УДК 517.946

И. А. Коваленко, Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель

Функция Грина общих неоднородных граничных задач для систем, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу

Матрица Грина в случае однородных граничных задач для систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу, построена в [1, 2]; там же получены ее оценки в равномерной норме. В данной работе построена матрица Грина общих неоднородных граничных задач для таких систем. Наша методика отлична от применяемой в [1, 2], она является дальнейшим развитием методики работ [3—5] и использует теорему о полном наборе изоморфизмов [6]. В работе получены также оценки матрицы Грина в соболевских нормах. Обозначения пространств в данной работе — такие же, как в [6].

1. Пусть $G \subset R^n$ — ограниченная область, γ — ее граница. В $\overline{G}$ рассматривается эллиптическая в смысле Дуглиса — Ниренберга система уравнений

$$l(x,D)u(x)\overset{\text{def}}{=}(l_{ij}(x,D))_{i,j=1,\dots,N}u(x)=f(x), \tag{1}$$

$$\operatorname{ord} l_{ij}(x,D)\leqslant s_i+t_j,\ l_{ij}(x,D)\equiv 0 \text{ при } s_i+t_j<0$$

$$(t_1\geqslant\dots\geqslant t_N\geqslant 0;\quad 0=s_1\geqslant\dots\geqslant s_N);$$

здесь $u(x)$, $f(x)$ — функциональные столбцы высоты N. На γ задано $m=1/2(s_1+t_1+\dots+s_N+t_N)$ граничных условий

$$b(x,D)u(x)\overset{\text{def}}{=}(b_{ij}(x,D))_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,N}u(x)=\varphi(x)\quad(x\in\gamma), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — функциональный столбец высоты m, а $\operatorname{ord} b_{ij}(x,D)\leqslant\sigma_i+t_j$, $b_{ij}(x,D)=0$ при $\sigma_i+t_j<0$ ($\sigma_1,\dots,\sigma_m$ — целые числа). Будем предполагать также, что выполнены условия дополнительности. Таким образом, (1), (2) — эллиптическая граничная задача. Для простоты будем предполагать, что поверхность γ, а также коэффициенты всех рассматриваемых выражений бесконечно гладки. Тогда замыкание A_s $(s\in R)$ отображения $u\to(lu,bu)$ $(u\in(C^\infty(G))^N)$ — нетеров оператор в паре пространств (см. [6])

$$A_s:\tilde H_\tau^{T+s}(G)\overset{\text{def}}{=}\prod_{j=1}^{N}\tilde H_{\tau_j}^{t_j+s}(G)\to\tilde H^s(G,\gamma)\overset{\text{def}}{=}\prod_{i=1}^{N}\tilde H_{h-s_i}^{s-s_i}(G)\times\prod_{k=1}^{m}H^{s-\sigma_k-\frac{1}{2}}(\gamma) \tag{3}$$

$$(h=\max\{0,\sigma_1+1,\dots,\sigma_m+1\},\ \tau_j=t_j+h).$$

При этом ядро $\mathfrak{N}$ и коядро $\mathfrak{M}^+$ оператора A_s не зависят от s. Сужение оператора A_s устанавливает изоморфизм между соответствующими подпространствами пространств (3), имеющими конечные дефекты, не зависящие от s.

Теорема 1. *Существуют матрицы* $R^0(x,y)=(R^0_{ji}(x,y))_{j,i=1,\dots,N}$

$$(x,y\in\overline G),\ R^1(x,y)=(R_{j,ik}(x,y))_{\substack{j=1,\dots,N\\ i:h-s_i>0,\ k=1,\dots,h-s_i}},$$

$(x\in\overline G,\ y\in\gamma)$, $R^2(x,y)=(R_{ji}(x,y))_{\substack{j=1,\dots,N\\ i=1,\dots,m}}$ $(x\in\overline G,\ y\in\gamma)$, *обладающие следующими свойствами: i-й столбец* $R^0_i(\cdot,y)$ $(i=1,\dots,N)$ *матрицы* $R^0(\cdot,y)$ — *непрерывная вектор-функция от* $y\in\overline G$ *со значениями в* $\tilde H_\tau^{T+s_i-q}(G)$ $\left(q>\frac{n}{2}\right)$, *ik-й столбец* $R_{ik}(\cdot,y)=(R_{1,ik}(\cdot,y),\dots,R_{N,ik}(\cdot,y))$ *матрицы* $R_{j,ik}(\cdot,y)$ — *непрерывная вектор-функция от* $y\in\gamma$ *со значениями в* $\tilde H_\tau^{T+s_i+k-q}(G)$, *а h-й столбец* $R_h(\cdot,y)$ $(h=1,\dots,m)$ *матрицы* $R^2(\cdot,y)$ — *непрерывная вектор-функция от* $y\in\gamma$ *со значениями в* $\tilde H_\tau^{T+\sigma_h-q+1}(G)$; *при этом для каждой функции* $F=(f,\varphi)=(f_1,\dots,f_N,\varphi_1,\dots,\varphi_m)\in H^s(G,\gamma)$ (*см.* (3)) $(s\geqslant h)$, *входящей в* $R(A_s)$, *функция* $(u=(u_1,\dots,u_N))$

$$u_j(x)=\sum_{i=1}^{N}\int_G R^0_{ji}(x,y)f_{i0}(y)\,dy+$$

$$+\sum_{i:h-s_i>0}\sum_{k=1}^{h-s_i}\int_\gamma R_{j,ik}(x,y)f_{ik}(y)\,dy+\sum_{h=1}^{m}\int_\gamma R_{jh}(x,y)\varphi_h(y)\,dy \tag{4}$$

— *решение из* $H^{T+s}(G)$ *задачи* (1), (2), *ортогональное в* $(L_2(G))^N$ *к* $\mathfrak{N}$. *Здесь* $f_{i0}=f_i$, $f_{ik}=D_\nu^{k-1}f_i|_\gamma$; *интегралы в формуле* (4) *понимаются как интегралы от векторнозначных функций в соответствующих пространствах* (*см., например*, [7], *п.* 3.7). *Матрицу* $R=(R^0, R^1, R^2)$ *назовем матрицей Грина задачи* (1), (2).

Доказательство. Пусть для простоты дефект отсутствует: $\mathfrak{N}=\{0\}$, $\mathfrak{M}^+=\{0\}$. Тогда матрицу $R^0(x, y)\,(x, y\in\overline{G})$ определим как решение задачи

$$l(x, D_x)\, R^0(x, y)=\delta(x-y)\, I_N \quad (x, y\in\overline{G}),$$

$$D_{\nu_x}^{k-1}(l(x, D_x)\, R^0(x, y))_i=0 \ \ (x\in\gamma,\ y\in\overline{G};\quad i: h-s_i>0;\ k=1, \ldots, h-s_i), \tag{5}$$

$$b(x, D_x)\, R^0(x, y)=0 \quad (x\in\gamma,\ y\in\overline{G});$$

здесь I_N — единичная матрица порядка N. Поскольку $\delta(x-y)$ — непрерывная вектор-функция от $y\in\overline{G}$ со значениями в $H^{-q}(G)\left(q>\frac{n}{2}\right)$ ([8], гл. 1, лемма 3.1), то по теореме о полном наборе изоморфизмов (см. [6]) i-й столбец матрицы $R^0(\cdot, y)$ — непрерывная вектор-функция от $y\in\overline{G}$ со значениями в $\widetilde{H}_{\tau}^{T+s_i-q}(G)$. Аналогично, матрицу $R^1(x, y)$ определим как решение задачи

$$l(x, D_x)\, R^1(x, y)=0 \quad (x\in\overline{G},\ y\in\gamma),$$

$$D_{\nu_x}^{p-1}(l(x, D_x)\, R_{ik}(x, y))_r=\widehat{\delta}(x-y)\,\delta_{rp, ik}\ (x, y\in\gamma;\ r: h-s_r>0;$$

$$p=1, \ldots, h-s_r), \tag{6}$$

$$b(x, D_x)\, R^1(x, y)=0 \quad (x, y\in\gamma);$$

здесь $\widehat{\delta}(x-y)$ — дельта-функция на γ: $\int\limits_{\gamma}\widehat{\delta}(x-y)\, g(y)\, dy=g(x) \quad (x\in\gamma)$,

$$\delta_{rp, ik}=\begin{cases}1 \text{ при } r=i,\ p=k,\\ 0 \text{ во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Наконец, $R^2(x, y)$ определим как решение задачи

$$l(x, D_x)\, R^2(x, y)=0 \quad (x\in\overline{G},\ y\in\gamma),$$

$$D_{\nu_x}^{p-1}(l(x, D_x)\, R^2(x, y))_r=0\,(x, y\in\gamma; r: h-s_r>0;\ p=1, \ldots, h-s_r), \tag{7}$$

$$b(x, D_x)\, R^2(x, y)=\widehat{\delta}(x-y)\, I_m \quad (x, y\in\gamma).$$

Учитывая, что $\widehat{\delta}(x-y)$ — непрерывная вектор-функция от $y\in\gamma$ со значениями в $H^{-q+\frac{1}{2}}(\gamma)$ (см. [5]), по теореме о полном наборе изоморфизмов (см. [6]), как и выше, получаем указанные в теореме свойства гладкости этих матриц. Поскольку в (4) входят интегралы от векторнозначных функций, то непосредственной подстановкой в уравнения и граничные условия легко убедиться в том, что формула (4) дает решение задачи (1), (2).

Если дефект отличен от нуля, то надо векторы правых частей в (5)—(7) заменить их проекциями на $R(A_s)$, а решения этих задач выбрать ортогональными к $\mathfrak{N}$.

2. Изучим свойства гладкости матрицы Грина.

Теорема 2. а) *Элементы* $R_{ji}^0(\cdot, y)=R_{ji}^0(x, y)\ \ (i, j=1, \ldots, N)$ *матрицы* $R^0(x, y)$ — *непрерывные по Гельдеру* $\left(\text{с показателем } \varkappa<q-\frac{n}{2},\right.$ $\left.\varkappa\leqslant 1\right)$ *функции от* $y\in\overline{G}$ *со значениями в* $\widetilde{H}_{t_j+h}^{t_j+s_i-q}(G)\ \left(q>\frac{n}{2}\right)$. *Более того, существуют все производные вида* $D_y^{\beta}(\omega^{\alpha}(\cdot, y)\, R_{ji}^0(\cdot, y)$ $(\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant 0$, $\beta_j\geqslant 0$ — *целые*), *являющиеся непрерывными по*

Гельдеру функциями от $y \in \bar{G}$ *со значениями в* $\tilde{H}_{t_j+h}^{t_j+s_i-q+|\alpha|-|\beta|}(G)$. *Равномерно относительно* $y, y', y'' \in \bar{G}$ *справедливы неравенства*

$$\| D_y^\beta \omega^\alpha(\cdot, y) R_{ji}^0(\cdot, y) \|_{\tilde{H}_{t_j+h}^{t_j+s_i-q+|\alpha|-|\beta|}(G)} \leqslant C_{\alpha\beta},$$

$$\| D_y^\beta \omega^\alpha(\cdot, y) R_{ji}^0(\cdot, y) |_{y=y'} - D_y^\beta \omega^\alpha(\cdot, y) R_{ji}^0(\cdot, y) |_{y=y''} \|_{\tilde{H}_{t_j+h}^{t_j+s_i-q+|\alpha|-|\beta|}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\alpha\beta} | y' - y'' |^\varkappa \quad \left(0 < \varkappa < q - \frac{n}{2}, \ \varkappa \leqslant 1\right). \tag{8}$$

Здесь $\omega^\alpha(x, y)$ — *достаточно произвольная функция с заданным порядком нуля на диагонали, а именно:* $\omega^\alpha(x, y) = \omega_1^{\alpha_1}(x, y) \ldots \omega_n^{\alpha_n}(x, y)$, $\omega_j(x, y) = (x_j - y_j) \xi(x, y)$ $(j = 1, \ldots, n)$; $\xi(x, y)$ — *произвольная функция из* $C^\infty(\bar{G} \times \bar{G})$, *тождественно равная* 1 *в некоторой окрестности диагонали* $x = y$ *в* $\bar{G} \times \bar{G}$.

б) *Элементы* $R_{j,ik}(\cdot, y) = R_{j,ik}(x, y)$ *матрицы* $R^1(x, y)$ — *непрерывные по Гельдеру* $\left(\text{с показателем } \varkappa < q - \frac{n}{2}, \ \varkappa \leqslant 1\right)$ *функции от* $y \in \gamma$, *со значениями в* $\tilde{H}_{\tau_j}^{t_j+s_i+k-q}(G)$. *Более того, существуют все (тангенциальные) производные вида* $D_y^\beta(\omega^\alpha(\cdot, y) R_{j,ik}(\cdot, y))$, *являющиеся непрерывными по Гельдеру (с тем же показателем) функциями от* $y \in \gamma$ *со значениями в* $\tilde{H}_{\tau_j}^{t_j+s_i+k-q+|\alpha|-|\beta|}(G)$. *Равномерно относительно* $y, y', y'' \in \gamma$ *справедливы оценки, аналогичные* (8).

Аналогичными свойствами обладают элементы матрицы $R^2(x, y)$.

Доказательство в случае отсутствия дефекта получается путем применения теоремы о полном наборе изоморфизмов к задачам (5) — (7); при этом учитывается, что $D_y^\beta \delta(x - y)$ — непрерывная по Гельдеру вектор-функция от $y \in G$ со значениями в $H^{-q-|\beta|}(G)$, а $D_y^\beta \hat{\delta}(x, y)$ — непрерывная по Гельдеру вектор-функция от $y \in \gamma$ со значениями в $H^{-q-|\beta|+\frac{1}{2}}(\gamma)$.

Из теоремы 2 с помощью теорем вложения получаем следующее следствие.

Следствие. а) *Если* $t_j + s_i - n - 1 + |\alpha| \geqslant 0$, *то функция*

$$\Phi(x, y) = D_x^\gamma D_y^\beta(\omega^\alpha(x, y) R^0(x, y)) \ (|\beta| + |\gamma| \leqslant t_j + s_i - n - 1 + |\alpha|)$$

непрерывна по Гельдеру по совокупности переменных в $G \times G$ *с показателем* $\varkappa \leqslant \frac{1}{2}$. *Кроме того,*

$$\begin{gathered} |\Phi(x', y) - \Phi(x'', y)| \leqslant C |x' - x''|^{\varkappa_1}, \\ |\Phi(x, y') - \Phi(x, y'')| \leqslant C | y' - y'' |^{\varkappa_1} \ (\varkappa_1 < 1, x, x', x'', y, y', y'' \in G). \end{gathered} \tag{9}$$

б) *Если* $t_j + s_i + k + |\alpha| - n - 1 \geqslant 0$, *то функция*

$$D_x^\gamma D_y^\beta \omega^\alpha(x, y) R_{j,ik}(x, y) \ (x \in G, \ y \in \gamma; \ |\beta| + |\gamma| \leqslant t_j + s_i + k + |\alpha| - n - 1)$$

непрерывна по Гельдеру по совокупности переменных в $G \times \gamma$ *с показателем* $\varkappa \leqslant \frac{1}{2}$ (D_y^β — *любая тангенциальная производная порядка* β); *справедливы также неравенства, аналогичные* (9).

Аналогичное утверждение справедливо и для матрицы $R^2(x, y)$.

3. Примененная в данной работе методика, как и в [3, 4], позволяет исследовать разность функций Грина задачи (1), (2) и аналогичной (возмущенной) задачи (при этом коэффициенты при старших производных в обеих задачах одни и те же, а возмущение входит лишь в члены низших порядков).

Авторы выражают глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солонников В. А. О матрицах Грина для эллиптических краевых задач. 1.— Тр. Математического ин-та АН СССР, 1970, **110**, с. 109—145.
2. Солонников В. А. О матрицах Грина для эллиптических краевых задач. 2.— Тр. Математического ин-та АН СССР, 1971, **116** с. 181—216.
3. Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А. Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач.— УМЖ, 1967, **19**, № 5, с. 3—32.
4. Коваленко И. А., Ройтберг Я. А. О функции Грина общей эллиптической граничной задачи с псевдодифференциальными граничными условиями.— УМЖ, 1971, **23**, № 6, с. 772—777.
5. Коваленко И. А., Ройтберг Я. А. О граничных значениях обобщенных решений эллиптических систем.— УМЖ, 1975, **27**, № 3, с. 308—319.
6. Ройтберг Я. А. Теорема о полном наборе изоморфизмов для эллиптических по Дуглису—Ниренбергу систем.— УМЖ, 1975, **27**, № 4, с. 544—553.
7. Хилле Э., Филипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 829 с.
8. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К., «Наук. думка», 1965. 798 с.

Черниговский
педагогический институт

Поступила в редакцию
13.VI. 1977 г.