Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений

Я. А. Ройтберг

Для общих эллиптических задач с неоднородными граничными условиями в [1] была установлена теорема о полном наборе гемеоморфизмов. С помощью этой теоремы было доказано утверждение о локальном повышении гладкости обобщенных решений вплоть до границы области. В [2] результаты работы [1] были перенесены на уравнения с разрывными коэффициентами. В работах [1, 2] рассматриваются решения из соболевских пространств W_2^s (s — произвольное целое). В настоящей работе теоремы о полном наборе гомеоморфизмов и локальном повышении гладкости обобщенных решений устанавливаются в соболевских пространствах W_p^s $(1<p<\infty)$ как для случая уравнений с непрерывными, так и с разрывными коэффициентами, кроме того, рассматривается также случаи действительных s.

Отметим, что для уравнения с непрерывными коэффициентами локальное повышение гладкости обобщенных решений получено недавно другим способом Шехтером [3]; гомеоморфизмы для других пространств в случае неоднородных граничных условий изучались в работах Лионса и Медженеса [4].

1. Пусть G — ограниченная область пространства E_n, Γ — ее граница. В $\bar{G}$ задано правильно эллиптическое [5] выражение L порядка $2m$ с комплексными коэффициентами

$$L=\sum_{|\mu|\leq 2m} a_\mu(x) D^\mu \tag{1}$$

$$\left(\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n); \quad |\mu|=\mu_1+\ldots+\mu_n; \quad D^\mu=D_1^{\mu_1}\ldots D_n^{\mu_n}; \quad D_k=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

На Γ задано m дифференциальных выражений

$$B_j = \sum_{|\mu| \leqslant m_j} b_{j\mu}(x) D^{\mu}; \quad m_j \leqslant 2m-1; \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Предполагаем, что граничные выражения (2) накрывают L в смысле [5].

Если $s \geqslant 0$ — целое, то $W_p^s(G)$ обозначает пространство С. Л. Соболева; если $s \geqslant 0$ — нецелое, то определим $W_p^s(G)$ с помощью «комплексной интерполяции» введенной Кальдероном и Лионсом [3, 6, 7, 8]*; $\| \ \|_{s,p}$ — норма пространства $W_p^s(G)$. Для $s < 0$ $W_p^s(G)$ [3] обозначает пополнение множества достаточно гладких функций по норме

$$\| u \|_{s,p} = \sup_{v \in W_{p'}^{-s}(G)} \frac{|(u, v)|}{\| v \|_{-s,p'}} \left((u, v) = \int\limits_G u\bar{v}dx; \quad p' = \frac{p}{p-1} \right).$$

Введем граничные нормы и пространства [3]. Пусть Δ — ограниченная область пространства E_n, S — ее граница. Для действительного $s \geqslant 1 - \frac{1}{p}$ $W_p^s(S)$ обозначает пополнение множества достаточно гладких функций, определенных на S по норме $\ll \varphi, S \gg_{s,p} = \inf \| u \|_{W_p^{s+\frac{1}{p}}(\Delta)}$, где inf берется по всем $u \in W_p^{s+\frac{1}{p}}(\Delta)$, равным φ на S. Если $s \leqslant -\frac{1}{p}$, то $W_p^s(S)$ обозначает пополнение множества достаточно гладких функций, определенных на S по норме

$$\ll \varphi, S \gg_{s,p} = \sup_{\psi \in W_{p'}^{-s}(S)} \frac{|<\varphi, \psi>|}{\ll \psi, S \gg_{-s,p'}} \left(<\varphi, \psi> = \int\limits_S \varphi\bar{\psi}d\sigma; \quad p' = \frac{p}{p-1} \right).$$

Если $-\frac{1}{p} < s < 1 - \frac{1}{p}$, то $W_p^s(S)$ определим с помощью «комплексной интерполяции» между пространствами $W_p^{-\frac{1}{p}}(S)$ и $W_p^{1-\frac{1}{p}}(S)$ [3]. Рассмотрим также прямые суммы пространств $W_p^s(G) \dot{+} \sum_{j=1}^{m} W_p^{s_j}(\Gamma) = K_p^{s,s_j}(s, s_1, \ldots, s_m$ — действительные числа), в частности, обозначим $K_p^s = W_p^s(G) \dot{+} \dot{+} \sum_{j=1}^{m} W_p^{2m+s-m_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Если $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in K_{p'}^{-s,-s_j}$, а $v = (v_0, v_1, \ldots, v_m) \in K_p^{s,s_j}$, то обозначим $[\alpha, v] = (\alpha_0, v_0) + \sum_{j=1}^{m} \langle \alpha_j, v_j \rangle$.

Рассмотрим оператор $\mathfrak{A} : \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) = W_p^{2m}(G)$; $\mathfrak{A}u = (Lu, B_1u, \ldots, B_mu) \in K_p^0$. Оператор $\mathfrak{A}$ непрерывно действует из $W_p^{2m}(G)$ в K_p^0. Пусть N — ядро этого оператора: $u \in N$, если $\mathfrak{A}u = 0$. Как известно [9], при соответствующих условиях гладкости ядро оператора $\mathfrak{A}$ конечномерно, область значений $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ замкнута в K_p^0 и имеет конечную коразмерность.

---

* В [3, 4] это пространство обозначается $H^{sp}(G)$.

Предположим, что граничные условия (2) нормальны [5]. Тогда справедлива формула Грина [4, 5]

$$(Lu, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C_j' v \rangle = (u, L^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B_j' v \rangle \tag{3}$$

$$\left(u \in W_p^{2m}(G);\ v \in W_{p'}^{2m}(G);\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right).$$

Здесь L^+ — выражение, формально сопряженное L;

$$B_j' = \sum_{|\mu| \leq m_j'} b_{j\mu}'(x) D^\mu \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

— система нормальных дифференциальных выражений, накрывающих L^+; $\{C_j\}$, $\{C_j'\}$ $(j = 1, \ldots, m)$ — дифференциальные выражения типа (2) порядков l_j, l_j' $(l_j + m_j' = l_j' + m_j = 2m - 1)$, дополняющие (2) и (4) соответственно до систем Дирихле [5].

Оператор $\mathfrak{A}^+ : D(\mathfrak{A}^+) = W_{p'}^{2m}(G)$; $\mathfrak{A}^+(v) = (L^+ v, B_1' v, \ldots, B_m' v) \in K_{p'}^{0, 2m - m_j' - \frac{1}{p'}}$ имеет такие же свойства, как и оператор $\mathfrak{A}$. Его ядро обозначим через N^+.

Имеет место следующий L_p-аналог леммы 1 из [1].

Лемма 1. *Для того чтобы задача*

$$\mathfrak{A}u = F = (f_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_p^0 \tag{5}$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех $v \in N^+$ выполнялось равенство

$$(f, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, C_j' v \rangle = 0 \quad (v \in N^+) \tag{6}$$

(Равенство (6) мы кратко будем записывать так: $[F, N^+] = 0$).

Обозначим через $\widetilde{W}_p^s(G)$ (s — произвольное целое) пополнение множества достаточно гладких функций по норме*

$$|||u|||_{s,p} = \|u\|_{s,p} + \sum_{k=1}^{2m} \langle\langle \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}, \Gamma \rangle\rangle_{s-k+1-\frac{1}{p}, p} (\nu \text{ — нормаль к } \Gamma). \tag{7}$$

Легко видеть, что если $s \geqslant 2m$, то $|||\ |||_{s,p}$ и $\|\ \|_{s,p}$ эквивалентны; если $s < 2m$, такой эквивалентности нет.

Из конечномерности N следует, что каждый элемент $u \in \widetilde{W}_p^s(G)$ можно единственным способом представить в виде

$$u = u' + u'';\ u' \in N;\ (u'', N) = 0.$$

Множество элементов $\{u''\}$ образует подпространство $\widetilde{W}_p^s(G)$, которое обозначим $\widetilde{H}_p^s(G)$. Пусть, наконец, $Q^+ K_p^s$ — подпространство K_p^s, состоящее из элементов $F \in K_p^s$, для которых $[F, N^+] = 0$.

Имеет место следующая теорема, являющаяся L_p-аналогом теоремы 1 из [1].

* По поводу целесообразности введения нормы $|||\ |||_{s,p}$ см. в [1] замечание 1. Оно остается в силе и в нашем случае, надо только всюду вместо $W_2^s(G)$ писать $W_p^s(G)$, вместо $W_2^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ — $W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$.

Теорема 1. *Рассмотрим отображение* $\Lambda : u \to (Lu, B_1u, \ldots, B_mu)$ *как оператор, действующий из* $\widetilde{H}_p^s(G)$ *в* $Q^+K_p^{s-2m}$ (s — произвольное целое). *Тогда при соответствующих условиях гладкости замыкание* $\overline{\Lambda}$ *оператора* Λ *устанавливает гомеоморфизм между этими пространствами* (при $s \geqslant 2m$ гомеоморфизм устанавливает оператор Λ). *Предположения гладкости такие же, как в теореме 1 из* [*1*].

Наметим доказательство теоремы, ограничившись для простоты случаем отсутствия дефекта ($N = N^+ = 0$) и $0 \leqslant s \leqslant 2m$.

Пусть $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_p^0$. Определим оператор T: $\mathfrak{D}(T) = K_p^0$; $TF = (u, C_1u, \ldots, C_mu) \in W_p^{2m}(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_p^{2m-l_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$, где $u = \mathfrak{A}^{-1}F \in W_p^{2m}(G)$.

Оператор T непрерывно действует из K_p^0 в $W_p^{2m}(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_p^{2m-l_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Аналогично определим оператор $T^+ : \mathfrak{D}(T^+) = K_{p'}^0$, $T^+\boldsymbol{G} = (v, C_1'v, \ldots, C_m'v) \in W_{p'}^{2m}(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_p^{2m-l_j'-\frac{1}{p'}}(\Gamma)$, где $v = (\mathfrak{A}^+)^{-1}\boldsymbol{G} \in W_{p'}^{2m}(G)$. Равенство (6) можно теперь записать в виде

$$[TF, \boldsymbol{G}] = [F, T^+\boldsymbol{G}];\ F \in \mathfrak{D}(T);\ \ \boldsymbol{G} \in \mathfrak{D}(T^+). \tag{8}$$

Оператор T^+ непрерывно действует из всего $K_{p'}^0$ в $W_{p'}^{2m}(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_{p'}^{2m-l_j'-\frac{1}{p'}}(\Gamma)$, поэтому существует сопряженный к нему оператор $\widetilde{T}$, непрерывно действующий из $W_p^{-2m}(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_p^{-\left(2m-l_j'-\frac{1}{p'}\right)}(\Gamma)$ в $L_p(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_p^{-\left(2m-m_j'-\frac{1}{p'}\right)}(\Gamma)$.

Из (8) легко следует, что $\widetilde{T}$ является расширением оператора T. С помощью интерполяционной теоремы Кальдерона — Лионса получаем

$$\| TF \|_{W_p^s(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_p^{s-l_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)} \leqslant C \| F \|_{W_p^{s-2m}(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_p^{s-m_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)}$$

$$(F \in K_p^0;\ s \in [0, 2m])$$

или

$$\| u \|_{s,p} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle C_ju, \Gamma \rangle\rangle_{s-l_j-\frac{1}{p},p} \leqslant C \left(\| Lu \|_{s-2m,p} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle B_ju, \Gamma \rangle\rangle_{s-m_j-\frac{1}{p},p} \right); \tag{9}$$

$$u \in W_p^{2m}(G).$$

Дифференциальные выражения B_j, C_j ($j = 1, \ldots, m$) образуют систему Дирихле порядка $2m$ [5]. Запишем ее в виде

$$S_k = \sum_{|\mu| \leqslant k-1} s_{k\mu} D^\mu = \begin{cases} B_j, & k-1 = m_j \\ C_j, & k-1 = l_j \end{cases} \quad (k = 1, \ldots, 2m). \tag{10}$$

Из свойств систем Дирихле [5] следует, что $\dfrac{\partial^{k-1}}{\partial \nu^{k-1}} = \sum_{i=1}^{k} \Lambda_{ki} S_i\ (k = 1, \ldots, 2m)$, Λ_{ki} — дифференциальные выражения порядка не выше $k - i$, содержащие дифференцирования лишь вдоль поверхности. Поэтому

$$\left\langle\left\langle \frac{\partial^{k-1}u}{\partial\nu^{k-1}}, \Gamma\right\rangle\right\rangle_{s-k+1-\frac{1}{p},p} \leqslant \sum_{i=1}^{k}\langle\langle \Lambda_{ki}S_i u, \Gamma\rangle\rangle_{s-k+1-\frac{1}{p},p} \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{i=1}^{k}\langle\langle S_i u, \Gamma\rangle\rangle_{s-i+1-\frac{1}{p},p}. \qquad (11)$$

Из (9), (10), (11) получаем неравенство *

$$\|u\|_{s,p}+\sum_{k=1}^{2m}\left\langle\left\langle\frac{\partial^{k-1}u}{\partial\nu^{k-1}}, \Gamma\right\rangle\right\rangle_{s-k+1-\frac{1}{p},p} \leqslant \mathrm{const}\Big(\|Lu\|_{s-2m,p}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\langle\langle B_j u, \Gamma\rangle\rangle_{s-m_j-\frac{1}{p},0}\Big);\ u\in W_p^{2m}(G). \qquad (12)$$

Если $s\in[0, 2m]$ — целое, то справедливо обратное неравенство, и мы получаем доказательство теоремы 1 в случае отсутствия дефекта и $0\leqslant s\leqslant 2m$ (s — целое). Если дефект не равен нулю, надо рассматривать еще проекционные операторы.

Если t — действительное, $s-1<t<s$, то определим $\widetilde{W}_p^t(G)$ с помощью комплексной интерполяции между $\widetilde{W}_p^{s-1}(G)$ и $\widetilde{W}_p^s$. Так как отображение $u\to\left(u|_G u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial\nu}, \ldots, \frac{\partial^{2m-1}u}{\partial\nu^{2m-1}}\right)$ непрерывно действует из $\widetilde{W}_p^\tau(G)$ в $W_p^\tau(G)\dotplus\dotplus\sum_{k=1}^{2m}W_p^{\tau-k+1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ для $\tau=s-1$ и $\tau=s$, то с помощью интерполяционной теоремы Кальдерона — Лионса [3, 6, 7, 8] получаем, что это отображение непрерывно действует и для $\tau=t$, где $s-1<t<s$. Таким образом, мы приходим к неравенству

$$\|u\|_{t,p}+\sum_{k=1}^{2m}\left\langle\left\langle\frac{\partial^{k-1}u}{\partial\nu^{k-1}}, \Gamma\right\rangle\right\rangle_{t-k+1-\frac{1}{p},p}\leqslant C\|u\|_{\widetilde{W}_p^t(G)} \qquad (13)$$

(t — произвольное действительное).

Обозначим через $\widetilde{H}_p^t(G)$ (t — действительное) подпространство $\widetilde{W}_p^t(G)$, состоящее из элементов $u\in\widetilde{W}_p^t(G)$,, для которых $(u, N)=0$.

Теорема 1′. *Рассмотрим отображение* $\Lambda: u\to(Lu, B_1u, \ldots, B_mu)$ *как оператор, действующий из* $\widetilde{H}_p^t(G)$ *в* $Q^+K_p^{t-2m}$ (t — произвольное действительное). *Тогда, если выполнены условия гладкости теоремы* 1 *с* $s=[t]$, $[t]+1$, *где* $[t]$ — *наибольшее целое число, меньшее* t, *то замыкание* $\overline{\Lambda}$ *оператора* Λ *устанавливает гомеоморфизм между этими пространствами* (если $t\geqslant 2m$ гомеоморфизм устанавливает Λ).

Теорема 1′ легко следует из теоремы 1 с помощью интерполяционной теоремы Кальдерона — Лионса.

Из теоремы 1 получаем, что справедливы L_p-аналоги теорем 2 и 3 о локальном повышении гладкости из [1]. Надо только в формулировках всюду вместо $\widetilde{W}_2^s(G)$ писать $\widetilde{W}_p^s(G)$, вместо $W_2^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ —

* Заметим, что неравенство (12) легко следует из теорем 2.1, 2.3 работы [3.II]. В свою очередь, эти теоремы могут быть легко получены с помощью приведенных здесь рассуждений.

$W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$, вместо $W_2^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma) = W_2^{s+1-\frac{1}{2}}(\Gamma) - W_p^{s+1-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Условия гладкости такие же, как в [1]; в определении слабого обобщенного решения надо считать, что $v \in W_{p'}^{\max(2m, 2m-s)}(G)$; в п°5 надо вместо $W_2^{2m}(\text{гр})^+$ рассматривать $W_{p'}^{2m}(\text{гр})^+$ $\left(p' = \dfrac{p}{p-1}\right)$ и т. д. Более того, из теоремы 1′ следует, что эти L_p-аналоги теорем 2, 3 из [1] справедливы также для k нецелых. При этом из неравенства (13) следует, что $\widetilde{W}_p^t(G)$ содержится в пополнении множества достаточно гладких функций по норме $\| u \|_{t,p} + \sum_{k=1}^{2m} \langle\langle \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}, \Gamma \rangle\rangle_{t-k+1-\frac{1}{p}, p}$ (t — действительное).

2. Рассмотрим в этом пункте уравнения с разрывными коэффициентами. Пусть G_1 — подобласть G с границей γ, не имеющей с Γ общих точек, $G_2 = G \setminus \overline{G}_1$*. В G рассматривается правильно эллиптическое выражение с разрывными комплексными коэффициентами

$$(Lu)(x) = \begin{cases} (L^1 u)(x), & x \in G_1, \\ (L^2 u)(x), & x \in G_2, \end{cases} \quad L^i = \sum_{|\mu| \leqslant 2m} a_\mu^i(x) D^\mu \quad (i = 1, 2). \tag{14}$$

На γ задано $2m$ пар дифференциальных выражений

$$B_k^i = \sum_{|\mu| \leqslant m_k^i} b_{k\mu}^i(x) D^\mu \quad (x \in \gamma;\ i = 1,2;\ m_k^1 = m_k^2 \leqslant 2m-1;\ k = 1, \ldots, 2m), \tag{15}$$

а на Γ — m выражений (2). $W_p^s(G)$ обозначает теперь прямую сумму пространств: $W_p^s(G) = W_p^s(G_1) \dotplus W_p^s(G_2)$. Норму в этом пространстве по-прежнему будем обозначать $\| \ \|_{s,p}$. Через $u_i(x)$ $(x \in \gamma;\ i = 1,2)$ обозначим предельное значение $u(x)$ со стороны G_i; $[(B_k^i u)(x)] = (B_k^1 u_1)(x) - (B_k^2 u_2)(x)$ $(x \in \gamma;\ k = 1, \ldots, 2m)$.

Предположим, что граничные выражения (2), (15) накрывают выражение (14) с разрывными коэффициентами [10, 11]. Тогда, как известно [12], при соответствующих условиях гладкости оператор $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}) = W_p^{2m}(G)$; $\mathfrak{A}u = (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u, \ [B_1^i u], \ldots, [B_{2m}^i u]) \in L_p(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_p^{2m-m_j-\frac{1}{p}}(\Gamma) \dotplus \dotplus \sum_{k=1}^{2m} W_p^{2m-m_k^i-\frac{1}{p}}(\gamma) = K_p^0$ непрерывно действует из $W_p^{2m}(G)$ в K_p^0, его ядро N конечномерно, область значений $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ замкнута в K_p^0 и имеет конечную коразмерность. Предположим теперь, что выражения (2), (15) нормальны. Тогда справедлива формула Грина [10] (ср. с формулой (3))

$$(Lu, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C_j' v \rangle_\Gamma - \sum_{k=1}^{2m} \langle [B_k^i u], B_{2m-k+1}'^{1} v_1 \rangle_\gamma =$$

$$= (u, L^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B_j' v \rangle_\Gamma + \sum_{k=1}^{2m} \langle B_k^2 u_2, [B_{2m-k+1}'^{i} v] \rangle_\gamma \tag{16}$$

$$(u \in W_p^{2m}(G);\ v \in W_{p'}^{2m}(G));$$

* Случай двух областей рассматривается лишь для упрощения записи; все результаты верны для разбиения G на любое конечное число областей поверхностями, не имеющими общих точек между собой и с Γ.

здесь B_j, B_j', C_j, C_j' — те же выражения, что и в формуле (3), $B_k'^i$ ($i=1,2$; $k=1,\ldots,2m$) — выражения порядка $m_k'^i$ ($m_k'^1 = m_k'^2 \leqslant 2m-1$) вида (15). Теперь можно определить оператор $\mathfrak{A}^+ : \mathfrak{D}(\mathfrak{A}^+) = W_{p'}^{2m}(G)$; $\mathfrak{A}^+ v = (L^+v, B_1'v, \ldots$ $\ldots, B_m'v, [B_1'^i v], \ldots, [B_{2m}'^i v]) \in L_{p'}(G) \dot{+} \sum_{j=1}^{m} W_{p'}^{2m-m_j'-\frac{1}{p'}}(\Gamma) \dot{+} \sum_{k=1}^{2m} W_{p'}^{2m-m_k'^i-\frac{1}{p'}}(\gamma) \equiv$ $\equiv K_{p'}^0$.

Оператор $\mathfrak{A}^+$ имеет такие же свойства, что и оператор $\mathfrak{A}$, его ядро обозначим через N^+. Аналогом леммы 1 является здесь

Лемма 2. *Для того чтобы задача*

$$\mathfrak{A}u = F = (f_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_{2m}) \in K_p^0 \tag{17}$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех $v \in N^+$ выполнялось равенство

$$(f, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, C_j'v \rangle_\Gamma - \sum_{k=1}^{2m} \langle \psi_k, B_{2m-k+1}'^1 v_1 \rangle_\gamma = 0 \ (v \in N^+) \tag{18}$$

это условие будем записывать так: $[F, N^+] = 0$).

Требования гладкости леммы 2 совершенно аналогичны соответствующим требованиям леммы 1, причем условия гладкости на γ таковы же, как и на Γ.

Если теперь обозначить через $\widetilde{W}_p^s(G)$ (s — произвольное целое) пополнение множества функций, достаточно гладких в каждом $\overline{G}_i$, по норме

$$|||u|||_{s,p} = \|u\|_{s,p} + \sum_{k=1}^{2m} \langle\langle \frac{\partial^{k-1}u}{\partial \nu^{k-1}}, \Gamma \rangle\rangle_{s-k+1-\frac{1}{p},p} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2m} \sum_{i=1}^{2} \langle\langle \frac{\partial^{k-1}u_i}{\partial \nu^{k-1}}, \gamma \rangle\rangle_{s-k+1-\frac{1}{p},p}, \tag{19}$$

и подобно тому, как в пункте 1, определить $\widetilde{H}_p^s(G)$, $K_p^s = W_p^s(G) \dot{+}$ $\dot{+} \sum_{j=1}^{m} W_p^{2m+s-m_j-\frac{1}{p}}(\Gamma) \dot{+} \sum_{k=1}^{2m} W_p^{2m+s-m_j^i-\frac{1}{p}}(\gamma)$, то теперь теоремы 1 и 1$'$ остаются справедливыми и для уравнений с разрывными коэффициентами: замыкание отображения $u \to (Lu, B_1u, \ldots, B_mu,$ $[B_1^i u], \ldots, [B_{2m}^i u])$ устанавливает гомеоморфизм: $\widetilde{H}_p^t(G) \to Q^+K^{t-2m}$. Отсюда уже следует, что для уравнений с разрывными коэффициентами справедливы L_p-аналоги теорем 2,3 из [1] о локальном повышении гладкости обобщенных решений.

Заметим, что с помощью полученных утверждений можно уточнить результаты работ [13, 14] о гладкости функции Грина и спектральной функции эллиптических операторов.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Ройтберг, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
2. Я. А. Ройтберг, Третий Всесоюзн. симпоз. по дифракции волн, рефераты докладов, Изд-во «Наука», М., 1964, 36—37.
3. M. Schechter, I, American Journal of Math., 85, № 1, 1963; II, Math. Scand., 13, N 1, 1963.
4. J. L. Lions, E. Magenes, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie III, 16, N 1, 1962; 15, N 1—2, 1961.
5. М. Шехтер, Математика, Сб. переводов, т. 4, № 5, 6, 1960.
6. A. P. Calderon, Intermediate Spaces and Interpolation, Conference at Warsaw, 1960.
7. J. L. Lions, Comptes Rendus des Séances de l'Academie Sciences, Paris, 250, 1960, 1853—1855.
8. С. Г. Крейн, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, т. II, Изд-во «Наука», Л., 1964, 504—510.
9. F. Browder, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, 369, 1959.
10. M. Schechter, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie III, XIV, № 3, 1960, 207—236.
11. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, ДАН, СССР, т. 148, № 3, 5, 1963.
12. З. Г. Шефтель, УМН, т. 19, № 4, 1964, 230.
13. Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, УМЖ, т. XV, № 2, 1963.
14. Ю. М. Березанский, ДАН СССР, т. 152, № 3, 1963.

Поступила 8.XII 1964 г.

Чернигов