УДК 517.946

Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными

Я. А. Ройтберг

В работах [1, 2] было введено понятие нормальных систем граничных условий и доказана формула Грина. Это позволило в работах [2—11] (см. также [12, 13]) подробно изучить граничные задачи для эллиптических уравнений, доказать в различных пространствах теоремы о гомеоморфизмах, порожденных этими задачами. В работах [1—11] предполагается, что граничные условия нормальны. Между тем хорошо известно, что нетеровость эллиптических задач имеет место без предположения о нормальности граничных условий. Поэтому естественно возникает задача об установлении теорем о гомеоморфизмах без предположения о нормальности граничных выражений *.

В данной работе мы выводим формулу Грина, затем с ее помощью уточняем условия разрешимости общих эллиптических граничных задач, доказываем теорему о полном наборе гомеоморфизмов. При этом условие нормальности граничных выражений не предполагается. Основное внимание уделено выводу формулы Грина, остальные результаты в основном лишь формулируются.

1. Пусть G — ограниченная область пространства E_n, Γ— ее граница. В $\overline{G} = G \cup \Gamma$ задано правильно эллиптическое дифференциальное выражение

$$L = \sum_{|\mu| \leqslant 2m} a_\mu(x) D^\mu \tag{1}$$

$$\left(x = (x_1, \ldots, x_n); \quad D^\mu = D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}; \qquad D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad |\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n \right)$$

с комплексными коэффициентами, а на Γ — система m дифференциальных выражений

$$B_j = B_j(x, D) = \sum_{|\mu| \leqslant m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu \qquad (j = 1, \ldots, m;\ m_j \leqslant 2m - 1), \tag{2}$$

накрывающих L; *условие нормальности выражений* (2) *не предполагается.*

Отметим, что лишь для простоты считаем выражения (2) дифференциальными. Все результаты справедливы также, если $\{B_j\}$ — псевдодифференциальные [14] операторы на Γ порядков $m_j \leqslant 2m - 1$. Для простоты будем также предполагать, что коэффициенты всех дифференциальных выражений и поверхность Γ бесконечно гладкие.

* Эту задачу формулировали в беседах с авторам Ю. М. Березанский и М. И. Вишик, она поставлена также Мадженесом в [12].

Для произвольного граничного выражения $B(x, D) = \sum_{|\mu| \leqslant t} b_{j\mu}(x) D^{\mu}$ обозначим через $B_0(x, \xi) = \sum_{|\mu|=t} b_{\mu}(x) \xi^{\mu}$ характеристический полином этого выражения. Положим также $B(\eta) = B(x, \eta) = B_0(x, \tau + \eta\nu)$ $(x \in \Gamma)$, где $\tau \neq 0$ — любой вещественный вектор, касательный к Γ в точке x, а ν — орт внутренней нормали в этой точке.

Из наших предположений следует, конечно, что в каждой точке $x \in \Gamma$ для каждого $\tau \neq 0$ полиномы $\{B_j(\eta)\}_{j=1}^{m}$ линейно независимы. Предположим, что выражения (2) можно дополнить выражениями

$$C_j(x, D) = \sum_{|\mu| \leqslant l_j} c_{j\mu}(x) D^{\mu} \quad (x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, m;\ l_j \leqslant 2m - 1) \tag{3}$$

так, чтобы в каждой точке $x \in \Gamma$ для каждого $\tau \neq 0$ полиномы $\{B_j(\eta),\ C_j(\eta)\}_{j=1}^{m}$ были линейно независимыми. Положим

$$\hat{B}_j(x, D) = \begin{cases} B_j(x, D) & (j = 1, \ldots, m); \\ C_{j-m}(x, D) & (j = m + 1, \ldots, 2m), \end{cases} \tag{4}$$

порядок $\hat{m}_j$ дифференциального выражения $\hat{B}_j$ равен m_j, если $j = 1, \ldots, m$, и l_{j-m}, если $j = m + 1, \ldots, 2m$.

Пусть $x_0 \in \Gamma$. Перенесем начало координат в эту точку и пусть уравнение касательной гиперплоскости к Γ в этой точке есть $x_n = 0$. Существует окрестность U в E_n точки x_0 такая, что $\overline{G \cap U}$ можно взаимно однозначно отобразить в полушар $\overline{G}_{\delta}$: $|x| \leqslant \delta$, $x_n \geqslant 0$; при этом $\Gamma \cap U$ отображается в плоскую часть границы $\overline{G}_{\delta}$. После такого преобразования граничное выражение $\hat{B}_j(x, D)$ примет вид

$$\hat{B}_j(x, D) = \sum_{s=1}^{\hat{m}_j+1} \hat{\Gamma}_{js}(x, D') D_n^{s-1} \quad (j = 1, \ldots, 2m), \tag{5}$$

где $\hat{\Gamma}_{js}(x, D')$ — выражение в частных производных порядка $\hat{m}_j - s + 1$ по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Выражение (1) запишется в новых координатах в виде

$$L(x, D) = \sum_{|\tau| + \gamma \leqslant 2m} a_{\tau\nu}(x) D^{\tau} D_n^{\nu} \quad (\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})). \tag{6}$$

2. Изучим теперь на многообразии Γ задачу, которая порождается выражениями (4); соответствующие результаты нам понадобятся для вывода формулы Грина. Пусть

$$B(x, D) = (\Gamma_{jk}(x, D'))_{j,k=1,\ldots,2m} \quad (x \in \Gamma) \tag{7}$$

— квадратная матрица размера $2m \times 2m$ такая, что в каждой окрестности вида $\Gamma \cap U$ после ее распрямления

$$\Gamma_{jk}(x, D') = \begin{cases} \hat{\Gamma}_{jk}(x, D'), & k \leqslant \hat{m}_j + 1 \\ 0 & k > \hat{m}_j + 1 \end{cases} (k, j = 1, \ldots, 2m), \tag{8}$$

где $\hat{\Gamma}_{jk}$ — выражения, входящие в (5). Рассмотрим на Γ систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{2m} \Gamma_{jk}(x, D') \zeta_k(x) = \varphi_j(x) \quad (x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, 2m) \tag{9}$$

или в матричной форме

$$B(x, D)\,\zeta(x) = \varphi(x) \qquad (x \in \Gamma), \tag{10}$$

где $\zeta(x)$ — искомый, а $\varphi(x)$ — заданный функциональный столбец высотой $2m$. Так как в каждой точке $x \in \Gamma$ для каждого $\tau \neq 0$ полиномы $\hat{B}_j(\eta) = \sum_{s=1}^{\hat{m}_j+1} \hat{\Gamma}^0_{js}(x, \tau)\,\eta^{s-1}$ $(j = 1, \ldots, 2m)$ линейно независимы, то ранг матрицы $\{\Gamma^0_{jk}(x, \tau)\}_{j,k=1,\ldots,2m}$ равен $2m$ (здесь через $\hat{\Gamma}^0_{js}(x, D')$ обозначена сумма тех членов из $\hat{\Gamma}_{js}(x, D')$, порядок которых в точности равен $\hat{m}_j - s + 1$ (если таких членов нет, то $\hat{\Gamma}^0_{js} \equiv 0$), Γ^0_{js} определяется по $\hat{\Gamma}^0_{js}$ формулой, подобной (8)). Поэтому система (10) эллиптична на многообразии Γ в смысле Дуглиса — Ниренберга: существуют числа $t_j = 2m - j$, $s_j = \hat{m}_j + 1 - 2m$ $(j = 1, \ldots, 2m)$ такие, что в каждой окрестности вида $\Gamma \cap U$ после ее распрямления порядок $\Gamma_{jk}(x, D')$ не превосходит $s_j + t_k$, причем $\Gamma_{jk} \equiv 0$, если $s_j + t_k < 0$; при этом $\det(\Gamma^0_{jk}(x, \tau)) \neq 0$ $(x \in \Gamma,\ \tau \neq 0)$ ($\Gamma^0_{jk}(x, D')$ состоит из тех членов из $\Gamma_{jk}(x, D')$, порядок которых в точности равен $s_j + t_k$). Ясно, что на Γ будет эллиптической в смысле Дуглиса — Ниренберга также и формально сопряженная система

$$\sum_{k=1}^{2m} \Gamma^+_{kj}(x, D')\,\eta_k(x) = \psi_j(x) \qquad (x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, 2m) \tag{11}$$

(Γ^+_{kj} — выражение, формально сопряженное Γ_{kj}); запишем (11) в матричной форме:

$$B^+(x, D)\,\eta(x) = \psi(x) \qquad (x \in \Gamma). \tag{12}$$

Для любого действительного s обозначим через $B_{(s)}$ замыкание отображения

$$\zeta(x) \to B\zeta(x) \quad (\zeta \in C^{\infty, 2m}(\Gamma) = C^\infty(\Gamma) \dotplus \underset{2m}{\ldots} \dotplus C^\infty(\Gamma)), \tag{13}$$

рассматриваемого действующим из

$$\sum_{j=1}^{2m} \oplus W_2^{2m+s-j}(\Gamma) \text{ в } \sum_{j=1}^{2m} \oplus W_2^{2m+s-\hat{m}_j-1}(\Gamma). \tag{14}$$

Так как Γ — гладкое многообразие без края, то из результатов работ [14, 15] следует, что при $s \geqslant 0$ $B_{(s)}$ является нетеровским между пространствами (14); ядро $\mathfrak{N}_\Gamma$ этого оператора конечномерно и не зависит от s. Совершенно аналогично, исходя из отображения $\eta(x) \to B^+\eta(x)$ $(\eta \in C^{\infty, 2m}(\Gamma))$, определим оператор $B^+_{(s)}$, ядро $B^+_{(s)}$ $(s \geqslant 0)$ обозначим через $\mathfrak{N}^+_\Gamma$. Задача (11) с $\varphi \in \sum_{j=1}^{2m} W^{2m+s-\hat{m}_j-1}(\Gamma)$ имеет решение $\zeta(x) \in \sum_{j=1}^{2m} W_2^{2m+s-j}(\Gamma)$ $(s \geqslant 0)$ в том и только том случае, когда $\langle \varphi, \mathfrak{N}^+_\Gamma \rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} = 0$ $(L_2^{2m}(\Gamma) = L_2(\Gamma) \oplus \underset{2m}{\ldots} \oplus L_2(\Gamma))$.

Из конечномерности $\mathfrak{N}_\Gamma$ следует, что каждый элемент $\zeta \in \sum_{j=1}^{2m} W_2^{2m+s-j}(\Gamma)$ (s — любое действительное) можно представить в виде $\zeta = \zeta' + \zeta''$, $\zeta'' \in \mathfrak{N}_\Gamma$, $\langle \zeta', \mathfrak{N}_\Gamma \rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} = 0$. Оператор $\hat{P}$: $\zeta \to \zeta'$ непрерывен в $\sum_{j=1}^{2m} W_2^{2m+s-\hat{m}_j-1}(\Gamma)$. Подобным образом, заменив $\mathfrak{N}_\Gamma$ на $\mathfrak{N}_\Gamma^+$, определим оператор проектирования $\widehat{P}^+$, непрерывно действующий в $\sum_{j=1}^{2m} W_2^{2m+s-\widehat{m}_j-1}(\Gamma)$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого действительного s сужение $\widetilde{B}_{(s)}$ оператора $B_{(s)}$ на $\widehat{P}\left(\sum_{j=1}^{2m} W_2^{2m+s-j}(\Gamma)\right)$ осуществляет гомеоморфизм $\widehat{P}\sum_{j=1}^{2m} W_2^{2m+s-j}(\Gamma) \to$ $\to \widehat{P}^+\sum_{i=1}^{2m} W_2^{2m-1+s-\widehat{m}_j}(\Gamma)$.*

Отметим, что если $s_1 < s_2$, то оператор $B_{(s_1)}$ является расширением по непрерывности оператора $B_{(s_2)}$, поэтому условимся ниже индекс (s) опускать: будем писать B вместо $B_{(s)}$, $\widetilde{B}$ вместо $\widetilde{B}_{(s)}$.

Положим $\Lambda = \widetilde{B}^{-1}\widehat{P}^+$. Ясно, что если $\zeta \in \sum_{j=1}^{2m} W_2^{2m+s-j}(\Gamma)$, то $B\zeta \in$ $\in \widehat{P}^+\sum_{j=1}^{2m} W_2^{2m+s-\widehat{m}_j-1}(\Gamma)$ и $\Lambda B\zeta = \widehat{P}\zeta$. Поэтому $\Lambda B\zeta = \zeta$ в том и только том случае, когда $\widehat{P}\zeta = \zeta$, т. е. когда $\langle \zeta, \mathfrak{N}_\Gamma\rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} = 0$. Ясно также, что $\Lambda\varphi = 0$ в том и только том случае, когда $\varphi \in \mathfrak{N}_\Gamma^+$.

Представим Λ в матричной форме. Если $\varphi = (0, \ldots, \varphi_k, \ldots, 0)$ ($\varphi_k \in$ $\in W_2^{2m+s-\widehat{m}_k-1}(\Gamma)$) и $\Lambda\varphi = \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{2m}) \in \sum_{j=1}^{2m} W_2^{2m-j+s}(\Gamma)$, то полагаем $\Lambda_{jk}\varphi_k = \zeta_j$ $(j, k = 1, \ldots, 2m)$. Оператор Λ_{jk} непрерывно действует из $W_2^{2m+s-\widehat{m}_k-1}(\Gamma)$ в $W_2^{2m-j+s}(\Gamma)$ (s — любое действительное), т. е. Λ_{jk} — оператор порядка не выше $j-1-\widehat{m}_k$. Если $\Lambda\varphi = \zeta$ ($\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{2m})$, $\zeta =$ $= (\zeta_1, \ldots, \zeta_{2m})$), то

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{2m} \Lambda_{jk}\varphi_k \qquad (j = 1, \ldots, 2m). \tag{15}$$

Отметим, что сопряженный к Λ_{jk} относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle\cdot,\cdot\rangle$ оператор Λ_{jk}^+ также является оператором порядка не выше $j-1-\widehat{m}_k$.

3. Воспользуемся результатами п. 2 для получения формулы Грина. Приведем прежде всего необходимые вспомогательные построения. Пусть $\zeta^1, \ldots, \zeta^q$ ($\zeta^j = (\zeta_1^j, \ldots, \zeta_{2m}^j)$ $(j = 1, \ldots, q)$) — базис в $\mathfrak{N}_\Gamma$. Построим функции $u^1, \ldots, u^q$ ($u^j \in C^\infty(\overline{G})$; $j = 1, \ldots, q$) такие, что $U^j = (u^j|_\Gamma, \ldots, D_\nu^{2m-1}u^j|_\Gamma) =$ $= \zeta^j$ $\left(j = 1, \ldots, q;\ D_\nu = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right)$. Пусть теперь $u(x)$ — произвольная достаточно гладкая в $\overline{G}$ функция, $U(x) = (u|_\Gamma, \ldots, D_\nu^{2m-1}u|_\Gamma)$; $U' = \widehat{P}U$; $U'' =$ $= U - U' \in \mathfrak{N}_\Gamma$; тогда $U'' = \sum_{k=1}^{q} c_k\zeta^k$. Положим

$$u = u' + u'' \quad \left(u'' = \sum_{k=1}^{q} c_k u^k, \qquad u' = u - u''\right) \tag{16}$$

Оператор R'': $u \to u''$ непрерывно проектирует $W_2^{2m+s}(G)$ $(s \geqslant 0)$ на конечномерное пространство N-линейную оболочку, натянутую на функции $u^1, \ldots$

$\ldots, u^q$; оператор R': $u \to u'$ непрерывно проектирует $W_2^{2m+s}(G)$ $(s \geqslant 0)$ на его подпространство $R'W_2^{2m+s}(G)$, состоящее из тех и только тех $u \in W_2^{2m+s}(G)$, для которых $\langle U, \mathfrak{N}_\Gamma\rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} = 0$ $(U = (u|_\Gamma, \ldots, D_\nu^{2m-1}u|_\Gamma)$.

Приступим к выводу формулы Грина. Рассмотрим выражение $(Lu, v) - (u, L^+v)$ $(u, v \in W_2^{2m}(G))$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(G)$. С помощью разложения единицы сведем рассмотрения к случаю, когда функции v отличны от нуля лишь в достаточно малой окрестности U в $\overline{G}$ точки $x_0 \in \overline{G}$. Пусть $x_0 \in \Gamma$. Отобразим U в полушар $\overline{G}_\delta$ и запишем выражения $\{\widehat{B}_j\}_{j=1}^{2m}$ и $L(x, D)$ в виде (5), (6). Тогда [2, 10]

$$(Lu, v)_{G_\delta} - (u, L^+v)_{G_\delta} = \sum_{s=1}^{2m} \int_{\Gamma_\delta} D_n^{s-1}u \sum_{\substack{|\tau|+\nu \leqslant 2m,\\ \nu \geqslant s}} \overline{D_n^{\nu-s}D^\tau(\bar{a}_{\tau\nu}v)}\, dx, \tag{17}$$

где Γ_δ — плоская часть границы G_δ. Представим $u \in W_2^{2m}(G)$ в виде (16), тогда из (15) непосредственно следует, что на Γ_δ

$$D_n^{s-1}u' = \sum_{k=1}^{2m} \Lambda_{sk}\widehat{B}_k u'|_\Gamma \qquad (s = 1, \ldots, 2m), \tag{18}$$

поэтому из (17) с $u = u'$ находим

$$(Lu', v)_{G_\delta} - (u', L^+v)_{G_\delta} = \sum_{s=1}^{2m}\sum_{k=1}^{2m} \int_{\Gamma_\delta} \Lambda_{sk}\widehat{B}_k u' \sum_{\substack{|\tau|+\nu \leqslant 2m,\\ \nu \geqslant s}} \overline{D_n^{\nu-s}D^\tau(\bar{a}_{\tau\nu}v)}\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{2m} \langle \widehat{B}_k u', \widehat{B}'_k v\rangle, \tag{19}$$

где

$$\widehat{B}'_k v = \sum_{s=1}^{2m} \Lambda_{sk}^+\Bigg(\sum_{\substack{|\tau|+\nu \leqslant 2m,\\ \nu \geqslant s}} D_n^{\nu-s}D^\tau(\bar{a}_{\tau\nu}v)\Bigg) \qquad (k = 1, \ldots, 2m). \tag{20}$$

Из (19) и (17) (с $u = u''$), учитывая (16) и то, что $\widehat{B}_k u''|_\Gamma = 0$ $(k = 1, \ldots, 2m)$, легко получим, что

$$(Lu, v)_{G_\delta} - (u, L^+v)_{G_\delta} = \sum_{k=1}^{2m} \langle \widehat{B}_k u, \widehat{B}'_k v\rangle + \sum_{j=1}^{2m} \langle D_n^{j-1}u'', T_j v\rangle_{\Gamma_\delta}; \tag{21}$$

здесь $u, v \in W_2^{2m}(G)$; $u'' = R''u \in N$; v аннулируется в некоторой окрестности $\overline{G}$ множества $\overline{G} \diagdown \overline{G}_\delta$, а

$$T_j v = \sum_{\substack{|\tau|+\nu \leqslant 2m,\\ \nu \geqslant j}} D_n^{\nu-j}D^\tau(\bar{a}_{\tau\nu}v)\big|_\Gamma \qquad (j = 1, \ldots, 2m). \tag{22}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выражения L, $\{\widehat{B}_j\}$ такие же, как в п. 1. Тогда на Γ существуют (псевдодифференциальные) операторы $\{\widehat{B}'_j\}_{j=1}^{2m}$ порядков $\widehat{m}'_j = 2m - 1 - \widehat{m}_j$ такие, что справедлива формула Грина*

$$(Lu, v) - (u, L^+v) = \sum_{j=1}^{2m} \langle \widehat{B}_j u, \widehat{B}'_j v\rangle + \sum_{s=1}^{2m} \langle D_\nu^{s-1}u'', T_s v\rangle \tag{23}$$

$$\left(u,\, v \in W_2^{2m}(G); \qquad u'' = R''u \in N; \qquad D_\nu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu} \right)$$

(здесь $Tv = (T_1 v, \ldots, T_{2m} v)$ — вектор, который в локальных координатах представляется в виде (22)).

Учитывая (4), можем формулу (23) записать в виде

$$(Lu, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C_j' v \rangle = (u, L^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B_j' v \rangle +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2m} \langle D_\nu^{j-1} u'', T_j v \rangle \qquad (u, v \in W_2^{2m}(G);\ u'' = R''u \in N), \tag{24}$$

где положено

$$\hat{B}_j' = \begin{cases} B_{j-m}' & (j = m+1, \ldots, 2m); \\ -C_j' & (j = 1, \ldots, m). \end{cases} \tag{25}$$

Если $\mathfrak{N}_\Gamma = 0$, то $N = 0$, и формула Грина принимает обычный вид

$$(Lu, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C_j' v \rangle = (u, L^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B_j' v \rangle \qquad (u, v \in W_2^{2m}(G)). \tag{26}$$

4. Теорема 1 позволяет подробно изучить эллиптическую задачу

$$Lu(x) = f(x) \quad (x \in G), \qquad B_j u|_\Gamma = \varphi_j \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{27}$$

и ей формально сопряженную относительно формулы Грина задачу

$$L^+ v(x) = g(x) \quad (x \in G),\ B_j' v|_\Gamma = \psi_j \qquad (j = 1, \ldots, m), \qquad \langle Tv, \mathfrak{N}_\Gamma \rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} = 0. \tag{28}$$

В дополнение к сказанному в п. 1 предполагаем, что выполнено следующее условие.

Для каждого вектора $\psi(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x))$ ($\psi_j(x) \in C^\infty(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$) существует функция $u(x) \in C^\infty(\bar{G})$ такая, что $B_j u|_\Gamma = 0$, $C_j u|_\Gamma = \psi_j$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Класс $\mathfrak{B}$ наборов выражений вида (2), которые можно дополнить выражениями (3) так, чтобы в каждой точке $x \in \Gamma$ для каждого $\tau \neq 0$ полиномы $\{B_j(\eta), C_j(\eta)\}_{j=1}^m$ были линейно независимыми и чтобы выполнялось это условие, достаточно широк*. Так, например, если выражения $\{B_j\}_{j=1}^m$ не содержат дифференцирований по нормали порядка выше $m-1$, то $\{B_j\}_{j=1}^m \in \mathfrak{B}$ (достаточно положить $C_j = D_\nu^{m+j-1}$ $(j = 1, \ldots, m)$). Ясно также, что $\mathfrak{B}$ содержит все системы нормальных граничных выражений. Возможно, $\mathfrak{B}$ содержит все наборы (2), накрывающие L (это пока не доказано, но если $m = 1$, B накрывает L, а коэффициенты B действительны, то это условие всегда выполнено; если $n \neq 3$, то условие выполнено и для выражений с комплексными коэффициентами).

* Приведем примеры наборов граничных выражений $\{B_j\}_{j=1}^m \in \mathfrak{B}$, не являющихся нормальными: 1) $2m = 2$, $Bu = \frac{\partial u}{\partial \tau}\left(Cu = \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)$; 2) $2m = 4$, $B_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial \tau}$, $B_2 u = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \tau}$ $\left(C_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2},\ C_2 u = \frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3}\right)$; 3) $2m = 4$, $B_1 u = \frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}$, $B_2 u = \frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3} + \frac{\partial u}{\partial \nu}$ $\left(C_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu} + u,\ C_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right)$ (в этих примерах $n = 2$, $\nu = \nu(x)$ — орт внутренней нормали, а $\tau = \tau(x)$ — орт касательной к Γ в точке $x \in \Gamma$).

Отметим, что данное условие эквивалентно предположению: из $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{2m}) \in \mathfrak{N}_\Gamma^+$ следует $\eta_{m+1} = \ldots = \eta_{2m} = 0$.

Положим $\hat{\mathfrak{N}}_\Gamma^+ = \{(\eta_1, \ldots, \eta_m)\colon (\eta_1, \ldots, \eta_m, 0, \ldots, 0) \in \mathfrak{N}_\Gamma^+\}$; $\mathfrak{N} = \{u \in W_2^{2m}(G)\colon Lu = 0,\ B_j u|_\Gamma = 0\ (j = 1, \ldots, m)\}$; $\mathfrak{N}^+ = \{v \in W_2^{2m}(G)\colon\ L^+ v = 0,\ \ B_j' v|_\Gamma = 0\ (j = 1, \ldots, m),\ \langle Tv, \mathfrak{N}_\Gamma\rangle_{L_2^{2m}(\Gamma)} = 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены приведенное условие и предположения теоремы 1. Для того чтобы задача* (27) *с* $f \in W_2^s(G)$, $\varphi_j \in W_2^{2m+s-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m;\ s \geqslant 0)$ *имела решение* $u \in W_2^{2m+s}(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$
\begin{gathered}
(f, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, C_j' v\rangle = 0 \qquad (v \in \mathfrak{N}^+),\\
\langle \varphi, \hat{\mathfrak{N}}_\Gamma^+\rangle_{L_2^m(\Gamma)} = 0 \qquad (\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)).
\end{gathered}
\tag{29}
$$

Для того чтобы задача (28) *с* $g(x) \in W_2^s(G)$, $\psi_j \in W_2^{2m+s-m_j'-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m;$ $s \geqslant 0)$ *имела решение* $v \in W_2^{2m+s}(G)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$
(g, u) + \sum_{j=1}^{m} \langle \psi_j, C_j u\rangle = 0 \qquad (u \in \mathfrak{N}). \tag{30}
$$

Доказательство теоремы проводится примерно по той же схеме, что и доказательство леммы 6.7 [13, гл. 3].

5. Установим теперь теорему о полном наборе гомеоморфизмов. Как и в [8 — 10, 13], обозначим через $\widetilde{W}_2^t(G)$ (t — произвольное целое) пополнение множества $C^\infty(\bar{G})$ по норме

$$
|||u|||_t = \|u\|_{W_2^t(G)} + \sum_{j=1}^{2m} \|D_\nu^{j-1} u\|_{W_2^{t-j+\frac{1}{2}}(\Gamma)}.
$$

Пространство $\widetilde{W}_2^t(G)$ подробно изучено в [10]. Обозначим через $\widetilde{H}_2^t(G)$ (t — произвольное целое) подпространство $\widetilde{W}_2^t(G)$, состоящее из элементов $u \in \widetilde{W}_2^t(G)$ таких, что $(u|_G, \mathfrak{N}) = 0$.

Введем оператор $\widetilde{\mathfrak{L}}_t$ — замыкание отображения $u \to (Lu, B_1 u|_\Gamma, \ldots, B_m u|_\Gamma)$ $(u \in C^\infty(\bar{G}))$, рассматриваемого действующим из $\widetilde{W}_2^{2m+t}(G)$ в $K_t(G) = W_2^t(G) \oplus \sum_{j=1}^{m} W_2^{2m+t-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Обозначим также через $\widetilde{Q}^+ K_t(G)$ подпространство $K_t(G)$, состоящее из элементов $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_t(G)$, удовлетворяющих соотношениям (29). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для каждого целого* t *сужение* $\widetilde{\Lambda}_t$ *оператора* $\widetilde{\mathfrak{L}}_t$ *на* $\widetilde{H}_{2m+t}(G)$ *устанавливает гомеоморфизм*

$$
\widetilde{H}_{2m+t}(G) \to \widetilde{Q}^+ K_t(G).
$$

С помощью интерполяции теорема устанавливается также и для нецелых t.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Aronszain, A. N. Milgram, Differential operators on Riemannian manifolds, Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, 2, 1953, 1—61.
2. M. Schechter, General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. Pure and Appl. Math., **12**, N 3, 1959, 457—486 (Русс. перевод: Математика, 4, № 5, 1960, 93—122).
3. M. Schechter, Remarks on elliptic boundary value problems, Comm. Pure and Appl. Math., **12**, N 4, 1959, 561—578 (Русс. перевод: Математика, 4, № 6, 1960, 3—21).
4. M. Schechter, Negative norms and boundary problems, Ann. Math., **72**, N 3, 1960, 581—593.
5. M. Schechter, On L^p estimates and regularity, I, II, Amer. J. Math., **85**, N 1, 1963, 1—13; Math. Scand., **13**, N 1, 1963, 47—69.
6. J. L. Lions, E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei, III, V, VI, Ann. dela Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 15, N 1—2, 1961, 39—101; 16, N 1, 1962, 1—44; Journ. d,Analyse Math., 11, 1963, 165—188.
7. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963.
8. Я. А. Ройтберг, Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
9. Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений, УМЖ, т. 17, № 5, 1965.
10. Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач, УМЖ, т. 19, № 5, 1967.
11. Я. А. Ройтберг, Теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами, ДАН СССР, т. 180, № 3, 1968.
12. E. Magenes, Spazi di interpolatione ed equazioni a derivate parziali, Conferenza tenuta al VII Congresso dell'UMI, Genova, 30 Settembre — 5 Ottobre 1963 (Русс. перевод: УМН, т.21, №2, 1966).
13. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
14. М. С. Агранович, Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, т. 20, № 5, 1965.
15. Л. Р. Волевич, Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем, Матем. сб., 68, № 3, 1965.

Поступила 2.XI 1967 г.

Черниговский педагогический институт