використання в математиці.

Відповіді та вказівки до контрольно-смислових запитань та завдань репродуктивного характеру

1°. [3, с. 11]. **Методологія** – це вчення про структуру, логічну організацію, методи і засоби діяльності.

2°. [3, с. 22–23]. Розглядаючи методологію як вчення про організацію творчої людської діяльності виокремлюють такі **види методології**: 1) методологія ігрової діяльності; 2) методологія навчальної діяльності; 3) методологія трудової, професійної діяльності, яка включає в себе методологію практичної діяльності як у сфері матеріального, так і у сфері духовного виробництва, а також методологію науки (наукової діяльності).

Виокремлюють **4-ри рівні** методології: 1) філософський, 2) загально-науковий, 3) конкретно науковий, 4) технологічний.

До *філософського* рівня методології математики відносять питання про: предмет математики; співвідношення математики і реального світу; структуру та істинність математичного знання; проблеми обгрунтування математики; місце математики в системі наук тощо [3, с. 25].

Загальнокультурна методологія – це теоретичні концепції, прийняті до всіх або до більшості наукових дисциплін [3, с. 34].

Конкретно наукова методологія розглядає сукупність теоретичних положень, закономірностей, методичних підходів, що застосовуються в тій чи іншій спеціальній науковій галузі [3, с. 36].

Технологічна методологія дозволяє використовувати найефективніші методи, способи і засоби дослідження [3, с. 37].

3°. [3, с. 25–27], [5, с. 6–7].

Математика, як і інші науки, вивчає навколишній світ, об'єкти цього світу і відношення між ними. Однак на відміну від природничих наук вона вивчає форми і відношення матеріального світу абстрагуючись від їх змісту.

До ***характерних рис математичної науки*** відносять:

1) Математика вивчає абстраговані властивості предметів – *числа,* а не сукупності предметів, *геометричні фігури,* а не реальні тіла.

2) Основним методом одержання математичних результатів є *логічний висновок*, який не потребує експериментальної перевірки.

3) *Абстракції*, що виникають у математиці, розвиваються від абстракцій, що безпосередньо узагальнюють властивості реальних предметів, до абстракцій такого високого рівня, як топологічні простори, загальні алгебраїчні системи, алгоритми і т.д.

4) Математика має властивість універсальної використовуваності в інших галузях.

5) Математика займає особливе положення у системі наук – її не можна віднести ні до гуманітарних ні до природничих наук. Вона дає ті основні поняття, які використовуються майже в усіх науках. Серед цих понять «множина», «структура», «система», «ізоморфізм» і т.д. [5].

4°. [1], [2], [5, Гл.1, § 2], [4, с. 560–564].

5°. [5, с. 21–25]. Однією з найважливіших задач людського пізнання є вивчення об'єктів матеріального світу, їх властивостей, взаємовідношень, взаємодій для того щоб використовувати це знання для розв'язування практичних задач.

На різних етапах розвитку математики в ній створювалися специфічні методи, які характеризували процеси математичного осмислення певних фрагментів різноманітних просторових форм і якісних відношень матеріального світу.

Роль математики в природознавстві полягає в тому, що вона пропонує достатньо загальні і достатньо чіткі моделі для вивчення оточуючої дійсності.

Одним з найбільш ефективних методів математичного пізнання дійсності є побудова *математичних моделей* досліджуваних явищ.

Математична модель – це наближений опис усякого класу явищ зовнішнього світу, виражений з допомогою математичної символіки. Побудова математичних моделей є методом пізнання зовнішнього світу, прогнозування явищ та управління різними процесами.

Метод *математичного моделювання* широко застосовуються в різноманітних науках: фізиці, хімії, біології, економіці, соціології. Під час побудови математичних моделей завжди доводиться нехтувати тими або іншими сторонами дійсності, завдяки чому одержана модель є дещо не еквівалентною явищу яке вивчається. Лише порівняння з дійсністю результатів, одержаних шляхом вивчення моделі, дозволяє робити висновки про якість цієї моделі, межі її застосування. Кожну модель можна застосовувати лише в певних умовах.

6°. [5, с. 25–28]. Побудова будь-якої математичної моделі починається з абстрагування. Процес абстрагування у математиці має свої характерні особливості. Найбільш розповсюдженими видами абстракції в математиці є *абстракція ототожнення* (узагальнююча) та *ідеалізація.*

Абстракція ототожнення починається з встановлення відношення еквівалентності у множині яка досліджується. Під час встановлення відношення еквівалентності в деякій множині еквівалентні об'єкти ототожнюються за деякою властивістю, яка абстрагується від решти властивостей цих об'єктів і стає самостійним абстрактним поняттям.

Так відношення рівносильності множин об'єднує в один клас всі скінченні множини, між якими можна встановити бієктивну відповідність. У наслідок цього ототожнення від множин, які належать одному й тому ж класу еквівалентності, абстрагується їх загальна властивість, що характеризує цей клас, властива всім множинам цього класу і не властива ніяким іншим множинам. Ця властивість є самостійним поняттям натурального числа, яке виражає *чисельність* множин даного класу.

Поряд з абстракцією ототожнення під час побудови математичних моделей дійсності широко застосовується і такий специфічний прийом абстрагування, як *ідеалізація.*

Під *ідеалізацією* розуміють створення нових понять, які наділені не лише властивостями, відокремленими від реальних прообразів, але й уявними властивостями, відсутніми у вихідних об'єктах. Це робиться для того, щоб вивчаючи ідеалізовані об'єкти полегшити вивчення і реальних прообразів. Багато вихідних понять різних галузей математики представляють собою такі ідеальні поняття. Ніде у природі не зустрічається «геометрична точка», що не має розмірів, але спроба побудови геометрії, яка не використовує це поняття, не приведе до успіху. Так само не можливо розвивати геометрію без таких ідеалізованих понять, як пряма лінія, площина, куля і т.д.

В геометрії до одержаних після ідеалізації геометричних фігур застосовують в подальшому абстракцію ототожнення. Так, ототожнюючи всі кулі, одержують загальне поняття кулі, ототожнюючи всі трикутники – загальне поняття трикутника і т.д.

Якщо пригадати, що основні поняття математики виходять з реального світу, то навряд чи доводиться дивуватись їх корисності під час дослідження цього світу. І розумна ідеалізація реальних об'єктів і процесів – це потужний метод пізнання дійсності.

7°. [5, с. 25–28]. Суть *аксіоматичного методу* полягає в тому, що деякі поняття та відношення, що їх пов'язують, вважають невизначеними (вихідними), а всі наступні поняття і їх властивості виводять з вихідних шляхом точних означень та логічних міркувань.

Першою спробою такого викладу математичної дисципліни була книга Евкліда «Начала». Аксіоматичну побудову має арифметика цілих невід'ємних чисел здійснена у 1891 році італійським математиком Д. Пеано.

На сучасному етапі аксіоматичний метод став одним з основних під час побудови математичних моделей дійсності. Важливу роль у сучасній математиці відіграє аксіоматика *групи,* аксіоматика метричного та векторного просторів та ін. Російським математикам С. Бернштейну та А. Колмогорову належить заслуга аксіоматичного опису теорії ймовірностей. Десятки інших галузей сучасної математики також розвиваються на аксіоматичній основі.

Література

1. Бевз В. Г. Історія математики. Харків : Вид. гр. «Основа», 2006. 176 с.
2. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. 312 с.
3. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики : монографія. Харків : ФОП Панов А. М., 2017. 336 с.
4. Математическая энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, т. 3 : Коо-Од. Москва : «Советская Энциклопедия», 1982. С. 560–564.
5. Современные основы школьного курса математики : Пособие для студентов пед. ин.-тов / Виленкин Н. Я., Дудничев К. И., Калужин Л. А., Столяр А. А. Москва : Просвещение, 1980. 240 с.

Тема 2. Теорія множин і шкільна математика. Відповідності і відношення у шкільній математиці

Мета навчання: визначити місце та роль фундаментальних математичних понять множина, відповідність, відношення у ШКМ, сприяти усвідомленню студентами змісту теоретико-множинного аспекту у викладі основ ШКМ, вчити здійснювати порівняльний аналіз означень понять шкільного курсу з загальнонауковими.

Завдання.

1) Провести аналіз Державного стандарту базової й повної загальної середньої освіти (освітня галузь «математика»), навчальних програм з математики для основної та старшої школи та визначити місце множин (числових, точкових) та понять пов'язаних з ними.

2) Навести приклади множин, які зустрічаються в курсі математики основної та старшої школи.

3) Дослідити виникнення і розвиток ***теорії множин*** в історії математики.

4) Зробити *порівняльний аналіз* викладу теоретичного матеріалу, пов'язаного з множинами на різних ступенях навчання з загальнонауковими.

З’ясувати, які *поняття теорії множин* вивчаються в шкільному курсі математики? Чим відрізняються методи введення та формування цих понять у шкільному та вузівському курсах математики?

5) З’ясувати за рахунок вивчення яких понять та їх властивостей відбувається розширення даної теми у вузівському курсі математики.

6) Підібрати систему задач, в розв’язуванні яких множини та операції над ними відіграють першорядну роль, та розробити методику навчання учнів (студентів) їх розв’язування. З’ясувати методичні особливості задач, створеної системи.

7) Провести аналіз ШКМ на предмет наявності в ньому відповідностей і відношень. Розглянути відношення включення множин, відношення еквівалентності, відношення порядку у шкільній математиці та у вузівському курсі математики.

8) Повторити властивості відношень, які вивчаються в вузівському курсі математики та з’ясувати, які властивості мають відношення ШКМ.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Де знайти відповідь***
1	Розвиток теорії множин. Основні поняття теорії множин.	[1]-[10]
2	Місце теми в програмі. Вимоги до математичної підготовки учнів.	[2.4], [2.6], [2.7]
3	Порівняльний аналіз викладу теоретичного матеріалу, пов’язаного з множинами на різних ступенях навчання з загальнонауковими.	[3.16], [3.25] – [3.28], [2], [6]
4	З’ясування методичних особливостей системи задач, призначених для вивчення елементів теорії множин у шкільному та вузівському курсах математики. Створення такої системи.	[3.16], [3.25] – [3.28], [1], [2], [6], [10]
5	Аналіз ШКМ на предмет наявності в ньому відповідностей і відношень. Вивчення властивостей згаданих відповідностей і відношень у вузівському та ШКМ.	[2.4], [2.6], [2.7], [2], [6], [3.16], [3.23] – [3.28]
6	Методика навчання: - множин та операцій над ними, - відношення включення, - відношення еквівалентності, - відношення порядку	[2], [4], [6], [7], [9], [3.16], [3.23] – [3.28]

Контрольно-смислові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1. Яке місце займають множини та операції над ними у шкільному курсі математики? Проаналізуйте зміст навчального матеріалу та державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів (очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів), зазначені у діючих шкільних програмах з математики для основної та старшої школи.

2. Наведіть приклади множин, які зустрічаються в курсі математики основної та старшої школи.

3°. З дослідженнями яких вчених пов’язані виникнення і розвиток теорії множин?

4. Які поняття теорії множин вивчаються в шкільному курсі математики? Які методи використовуються під час введення та формування згаданих понять? Наведіть приклади.

5. Чим відрізняються методи введення та формування цих понять у вузівському курсі математики?

6°. За рахунок вивчення яких понять та їх властивостей відбувається розширення даної теми у вузівському курсі математики?

Відповіді та вказівки до контрольно-смислових запитань та завдань репродуктивного характеру

1. Аналіз навчальних програм з математики для основної та старшої школи.

Множини та операції над ними є виокремленою темою курсу алгебри 8 класу, який призначений для класів з поглибленим вивченням математики.

Згідно з програмою [2.4] зміст навчального матеріалу містить такі питання:

Тема 2. МНОЖИНИ І ОПЕРАЦІЇ З НИМИ	
Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів	**Зміст навчального матеріалу**
пояснює поняття: множина, елемент множини, множини натуральних, цілих і раціональних чисел, взаємно однозначна відповідність, рівнопотужні множини, нескінченна множина; **формулює** означення: підмножини, порожньої множини, об'єднання і перерізу множин; теорему про кількість елементів множини, яка є об'єднанням двох скінченних множин; **розв'язує вправи, що передбачають** застосування вивченого матеріалу, зокрема символіки теорії множин.	*Множина. Елемент множини. Порожня множина. Переріз, об'єднання і різниця множин. Підмножина. Круги Ейлера. Числові множини. Взаємно однозначна відповідність між елементами множин. Рівнопотужні множини. [Рівнопотужність множин точок інтервала і прямої]. Нескінченні множини. [Зліченні множини].*

У старшій профільній школі множини та операції над ними вивчають в 10 класі, під час навчання теми 1 «Функції. Многочлени. Рівняння і нерівності» курсу алгебри і початків аналізу на профільному рівні. Згідно з програмою профільного рівня [2.6] зміст навчального матеріалу включає питання:

Тема 1. ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ	
Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	**Зміст навчального матеріалу**
Учень (учениця): **зображує** на діаграмах або числовій прямій об'єднання і переріз множин та **ілюструє** поняття підмножини; **формулює** означення підмножини, об'єднання і перерізу множин; **знаходить** об'єднання і переріз числових множин	Множини, операції над множинами.

2. Приклади множин, які зустрічаються в курсі математики основної та старшої школи.

Математичні поняття, які вивчають у загальноосвітній школі, природно групуються у множини.

1) В курсі математики 5-6 класів розглядаються різні множини, що складаються з ***натуральних чисел***: множини парних і непарних чисел, множини кратних та дільників даного натурального числа, множини простих і складених чисел і т.д. Усі ці множини є підмножинами множини **N** натуральних чисел. Тому можна сказати, що множина **N** є універсальною множиною для арифметики.

2) У шкільному курсі математики вивчаються ***числові множини***. При цьому відбувається поступове розширення множини натуральних чисел N, а саме $N \subset N_0 \subset Q_+ \subset Q \subset R \subset C$. Під час вивчення курсу алгебри і початків аналізу в класах з поглибленим вивченням математики розглядають множину C комплексних чисел.

До найбільш важливих *прикладів* **числових множин**, які розглядаються у шкільному курсі відносяться: а) з кожним рівнянням $F_1(x) = F_2(x)$ пов'язані множина $X = X_1 \cap X_2$, де X_1, X_2 – області визначення виразів $F_1(x)$, $F_2(x)$ і множина T чисел, що задовольняють це рівняння – **множина його розв'язків**; б) нерівності виду $a \le x \le b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$, $a < x < b$ задають **числові проміжки**; в) підмножини множини **R** дійсних чисел, а саме множини **Q – раціональних чисел** та **I – ірраціональних чисел**; г) у тригонометрії під час розв'язування нерівностей ми зустрічаємось з об'єднанням нескінченної сукупності проміжків; д) множина значень аргументу функції f – **область**

визначення функції f, яку позначають $D(f)$; е) множина значень функції f – **область значень функції** f, яку позначають $E(f)$.

Приклад. Розв'язок нерівності $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ є об'єднанням проміжків $\bigcup\limits_{k \in Z}\left(-\frac{4\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$.

3) ***Точкові множини.*** Точки площини задаються двома координатами, і тому плоским множинам відповідають множини, які складаються з пар дійсних чисел.

Точкові множини, які вивчаються в шкільному курсі математики як правило задаються кортежами дійсних чисел.

Приклад. Трикутник ABC з вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ задається кортежем із шести дійсних чисел $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$.

Коло радіуса R, з центром у точці $C(a,b)$ задається кортежем з трьох чисел (a, b, R) і т.д.

Кожній просторовій геометричній фігурі відповідає деяка множина трійок дійсних чисел.

До точкових множин, які розглядаються в шкільному курсі відносяться: 1) множина точок площини (простору) – **геометрична фігура;** 2) *геометричні місця точок* (**ГМТ** – множина точок площини (простору), яким притаманна певна властивість).

3°. З історії виникнення і розвитку теорії множин: [6, с. 31], [8, с. 198–200].

Виникнення і розвиток теорії множин пов'язані з дослідженнями *нескінченних множин*, засновником яких був видатний німецький математик Георг Кантор (1845-1918). Перші праці вченого зустріли опір з боку багатьох сучасних математиків, оскільки вважалось, що нескінченність ніколи не увійде до складу математичних понять.

Проте ***канторова теорія множин*** розвивалася. У 70-80-х роках XIX ст. Г. Кантор встановив, що серед нескінченних множин є безліч нерівнопотужних між собою множин і що всі нескінченні множини також можна розбити на класи рівнопотужних множин. У результаті дістали узагальнення поняття натурального числа на випадок нескінченних множин у вигляді поняття *кардинального числа* [6, с. 31].

Зокрема у 1874 році Г. Кантором була доведена нееквівалентність множин раціональних та дійсних чисел. Через декілька років (1878 р.) в його працях було введено загальне поняття *потужності множини,* розглянуті основні відображення та порівняння множин і доведена рівнопотужність множини точок *лінійного континуума* та точок n*-вимірного многовиду.*

Систематична розробка теорії множин була завершена Кантором в наступні п'ять років (1879 р.). При цьому він ввів поняття *граничної точки, довільної множини,* приклад *досконалої множини*, яка у 1883 році одержала його ім'я (*канторова досконала множина*), висловив *континиум гіпотезу* і т.п.

Побудована Кантором загальна теорія потужностей множин, відображень, операцій над множинами, властивостей впорядкованих множин склала в майбутньому основний зміст *абстрактної теорії множин* [8, с. 198–200].

4. [3.16, § 1], [3.23, §2], [3.27, P1, §1], [3.24, §1], [3.28, §1], [3.25, §1].

Методичні особливості навчання ***понять теорії множин****, що вивчаються в шкільному курсі математики 8-го та 10-го класів.*

Тема «*Множини, операції з ними*» курсу алгебри 8-го класу, згідно з чинною програмою для поглибленого вивчення математики [2.4], містить численні математичні поняття, до яких відносяться наступні:

– множина, елемент множини, рівні множини, одноелементна та порожня множини, підмножина, власна підмножина, переріз, об'єднання множин, різниця множин;
– скінченна та нескінченна множини, взаємно однозначна відповідність між множинами, потужність множин, рівнопотужні множини, зліченна множина, незліченна множина.

Тема «*Множини, операції над множинами*», курсу алгебри і початків аналізу 10-го класу, що вивчається на профільному рівні згідно з чинною програмою [2.6], містить першу частину згаданих вище понять.

До первісних понять відносяться: множина, елемент множини, належить множині.

Описово вводяться поняття множина, одноелементна множина, скінченна, нескінченна множина, потужність [3.16], [3.27]. Решта зазначених понять означаються. Більшість понять вводяться конкретно-індуктивним методом.

Приклад. [3.16, с. 29]. Перед введенням поняття *підмножина* розглядають множину цифр десяткової системи числення $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. З цієї множини виокремлюють ті її елементи, які є парними цифрами. Отримують множину $B=\{0,2,4,6,8\}$ усі елементи якої є елементами множини A. Далі формулюють таке означення.

Означення. Множину B називають ***підмножиною*** множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Це записують так: $B\subset A$ або $A\supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»).

5. Методи введення та формування окремих згаданих понять у шкільному та вузівському курсах математики дещо відрізняються, а саме:

5.1. Існує відмінність у означенні поняття *власна підмножина.* В означенні, яке дається у шкільному підручнику алгебри для 8-го класу [3.16] не зазначається, що підмножина B повинна бути не порожньою:

Курс «Алгебра» 8 клас (поглиблене вивчення) [3.16, с. 31]	**«Курс математики»** [6, с. 6]
Означення. Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають ***власною підмножиною*** множини A.	**Означення.** Підмножина B множини A називається ***власною підмножиною*** або ***правильною частиною*** множини A, якщо B є непорожня множина і в A знайдеться хоча б один елемент, якого немає в B. Ø і сама множина – *невласні підмножини.*

5.2. Питання *взаємно однозначної відповідності* між елементами множин та *рівнопотужності* множин розглядають, у відповідності до нині діючої програми для поглибленого вивчення математики [2.4], під час навчання курсу алгебри 8 класу. Розгляд цих питань у шкільному курсі має свої методичні особливості порівняно з розглядом у курсі «Вища математика». Конкретизуйте сказане за вказаною літературою.

Курс «Алгебра» 8 клас (поглиблене вивчення) [3.16, с. 41–46]	**Курс «Вища математика»** [2, с. 13–14]
1) **Конкретно індуктивний підхід** до введення поняття *взаємно однозначна відповідність* між множинами A і B: **Приклад 1** (скінченні множини) [3.16, с. 41]. Порівняйте кількість елементів множини A двоцифрових чисел і множини B трицифрових чисел, десятковий запис яких закінчується цифрою 1.	1) **Абстрактно-дедуктивний підхід** до введення понять: ***відповідність*** між непорожніми множинами A і B; ***еквівалентні множини*** (синонім «рівнопотужні»); ***взаємно однозначна відповідність.***
2) ***Означення*** [3.16, с. 42]. Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність єдиний елемент множини B і при цьому будь-який елемент множини B є відповідним деякому єдиному елементу множини A, то кажуть, що між множинами A і B встановлено ***взаємно однозначну відповідність.***	2) ***Означення*** *(через декартів добуток)* [2, с. 13]. ***Відповідністю*** між непорожніми множинами A і B називають будь-яку *сукупність* $C \subset A \times B$. При цьому, якщо $(a; b) \in C$, то кажуть, що елемент b відповідає елементу a.

3) Неможливість встановлення *взаємно однозначної відповідності* між **скінченною множиною та її власною підмножиною.**	3) **Приклад 3** [2, с. 13]. Якщо $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, то $A\times B=$ $=\{(1;2),(1;3),(2;2),(2;3)\}$. *Відповідністю* між цими множинами може бути множина $C=\{(1;2),(1;3)\}$ або множина $D=\{(1;2),(2,2)\}$, або якась інша підмножина декартового добутку $A\times B$.
4) **Приклад 2** (нескінченні множини) [3.16, с. 46]. Між множинами N і Z ($N\subset Z$) можна встановити взаємно однозначну відповідність.	4) ***Означення*** [2, с. 13]. Множини A і B називають ***еквівалентними*** і пишуть A~B, якщо існує така відповідність між цими множинами, коли кожному елементу множини A відповідає один елемент множини B, а кожний елемент множини B – одному елементу з множини A. Таку *відповідність* називають *взаємно однозначною.*
5) ***Означення*** [3.16, с. 46]. Дві множини називають ***рівнопотужними,*** якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.	5) **Приклад 4** [2, с. 14]. Множина $N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ всіх натуральних чисел та множина $M=$ $\{2,4,6,\ldots,2n,\ldots\}$ всіх парних чисел є еквівалентними, оскільки відповідність $C=\{(n;2n):n\in N\}$ є взаємно однозначною між множинами N і M.

5.3. У шкільному курсі алгебри поняття *скінченної* та *нескінченної множини* строго не означаються, а вводяться описово: «Якщо множина містить скінченну кількість елементів, то її називають ***скінченною***, а якщо в ній нескінченно багато елементів – то ***нескінченною.*** Порожню множину називають скінченною».

У вузівському курсі вищої математики поняття «скінченна множина» означається як множина еквівалентна множині $\{1,2,\ldots,n\}$ [2, с. 14].

5.4. Існує певна відмінність в означенні ***зліченних*** множин у ШКМ та курсі «Вища математика».

Курс «Алгебра» 8 клас (поглиблене вивчення) [3.16, с. 47]	**Курс «Вища математика»** [2, с. 14]
Означення [3.16, с. 47]. Множину, рівнопотужну множині натуральних чисел, називають ***зліченною множиною.***	***Означення*** [2, с. 14]. Якщо множина A еквівалентна множині натуральних чисел N, то її називають ***зчисленною*** і кажуть, що вона має *зчисленну кількість елементів,* або ***зчисленну потужність.***

Елементи зчисленної множини можна занумерувати всіма натуральними числами, тобто множину A можна записати у вигляді $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, де елементи x_k попарно різні.

Приклад 7. [2, с. 14] Зчисленними є множини N – натуральних чисел, Z – цілих чисел, Q – раціональних чисел.

6°. Поняття та їх властивості, за рахунок яких відбувається розширення даної теми у вузівському курсі математики.

Під час навчання теми «Множини, операції над множинами» у шкільному курсі алгебри і початків аналізу 10 класу, на профільному рівні, учень має навчитись ***зображати*** на діаграмах або числовій прямій *об'єднання* і *переріз множин* та ***ілюструвати*** поняття підмножини. Вивчаючи цю тему учень також повинен вміти ***формулювати*** означення підмножини, об'єднання і перерізу множин; ***знаходити*** об'єднання і переріз числових множин.

Виклад теоретичного матеріалу у діючих шкільних підручниках курсу алгебри і початків аналізу 10 класу, серед яких підручники Мерзляка А. Г. та ін. [3.27] та Неліна Є. П. [3.28] дещо відрізняється. У підручнику [3.28] вводяться поняття *різниця множин, доповнення множини, універсальна множина U, доповнення множини до універсальної множини.*

У вузівському курсі крім цього вивчаються **основні властивості операцій *об'єднання, перерізу, доповнення***.

Нехай U – деяка універсальна множина, $P(U)$ – множина всіх її підмножин. Операції об'єднання, перерізу й доповнення над елементами з $P(U)$ мають такі властивості:

1. $(A')' = A'' = A$ – закон подвійного доповнення.
2. $\left.\begin{array}{l} A \bigcup B = B \bigcup A \\ A \bigcap B = B \bigcap A \end{array}\right\}$ – переставна (комутативна) властивість.
3. $\left.\begin{array}{l} (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C) \\ (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C) \end{array}\right\}$ – сполучна (асоціативна) властивість.
4. $\left.\begin{array}{l} A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C) \\ A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C) \end{array}\right\}$ – розподільна (дистрибутивна) властивість.
5. $\left.\begin{array}{l} (A \bigcup B)' = A' \bigcap B' \\ (A \bigcap B)' = A' \bigcup B' \end{array}\right\}$ – закони де Моргана.
6. $A \bigcup A' = U$. 7. $A \bigcup \varnothing = A$. 8. $A \bigcup A = A$.
9. $A \bigcap \varnothing = \varnothing$. 10. $A \bigcap A = A$.

Властивості 2, 6-9 випливають безпосередньо з означень. Справедливість властивостей 3-5 доводять методом подвійного включення [6, с. 13–14].

Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

1°. Підберіть систему задач призначену для засвоєння теми «Множини і відношення між ними». У якості прикладів візьміть множини зі шкільної математики. Які завдання відмінні від завдань діючих шкільних підручників слід включити до неї? У чому особливості цих нетипових завдань?

2. Виокремте типи задач, призначених для навчання теми «Операції над множинами». З'ясуйте, чи всі типи задач вузівського курсу математики, пов'язані з цією темою, розглядають в школі. Якщо ні, то запропонуйте приклади таких задач та методику навчання їх розв'язування.

3. Підберіть приклади окремих задач ШКМ під час розв'язування яких, явно чи неявно, використовується поняття декартового добутку множин. Запропонуйте методику навчання учнів їх розв'язування.

4°. Згадайте означення відповідності між елементами двох множин через декартів добуток множин, наочні способи подання відповідностей, образи і прообрази елементів і множин. На окремих прикладах продемонструйте застосування цього матеріалу у ШКМ.

5°. Згадайте означення відношення. Наведіть приклади основних відповідностей і відношень, які мають місце у шкільному курсі математики. Розгляньте властивості цих відношень.

Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

Відповідь на завдання 2. До системи задач, призначених для навчання в курсі алгебри і початків аналізу теми «Операції над множинами» відносяться такі типи задач: а) задачі на знаходження об'єднання та перетину множин, заданих описово, або за допомогою характеристичної властивості; б) задачі на знаходження різниці множин; в) текстові задачі на знаходження числа елементів об'єднання 2-х або 3-х множин; г) визначення множин між якими встановлено взаємно-однозначну відповідність та ін. У вузівському курсі математики цю систему задач доповнюють задачі інших типів, серед яких задачі на доведення рівностей *методом подвійного включення* та задачі, розв'язування яких передбачає використання внутрішньопредметних зв'язків.

Представимо деякі з них.

Задача 1. [7, с. 9, № 17 (1,5)]. Довести дані твердження або показати, що вони є неправильними: 1) $A \bigcup B = A \bigcup (B / A)$; 5) $A \bigcup (B / C) = (A \bigcup B) / C$.

Для доведення таких тверджень використовується метод подвійного включення.

Задача 2. [7, с. 9, № 16 (1-4)]. Нехай $A = \{x : f(x) = 0\}$, $B = \{x : \varphi(x) = 0\}$. Як виразити через ці множини множину розв'язків:

1) рівняння $f(x)/\varphi(x) = 0$; 2) системи $\begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) = 0; \end{cases}$

3) рівняння $f(x)\varphi(x) = 0$ 4) рівняння $f(x)/(f^2(x) + \varphi^2(x)) = 0$?

Відповідь на завдання 3.

Задача 3. [1, с. 36 № 3.7]. Складіть всі дроби, чисельниками яких є числа з множини $M = \{2, 3, 4\}$, а знаменниками – числа з множини $K = \{5, 7\}$.

Розв'язання. Розглядаючи дріб як упорядковану пару чисел (чисельник, знаменник), дістанемо дроби – елементи декартового добутку множин M і K: $M \times K = \{(2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,5), (4,7)\}$ або $M \times K = \left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}\right\}$. Кількість дробів дорівнює $n\,(M \times K) = n(M) \cdot n(K) = 3 \cdot 2 = 6$.

Відповідь на завдання 4 [6, §1.3, п. 1.3.1-1.3.4].

Відповідь на завдання 5 [6, §1.3, п. 1.3.8-1.3.10].

Основні відповідності і відношення у шкільному курсі математики та їх властивості.

Різні відповідності і відношення вивчаються у шкільному курсі математики. Розглянемо найбільш важливі з них.

Під час вивчення поняття множини найбільш важливими є відповідність *належності* «елемент a належить множині A», $a \in A$ і відношення *включення* «множина X є підмножиною множини Y», $X \subset Y$. Перерізом відношення включення і оберненого до нього відношення є відношення *рівності* множин (якщо $X \subset Y$ і $Y \subset X$, то $X = Y$).

У будь-якій множині, що вивчається в школі, визначено відношення *рівності елементів* і протилежне до нього відношення – *нерівності елементів.* У числових множинах відношення нерівності $x \neq y$ є об'єднанням відношень порядку $x < y$ і $x > y$ (якщо $x \neq y$, то $x < y$ або $x > y$), які взаємно обернені і несумісні, тобто не можуть виконуватися одночасно. Поряд з цими відношеннями строгого порядку в числових множинах розглядаються відношення і нестрогого порядку $x \leq y$ і $x \geq y$.

У множині натуральних чисел визначений ряд відношень, які не мають місця у довільних числових множинах: *відношення подільності* $x \vdots y$ (x ділиться на y), «*взаємної простоти*» x взаємно просте з y.

Образом числа x при відношенні подільності є сукупність дільників цього числа, а повним прообразом числа y при цьому ж відношенні сукупність всіх кратних цього числа. Відношення *подільності* має властивості антисиметричності та транзитивності і тому є відношенням нестрогого порядку.

Багато прикладів відповідностей і відношень дає геометрія. На множині всіх геометричних фігур визначені відношення *рівності* та *подібності*. Обидва ці відношення є відношеннями еквівалентності. Між множиною X точок і множиною Y геометричних фігур має місце відношення *належності* і протилежне йому відношення *неналежності*.

Між множиною прямих та множиною площин у просторі існують *відповідності* «перетинає», «паралельна», «перпендикулярна».

Завдання. У наступній таблиці 1 представлено ряд відношень, що мають місце у ШКМ. Які властивості мають ці відношення? Заповніть таблицю.

Таблиця 1

Множина	Відношення	Рефлексивність	Симетричність	Асиметричність	Антисиметричність	Транзитивність	Зв'язність
М – довільна	$a = b$						
М – довільна	$a \neq b$						
N	$a \vdots b$						
R	$a > b$						
R	$a \geq b$						
R	$a < b$						
R	$a \leq b$						
Прямі	$a \parallel b$						
Прямі	$a \perp b$						
Площини	$\alpha \parallel \beta$						
Площини	$\alpha \perp \beta$						
Кола	Дотик						
Кола	Концентричність						

Відношення еквівалентності у арифметиці та алгебрі. Багато з відношень, які розглядались у попередньому пункті відносяться до відношень еквівалентності (рівність та подібність геометричних фігур, паралельність прямих, концентричність кіл).

Відношення «вираз x має те ж числове значення, що і вираз y» у множині числових виразів є відношенням *еквівалентності*. Воно визначає розбиття всієї множини числових виразів на класи еквівалентності, які складаються з виразів, що мають одне й те ж числове значення.

Два вирази зі змінними називаються *тотожно рівними*, якщо при будь-яких значеннях змінних відповідні значення цих виразів дорівнюють один одному. Відношення *тотожної рівності* є еквівалентністю.

Поняття еквівалентності відіграє важливу роль під час розв’язування рівнянь та нерівностей. Два рівняння називаються *рівносильними,* якщо множини їх розв’язків збігаються. Цим визначається розбиття всієї множини рівнянь на класи еквівалентності. Під час розв’язування рівнянь переходять від одного рівняння до більш простого еквівалентного йому рівняння. Цей процес завершується одержанням рівняння виду $x = a$ або диз’юнкції таких рівнянь. Аналогічно розв’язуються нерівності.

Література

1. Боровик В. Н., Зайченко І. В., Рудник А. В. Математика. Практикум. Частина 1. Навчальний посібник. Чернігів, 2003. 126 с.
2. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. Київ : Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
3. Жоль К. К. Вступ до сучасної логіки : навч. посібник для студ. гуманітарних спец.вищ. навч. закладів. Київ : Либідь, 2002. 151 с.
4. Калужнин Л. А. Элементы теории множеств и математической логики в школьном курсе математики. Москва : Просвещение, 1978. 86 с.
5. Колягин Ю. М., Луканкин Л. Г. Основные понятия современного школьного курса математики. Пособие для учителей. Под ред. А.И. Маркушевича. Москва : Просвещение, 1974. 382 с.
6. Курс математики : Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.
7. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч. : Навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. Київ : Вища шк., 2002. Ч. 1. 462 с.
8. Рыбников К. А. История математики. Ч. 2. Москва : Изд.-во Московского ун.-та, 1963. 336 с.
9. Современные основы школьного курса математики : Пособие для студентов пед. ин-тов / Н. Я. Виленкин, К. И. Дудничев, Л. А. Калужин, А. А. Столяр. Москва : Просвещение, 1980. 240 с.
10. Шунда Н. М., Томусяк А. А., Войцеховський А. П. Вступний курс математики : Навч. посібник. Київ : Вища шк., 1990. 152 с.

Тема 3. Логічна структура арифметики та її навчання. Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел

Мета навчання: визначити місце та роль фундаментальних математичних понять (множина, взаємно однозначна відповідність, відрізок N_m натурального ряду, лічба елементів, відношення еквівалентності, відношення $(')$ «безпосередньо йде за», відношення порядку, класи еквівалентних множин, кількісне (кардинальне) натуральне число, потужність множини, операції над множинами, порядкове натуральне число, алгебраїчна операція, бінарна операція, числове кільце, числове поле та ін.) у змістовій лінії «Числа» курсу математики основної школи, сприяти усвідомленню студентами теоретико-множинного та аксіоматичного підходів у викладі теоретичного матеріалу згаданої змістової лінії, вчити здійснювати порівняльний аналіз означень понять, вивчення властивостей, доведення законів шкільного курсу з загальнонауковими.

Завдання.

1) Провести аналіз Державного стандарту базової та повної середньої освіти (освітня галузь «Математика»), навчальних програм з математики для початкової та основної школи, визначити місце натуральних чисел і понять пов'язаних з ними.

2) Дослідити виникнення і розвиток арифметики в історії математики.

3) Навести приклади арифметичних понять, які зустрічаються в курсі математики початкової та основної школи. Пригадати, як вони вводяться у шкільному курсі.

4) Повторити суть *теоретико-множинного* та *аксіоматичного підходів* до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел (ЦНЧ), викладених в курсі математики для студентів педагогічних навчальних закладів [4] та в курсі «Числові системи» [2].

5) Зробити порівняльний аналіз викладу теоретичного матеріалу, пов'язаного з натуральними та цілими невід'ємними числами в курсі математики початкової, основної школи з загальнонауковими. З'ясувати, який підхід (теоретико-множинний чи аксіоматичний) взято за основу у ШКМ.

6) З'ясувати, які відмінності існують у введенні арифметичних понять в шкільному та вузівському курсах математики. Навести приклади.

7) З теми «Системи числення» курсу математики [4] повторити питання: запис чисел у десятковій системі числення; алгоритми арифметичних операцій над ЦНЧ у десятковій системі числення. Знайти обґрунтування алгоритмам виконання дій у стовпчик, які розглядаються в курсі математики початкової школи та в курсі математики основної школи. Проілюструвати це на прикладах.

8) Повторити зміст фундаментальних математичних понять *алгебраїчна структура, бінарна операція, $n-$місна (-арна) операція, група, числове кільце, числове поле.* Пригадати, які основні алгебраїчні операції, пов'язані з числами, вивчаються в курсі математики основної школи. В чому відмінність у вивченні цих операцій у шкільному та вузівському курсах?

9) Повторити основні закони додавання та множення, їх обґрунтування у ШКМ та доведення у теоретико-множинній та аксіоматичній теорії ЦНЧ. З'ясувати, які правила з них випливають. Навести приклади.

10) Пригадати, які питання теорії подільності вивчаються в курсі математики 6 класу. З'ясувати в чому полягає відмінність вивчення цих питань у шкільному та вузівському курсах. Навести приклади, пов'язані з введенням понять, вивченням властивостей, ознак.

Змістова структура теми

№	***Структурні елементи змісту***	***Де знайти відповідь***
1	Розвиток арифметики в історії математики. Основні поняття арифметики.	[1], [4], [4.1]
2	Місце теми в програмах для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 1-4 класи. Математика 5-9 класи. Вимоги до математичної підготовки учнів.	[2.2], [2.3]
3	Основні напрями повторення, систематизації, поглиблення уточнення і розширення відомостей про натуральні числа в курсі математики 5-6 класів.	[7], [8], [3.2] – [3.8]
4	Особливості та відмінності у формуванні поняття про число, читанні та записуванні багатоцифрових чисел, зображенні натуральних чисел на координатному промені, порівнянні натуральних чисел на різних ступенях навчання (курс математики початкової школи, курс математики 5-6 класів, вузівський курс математики).	[7], [8], [3.1] –[3.8], [4]
5	Теоретико-множинний та аксіоматичний підходи до побудови арифметики цілих невід'ємних чисел. Їх застосування в курсі математики початкової та основної школи.	[2] – [4], [3.1] – [3.6]
6	Алгебраїчні основи змістової лінії «Числа». Основні алгебраїчні операції шкільного курсу математики. Різні підходи до вивчення їх основних властивостей. Формування обчислювальних навичок.	[2] – [4], [3.1] – [3.6]
7	Подільність натуральних чисел. Властивості та ознаки. Найбільший спільний дільник (НСД) та найменше спільне кратне (НСК). Спільне та відмінне у вивченні цього матеріалу у шкільному та вузівському курсах математики.	[4], [3.7], [3.8]

Контрольно-смислові запитання і завдання репродуктивного характеру (перша змістова самооцінка)

1. Згадайте історичне походження слова «арифметика». Що є предметом вивчення науки арифметика?

2°. Наведіть приклади арифметичних понять, які зустрічаються в курсі математики початкової та основної школи.

3. Згадайте два напрями розвитку поняття про натуральне число. До появи яких теорій вони привели?

4°. Проаналізуйте, як вводиться поняття «натуральне число» в курсі математики початкової школи та в курсі математики 5 класу. Розгляньте ілюстрації та записи, які представлені у підручнику з математики для 1 класу, де вивчається число «3». Поясніть які з них представлені з метою розкрити учням *порядкове* та *кількісне значення* числа «3».

5. Наведіть приклади завдань з діючих підручників з математики для 5 класу, в яких натуральні числа виступають як: а) кількісні; б) порядкові; в) міра величини; г) компонент обчислень.

6°. Згадайте суть аксіоматичного методу, систему аксіом Пеано. В чому полягає *принцип математичної індукції?* З яких частин складається доведення методом *математичної індукції?*

7°. Повторіть зміст фундаментальних математичних понять *алгебраїчна структура, бінарна операція, $n-$місна (-арна) операція, група, числове кільце, числове поле.*

8. Які з операцій є бінарними алгебраїчними?

А	Б	В	Г	Д
додавання натуральних чисел	ділення цілих чисел	віднімання цілих чисел	множення натуральних чисел	віднімання на множині натуральних чисел

9. Які з множин є групами?

А	Б	В	Г	Д
$(Z,+)$	$(N,+)$	$(N,\cdot)$	$(Q,+)$	$(R,+)$

Відповіді та вказівки до контрольно-смислових запитань та завдань репродуктивного характеру

1. **[4.1, с. 35-36] Арифметика** – наука про числа й операції над ними. Вивчає кількісні відношення реального світу. Її основою є вчення про *натуральні* і *раціональні додатні* числа та правила виконання дій над ними. На початковому ступені навчання А. вивчає множину натуральних чисел $\boldsymbol{N}$, потім множину додатних раціональних чисел $\boldsymbol{Q}_+$, множину цілих чисел $\boldsymbol{Z}$. Наступним розширенням є множини $Q \subset R \subset C$. Арифметика в своїх вищих розділах вивчає структури порядку і структури алгебраїчні (кільця, поля, групи, векторні простори тощо), тобто вона зливається вже з алгеброю.

2. [2.2], [2.3], [7, Т 1.1], [8, Р10, §10.1].

3. [4, Р3, §3.1]. Перший напрямок – через безпосереднє встановлення взаємно однозначної відповідності між скінченними множинами. Він привів до поняття натурального числа як кількісної характеристики певного класу скінченних множин. При цьому натуральне число називають ***кількісним*** або ***кардинальним.***

Другий напрямок розвитку поняття натурального числа пов'язано з визначенням за допомогою натурального числа місця знаходження елементів будь-якої зчисленної впорядкованої множини. Він привів до поняття ***порядкового натурального числа.***

Відповідно до двох функцій натурального числа існує *теоретико-множинна (кількісна)* та *порядкова (аксіоматична) теорія.*

5. а) [3.3, с. 8, № 15]. На одній ділянці ростуть 34 кущі смородини, а на другій – на 18 кущів менше. Скільки всього кущів смородини росте на двох ділянках?

б) [3.2, с. 16, № 65]. Учень виписав кілька послідовних натуральних чисел у порядку зростання. Число 27 сьоме, рахуючи як з одного так і з іншого боку. Скільки чисел виписав учень? Яке з них найменше, а яке – найбільше?

в) [3.2, с. 34, № 166]. Швидкість катера за течією 25 *км/год*, а власна швидкість катера 20 *км/год.* На скільки швидкість катера за течією більша за швидкість катера проти течії?

г) [3.2, с. 26, № 120.4]. Обчислити найзручнішим способом: 34+35+36+37+38.

6°. [4, Р3, §3.3].

7°. [3, Р IV, §10-13], [5, Р10, §40].

Методичні завдання реконструктивного та творчого характеру (для самостійної роботи)

Завдання 1. Оберіть правильні відповіді.

1. Натуральне число може бути:

А	Б	В	Г	Д
від'ємним	порядковим	дробовим	кількісним	раціональним

2. Серед наведених множин виберіть рівнопотужні.

А	множина материків
Б	множина океанів
В	множина літер слова «математика»
Г	множина діагоналей шестикутника
Д	множина парних чисел, серед перших десяти чисел натурального ряду чисел

3. Нехай $a = n(A),\ b = n(B)$. Число a менше від числа b $(a < b)$ тоді і тільки тоді коли:

А	**Б**	**В**	**Г**
$A \sim B_1$, де $B_1 \subset B$ і $B_1 \neq B,\ B_1 = \varnothing$	$A \sim B_1$, де $B_1 \subset B$ і $B_1 \neq B,\ B_1 \neq \varnothing$	$A \sim B$	$A \sim B_1$, де $B_1 \neq B,\ B_1 = \varnothing$

4. Нехай A і B – дві скінченні множини, $A \cap B = \varnothing$, $n\,(A) = a,\ n\,(B) = b$. ***Сумою*** цілих невід'ємних чисел a і b називають ціле невід'ємне число $c = a + b$, яке визначає:

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$n\,(A / B)$	$n\,(A \cup B)$	$n\,(A \times B)$	$n\,(\overline{B_A})$	$n\,(A \cap B)$

5. Яке з тверджень є **неправильним** для цілих невід'ємних чисел (ЦНЧ)?

А	Добуток ЦНЧ існує і єдиний
Б	Різниця ЦНЧ існує і завжди
В	Якщо ділення двох ЦНЧ можливе, то їхня частка єдина
Г	Ділення неасоціативне
Д	Сума ЦНЧ існує і єдина

6. ***Додаванням*** цілих невід'ємних чисел називається така **бінарна операція**, яка кожній упорядкованій парі чисел (x, y) ставить у відповідність суму чисел $(x + y) \in N_0$ і задовольняє аксіоми:

А	**Б**	**В**	**Г**
$(\forall x, y \in N_0)$ $(x + y \neq x)$	$(\forall x, y \in N_0)$ $(x + y = y + x)$	$(\forall x \in N_0)$ $(x + 0 = x)$	$(\forall x, y \in N_0)$ $(x + y' = (x + y)')$

Завдання 2. З'ясуйте як вводяться та обґрунтовуються *операції* (*дії*) над числами на різних ступенях навчання (початкова школа, основна школа) у діючих шкільних підручниках. Який підхід (*теоретико-множинний* чи *аксіоматичний*) покладено в основу обґрунтування дій? Продемонструйте це на прикладах дій додавання, віднімання, множення ділення. За рахунок чого відбувається спрощення у викладі матеріалу, обґрунтуйте.

Завдання 3°. [4, с. 128]. Розгляньте як використовується *метод математичної індукції* для доведення асоціативного (сполучного) закону: $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$, де a, b, c – цілі, невід'ємні числа.

Завдання 4. Оберіть правильні відповіді.

1. Відношення ***подільності*** на множині ЦНЧ має властивості:

А	Б	В	Г	Д
рефлексив-ності	антисиметрич-ності	антирефлексив-ності	асиметрич-ності	транзитив-ності

2. Вкажіть істинні твердження.

А	Якщо кожний доданок ділиться на натуральне число n, то й їхня сума ділиться на це число
Б	Якщо сума ділиться на деяке число n, то й кожний доданок її ділиться на це число
В	Якщо різниця ділиться на деяке число n, то й зменшуване і від'ємник діляться на це число
Г	Якщо один з множників ділиться на натуральне число n, то й добуток ділиться на це число
Д	Якщо добуток ділиться на натуральне число n, то принаймні один з множників ділиться на число n

3. Якщо $a<b$, то:

А	Б	В	Г	Д
$НСД(a,b)>b$	$НСД(a,b)\le a$	$НСД(a,b)=a$	$НСД(a,b)>b$	$НСД(a,b)=b$

4. Для того щоб натуральне число ділилось на складене число $n=b\cdot c$, де $НСД(a,b)=1$, необхідно і достатньо, щоб воно ділилось на:

А	Б	В	Г
b	c	b і c	b або c

Завдання 5. Пригадайте, які ознаки подільності вивчаються в курсі математики 6 класу. Як відбувається їх вивчення? Чому обмежуються лише прикладами та формулюваннями? Що необхідно для строгого обґрунтування цих ознак? Продемонструйте це на прикладі окремої ознаки.

Зразки відповідей та вказівки до завдань реконструктивного і творчого характеру

Відповідь на завдання 2 *(на прикладі дії додавання)***.**

Розпочнемо з аналізу підручника для **4 класу** [3.1, с. 174]. Бачимо, що автори для пояснення використовують таку **проблемну ситуацію**: «Розглянемо таку *подію*: білі та червоні троянди об'єднали у букет. У цьому разі відбулося *об'єднання двох множин* в одну *нову множину*, яку називають **сумою даних множин**. Ще в давні часи перед людиною постало питання, як передбачити чисельність суми двох чи кількох множин, якщо відомі чисельності множин-доданків. Тепер ми знаємо, що ця задача розв'язується дією ***додавання***».

Висновок очевидний: у нових підручниках для початкової школи використовується теоретико-множинний підхід для обґрунтування дії додавання.

Систематизуючи властивості дії додавання, стверджують: ***додавання натуральних чисел*** завжди можливе і підпорядковане **переставному закону** (*сума не змінюється від зміни місць доданків*) та **сполучному закону** (*сума не змінюється, якщо будь-яку групу доданків замінити їх сумою*).

У теоретико-множинній теорії обґрунтування цих законів відбувається на основі означення *суми* цілих невід'ємних чисел *a* і *b,* означення операції об'єднання та її властивостей.

Означення [4, с. 112]. *Сумою цілих невід'ємних чисел a і b,* що є кількісною характеристикою множин A і B, називається число елементів об'єднання цих множин, якщо вони не мають спільних елементів.

Числа *a* і *b* називаються *доданками,* а дія знаходження їх суми – *операцією додавання.*

З означення *об'єднання* двох множин A і B випливає його переставна (комутативна) властивість: $A \bigcup B = B \bigcup A$. Тому аналогічну властивість має дія додавання цнч. Справді, якщо $a = n(A)$, $b = n(B)$, то $a + b = n(A \bigcup B)$, а $b + a = n(B \bigcup A)$. Через те, що $A \bigcup B = B \bigcup A$, то $n(A \bigcup B) = n(B \bigcup A)$. Отже, $a + b = b + a$.

У шкільному курсі математики (початкова школа) для обґрунтування цих законів використовується конкретизація, тобто посилаються на окремі життєві приклади. У підручниках з математики для 5 класу відбувається повторення та систематизація матеріалу вивченого у початковій школі. Нагадують, що в рівності $a + b = c$ числа називають ***доданками***, а число c і запис $a + b$ – ***сумою*** [3.2, с. 58].

Альтернативою теоретико-множинному підходу у вузівських курсах, зокрема у курсі [4], є аксіоматичний підхід при якому ***додаванням цнч*** називається *бінарна операція*, яка кожній упорядкованій парі чисел (a, b) ставить у відповідність суму цих чисел $(a + b) \in N_0$ і задовольняє аксіоми :
5) $\forall a \in N_0$ $(a + 0 = a)$; 6) $\forall\, a, b \in N_0$ $(a + b' = (a + b)')$.

Комутативний та сполучний закони при цьому підході доводяться на основі принципу математичної індукції [4, с. 128].

Відповідь на завдання 5 (на прикладі ознаки подільності на 2 і на 5)**.**

У підручнику математики 6 класу [3.7, с. 12-13] вводиться поняття ***парної*** та ***непарної*** цифри та формулюється ознака, яка допомагає встановити парність числа: ***Якщо запис натурального числа закінчується парною цифрою, то це число ділиться на 2. Якщо запис натурального числа закінчується непарною цифрою, то це число не ділиться на 2.***

Далі дається пояснення, як серед натуральних чисел розпізнавати такі, що є кратними 5. І формулюється відповідна ознака.

У вузівському курсі математики сформульовані ознаки є наслідками з **теореми (ознаки подільності на 2 і 5)** [4, с. 159]: Для того щоб число ділилося на 2 (на 5), необхідно й достатньо, щоб на 2 (на 5) ділилося число його одиниць.

Доведення цієї теореми спирається на **достатню умову подільності суми**, яка в 6 класі не вивчається.

Під час доведення число $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0}$ записане у позиційній десятковій системі числення представляють у вигляді суми розрядних одиниць, яку розбивають на два доданки: $a = (a_n 10^n + ... + a_1 10) + a_0$. Оскільки перший доданок ділиться і на 2 і на 5, то щоб сума ділилася на 2 або на 5, необхідно й достатньо, щоб і другий доданок a_0 ділився відповідно на 2 або на 5.

У зв'язку з відсутністю необхідної і достатньої умови подільності суми у згаданих підручниках, що обґрунтовується складністю сприймання для даної вікової групи учнів, виклад матеріалу спрощено.

Література

1. Бевз В. Г. Практикум з історії математики : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. 312 с.

2. Вивальнюк Л. М., Григоренко В. К., Левіщенко С. С. Числові системи. Київ : Вища шк. Головне вид-во, 1988. 272 с.

3. Завало С. Т. Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел, Ч. 1. Київ : Вища школа, 1974. 464 с.

4. Курс математики : Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.

5. Математика : Посібник для шк. та кл. з поглибл. вивченням математики / Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко та ін. Київ : Освіта, 1998. 301 с.

6. Музиченко С. В. та ін. Збірник тестів і комплексних контрольних робіт з математики. 1-2 курси : Посібник для студентів факультетів початкового навчання педуніверситетів / С. В. Музиченко, Л. О. Соколенко, Н. М. Стукало, Л. М. Шидловська. Чернігів : Видавництво ЧДПУ ім. Т. Г. Шевченка, 2009. 200 с.

7. Практикум з методики навчання математики. Основна школа : навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за редакцією В. О. Швеця. Київ : Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. 267 с.

8. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підручник. 2-ге вид., допов. і переробл. Київ : Вища шк., 2006. 582 с.

ЛІТЕРАТУРА

1.1. Акуленко І. А. Компетентнісно орієнтована методична підготовка майбутнього вчителя математики профільної школи (теоретичний аспект) : монографія. Черкаси : видавець Чабаненко Ю, 2013. 460 с.

1.2. Бурбаки Н. Архитектура математики (Перевод с французского Д. Н. Ленского), Матем. просв., 1960, выпуск 5, 99–112.

1.3. Елементарна математика. Навчальна програма (розроблена на основі концепції розвивальної освіти) / Укладач доцент Семенець С. П. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2008. 88 с.

1.4. Колягин Ю. М., Луканкин Л. Г. Основные понятия современного школьного курса математики. Пособие для учителей. Под ред. А. И. Маркушевича. Москва : Просвещение, 1974. 382 с.

1.5. Кугай Н. В., Бурчак С. О. Робоча програма навчальної дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики» для студентів галузі 01 Освіта. Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Глухівський національний педагогічний університет імені О. Довженка. URL: http:// www.pfm.gnpu.edu.ua.

1.6. Курс математики : Навч. посібник / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко. Київ : Вища шк., 1995. 392 с.

1.7. Мартинюк О. И. Опыт формирования компетентностной модели выпускника педагогического вуза как нормы качества и базы оценки результатов образования. URL: http:// testor.ru/files/qualimetry/3.doc.

1.8. Працьовитий М. В., Ніколаєнко С. В. «Наукові основи шкільного курсу математики» в системі підготовки сучасного вчителя математики. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі* : Зб. наукових праць. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. № 5. С. 17–24.

1.9. Раков С. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти. *Математика в школі*. 2005. № 5. С. 2–7.

1.10. Семенець С. П., Семенець Л. М. Елементарна математика : навч.-метод. посіб. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. 244 с.

1.11. Современные основы школьного курса математики : Пособие для студентов пед. ин.-тов / Виленкин Н. Я., Дудничев К. И., Калужин Л. А., Столяр А. А. Москва : Просвещение, 1980. 240 с.

1.12. Соколенко Л. О. Шкільна математика з точки зору вищої. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*. Чернігів, 2011. Вип. 83. С. 126–128.

1.13. Соколенко Л. О. Роль курсу «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» у професійній підготовці вчителя.

Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р., Київ : Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. Київ : НТУУ «КПІ», 2015. С. 249–252.

1.14. Соколенко Л. О. Роль наукових основ шкільного курсу математики у професійній підготовці вчителя. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*. Чернігів, 2015. Вип. 130. С. 214–219.

1.15. Соколенко Л. О. Технологія навчання теоретичних основ теми «Розширення поняття про число». *Збірник наукових праць «Педагогічні науки» Херсонського державного університету*. Херсон, 2016. Вип. LXXI. Том 2. С. 135–142.

1.16. Соколенко Л. О. Роль теоретичних основ змістової лінії «Числа» у професійній підготовці вчителя математики. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія педагогічна* / редкол.: П. С. Атаманчук (голова, наук. ред.) та ін. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. Вип. 22. С. 114–117.

1.17. Соколенко Л. О. Технологія навчання теоретичних основ змістової лінії «Рівняння і нерівності». *Збірник наукових праць «Педагогічні науки» Херсонського державного університету*. Херсон, 2017. Вип. LXXIV. Том 2. С. 168–173.

1.18. Соколенко Л. О. Методика навчання наукових основ функціональної змістової лінії майбутніх вчителів математики. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. Черкаси, 2017. Вип. 11. С. 77–87.

1.19. Соколенко Л. О. Досвід формування спеціальних компетентностей під час навчання дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики». *Науковий часопис національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи.* Випуск 61. Збірник наукових праць / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М.П.Драгоманова. Київ : Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2018. С. 264–269.

1.20. Соколенко Л. О. «Наукові основи шкільного курсу математики» як невід'ємна складова частина професійної підготовки сучасного вчителя. *Науковий часопис національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи.* Випуск 62. Збірник наукових праць / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М.П. Драгоманова. Київ : Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2018. С. 188–193.

1.21. Соколенко Л. О. Про застосування теорії прямої до розв'язування задач шкільного курсу геометрії. *Сучасна освіта в контексті нової української школи* : зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11-12 жовтня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області. Чернівці, 2018. С. 153–156.

1.22. Тарасенкова Н. А., Кірман В. К. Зміст і структура математичної компетентності учнів загальноосвітніх навчальних закладів. *Математика в школі*. 2008. № 6. С. 3–9.

1.23. Таточенко В. І. Програма спецкурсу «Наукові основи шкільного курсу математики» для магістрів. Херсонський державний університет. URL: http://dls.ksu.kherson.ua

1.24. Теплицька А. О. Професійна підготовка майбутнього вчителя математики як об’єкт теоретичного аналізу. *Наукові праці Чорноморського державного університету імені Петра Могили комплексу «Києво-Могилянська академія». Серія : Педагогіка*. 2016. Т. 269. Вип. 257. С. 125–130.

Навчальні програми з математики

2.1. Державний стандарт базової та повної загальної середньої освіти. *Математика в школі*. 2012. № 3. С. 2–8.

2.2. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 1–4 класи / Укл. Оноприєнко О. В., Скворцова С. О., Листопад Н. П., 2011. URL: www.mon.gov.ua.

2.3. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. Затверджено Міністерством освіти і науки України. 2017. URL: www.mon.gov.ua.

2.4. Навчальна програма для поглибленого вивченням математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. 2017. URL: www.mon.gov.ua.

2.5. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. *Математика в рідній школі*. 2017. № 10. С. 2–10.

2.6. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: https:mon.gov.ua/…programi/navchalni-programi-dlya–10-11…2018

2.7. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики). URL: https:mon.gov.ua/…programi/navchalni-programi-dlya–10-11…2018

Шкільні підручники

3.1. Богданович М. В., Лищенко Г. П. Математика : підруч. для 4 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ : Генеза, **2015**. 176 с.

3.2. Істер О. С. Математика : підруч. для 5-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, **2013**. 368 с.

3.3. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика : підруч. для 5 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, **2013**. 352 с.

3.4. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика. 5 клас : підруч. для закладів загальної середньої освіти. Вид. 2-ге доопрац. відповідно до чинної навч. програми. Харків : Гімназія, **2018**. 272 с.

3.5. Тарасенкова Н. А. Математика : підруч. для 5-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2013**. 352 с.

3.6. Тарасенкова Н. А. Математика. 5 кл. : підруч. для закладів загальної середньої освіти / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2018**. 240 с.

3.7. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика : підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, **2014**. 400 с.

3.8. Тарасенкова Н. А. Математика : підруч. для 6-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2014**. 304 с.

3.9. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. для **7 класу** загальноосвіт. навч. закл. Київ : Видавництво «Відродження», **2015**. 288 с.

3.10. Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. Алгебра : підручник для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2014. 224 с.

3.11. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2015. 256 с.

3.12. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.

3.13. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. для **8 класу** загальноосвіт. навч. закл. Харків : ФОЛІО, 2016. 256 с.

3.14. Кравчук В. Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. 256 с.

3.15. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. Харків : Гімназія, 2016. 240 с.

3.16. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручн. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. Харків : Гімназія, **2016**. 384 с.

3.17. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : УОВЦ «Оріон», 2016. 336 с.

3.18. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. для **9 кл.** загальноосвіт. навч. закл. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2017**. 272 с.

3.19. Кравчук В. Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. 264 с.

3.20. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 272 с.

3.21. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.

3.22. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. Київ : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.

3.23. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. для **10 кл.** загальноосвіт. навчальн. закладів: профільний рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, **2010**. 416 с.

3.24. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для **10 кл**. загальноосвіт. навчальн. закладів: профільний рівень. Харків : Гімназія, **2010**. 416 с.

3.25. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», **2018**. 336 с.

3.26. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для **10 кл.** закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, **2018**. 400 с.

3.27. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для **10 кл.** закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, **2018**. 512 с.

3.28. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для **10 кл.** закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», **2018.** 272 с.

3.29. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2011. 431 с.

3.30. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень. Харків : Гімназія, 2011. 448 с.

3.31. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2011. Ч. 1. 256 с.

3.32. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2011. Ч. 2. 272 с.

3.33. Істер О. С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу: (профіл. рівень) : підруч. для **11**-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, **2019**. 416 с.

3.34. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для **11 кл.** закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків : Гімназія, **2019**. 352 с.

3.35. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для **11 кл.** закладів загальної середньої освіти. Харків : Вид-во «Ранок», **2019**. 240 с.

Математичні Енциклопедії, словники

4.1. Математика в поняттях, означеннях і термінах : В 2-х ч. : Ч. 1 / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. І. Соркін, М. Г. Федін. Київ : Рад.шк., 1986. 383 с.

4.2. Математика в поняттях, означеннях і термінах : В 2-х ч. : Ч. 2 / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. І. Соркін, М. Г. Федін. Київ : Рад.шк., 1986. 360 с.

4.3. Математическая Энциклопедия. Ред. коллегия : И. М. Виноградов (глав. ред.) и. др. Т. 1 – Москва : «Советская Энциклопедия», 1977. **Т 1. А-Г.** 1977. 1152 стб. с илл.

4.4. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, **Т2 Д-Коо.** Москва : «Советская Энциклопедия», 1979. 1104 стб. с илл.

4.5. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, **Т3 Коо-Од.** Москва : «Советская Энциклопедия», 1982. 1184 стб., ил.

4.6. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, **Т4 Ок-Сло.** Москва : «Советская Энциклопедия», 1984. 1216 стб., ил.

4.7. Математическая Энциклопедия : Гл. ред. И. М. Виноградов, **Т5 Слу-Я**. Москва : «Советская Энциклопедия», 1984. 1248 стб., ил.

4.8. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. – Москва : Педагогика. 1985. 352 с.

Соколенко Л. О. НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ : Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1.

Навчально-методичний посібник містить модульну програму навчальної дисципліни «Наукові основи шкільного курсу математики», та методичне забезпечення до її реалізації.

У посібнику представлений матеріал для проведення лекційних та практичних занять з «НОШКМ», на яких основні змістові лінії шкільного курсу математики розглядаються з точки зору вищої математики. Розкриті роль і місце найважливіших понять сучасної математики в шкільному курсі, здійснено порівняльний аналіз ключових математичних понять шкільного курсу та їх властивостей з загальнонауковими.

Для проведення тематичних занять розроблені контрольно-смислові запитання та завдання репродуктивного, реконструктивного та творчого характеру. Відповіді на окремі запитання і завдання представлені у даному посібнику. Частина 1 містить матеріал по змістових модулях № 1, № 2.

Посібник призначений для студентів університетів, спеціальності 014 Середня освіта (Математика), вчителів та викладачів математики.

Liliya SOKOLENKO. SCEENTIFIC FOUNDATIONS OF THE SCHOOL COURCE OF MATHEMATICS : Teaching aid for universities students of the speciality 014 Secondary Education (Mathematics). Part 1.

Teaching aid contains a modular program of the discipline "Scientific fundamentals of the school course of mathematics", and methodical support for its implementation.

The aid provides material for lectures and practical classes at SFSCM, in which the main content lines of the school mathematics course are considered from the point of higher mathematics. In the school course are revealed the role and place of the most important concepts of modern mathematics, the comparative analysis is made of the key mathematical concepts of the school course and their properties with the general scientific.

For the purpose of thematic classes, were developed control and semantic questions and tasks of reproductive, reconstructive and creative character. Answers to specific questions and tasks are presented in this aid. Part 1 contains material for content modules №1, № 2.

The aid is intended for universities students, specialty 014 Secondary education (Mathematics), teachers and lecturers of mathematics.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Соколенко Лілія Олександрівна

НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник

Частина 1

Технічний редактор ***О. М. Єрмоленко***

Верстка та макетування ***О. І. Полковник***

Комп'ютерний набір ***Л. О. Соколенко***

Підписано до друку 15.01.2020 р. Формат 60×84 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 8,37. Обл.-вид. арк. 8,99.
Зам. № 0006. Наклад 100 прим.

Віддруковано ТОВ «Видавництво «Десна Поліграф»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК №4079 від 1 червня 2011 року

14035, м. Чернігів, вул. Станіславського, 40
Тел. (0462) 972-664