Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, *Докл. АН СССР*, 1963, том 148, номер 5, 1034–1037

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 148, № 5

МАТЕМАТИКА

Я. А. РОЙТБЕРГ, З. Г. ШЕФТЕЛЬ

ОБЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 VII 1962)

1°. В последнее время в ряде работ ([1-9]) различными методами изучались граничные задачи для эллиптических уравнений 2-го порядка с разрывными коэффициентами.

В ([10]) авторы рассмотрели граничные задачи и задачи на собственные значения для эллиптических уравнений 2-го порядка с разрывными коэффициентами функциональными методами, связанными с использованием неравенства типа Гординга.

В настоящей заметке доказана разрешимость в обобщенном и обычном смысле общих граничных задач для эллиптических уравнений произвольного порядка с разрывными коэффициентами; граничные условия и условия сопряжения на поверхностях разрыва задаются общими дифференциальными операторами *.

В работах ([11-16]) граничные задачи для уравнений с непрерывными коэффициентами исследовались с помощью энергетических неравенств с граничной нормой.

В данной заметке задачи для уравнений с разрывными коэффициентами изучаются с помощью такого рода неравенств, доказанных авторами ([17]). При этом используется известная функциональная методика. Обозначения в данной заметке такие же, как в ([17]).

2°. Пусть G — ограниченная область n-мерного эвклидова пространства E_n с границей Γ; G_1 — подобласть G с границей γ, не имеющей с Γ общих точек; $G_2 = G \setminus \overline{G}_1$ **. Введем прямую сумму соболевских пространств $W_2^l(G_1) \dotplus W_2^l(G_2) = \mathbf{W}_2^l(G) = \mathbf{W}_2^l$ ($l \geqslant 0$ целое); всякую функцию $u \in \mathbf{W}_2^l$ можно представить в виде $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, где $u_i(x) = u(x)$, $x \in G_i$; $u_i(x) = 0$, $x \in G \setminus \overline{G}_i$ ($i = 1, 2$); если $l > 0$, $x \in \gamma$, то $u_i(x)$ означает предельное значение $u(x)$ со стороны G_i.

Рассмотрим эллиптический дифференциальный оператор A с разрывными комплексными коэффициентами

$$(Au)(x) = \begin{cases} (A^1u)(x), & x \in G_1, \\ (A^2u)(x), & x \in G_2, \end{cases} \qquad (1)$$

где

$$A^i = \sum_{|\mu| \leqslant 2m} a_\mu^i(x) D^\mu, \quad x \in G_i \ (i = 1, 2);$$

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n); \ D^\mu = D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}; \ D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}.$$

A^+ — оператор типа (1), формально сопряженный A.

---

* В заметке авторов ([10]) в качестве граничных операторов допускались не только дифференциальные операторы.

** Все результаты верны и для разбиения G на конечное число областей.

Введем также граничные операторы (на Г) и операторы сопряжения (на γ):

$$B_k^i = \sum_{|\mu| \leqslant m_k^i} b_{k\mu}^i(x) D^\mu \tag{2}$$

$$(i = 1, 2, 3; \quad k = 1, \ldots, r_i; \quad r_1 = r_2 = 2m, \quad r_3 = m;$$
$$m_k^1 = m_k^2 = m_k; \quad m_k^i \leqslant 2m - 1),$$

где комплексные функции $b_{k\mu}^i(x)$ $(i = 1, 2)$ определены на γ, $b_{k\mu}^3(x)$ — на Г. Систему граничных операторов B_k^3 называют **нормальной** ([14], [15]), если все они различных порядков и Г не является характеристикой ни для одного из них. Аналогично определяется нормальность систем операторов сопряжения.

Обозначим через $\mathbf{W}_2^{2m}$ (гр) подпространство функций $u \in \mathbf{W}_2^{2m}$, для которых

$$\begin{aligned} &[B_k u] = B_k^1 u_1 - B_k^2 u_2 \big|_\gamma = 0 \quad && (k = 1, \ldots, 2m), \\ &B_j u \big|_\Gamma = 0 && (j = 1, \ldots, m). \end{aligned} \tag{3}$$

Через $\mathbf{W}_2^{2m}(\text{гр})^+$ обозначим подпространство таких $v \in \mathbf{W}_2^{2m}$, что равенство $(Au, v)_0 = (u, A^+v)_0$ имеет место для всех $u \in \mathbf{W}_2^{2m}$ (гр) тогда и только тогда, когда $v \in \mathbf{W}_2^{2m}(\text{гр})^+$.

С помощью интегрирования по частям можно показать, что если оператор эллиптичен, системы граничных операторов и операторов сопряжения (2) нормальны, $a_\mu^i(x) \in C^{|\mu|}(\overline{G}_i)$, $b_{k\mu}^i(x) \in C^{\max\{2m-m_k-1,\, m_k\}}(\gamma)$ $(i = 1, 2)$, $b_{j\mu}^3(x) \in C^{\max\{2m-m_j^3-1,\, m_j^3\}}(\Gamma)$, а Г и γ — класса C^{2m}, то $\mathbf{W}_2^{2m}(\text{гр})^+$ определяется условиями, аналогичными (3), причем системы соответствующих сопряженных операторов $B_k'^i$ также нормальны.

Существенную роль для дальнейшего играет следующая

Лемма 1. *Нормальные операторы* (2) *накрывают* * *оператор* A *тогда и только тогда, когда сопряженные операторы* $B_k'^i$ $(i = 1, 2, 3)$ *накрывают* A^+.

Доказательство этой леммы довольно громоздко; оно получено развитием для нашего случая алгебраического аппарата, примененного в ([14],[18]).

3°. Рассмотрим граничную задачу

$$Au = f, \quad u \in \mathbf{W}_2^{2m}(\text{гр}) \tag{4}$$

и сопряженную задачу

$$A^+v = g, \quad v \in \mathbf{W}_2^{2m}(\text{гр})^+. \tag{5}$$

Функцию $u \in L_2$ будем называть слабым решением задачи (4), если $(u, A^+v)_0 = (f, v)_0$, $v \in \mathbf{W}_2^{2m}(\text{гр})^+$. Аналогично определяется слабое решение задачи (5).

Из результатов работы ([17]) и леммы 1 следует, что если нормальные операторы (2) накрывают A, $a_\mu^i(x) \in C^{|\mu|}(\overline{G}_i)$, $b_{k\mu}^i(x) \in C^{2m-m_k^i}(\gamma)$ (или Г) $(i = 1, 2, 3)$, $b_{k\mu}'^i(x) \in C^{2m-m_k'^i}(\gamma)$ (или Г), а Г и γ — класса C^{2m}, то суще-

---

* Определение накрывания для случая разрывных коэффициентов дано в ([17]) (определение 2).

ствует такая константа $c>0$, что

$$c^{-1}\|u\|_{2m}^2 \leqslant B(u, u)+\|u\|_0^2 \leqslant c\|u\|_{2m}^2, \quad u \in \mathbf{W}_2^{2m}; \tag{6}$$

$$c^{-1}\|v\|_{2m}^2 \leqslant B^*(v, v)+\|v\|_0^2 \leqslant c\|v\|_{2m}^2, \quad v \in \mathbf{W}_2^{2m}. \tag{7}$$

Здесь $B(u, v)=(Au, Av)_0+\sum_{k=1}^{2m}\langle [B_k u], [B_k v]\rangle_{2m-m_k-1}+\sum_{j=1}^{m}\langle B_j^3 u, B_j^3 v\rangle_{2m-m_j-1}$; $B^*(u, v)$ определяется аналогично.

Обозначим через N (N^*) подпространство решений из $\mathbf{W}_2^{2m}$ задачи (4) с $f=0$ (соответственно задачи (5) с $g=0$). Из неравенств (6), (7) легко следует, что N и N^* конечномерны.

По положительному пространству $H_+=\mathbf{W}_2^{2m}$ и нулевому $H_0=L_2$ построим пространство с отрицательной нормой $H_-=\mathbf{W}_2^{-2m}$ ([10]).

Теорема 1. *Пусть операторы A^i, B_k^i таковы, что имеет место неравенство* (7). *Если $f \in \mathbf{W}_2^{-2m}$, $(f, N^*)_0=0$, то существует слабое решение $u \in L_2$ задачи* (4).

Теорема 2. *Пусть в дополнение к условиям теоремы* 1 $f \in \mathbf{W}_2^s$, γ *и* Γ — *класса* C^{4m+s}, $a_\mu^i(x) \in C^{2m+\max\{|\mu|, s\}}(\overline{G}_i)$, $b_{k\mu}^{\prime i}(x) \in C^{2m+s-1}(\gamma)$ (*или* Γ) ($i=1, 2, 3$). *Тогда найденное в теореме* 1 *слабое решение и входит в* $\mathbf{W}_2^{2m+s}$ *и, следовательно, является решением в обычном смысле.*

Теорема 1 доказывается с помощью теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 2 доказывается методом, аналогичным примененному в ([10], [14], [19], [20]).

Из теорем 1 и 2 можно вывести, что *если выполнены условия гладкости теоремы* 2, *то при* $f \in \mathbf{W}_2^s$ *всякое слабое решение и задачи* (4) *входит в* $\mathbf{W}_2^{2m+s}$.

4°. В этом пункте требования гладкости будут такими же, как в теореме 2. Тогда $N \subset \mathbf{W}_2^{2m+s}$. Множество элементов $u \in \mathbf{W}_2^{2m}(\text{гр}) \supset \mathbf{W}_2^{2m+s}$, для которых $(u, N)_0=0$, обозначим $M^{2m+s}(\text{гр})$. Аналогично через M^s обозначим множество тех $f \in \mathbf{W}_2^s$, для которых $(f, N)_0=0$. Подобным образом определяются и $M^{*2m+s}(\text{гр})^+$, M^{*s} по $\mathbf{W}_2^{2m}(\text{гр})^+$, N^*.

По положительным пространствам $\mathbf{W}_2^{\prime s}=M^s$, $\mathbf{W}_2^{\prime\prime 2m+s}=M^{*2m+s}(\text{гр})^+$ и нулевому L_2 построим пространства с отрицательной нормой $\mathbf{W}_2^{\prime -s}$, $\mathbf{W}_2^{\prime\prime -2m-s}$.

Теорема 3. *Рассмотрим отображение* $\Lambda: u \rightarrow Au$ ($u \in M^{2m+s}(\text{гр})$, $s \geqslant 0$) *как оператор, действующий в одной из следующих пар пространств*:

$$M^{2m+s}(\text{гр}) \rightarrow M^{*s}, \quad \mathbf{W}_2^{\prime -s} \rightarrow \mathbf{W}_2^{\prime\prime -2m-s}.$$

Тогда для первой пары пространств Λ, *а для второй пары пространств его замыкание* $\overline{\Lambda}$ *является гомеоморфизмом между пространствами указанных пар. Аналогичное утверждение имеет место для оператора* A^+.

5°. Рассмотрим задачу с неоднородными граничными условиями и условиями сопряжения:

$$\begin{aligned} &Au=f \in \mathbf{W}_2^s, \quad s \geqslant 0; \\ &[B_k u]_\gamma=\varphi_k \in C^{2m-m_k-s}(\gamma), \quad k=1, \ldots, 2m; \\ &B_j^3 u|_\Gamma=\psi_j \in C^{2m-m_j^3+s}(\Gamma), \quad j=1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{8}$$

Если системы операторов (2) нормальны, а коэффициенты их достаточно гладки, то можно найти такую функцию $u_0 \in W_2^{2m+s}$, что $[B_k u_0]_\gamma = \varphi$ $B_j^3 u_0|_\Gamma = \psi_j$; тогда для $w = u - u_0$ мы будем иметь задачу с однородными условиями на Γ и γ и правой частью $f_1 = f - Au_0$; для этой задачи справедливо все изложенное выше.

Авторы выражают искреннюю благодарность Ю. М. Березанскому за постановку вопроса и обсуждение результатов.

Станиславский государственный педагогический институт

Дрогобычский государственный педагогический институт им. Ив. Я. Франко

Поступило 20 VII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Олейник, ДАН, 124, №6 (1959) [2] О. А. Олейник, УМН, 14, № 5 (1960). [3] И. А. Шишмарев, ДАН, 131, № 2 (1960). [4] В. А. Ильин, И. А. Шишмарев, ДАН, 135, № 4 (1960). [5] И. В. Гирсанов, ДАН, 135, № 6 (1960). [6] В. А. Ильин, ДАН, 137, № 1 (1961). [7] И. А. Шишмарев, ДАН, 137, № 1 (1961). [8] В. А. Ильин, ДАН, 137, № 2 (1961). [9] О. А. Олейник, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 1 (1961). [10] Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, ДАН, 146, № 6 (1962). [11] Л. Н. Слободецкий, ДАН, 118, № 2 (1958). [12] Л. Н. Слободецкий, Уч. зап. Ленингр. пед. инст. им. А. И. Герцена, 197 (1958). [13] Л. Н. Слободецкий, ДАН, 120, № 3 (1958). [14] M. Schechter Comm. Pure and Appl. Math., 12, № 3 (1959); Сборн. пер. Математика, 4, № 5, 1960. [15] M. Schechter, Comm. Pure and Appl. Math., 12, № 4 (1959). Сборн. пер. Математика, 4, № 6, 1960. [16] M. Schechter, Ann. of Math., 72, №3 (1960). [17] Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, ДАН, 148, № 3 (1963). [18] M. Schechter, Comm. Pure and Appl. Math., 12, № 1 (1959). [19] L. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., 8, № 4 (1955). [20] F. E. Browder, Comm. Pure and Appl. Math., 9, 351 (1956).