ОТДЕЛ КРАТКИХ СООБЩЕНИЙ

О гладкости вплоть до границы области ядра резольвенты эллиптического оператора

Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг

В заметке будет исследована гладкость вблизи границы и удовлетворение граничным условиям ядра резольвенты общего эллиптического оператора порядка r, рассматриваемого в, вообще говоря, неограниченной области G n-мерного пространства E_n. В случае уравнения Шредингера при $n = 3$ и классических граничных условий подобные результаты содержатся в работе А. Я. Повзнера [1]. В общем случае при $r > \frac{n}{2}$ Браудером [2, 3] установлена карлемановость ядра, а Гордингом (результат опубликован в книге К. Морэна [4]) — удовлетворение им граничных условий, понимаемое как вхождение в область определения оператора. В случае уравнения второго порядка, рассматриваемого в ограниченной области с нулевыми граничными условиями, близкие вопросы исследовались классическими методами В. А. Ильиным и И. А. Шишмаревым [5].

Ниже рассматривается случай произвольного r и удовлетворение граничным условиям понимается в классическом смысле. Мы используем объединение подхода, развитого в [6], с теоремами о локальном повышении гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений типа [7]. Для упрощения изложение проводится для ограниченной G, а в п. 7° указываются изменения при переходе к неограниченной G. В п. 2°—5° нам удобно несколько обобщить постановку вопроса.

1°. Пусть $G \subset E_n$ — ограниченная область, Γ — ее граница. В G рассматривается эллиптическое дифференциальное выражение $L = \sum\limits_{|\mu| < r} a_\mu(x) D^\mu$ с достаточно гладкими комплексными коэффициентами, L^+ — формально сопряженное выражение, $L\oplus = \bar{L}^+$. Под множеством функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям (гр), будем понимать подпространство соболевского пространства $W_2^r(G)$, содержащее $\overset{\circ}{W}{}_2^r(G)$ — замыкание в метрике $W_2^r(G)$ множества финитных относительно G функций из $W_2^r(G)$. Это подпространство обозначим W_2^r(гр). Подпространство W_2^r(гр)$^+$, отвечающее сопряженным граничным условиям, введем как совокупность функций v из $W_2^r(G)$ таких, что $(Lu, v)_0 = (u, L^+ v)_0$ для любой $u \in W_2^r$(гр). Будем предполагать, что (гр)$^{++}$ = (гр) (см. [8]). По нулевому пространству $W_2^0(G) = L_2(G)$ и позитивному $W_2^k(G)$ построим пространство с негативной нормой $W_2^{-k}(G)$ [9]. Ниже $(.,.)_l$ и $\|\cdot\|_l$ — скалярное произведение и норма в $W_2^l(G)$ ($l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$). Приведем еще одно определение [7]. Пусть на Γ расположен некоторый кусок Γ_0, $\varphi \in W_2^s(G)$, $s < 0$. Говорят, что φ входит в W_2^t с

$t > s$ внутри G вплоть до куска Γ_0 (это запишем так: $\varphi \in W^t_{2,\text{лок}}(G, \Gamma_0)$), если для каждой подобласти $G' \subseteq G$, имеющей общую границу с G лишь внутри куска Γ_0, найдется $\psi_{G'} \in W^t_2(G)$ такая, что $(\varphi, u)_0 = (\psi_{G'}, u)_0$ для всех $u \in C^\infty(G \cup \Gamma)$, аннулирующихся дополнительно в окрестностях $G \backslash G'$.

Будем говорить, что $\alpha \in W_2^{-k}(G)$ есть обобщенное решение задачи $Lu = f \in W_2^{-r-k}(G)$ $(u \in (\text{гр}))$, если для всех $v \in W^r_2(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G)$

$$(\alpha, L^+ v)_0 = (f, v)_0. \tag{1}$$

Пусть $G_0 \subseteq G$ — подобласть G, примыкающая к Γ вдоль куска Γ_0, $\alpha \in W_2^{-k}(G)$ называется решением нашей задачи внутри G_0 вплоть до Γ_0, если (1) выполняется для всех $v \in W^r_2(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G)$, аннулирующихся дополнительно в окрестностях $G \backslash G_0$. Если $\Gamma_0 = 0$, то говорят о решении внутри G_0.

2°. Пусть $W^k_2(G) \otimes W^k_2(G)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ — тензорное произведение, $W_2^{-k}(G) \otimes W_2^{-k}(G)$ будет пространством с негативной нормой (пространством обобщенных ядер), построенным по позитивному $W^k_2(G) \otimes W^k_2(G)$ и нулевому $L_2(G) \otimes L_2(G) = L_2(G \times G)$. Действие обобщенного ядра $\boldsymbol{A}$ на гладкое $U \in W^k_2(G) \otimes W^k_2(G)$ обозначаем: $(\boldsymbol{A}, U)_0$. Ядро $\boldsymbol{Д} \in W_2^{-k}(G) \otimes W_2^{-k}(G)$ зададим соотношением $(\boldsymbol{Д}, U)_0 = \int\limits_G U(x, x)\, dx$ $(U \in W^k_2(G) \otimes W^k_2(G))$. При помощи теорем о ядре 3.3 и 3.4 из [9], а также применяя к подходу, развитому в [6], теорему о гладкости обобщенного ядра, являющегося решением по каждому из переменных эллиптического уравнения [10], непосредственно получаем, что справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть L — эллиптическое выражение порядка r, коэффициенты которого $a_\mu \in C^{|\mu|+r+p}(G \cup \Gamma)$ $(p \geq n+1)$. Предположим, что существует оператор R, непрерывно действующий в $L_2(G)$ и такой, что Rf и R^*f при любом $f \in L_2(G)$ являются обобщенными решениями, соответственно, задач $Lu = f$ $(u \in (\text{гр}))$ и $L^+u = f$ $(u \in (\text{гр})^+)$. Утверждается, что имеет место представление $(Ru, v)_0 = (\boldsymbol{R}, v(x)\overline{u(y)})_0$, где $\boldsymbol{R}$ — некоторое обобщенное ядро из $W_2^{-k}(G) \otimes W_2^{-k}(G)$ $\left(k = \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1;\ u, v \in W^k_2(G)\right)$. Ядро $\boldsymbol{R}$ внутри $G \times G$ совпадает с обычным ядром $R(x, y)$ $(x, y \in G)$, т. е. $(\boldsymbol{R}, U)_0 = \int\limits_G\int\limits_G R(x, y) U(x, y)\, dx dy$ для $U \in W^k_2(G) \otimes W^k_2(G)$, аннулирующихся вблизи границы $G \times G$. $R(x, y)$ при $x \neq y$ достаточно гладко (существуют и непрерывны по $(x, y) \in G \times G$ все производные вида $D^\alpha_x D^\beta_y R$ $(|\alpha|, |\beta| \leq r + p)$ и имеет особенность типа фундаментального решения выражения L. Оно удовлетворяет следующим соотношениям*

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{R}, L^+_x[V(x, y)])_0 &= (\boldsymbol{Д}, V(x, y))_0 \quad (V \in (W^r_2(\text{гр})^+ \cap W_2^{r+k}(G)) \otimes W^k_2(G)),\\ (\boldsymbol{R}, \overline{L_y}[V(x, y)])_0 &= (\boldsymbol{Д}, V(x, y))_0 \quad (V \in W^k_2(G) \otimes \overline{(W^r_2(\text{гр}) \cap W_2^{r+k}(G))})\end{aligned} \tag{2}$$

(черта обозначает переход к комплексному сопряжению).

В этой теореме существенно, что представление $(Ru, v)_0 = (\boldsymbol{R}, v(x)\overline{u(y)})_0$ справедливо для всех $u, v \in W^k_2(G)$, а не только для аннулирующихся вблизи Γ; тем самым улавливается поведение $\boldsymbol{R}$ при приближении к Γ. Равенства (2) можно истолковывать как удовлетворение $\boldsymbol{R}$ в $G \times G$ уравнениям $L_x \boldsymbol{R} = \boldsymbol{Д}$, $L^+_y \boldsymbol{R} = \boldsymbol{Д}$ и некоторым граничным условиям, связанным с (гр). По существу это обстоятельство дает возможность доказать гладкость $\boldsymbol{R}$ вплоть до границы, ниже будут приведены два подхода к этому вопросу.

3°. Теорема 2 *Пусть выполнены условия теоремы* 1. G_0 — *некоторая подобласть* G, *примыкающая к* Γ *по куску* Γ_0; $q > \frac{n}{2} - r$ — *целое неотрицательное. Предположим дополнительно, что* L, Γ *и* (гр) *таковы, что в* G_0 *имеет место следующая теорема о повышении гладкости: пусть* $G_0' \subseteq G_0$ — *произвольная подобласть, примыкающая к* Γ *по куску* Γ_0. *Из того, что* $u \in W_2^{-q}(G_0')$ *удовлетворяет уравнение* $Lu = f \in W_2^q(G_0')$ *внутри* G_0' *вплоть до* Γ_0, *автоматически следует включение* $u \in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0', \Gamma_0)$. *То же верно для* L^+ *и* $(\text{гр})^+$.

Тогда для любого фиксированного $x \in G_0$ $(y \in G_0)$

$$R(x, \cdot) \in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0 \setminus \{x\}, \Gamma_0) \qquad (R(\cdot, y) \in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0 \setminus \{y\}, \Gamma_0)), \tag{3}$$

причем функция $\overline{R(x, \cdot)}$ $(R(\cdot, y))$ *внутри* $G_0 \setminus \{x\}$ $(G_0 \setminus \{y\})$ *удовлетворяет уравнение* $L^{\oplus}u = 0$ $(Lu = 0)$ *и на* Γ_0 — *граничные условия* $(\text{гр})^+$ ((гр)).

Наметим доказательство. Пусть G_0' — подобласть G_0, имеющая общую границу Γ_0' с G_0 лишь внутри куска Γ_0. В силу предполагаемой теоремы о повышении гладкости для любого $f \in W_2^q(G)$ решение $u = Rf \in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0, \Gamma_0)$ и поэтому $Rf \in W_2^{r+q}(G_0')$. Легко видеть, что отображение $f \to Rf$ всего полного пространства $W_2^q(G)$ в $W_2^{r+q}(G_0')$ замкнуто, поэтому оно непрерывно: $\| Rf \|_{W_2^{r+q}(G_0')} \leqslant C_1 \| f \|_q$. Так как $r + q > \frac{n}{2}$, то благодаря теоремам вложения $|(Rf)(x)| \leqslant C_2 \| Rf \|_{W_2^{r+q}(G_0')} \leqslant C_1 C_2 \| f \|_q$ $(x \in G_0')$, что указывает на непрерывность линейного функционала $l_x(f) = (Rf)(x)$ над $W_2^q(G)$. Таким образом, $(Rf)(x) = l_x(f) = \overline{(\eta_x, f)_0}$, где η_x — некоторый элемент из $W_2^{-q}(G)$. Подставляя в последнее равенство вместо f Lv, где $v \in W_2^r(\text{гр}) \cap W_2^{r+q}(G)$ дополнительно аннулируется в окрестностях точки x и множества $G \setminus G_0$, получим: $(\eta_x, Lv)_0 = 0$, т. е. в понятном смысле $L^+ \eta_x = 0$. Опять благодаря предполагаемой теореме о повышении гладкости $\eta_x \in W_{2,\text{лок}}^{r+q}(G_0 \setminus \{x\}, \Gamma_0)$ $(x \in G_0')$. С другой стороны, учитывая представление R через ядро $R(x, y)$ (см. теорему 1 и определение η_x), найдем $R(x, .) = \eta_x$ $(x \in G_0')$, что и доказывает (3).

Используя результаты о повышении гладкости типа [7], доказанные для общих (гр) Я. А. Ройтбергом (они будут скоро опубликованы), получим, что сформулированная теорема имеет место при следующих Γ_0, L и (гр): *кусок* Γ_0 *принадлежит классу* C^{4m+q}, *выражение* L *правильно эллиптично* [11, 12], $r = 2m$, $a_\mu \in C^{2m+max(|\mu|, q)}(G_0 \cup \Gamma_0)$. *На* Γ_0 *заданы дифференциальные выражения* $B_j = \sum\limits_{|\mu| < m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu (m_j \leqslant 2m - 1, j = 1, \ldots, m)$, *которые предполагаем нормальными и накрывающими* L [11, 12]; (гр) *на* Γ_0 *имеют вид*: $B_j u|_{\Gamma_0} = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. *Предполагается, что* $b_{j\mu} \in C^{2m+q-1}(\Gamma_0)$; *такие же ограничения гладкости накладываются на коэффициенты выражений* B_j', *определяющих* $(\text{гр})^+$. *Кроме того, предполагаем, что а) в некоторой* δ — *полоске* $\Gamma_{0\delta} \subset \Gamma_0$ *вблизи границы* $\dot{\Gamma}_0$ *куска поверхности* Γ_0 *выражения* B_j *содержат только члены с дифференцированиями по нормали к* Γ_0; *б) в некоторой окрестности в* G_0 *полоски* $\Gamma_{0\delta}$ *выражение* L *не содержит членов со смешанными производными по нормали к* Γ_0 *и касательным направлениям.*

Если $\Gamma_0 = \Gamma$, то условия *а*) и *б*), естественно, отбрасываются. Их также можно отбросить, если (гр) нулевые на $\Gamma_{0\delta}$: $B_j|_{\Gamma_{0\delta}} = \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}}$ $(j = 1, \ldots, m$; ν — нормаль к Γ_0). Если (гр) нулевые всюду на Γ_0 и L в $G_0 \cup \Gamma_0$ сильно эллиптично, то ограничения гладкости можно снизить: достаточно считать, что Γ_0 класса C^{2m+q}, а $a_\mu \in C^{|\mu|+q}(G_0 \cup \Gamma_0)$ (в этом случае нужно воспользоваться теоремой о повышении гладкости из [7]).

4°. Второй метод мы изложим лишь применительно к нулевым граничным условиям.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1; $r = 2m$; G_1, G_2 — некоторые подобласти G, находящиеся на положительном расстоянии и примыкающие к Γ, соответственно, по кускам Γ_1 и Γ_2. Граничные условия на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ нулевые. Если Γ_1 и Γ_2 класса $C^{2m+q}(q > m, n+2)$, в $G_1 \cup \Gamma_1$ и $G_2 \cup \Gamma_2$ L сильно эллиптично и коэффициенты $a_\mu \in C^{|\mu|+q}(G_i \cup \Gamma_i)$ $(i=1,2)$, то*

$$R(\cdot,\cdot) \in W^{2m+q}_{2,\text{лок}}(G_1 \times G_2, (\Gamma_1 \times G_2) \cup (G_1 \times \Gamma_2)) \tag{4}$$

и удовлетворяются граничные условия:

$$D^\alpha_x R(x, y)|_{x \in \Gamma_1, y \in G_2} = 0, \ D^\beta_y R(x, y)|_{x \in G_1, y \in \Gamma_2} = 0 \ (|\alpha|, |\beta| \leqslant m-1).$$

Наметим доказательство. Рассмотрим дифференциальное выражение M относительно $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, действующее по закону: $M[U(x, y)] = L_x[U(x, y)] + L^{\oplus}_y[U(x, y)]$. Легко видеть, что M будет сильно эллиптическим выражением порядка $r = 2m$ с достаточно гладкими коэффициентами в $(G_1 \cup \Gamma_1) \times (G_2 \cup \Gamma_2)$. Из (2) следует, что $\boldsymbol{R}$ удовлетворяет соотношению $(\boldsymbol{R}, M^+[V])_0 = (2Д, V)_0$ для всех $V(x,y) \in W_2^{2m+\left[\frac{n}{2}\right]+1}(G \times G)$, дополнительно аннулирующихся вместе со всеми производными по x, по y и смешанными до порядка $m-1$ на $(\Gamma_1 \times G_2) \cup (G_1 \times \Gamma_2)$, т. е. $M\boldsymbol{R} = 2Д$ внутри $G_1 \times G_2$ вплоть до части $(\Gamma_1 \times G_2) \cup (G_1 \times \Gamma_2)$ границы этого множества, где (гр) нулевые. Рассматривая это уравнение при $x \neq y$ и пользуясь теоремой 3 [7], закончим доказательство.

Изложенная методика распространяется и на некоторые другие (гр), например на условия типа третьей краевой задачи при $r = 2$. Можно расширить также класс L, рассматривая выражения $M = a(x, y) L_x + b(x,y) L^{\oplus}_y$ с некоторыми a, b. Хотя рассматриваемый подход применим к меньшему классу задач, результаты теперь более сильные, чем в п.3°: (3) дает гладкость R по каждой переменной при фиксированной второй, (4) — по совокупности переменных.

5°. В теоремах 2 и 3 исключался случай, когда обе точки x и y расположены на Γ. При некоторых дополнительных ограничениях все же удается (3) заменить включениями

$$R(x, \cdot) \in W^{r+q}_{2,\text{лок}}(G_0 \setminus \{x\}, \quad \Gamma_0 \setminus \{x\} \ (R(\cdot, y) \in W^{r+q}_{2,\text{лок}}(G_0 \setminus \{y\}, \Gamma_0 \setminus \{y\})),$$

где $x \in G_0 \cup \Gamma_0$ $(y \in G_0 \cup \Gamma_0)$. Ограничения формулировать мы не будем, их смысл таков: или $r > \frac{n}{2}$ и (гр) типа указанных в конце п.3°, или L сильно эллиптично и (гр) нулевые либо типа третьей краевой задачи (последнее при $r = 2$).

6°. Покажем, как применяются полученные результаты к изучению ядра резольвенты. Построим в $L_2(G)$ по рассмотренному в теореме 1 L и (гр) оператор A, полагая $Au = Lu$, $u \in \mathfrak{D}(A) = W^r_2$(гр). Справедлива

Лемма. *Предположим, что* (гр) *и условия гладкости такие, как указано в конце п.3°, где $G_0 = G$, $\Gamma_0 = \Gamma$. Тогда $A^* v = L^+ v$, $\mathfrak{D}(A^*) = W^r_2(\text{гр})^+$.*

Пусть комплексное λ таково, что уравнения $(A - \lambda E) u = 0$ и $(A^* - \bar{\lambda} E) v = 0$ имеют лишь тривиальные решения. Тогда оператор $A - \lambda E$ $(A^* - \bar{\lambda} E)$ гомеоморфно отображает W^r_2(гр) $(W^r_2(\text{гр})^+)$ на $L_2(G)$ и поэтому резольвента $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. *К ядру $R(x, y; \lambda)$ резольвенты можно применить все утверждения пунктов 2°—5°*, формулировать результаты мы не будем.

7°. Наметим изменения в случае неограниченной G. Наиболее существенные из них относятся к теореме 1. Обозначим $W_2^{(k,d)}(G)$ ($d(x) \geq 1$ гладкая, $x \in G$) пространство со скалярным произведением $(u, v)_{W_2^{(k,d)}(G)} = (du, dv)_k$, $W_2^{-(k,d)}(G)$ — соответствующее негативное пространство относительно нулевого $L_2(G)$. При достаточно быстром росте $d(x)$ на ∞ и $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ вложение $W_2^{(k,d)}(G) \rightarrow L_2(G)$ квазиядерно и справедлива теорема типа 3.3 о ядре [9]. Поэтому выше R будет ядром из $W_2^{-(k,d)}(G) \otimes W_2^{-(k,d)}(G)$; $(\cdot, \cdot)_0$ по-прежнему скалярное произведение в $L_2(G)$ или его расширение. В остальном утверждения п.2° — 5° остаются неизменными — следует лишь считать области G_0, G_1, G_2 ограниченными, а функции v, V в равенствах типа (1), (2) финитными на ∞. Схема п.6° также понятным образом видоизменяется в связи с сингулярностью задачи.

В заключение заметим, что изложенные методы дают возможность исследовать и поведение производных от ядра резольвенты.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Повзнер, О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$, Матем. сб. 32 (74), № 1, 1953.

2. F. E. Browder, The eigenfunction expansion theoren for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator, Proc. Nat. Acad. Sci U. S. A., 40, N 6, 1954.

3. F. E. Browder, On the spectral theory of ellptic differential operator, I, Math. Annalen., 142, N 1, 1961.

4. K. Maurin, Metody przestrzeni Hilberta, Warszawa, 1959.

5. В. А. Ильин и И. А. Шишмарев, Об эквивалентности систем обобщенных и классических собственных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 24, № 5, 1960.

6. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Матем. сб., т. 43 (85), № 1, 1957.

7. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963.

8. Ю. М. Березанский, Некоторые примеры «неклассических» краевых задач для уравнений в частных производных, ДАН СССР, т. 131, № 3, 1960.

9. Ю. М. Березанский, Пространства с негативной нормой, Усп. матем. наук, т. 18, № 1, 1963.

10. Я. А. Ройтберг, Про розклад за власними функціями самоспряжених еліптичних систем, ДАН УРСР, № 6, 1960.

11. M. Schechter, General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm Pure Appl. Math., 12, N 3, 1959 (русский перевод: «Математика», сб. переводов, т. 4, № 5, 1960).

12. M. Schechter, Remarks on elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., 12, N 4, 1959 (русский перевод: «Математика», сб. переводов, т. 4, № 6, 1960).

Поступила 30.I 1963 г.
Киев