1973 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 25, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.946

Формула Грина и условия разрешимости нелокальных эллиптических граничных задач

Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель

Введение

В данной работе изучается один класс нелокальных задач для эллиптических уравнений произвольного порядка (в том числе и с коэффициентами, терпящими разрывы 1-го рода вдоль некоторого многообразия γ). В этих задачах «граничные условия» задаются линейными дифференциальными соотношениями, связывающими значения искомой функции и ее производных в точках границы Γ данной области с их значениями на γ. Для уравнений и систем 2-го порядка с непрерывными коэффициентами подобная задача была поставлена А. В. Бицадзе и А. А. Самарским [1]; там же предложена методика решения этой задачи, которая иллюстрируется на примере уравнения Лапласа с условиями типа условий Дирихле. В работах [2, 3] развит другой подход к изучению подобных задач, использующий созданную в последние годы общую теорию эллиптических уравнений. В этих работах установлены условия, необходимые и достаточные для нетеровости общих нелокальных граничных задач такого типа для эллиптических уравнений и систем любого порядка. Там изучены также нелокальные задачи с параметром, входящим полиномиально в уравнения и граничные условия; для таких задач найдены алгебраические условия, обеспечивающие однозначную разрешимость при больших значениях параметра. Подобные нелокальные задачи изучали также Н. В. Житарашу и С. Д. Эйдельман [4]. В данной работе вводится понятие нормальных нелокальных граничных условий и выводится формула Грина, что дает возможность сформулировать сопряженную задачу; она оказывается эллиптической задачей того же типа. Это позволяет уточнить условия разрешимости основной и сопряженной задач.

Основные результаты данной работы анонсированы в [5].

Приведем основные обозначения. Для любой ограниченной области Ω n-мерного евклидова пространства R^n с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$ обозначим через $H^{s,p}(\Omega)$ ($s\geqslant 0$—целое, $1<p<\infty$) пространство С. Л. Соболева; $\|\cdot\|_{s,p}$ — норма в этом пространстве. Для натурального s через $B_p^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ обозначим пространство О. В. Бесова — пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $H^{s,p}(\Omega)$ с нормой $\ll\varphi\gg_{s-\frac{1}{p},p}=\inf\|u\|_{s,p}$, где inf берется по всем $u\in H^{s,p}(\Omega)$, равным φ на $\partial\Omega$.

Пусть $G\subset R^n$ — ограниченная область с границей Γ, G_1 — подобласть G с границей γ, не имеющей с Γ общих точек, $G_2=G\setminus\bar{G}_1$. Для произ-

вольного целого $s \geqslant 0$ и мультииндекса $\mu = (m_1, m_2)$ положим*
$H^{s,p}(G_1,G_2) \overset{\mathrm{df}}{=} H^{s,p}(G_1) \times H^{s,r}(G_2), H^{2\mu+s,p}(G_1,G_2) \overset{\mathrm{df}}{=} H^{2m_1+s,p}(G_1) \times H^{2m_2+s,p}(C_2)$. Нормы в этих пространствах будем обозначать соответственно $\|\cdot\|_{s,p}$ и $\|\cdot\|_{2\mu+s,p}$; скалярное произведение в $H^{0,2}(G_1, G_2) = L_2(G_1) \times L_2(G_2)$ и в $L_2(G_r)$ будем обозначать $(\cdot,\cdot)$ (из контекста всегда будет ясно, в каком смысле понимается $\|\cdot\|_{s,p}$ и $(\cdot,\cdot)$). Для любого банахова пространства B через B^k обозначается прямое произведение k пространств $B \times \ldots \times B$; положим также $B_p^{s,k}(\Gamma) = (B_p^s(\Gamma))^k$.

§ 1. Нормальные нелокальные граничные условия и формула Грина для эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами

1. Пусть в G_r $(r = 1, 2)$ заданы линейные дифференциальные выражения

$$L_r(x, D) = \sum_{|\beta| \leqslant 2m_r} a_{r\beta}(x) D^\beta \left(D^\beta = D_1^{\beta_1} \ldots D_n^{\beta_n};\ D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k};\right.$$
$$\left. |\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n \right) \tag{1.1}$$

с комплексными коэффициентами. Положим $m_1 + 2m_2 = l$. На γ задано $2l$ дифференциальных выражений $B_{jr}(x, D)$ $(x \in \gamma;\ j = 1, \ldots, l;\ r = 1, 2)$, а на Γ — l выражений $B_{j3}(x, D)$ $(x \in \Gamma)$:

$$B_{jr}(x, D) = \sum_{|\beta| \leqslant m_{jr}} b_{jr\beta}(x) D^\beta \ (j = 1, \ldots, l;\ r = 1, 2, 3). \tag{1.2}$$

Коэффициенты всех рассматриваемых выражений, а также поверхности Γ и γ предполагаются для простоты бесконечно гладкими.

Предположим, что существует диффеоморфизм $\hat{\alpha}: \Gamma \to \gamma$. Так как Γ и γ бесконечно гладки, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $|t| < \varepsilon$ отображение α: $x + \nu_\Gamma t \to \hat{\alpha} x + \nu_\gamma t$ (ν_Γ — орт внутренней нормали к Γ в точке x, ν_γ — орт внутренней относительно G_1 нормали к γ в точке $\hat{\alpha} x$) является диффеоморфизмом некоторой окрестности $U(\Gamma)$ в R^n поверхности Γ на окрестность $V(\gamma)$ в R^n поверхности γ. Будем в дальнейшем считать, что $U(\Gamma) \cap V(\gamma)$ пусто. Для каждой функции $u(y)$ $(y \in V(\gamma))$ положим $(J_\alpha u)(x) = u(\alpha x)$ $(x \in U(\Gamma))$. Легко видеть, что для любого натурального s оператор J_α изоморфно отображает $H^{s,p}(V(\gamma))$ на $H^{s,p}(U(\Gamma))$, поэтому его сужение (также обозначаемое J_α) изоморфно отображает $B_p^{s-\frac{1}{p}}(\gamma)$ на $B_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ $(s = 1, 2, \ldots)$**.

Пусть $A(y, D_y) = \sum\limits_{|\beta| \leqslant m} a_\beta(y) D_y^\beta \left(D_y^\beta = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_k} \right)^{\beta_k}, y \in V(\gamma) \right)$ — про-

---

* Знак $\overset{\mathrm{df}}{=}$ означает «равно по определению».

** Заметим, что если $s < 0$ — целое, то замыкание J_α оператора $u \to J_\alpha u$ $(u \in C^\infty(\gamma))$ также изоморфно отображает $B_p^{s-\frac{1}{p}}(\gamma) = (B_{p'}^{-\left(s-\frac{1}{p}\right)}(\gamma))^* \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$ на $B_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma) = (B_{p'}^{-\left(s-\frac{1}{p}\right)}(\Gamma))^*$. С помощью интерполяции этот изоморфизм устанавливается и для нецелых s.

извольное линейное дифференциальное выражение с гладкими коэффициентами, $A_0(y,\eta) = \sum_{|\beta|=m} a_\beta(y)\eta^\beta \ (\eta^\beta = \eta_1^{\beta_1}\ldots\eta_n^{\beta_n})$ — его характеристический полином. Тогда

$$J_\alpha(A(y, D_y)\, v(y))(x) = \hat{A}(x, D_x)(J_\alpha v)(x), \tag{1.3}$$

где $\hat{A}(x, D_x)\ (x \in U(\Gamma))$ — дифференциальное выражение того же порядка m, характеристический полином которого $\hat{A}_0(x,\xi)$ выражается через $A_0(y,\eta)$ следующим образом:

$$\hat{A}_0(x, \xi) = A_0(\alpha x, T\xi), \tag{1.4}$$

где T — транспонированная матрица Якоби преобразования α^{-1}. По определению преобразование α переводит точки $x + \nu_\Gamma t\ (|t| < \varepsilon)$, лежащие на нормали к Γ, в точки $\alpha x + \nu_\gamma t$, лежащие на нормали к γ. Поэтому, если вектор $\xi \neq 0$ направлен по нормали (касательной) к Γ в точке x, то $T\xi \neq \neq 0$ направлен по нормали (касательной) к γ в точке αx. В частности, $T\nu_\Gamma = \nu_\gamma$.

В данной работе будет изучаться задача

$$L_r u_r(x) = f_r(x)\ (x \in G_r;\ r = 1, 2), \tag{1.5}$$

$$B_j u \overset{df}{=} J_\alpha(B_{j1}u_1(y) + B_{j2}u_2(y))(x) + B_{j3}u_2(x) = \varphi_j(x)\ (x \in \Gamma,\ y = \alpha x \in \gamma;\ j = 1, \ldots, l;\ l = m_1 + 2m_2), \tag{1.6}$$

или, в более короткой записи,

$$Lu = f;\ Bu|_\Gamma = \varphi. \tag{1.7}$$

2. Определение 1. Матрицу граничных выражений

$$b(x, D) = (b_{jr}(x, D))_{j=1,\ldots,2l;\, r=1,2,3}\ (x \in \gamma \text{ при } r = 1, 2;\ x \in \Gamma \text{ при } r = 3) \tag{1.8}$$

будем называть матрицей Дирихле порядка $2\mu = (2m_1, 2m_2)$, если ее (возможно, после перестановки строк) можно разбить на $2M = \max\{2m_1, 2m_2\}$ блоков* $b_s(x, D) = (b_s^{ir}(x, D))_{i=1,\ldots,l_s;\, r=1,2,3}\ (s = 1, \ldots, 2M)$, где $l_s = 3\ (s = 1, \ldots, 2m = \min\{2m_1, 2m_2\})$, $l_s = 1\ (m_1 > m_2,\ s = 2m_2 + 1, \ldots, 2m_1)$, $l_s = 2\ (m_1 < m_2,\ s = 2m_1 + 1, \ldots, 2m_2)$, так что $\operatorname{ord} b_s^{ir}(x, D) \leqslant 2m_r - s\ (i = 1, \ldots, l_s;\ r = 1, 2, 3;\ m_2 = m_3;\ s = 1, \ldots, 2M)$, $b_s^{ir}(x, D) \equiv 0$, если $2m_r - s < 0$, и при этом в каждой точке $x \in \Gamma$ для каждого $s = 1, \ldots, 2M$ векторы

$$(\hat{b}_{s0}^{i1}(x, \nu_\Gamma),\ \hat{b}_{s0}^{i2}(x, \nu_\Gamma),\ b_{s0}^{i3}(x, \nu_\Gamma))\ (i = 1, \ldots, l_s) \tag{1.9}$$

линейно независимы. Здесь $b_{s0}^{ir}(x, D)$ — главная часть $b_s^{ir}(x, D)$, состоящая лишь из членов порядка $2m_r - s$ (если таких членов нет, то $b_{s0}^{ir}(x, D) \equiv 0$; как и в (1.4), $\hat{b}_{s0}^{ir}(x, \xi) = b_{s0}^{ir}(\alpha x, T\xi)$).

Для матрицы вида (1.8) (с произвольным числом строк) и любого вектора $u = (u_1\, u_2)\ (u_r = u_r(x),\ x \in \bar{G}_r;\ r = 1, 2)$ положим

$$(b(x, D)\, u)_j = (b_{j1}, b_{j2}, b_{j3})\, u \overset{df}{=} J_\alpha(b_{j1}u_1(y) + b_{j2}u_2(y))(x) + b_{j3}u_2(x)\ (x \in \Gamma;\ y = \alpha x \in \gamma). \tag{1.10}$$

---

* Если $m_1 = m_2$, то каждый блок состоит из трех строк, т. е. $l_s = 3\ (s = 1, \ldots, 2M)$.

Примером матрицы Дирихле может служить матрица данных Коши, которая для рассматриваемых уравнений имеет вид

$$\begin{array}{l}\left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix} D_{\nu_\gamma}^{2m_1-1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{\nu_\gamma}^{2m_2-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\nu_\Gamma}^{2m_2-1}\end{pmatrix} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{pmatrix} D_{\nu_\gamma}^{2m_1-2m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\ (D_{\nu_\gamma}^{2m_1-2m_2-1} \quad 0 \quad 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (1 \quad 0 \quad 0)\end{array}\right)(m_1 > m_2); \\ \left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix} D_{\nu_\gamma}^{2m_1-1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{\nu_\gamma}^{2m_2-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\nu_\Gamma}^{2m_2-1}\end{pmatrix} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D_{\nu_\gamma}^{2m_2-2m_1} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\nu_\Gamma}^{2m_2-2m_1}\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & D_{\nu_\gamma}^{2m_2-2m_1-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\nu_\Gamma}^{2m_2-2m_1-1}\end{pmatrix} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}\right)(m_1 < m_2)\end{array} \qquad (1.11)$$

$\left(D_{\nu_\Gamma} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \nu_\Gamma};\ D_{\nu_\gamma} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \nu_\gamma}\right.$; при $m_1 = m_2$ в этих матрицах остаются лишь трехстрочечные блоки$\Big)$. Блоки матриц (1.11), занумерованные сверху вниз, обозначим через $\widetilde{D}_{\nu,1}, \ldots, \widetilde{D}_{\nu,2M}$ $(M = \max\{m_1, m_2\})$. Так, например, $\widetilde{D}_{\nu,2M}$ при $m_1 > m_2$ состоит из одной строки, а при $m_1 < m_2$ — из двух строк; в r-м столбце блока $\widetilde{D}_{\nu,s}$ имеется одна производная $D_\nu^{2m_r-s}$, остальные элементы — нули (при $2m_r - s < 0$ столбец состоит лишь из нулей).

Учитывая линейную независимость векторов (1.9), нетрудно с помощью индукции по s убедиться в том, что

$$\widetilde{D}_{\nu,2M-s}\, u(x) = \sum_{k=0}^{s} R_{sk}(x, D')\, b_{2M-k}(x, D)\, u(x)\ (s = 0, \ldots, 2M-1); \qquad (1.12)$$

здесь $R_{sk}(x, D')\ (k \leqslant s;\ x \in \Gamma)$ — матрица, состоящая из l_{2M-s} строк и l_{2M-k} столбцов, элементы которой — тангенциальные дифференциальные выражения порядков не выше $s - k$, $R_{ss}(x)\ (s = 0, \ldots, 2M-1)$ — невырожденные матрицы; выражение $b_{2M-k}(x, D)\, u(x)$ понимается в смысле равенства

(1.10), смысл левой части аналогичен, например:

$$\widetilde{D}_{\nu,1}u(x) = (D_{\nu_\Gamma}^{2m_1-1}u_1(\alpha x), D_{\nu_\Gamma}^{2m_2-1}u_2(\alpha x), D_{\nu_\Gamma}^{2m_2-1}u_2(x)) =$$

$$= ((J_\alpha D_{\nu_\gamma}^{2m_1-1}u_1(y))(x), (J_\alpha D_{\nu_\gamma}^{2m_2-1}u_2(y))(x), D_{\nu_\Gamma}^{2m_2-1}u_2(x))\ (x \in \Gamma;\ y = \alpha x \in \gamma). \tag{1.13}$$

Ясно также, что подобно (1. 12)

$$B_{2M-s}(x, D)\,u(x) = \sum_{k=0}^{s} \widetilde{R}_{sk}(x, D')\,\widetilde{D}_{\nu,2M-s}u(x)\ (s = 0, \ldots, 2M-1), \tag{1.14}$$

где $\widetilde{R}_{sk}$ — матрицы того же типа, что и R_{sk}.

Лемма 1. *Пусть $b(x, D)$ — матрица Дирихле порядка $2\mu = (2m_1, 2m_2)$, $s \geqslant 0$ — целое. Для любого вектора $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{2M})$, $\varphi_k \in B_p^{k+s-\frac{1}{p},\, l_k}(\Gamma) \overset{\mathrm{df}}{=} (B_p^{k+s-\frac{1}{p}}(\Gamma))^{l_k}$ существует функция $u = (u_1, u_2) \in H^{2\mu+s}(G_1, G_2)$ такая, что $b(x, D)\,u|_\Gamma = \varphi$; оператор $\varphi \to u$ непрерывен из $\prod_{k=1}^{2M} B_p^{k+s-\frac{1}{p}, l_k}(\Gamma)$ в $H^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ (здесь выражение $b(x, D)u$ понимается в смысле* (1.10)).

Доказательство. Пусть вначале $b(x, D)$ — матрица вида (1.11) и для определенности $m_1 > m_2$. Положим $\varphi_k = (\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \varphi_{k3})$ $(k = 1, \ldots, 2m_2)$; $\varphi_k = \varphi_{k1}$ $(k = 2m_2 + 1, \ldots, 2m_1)$. Для доказательства надо найти такие функции $u_1 \in H^{2m_1+s,p}(G_1)$, $u_2 \in H^{2m_2+s,p}(G_2)$, чтобы

$$D_{\nu_\gamma}^{2m_1-k}u_1|_\gamma = \varphi_{k1}(\alpha^{-1}y) \in B_p^{k+s-\frac{1}{p}}(\gamma) \quad (k = 1, \ldots, 2m_1;\quad y \in \gamma),$$

$$D_{\nu_\gamma}^{2m_2-k}u_2|_\gamma = \varphi_{k2}(\alpha^{-1}y) \in B_p^{k+s-\frac{1}{p}}(\gamma);$$

$$D_{\nu_\Gamma}^{2m_2-k}u_2|_\Gamma = \varphi_{k3}(x) \quad (k = 1, \ldots, 2m_2;\quad x \in \Gamma;\ y \in \gamma)$$

(здесь использовано то, что оператор $J_\alpha : u(y) \to u(\alpha x)$ $(y \in \gamma,\ x = \alpha^{-1}y \in \Gamma)$ изоморфно отображает $B_p^t(\gamma)$ на $B_p^t(\Gamma)$. Существование таких u_1, u_2 и непрерывность отображения $\varphi \to u$ хорошо известны (см., например, [6]). Общий случай сводится к рассмотренному с помощью формул (1.12), (1.14) (ср. [7, стр. 454]). ■

3. Лемма 2. *Пусть $b(x, D)$ — матрица Дирихле порядка 2μ. Существует такая матрица из $2M$ блоков*

$$b' = b'(x, D) = \begin{pmatrix} b_1'(x, D) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{2M}'(x, D) \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

где $b_k'(x, D) = (b_k'^{is}(x, D))_{i=1,\ldots,l_k, s=1,2,3}$ — матрица, элементы которой — дифференциальные выражения порядков не выше $k-1$, определенные на γ для первых двух столбцов матрицы и на Γ — для третьего, что имеет место формула Грина

$$(Lu, v) - (u, L^+v) = \sum_{k=1}^{2M} \langle b_k u, b_k' v \rangle_{L_2^{l_k}(\Gamma)} \qquad (u, v \in C^\infty(\overline{G}_1) \times G^\infty(\overline{G}_2)); \tag{1.16}$$

здесь $Lu = (L_1 u_1, L_2 u_2)$; $(Lu, v) = \sum_{r=1}^{2} (L_r u_r, v_r)_{G_r}$; $(u, L^+ v) = \sum_{r=1}^{2} (u_r, L_r^+ v_r)_{G_r}$; L_r^+ — *выражение, формально сопряженное* L_r; *применение матриц* b_k, b'_k *к векторам* u, v *понимается как в* (1.10). *Если при этом выражения* (1.1) *эллиптичны, то для каждого* k *векторы* $(\hat{b}_{k0}^{'i1}(x, \nu_\Gamma),\ \hat{b}_{k0}^{'i2}(x, \nu_\Gamma), b_{k0}^{'i3}(x, \nu_\Gamma))$ $(i = 1, \ldots, l_k)$ *линейно независимы в каждой точке* $x \in \Gamma$. *Если, кроме того,* $m_1 = m_2$, *то* $b'(x, D)$ — *матрица Дирихле того же порядка, что и* $b(x, D)$. *При* $m_1 > m_2$ *выражения* $b_k^{'is}$ *с* $k > 2m_2$, $s = 2, 3$, *содержат дифференцирования порядков не выше* $2m_2 - 1$; *при* $m_1 < m_2$ *выражения* $b_k^{'is}$ *с* $k > 2m_1$, $s = 1$, *содержат дифференцирования порядков не выше* $2m_1 - 1$.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$(Lu, v) = (L_1 u_1, v_1)_{G_1} + (L_2 u_2, v_2)_{G_2} \quad (u_r, v_r \in C^\infty(\bar{C}_r); \quad r = 1, 2)$$

и пусть $v_r = v'_r + v''_r$, где v'_r аннулируется вблизи границы G_r, а

$$\operatorname{supp} v''_1 \subset V(\gamma) \cap \bar{G}_1 \overset{\mathrm{df}}{=} V_1, \quad \operatorname{supp} v''_2 \subset (V(\gamma) \cap \bar{G}_2) \cup (U(\Gamma) \cap \bar{G}_2) \overset{\mathrm{df}}{=} V_2 \cup V_3$$

окрестности $V(\gamma)$, $U(\Gamma)$ введены в п. 1). Ясно, что

$$(L_r u_r, v'_r)_{G_r} = (u_r, L^+{}_r v'_r)_{G_r} \quad (r = 1, 2). \tag{1.17}$$

Далее, $\sum_{r=1}^{2} (L_r u_r, v''_r)_{C_r} = (L_1 u_1, v''_1)_{V_1} + (L_2 u_2, v''_2)_{V_2} + (L_2 u_2, v''_2)_{V_3}$. Произведя в первом и втором слагаемых замену $y = \alpha x$, получим

$$\sum_{r=1}^{2} (L_r u_r, v''_r)_{G_r} = (\hat{L}_1 (J_\alpha u_1), J_\alpha v''_1 |\alpha'|)_{V_3} + (\hat{L}_2 (J_\alpha u_2), J_\alpha v''_2 |\alpha'|)_{\alpha V_2} + (L_2 u_2, v''_2)_{V_3}, \tag{1.18}$$

где $|\alpha'|$ — модуль якобиана преобразования α, а $\alpha V_2 = U(\Gamma) \cap (R^n \setminus G)$. Во втором слагаемом произведем еще замену переменных $\lambda : x - \nu_\Gamma t \to x + \nu_\Gamma t$ $(x \in \Gamma,\ 0 < t < \varepsilon)$ (см. п. 1). Тогда все три интеграла в (1.18) будут распространены по $V_3 = U(\Gamma) \cap \bar{G}_2$.

Пусть x_0 — произвольная точка на Γ; перенесем начало координат в эту точку и пусть $x_n = 0$ — уравнение касательной гиперплоскости к Γ в точке x_0. Для некоторой окрестности $U(x_0) \subset U(\Gamma)$ точки x_0 в R^n можно найти такой диффеоморфизм β множества $U(x_0) \cap \bar{G}_2$ на $G_\delta \overset{\mathrm{df}}{=} \{x : |x| < \delta,\ x_n \geqslant 0\}$, чтобы $U(x_0) \cap \Gamma$ преобразовалось в плоскую часть Γ_δ границы G_δ и чтобы отрезки, ортогональные к Γ, перешли в отрезки, ортогональные к Γ_δ. Пусть теперь функции $J_\alpha v''_r$, v''_2, входящие в (1.18), дополнительно аннулируются вне $U(x_0)$. Запишем сумму интегралов (1.18) в новых (локальных) координатах (как и в п. 1 для α, полагаем $(J_\beta u)(x) = u(\beta x)$, $(J_\lambda u)(x) = u(\lambda x)$; $|\beta'|$ — модуль якобиана преобразования β):

$$\sum_{r=1}^{2} (L_r u_r, v''_r)_{G_r} = (M_1 w_1, z_1)_{G_\delta} + (M_2 w_2, z_2)_{G_\delta} + (M_3 w_3, z_3)_{G_\delta}. \tag{1.19}$$

Здесь $w = (w_1, w_2, w_3) = (J_\beta J_\alpha u_1,\ J_\beta J_\lambda J_\alpha u_2,\ J_\beta u_2)$, $z = (z_1, z_2, z_3) = (J_\beta J_\alpha v''_1,\ J_\beta J_\lambda J_\alpha v''_2,\ J_\beta v''_2)$; $M_1 w_1 = |\beta'| J_\beta (|\alpha'| \hat{L}_1 (J_\alpha u_1))$, $M_2 w_2 = |\beta'| J_\beta J_\lambda (|\alpha'| \hat{L}_2 (J_\alpha u_2))$,

$M_3 w_3 = |\beta'| J_\beta (L_2 u_2)$; дифференциальные выражения M_r имеют вид

$$M_r = M_r(x, D) = \sum_{|\mu|+j\leqslant 2m_r} a_{r\mu j} D'^{\mu} D_n^j \,(D'^{\mu} = D_1^{\mu_1} \ldots D_{n-1}^{\mu_{n-1}};\ r = 1,2,3;\ m_2 = m_3). \tag{1.20}$$

Перебрасывая в (1.19) дифференцирования на z_r, получим (M_r^+ — выражение, формально сопряженное M_r):

$$\sum_{r=1}^{2} (L_r u_r, v_r'')_{G_r} = \sum_{r=1}^{3} (M_r w_r, z_r)_{G_\delta} = \sum_{r=1}^{3} \Big(\sum_{|\mu|+j\leqslant 2m_r} a_{r\mu j}(x) D'^{\mu} D_n^j w_r, z_r \Big)_{G_\delta} =$$

$$= \sum_{r=1}^{3} (w_r, M_r^+ z_r)_{G_\delta} + \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{2m_r} \int_{\Gamma_\delta} D_n^{s-1} w_r \sum_{\substack{|\mu|+j\leqslant 2m_r \\ j\geqslant s}} \overline{D_n^{j-s} D'^{\mu} (\bar{a}_{r\mu j} z_r)}\, dx =$$

$$= \sum_{r=1}^{3} (w_r, M_r^+ z_r)_{G_\delta} + \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{2m_r} \int_{\Gamma_\delta} D_n^{s-1} w_r \overline{T_{sr} z_r}\, dx =$$

$$= \sum_{r=1}^{3} (w_r, M_r^+ z_r)_{G_\delta} + \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{2m_r} \int_{\Gamma_\delta} D_n^{2m_r - s} w_r \overline{T_{2m_r - s+1, r} z_r}\, dx, \tag{1.21}$$

где

$$T_{sr} z_r = \sum_{\substack{|\mu|+j\leqslant 2m_r \\ j\geqslant s}} D_n^{j-s} D'^{\mu} (a_{r\mu j} z_r) \,(\operatorname{ord} T_{sr} = 2m_r - s;\ s = 1, \ldots, 2m_r;\ r = 1,2,3). \tag{1.22}$$

Пусть вначале $m_1 > m_2$. Тогда, изменив в (1.21) порядок суммирования, получим

$$\sum_{r=1}^{3} (M_r w_r, z_r)_{G_\delta} - \sum_{r=1}^{3} (w_r, M_r^+ z_r)_{G_\delta} =$$

$$= \sum_{s=1}^{2M} \sum_{r=1}^{l_s} \int_{\Gamma_\delta} D_n^{2m_r - s} w_r \overline{T_{2m_r - s+1, r} z_r}\, dx = \sum_{s=1}^{2M} \langle \widetilde{D}_{\nu, s} u, T_s z \rangle_{L_2^{l_s}(\Gamma_\delta)}. \tag{1.23}$$

Здесь $\widetilde{D}_{\nu,s}$ — блоки матриц Дирихле (1.11), введенные в конце п. 2, а $\widetilde{D}_{\nu,s} u$ — записанные в локальных координатах выражения типа (1.13);

$$T_s = \begin{pmatrix} T_{2m_1 - s+1,1} & 0 & 0 \\ 0 & T_{2m_2 - s+1,2} & 0 \\ 0 & 0 & T_{2m_3 - s+1,3} \end{pmatrix} \quad (s \leqslant 2m_2),$$

$$T_s = (T_{2m_1 - s+1,1}\ \ 0\ \ 0) \quad (2m_2 < s \leqslant 2m_1); \tag{1.24}$$

напомним, что $l_s = \begin{cases} 3, & s = 1, \ldots, 2m_2, \\ 1, & s = 2m_2 + 1, \ldots, 2m_1 \end{cases}$ при $m_1 \geqslant m_2$. Аналогично при $m_1 < m_2$ из (1.21) следует (после изменения порядка суммирования)

$$\sum_{r=1}^{3} (M_r w_r, z_r)_{G_\delta} - \sum_{r=1} (w_r, M_r^+ z_r)_{G_\delta} =$$

$$= \sum_{s=1}^{2M} \sum_{r=4-l_s}^{3} \int_{\Gamma_\delta} D_n^{2m_r - s} w_r \overline{T_{2m_r - s+1, r} z_r}\, dx = \sum_{s=1}^{2M} \langle \widetilde{D}_{\nu, s} u, T_s z \rangle_{L_2^{l_s}(\Gamma_\delta)}. \tag{1.23'}$$

В этом равенстве $\widetilde{D}_{\nu s}u$ имеют такой же смысл, как и в (1.23); $l_s = \begin{cases} 3, & s=1,\ldots,2m_1, \\ 2, & s=2m_1+1,\ldots,2m_2, \end{cases}$

$$T_s = \begin{pmatrix} T_{2m_1-s+1,1} & 0 & 0 \\ 0 & T_{2m_2-s+1,2} & 0 \\ 0 & 0 & T_{2m_3-s+1,3} \end{pmatrix} \quad (s \leqslant 2m_1),$$

$$T_s = \begin{pmatrix} 0 & T_{2m_2-s+1,2} & 0 \\ 0 & 0 & T_{2m_3-s+1,3} \end{pmatrix} \quad (2m_1 < s \leqslant 2m_2). \tag{1.24'}$$

Воспользовавшись формулами (1.12), из (1.23) (при $m_1 \geqslant m_2$) или (1.23′) (при $m_1 < m_2$) получим, что в обоих случаях

$$\sum_{r=1}^{3}(M_r w_r, z_r)_{G_\delta} - \sum_{r=1}^{3}(w_r, M_r^+ z_r)_{G_\delta} = \sum_{s=1}^{2M}\left\langle \sum_{k=0}^{2M-s} R_{2M-s,k}b_{2M-k}u, T_s z\right\rangle_{L_2^{l_s}(\Gamma_\delta)} =$$

$$= \sum_{s=1}^{2M}\sum_{k=0}^{2M-s}\left\langle b_{2M-k}u, R^+_{2M-s,k}T_s z\right\rangle_{L_2^{l_{2M-k}}(\Gamma_\delta)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2M-1}\left\langle b_{2M-k}u, \sum_{s=1}^{2M-k} R^+_{2M-s,k}T_s z\right\rangle_{L_2^{l_{2M-k}}(\Gamma_\delta)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2M-1}\left\langle b_{2M-k}u, b'_{2M-k}v\right\rangle_{L_2^{l_{2M-k}}(\Gamma_\delta)}, \tag{1.25}$$

где

$$b'_{2M-k}v = b'_{2M-k}(x, D)\,v = \sum_{s=1}^{2M-k} R^+_{2M-s,k}T_s z \quad (k = 0, \ldots, 2M-1). \tag{1.26}$$

Нетрудно видеть, что $b'_k(x, D)$ $(k = 1, \ldots, 2M)$ — матрица, состоящая из l_k строк и 3 столбцов и содержащая дифференцирования порядка не выше $k-1$. При этом, если выражения (1.1) эллиптичны, то ранг матрицы $b'_{k0}(x, \nu)$ равен l_k ($b'_{k0}(x, D)$ — главная часть $b'_k(x, D)$, содержащая лишь дифференцирования порядка $k-1$, $\nu = (0, \ldots, 0, 1)$ — орт нормали к Γ_δ в точке x). Это следует из формул (1.26), если учесть невырожденность матриц $R^+_{kk}(x)$ и формулы (1.22), (1.24) и (1.24′). Формула Грина (1.16) теперь следует из (1.17), (1.19), (1.21) и (1.25) с помощью стандартных рассуждений, использующих разложение единицы. Формулы (1.26) дают выражения для блоков матрицы (1.15) в локальных координатах на Г. ■

Следующая лемма доказывается совершенно аналогично лемме 1 (при $m_1 = m_2$ эти леммы совпадают).

Лемма 3. *Пусть* $b(x, D)$ — *матрица Дирихле порядка* 2μ, *выражения* (1.1) *эллиптичны, а* $b'(x, D)$ — *матрица, определенная в лемме* 2. *Тогда для каждого вектора* $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{2M})$, $\psi_k \in B_p^{2M+s-k+1-\frac{1}{p}, l_k}(\Gamma)$ $(s \geqslant 0)$ *существует функция* $v = (v_1, v_2) \in H^{2M+s,p}(G_1, G_2)$ *такая, что* $b'(x, D)v|_\Gamma = \psi$; *оператор* $\psi \to v$ *непрерывен из* $\prod_{s=1}^{2M} B_p^{2M+s-k+1-\frac{1}{p}, l_k}(\Gamma)$ *в* $H^{2M+ps\cdot}(G_1, G_2)$ ($b'(x, D)v$ *понимается в смысле* (1.10)).

4. Определение 2. Матрицу $B(x, D) = (B_{jr}(x, D))_{j=1,\ldots,l,\, r=1,2,3}$ ($l = m_1 + 2m_2$) граничных выражений (1.2) назовем 2μ-нормальной, если ее можно дополнить новыми строками до матрицы Дирихле порядка 2μ.

Строке с номером j 2μ-нормальной матрицы $B(x, D)$ поставим в соответствие число $-\sigma_j > 0$, равное номеру того блока матрицы Дирихле, в который попадает эта строка. Тогда из определения матрицы Дирихле следует, что $\operatorname{ord} B_{jr}(x, D) \leqslant 2m_r + \sigma_j$ и $B_{jr}(x, D) \equiv 0$ при $2m_r + \sigma_j < 0$. Отметим, что при выделении главной части $B_{jr}(x, D)$ остаются лишь члены, содержащие дифференцирования порядка $2m_r + \sigma_j$.

Обозначим через $C(x, D) = (C_{jr}(x, D))_{j=1,\ldots,l; r=1,2,3}$ матрицу, строки которой дополняют матрицу $B(x, D)$ до матрицы Дирихле порядка 2μ. Матрица $C(x, D)$ также, очевидно, 2μ-нормальна, поэтому, как и для $B(x, D)$, найдем такие целые отрицательные $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_l$, что $\operatorname{ord} C_{jr}(x, D) \leqslant 2m_r + \sigma'_j$ и $C_{jr}(x, D) \equiv 0$ при $2m_r + \sigma'_j < 0$.

Теорема 1. *Пусть матрица $B(x, D)$ граничных выражений* (1.2) *2μ-нормальна, а матрица $C(x, D)$ дополняет ее до матрицы Дирихле порядка 2μ. Тогда существуют матрицы $B'(x, D) = (B'_{jr}(x, D))_{j=1,\ldots,l; r=1,2,3}$, $C'(x, D) = (C'_{jr}(x, D))_{j=1,\ldots,l;\, r=1,2,3}$ ($x \in \gamma$ при $r = 1, 2$; $x \in \Gamma$ при $r = 3$) такие, что имеет место формула Грина*

$$(Lu, v) + \langle Bu, C'v \rangle_{L_2^l(\Gamma)} = (u, L^+ v) + \langle Cu, B'v \rangle_{L_2^l(\Gamma)}$$
$$\left(u = (u_1, u_2) \in H^{2\mu, p}(G_1, G_2);\ v = (v_1 v_2) \in H^{2\mu, p'}(G_1, G_2);\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right). \tag{1.27}$$

Здесь (Lu, v), $(u, L^+ v)$ — такие же, как в лемме 2; Bu, Cu, $B'v$, $C'v$ понимаются в смысле (1.10). *При этом*

$$\operatorname{ord} B'_{jr}(x, D) \leqslant -\sigma'_j - 1; \quad \operatorname{ord} C'_{jr}(x, D) \leqslant -\sigma_j - 1 \ (j = 1, \ldots, l; r = 1, 2, 3). \tag{1.28}$$

Если L_r эллиптичны в $\overline{G}_r$ ($r = 1, 2$), то для каждого j в каждом из неравенств (1.28) *хотя бы при одном r имеет место знак равенства.*

Доказательство. Дополним матрицу $B(x, D)$ строками матрицы $C(x, D)$ до матрицы Дирихле $b(x, D)$ порядка 2μ и перестановкой строк приведем ее к блочному виду (см. определение 1). Тогда согласно лемме 2 существует такая матрица $b'(x, D)$, что для всех указанных u, v имеет место формула (1.16). Представим каждый блок матрицы Дирихле $b(x, D)$ в виде $b_k = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_k \\ \widetilde{c}_k \end{pmatrix}$ ($k = 1, \ldots, 2M$), где $\widetilde{b}_k$ состоит из строк, входящих в матрицу $B(x, D)$, а $\widetilde{c}_k$ — из строк, дописанных при дополнении до матрицы Дирихле (для такого представления, возможно, потребуется изменить нумерацию строк матрицы b_k; может, в частности, оказаться, что $\widetilde{b}_k = b_k$, $\widetilde{c}_k = 0$ или $\widetilde{b}_k = 0$, $\widetilde{c}_k = b_k$). Выделив соответствующие строки матрицы $b'(x, D)$, получим представление $b'_k = \begin{pmatrix} -\widetilde{c}'_k \\ \widetilde{b}'_k \end{pmatrix}$. Обозначим через $B'(x, D)$ ($C'(x, D)$) матрицу, составленную из строк всех матриц $\widetilde{b}'_k(\widetilde{c}'_k)$ ($k = 1, \ldots, 2M$), занумерованных теми же номерами, которые имеют соответствующие им строки матриц $\widetilde{c}_k(\widetilde{b}_k)$ в исходной матрице $C(x, D)$ ($B(x, D)$). Тогда формула (1.16) запишется в виде (1.27). Неравенства

(1.28) следуют из того, что согласно лемме 2 порядки выражений в блоке b'_k не превосходят $k-1$, а $-\sigma_j$ $(-\sigma'_j)$ — это и есть номер тех блоков матриц b и b', в которые входят B_{jr} и C'_{jr} (C_{jr} и B'_{jr}). Последнее утверждение теоремы следует из утверждения леммы 2 о линейной независимости соответствующих векторов. ■

§ 2. Условия разрешимости основной и сопряженной задач

1. Рассмотрим основную задачу (1.7)

$$Lu = f, \quad Bu|_{\Gamma} = \varphi \tag{2.1}$$

с 2μ-нормальной матрицей граничных выражений $B(x, D)$ и сопряженную к ней относительно формулы Грина (1.27) задачу

$$L^{+}v = g, \quad B'v|_{\Gamma} = \psi, \tag{2.2}$$

или подробнее

$$L_r^{+}v_r(x) = g_r(x) \quad (x \in G_r),\ r = 1,\ 2, \tag{2.3}$$

$$B'_j v \overset{\mathrm{df}}{=} J_{\alpha}(B'_{j1}v_1(y) + B'_{j2}v_2(y))(x) + B'_{j3}v_2(x) = \psi_j(x) \tag{2.4}$$

$$(x \in \Gamma,\ y = \alpha x \in \gamma;\ j = 1, \ldots, l;\ l = m_1 + 2m_2).$$

Задачу (2.1) будем предполагать эллиптической (см. [2, 3]). В [2, 3] показано, что условие эллиптичности задачи (2.1) является необходимым и достаточным для нетеровости при любом целом $s \geqslant 0$ и $p \in (1, \infty)$ оператора

$$\Lambda_{s,p} : u \to (Lu, Bu), \tag{2.5}$$

действующего в паре пространств

$$H^{2\mu+s}(G_1, G_2) \to H^{s,p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{s-\sigma_j-\frac{1}{p}}(\Gamma) \overset{\mathrm{df}}{=} H^{s,p}\ (G, \Gamma). \tag{2.6}$$

Это означает следующее: а) ядро $\mathfrak{N}$ оператора $\Lambda_{s,p}$ конечномерно (и не зависит от s и p); б) область значений $\mathfrak{R}(\Lambda_{s,p})$ замкнута в $H^{s,p}(G, \Gamma)$ и имеет в нем конечную коразмерность. Более того, существует конечномерное множество $\mathfrak{M}^{+} \subset C^{\infty}(\bar{G}_1) \times C^{\infty}(\bar{G}_2) \times C^{\infty,l}(\Gamma)$ такое, что элемент $\mathfrak{F} = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_l) \in H^{s,p}(G, \Gamma)$ принадлежит $\mathfrak{R}(\Lambda_{s,p})$ тогда и только тогда, когда

$$(f, v_0) + \sum_{j=1}^{l} \langle \varphi_j, v_j \rangle_{L_2(\Gamma)} = 0 \quad ((v_0, v_1, \ldots, v_l) \in \mathfrak{M}^{+}). \tag{2.7}$$

Нетеровость оператора $\Lambda_{s,p}$ в паре пространств (2,6) эквивалентна справедливости априорной оценки

$$\|u\|_{2\mu,p} \leqslant C(\|\Lambda_{0,p}u\|_{H^{0,p}(G,\Gamma)} + \|u\|_{0,p}) \quad (u \in H^{2\mu,p}(G_1, G_2)). \tag{2.8}$$

Точно так же, как в [2, 3], доказывается, что условие эллиптичности задачи (2.2) является необходимым и достаточным для нетеровости при любом целом $s \geqslant 0$ и $p \in (1, \infty)$ оператора $\Lambda_{s,p}^{+}$: $v \to (L^{+}v, B'v)$, действующего в паре пространств

$$H^{2M+s,p}(G_1, G_2) \to H^{2M+s-2\mu,p}(G_1, G_2) \times \prod_{j=1}^{l} B_p^{2M+s+\sigma'_j+1-\frac{1}{p}}(\Gamma) \overset{\mathrm{df}}{=} H_{+}^{s,p}(G,\ \Gamma). \tag{2.9}$$

2. В этом пункте будет показано, что из эллиптичности основной задачи следует эллиптичность сопряженной.

Лемма 4. *Пусть задача* (2.1) *эллиптична и матрица* B 2μ*-нормальна. Для существования решения* $v \in H^{2M,2}(G_1, G_2)$ *задачи*

$$L^+v = g \in H^{2M-2\mu,2}(G_1, G_2), \quad B'v|_\Gamma = 0 \tag{2.10}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(g, \mathfrak{N}) = 0 \tag{2.11}$$

($\mathfrak{N}$ — *ядро оператора* (2.5)).

Необходимость сразу следует из формулы Грина (1.27). Докажем достаточность. Из эллиптичности задачи (2.1) вытекает неравенство (2.8). Благодаря конечномерности $\mathfrak{N}$ каждый элемент $u \in H^{2\mu,p}(G_1, G_2)$ можно единственным образом представить в виде

$$u = u' + u'', \quad u'' \in \mathfrak{N}, \quad (u', \mathfrak{N}) = 0. \tag{2.12}$$

При этом оператор проектирования $P: u \to u'$ непрерывен в $H^{2\mu,p}(G_1, G_2)$ (ср. [8, стр. 226]). Из (2.8) теперь следует (ср., например, [8, стр. 227]) существование такой константы $c_1 > 0$, что

$$\| u \|_{2\mu,p} \leqslant c_1 \| \Lambda_{0,p} u \|_{H^{0,p}(G,\Gamma)} \quad (u \in PH^{2\mu,p}(G_1, G_2), \tag{2.13}$$

т. е. справедливы следующие неравенства:

$$c^{-1} \| u \|^2_{2\mu,2} \leqslant \| Lu \|^2_{0,2} + \sum_{j=1}^{l} \langle\langle B_j u \rangle\rangle^2_{-\sigma_j - \frac{1}{2},2} \leqslant c \| u \|^2_{2\mu,2} \quad (u \in PH^{2\mu,2}(G_1, G_2)). \tag{2.14}$$

Из (2.14) следует, что выражение

$$\{u, w\} = (Lu, Lw) + \sum_{j=1}^{l} \langle B_j u, B_j w \rangle_{B_2^{-\sigma_j - \frac{1}{2}}(\Gamma)} \tag{2.15}$$

можно принять за новое скалярное произведение в гильбертовом пространстве $PH^{2\mu,2}(G_1, G_2)$. Так как выражение (u, g) является линейным ограниченным функционалом от $u \in PH^{2\mu,2}(G_1, G_2)$, то существует элемент $w \in PH^{2\mu,2}(G_1, G_2)$ такой, что для всех $u \in PH^{2\mu,2}(G_1, G_2)$

$$\{u, w\} = (u, g). \tag{2.16}$$

Из (2.12) и условия $(g, \mathfrak{N}) = 0$ следует, что (2.16) имеет место для всех $u \in H^{2\mu,2}(G_1, G_2)$. Тогда по лемме о повышении гладкости (см. лемму 5) $w \in H^{2\mu+2M,2}(G_1, G_2)$. Положив $Lw = v \in H^{2M,2}(G_1, G_2)$, из (2.15), (2.16) получим $(Lu, v) = (u, g)$ $(u \in H^{2\mu,2}(G_1, G_2),\ Bu|_\Gamma = 0)$. Отсюда и из формулы Грина (1.27)

$$(u, L^+v) + \langle Cu, B'v \rangle_{L_2^l(\Gamma)} = (u, g)\,(u \in H^{2\mu,2}(G_1, G_2), Bu|_\Gamma = 0). \tag{2.17}$$

Считая функции u дополнительно аннулирующимися вблизи γ и Γ, из (2.17) получим, что $L^+v = g$, и поэтому $\langle Cu, B'v \rangle = 0$ $(u \in H^{2\mu,2}(G_1, G_2),$ $Bu|_\Gamma = 0)$. Отсюда благодаря лемме 1 $B'v|_\Gamma = 0$, и функция v является решением задачи (2.10). ■

При доказательстве леммы 4 было использовано следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть задача* (2.1) *эллиптична и* $\sigma_j \leqslant -1$ $(j = 1, \ldots, l)$. *Если элемент* $w \in H^{2\mu,2}(G_1, G_2)$ *при любом* $u \in H^{2\mu,2}(G_1, G_2)$ *удовлетворяет* (2.16) *с* $g \in H^{2M+k-2\mu,2}(G_1, G_2)$, *то* $w \in H^{2M+2\mu+k,2}(G_1, G_2)$.

В случае обычной эллиптической задачи для одного уравнения подобная лемма была доказана Шехтером [9], для случая систем, эллиптических по Петровскому, — авторами [7]. В рассматриваемом случае, как и в [7, 9], доказательство проводится локально. Достаточно доказать, что для каждой точки x_0 существует такая ее окрестность U в $\overline{G}$, в которой $w \in H^{2M+2\mu+k,2}(G_1 \cap U, G_2 \cap U)$. Для $x_0 \in G_1 \cup G_2$ доказательство хорошо известно, поэтому достаточно рассмотреть лишь случай $x_0 \in \gamma \cup \Gamma$. Пусть в (2.16) функция $u = (u_1, u_2)$ аннулируется в некоторой окрестности в G множества $G \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$ (окрестности V_r введены в начале доказательства леммы 2). Тогда (2.16) запишется в виде

$$\int_{V_1} L_1u_1\overline{L_1w_1}dx + \int_{V_2} L_2u_2\overline{L_2w_2}dx + \int_{V_3} L_2u_2\overline{L_2w_2}dx +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l} \langle B_ju, B_jw \rangle_{B_2^{-\sigma_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = (u, g). \qquad (2.18)$$

Затем, как и при доказательстве леммы 2, первый и второй интегралы в (2.18) преобразуем в интегралы по V_3. В результате придем к равенству типа (2.16) для диагонального матричного дифференциального выражения, эллиптического по Петровскому. Теперь для завершения доказательства леммы 5 достаточно применить упомянутую лемму о повышении гладкости из [7]. ■

Теорема 2. *Пусть задача* (2.1) *эллиптична и матрица* $B(x, D)$ *граничных условий* 2 μ-*нормальна. Тогда задача* (2.2) *также эллиптична.*

Доказательство. Для доказательства эллиптичности задачи (2.2) достаточно доказать следующую априорную оценку:

$$\| v \|_{2M,2} \leqslant c(\| \Lambda_{0.2}^{+} v \|_{H_{+}^{0,2}(G,\Gamma)} + \| v \|_{0.2}) \quad (v \in H^{2M,2}(G_1, G_2)),$$

где $\Lambda_{s,p}^{+}$ — оператор, определенный в конце п. 1. Эта оценка легко следует из леммы 4, конечномерности $\mathfrak{N}^+$ и леммы 3 (ср. [7], доказательство теоремы 2). ■

3. Установим теперь условия разрешимости основной и сопряженной задач.

Лемма 6. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2. *Тогда*: а) *для существования решения* $u \in H^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ *задачи* $Lu = f \in H^{s,p}(G_1, G_2)$, $Bu|_\Gamma = 0$ $(s \geqslant 0)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $(f, \mathfrak{N}^+) = 0$ $(\mathfrak{N}^+ = \{v \in H^{2M,p}(G_1, G_2) : \Lambda_{0,p}^{+} v = 0\})$;

б) *для существования решения* $v \in H^{2M+s,p}(G_1, G_2)$ *задачи* $L^+v = g \in H^{2M-2\mu+s,p}(G_1, G_2)$, $B'v|_\Gamma = 0$ $(s \geqslant 0)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(g, \mathfrak{N}) = 0 \quad (\mathfrak{N} = \{u \in H^{2\mu,p}(G_1, G_2) : \Lambda_{0,p} u = 0\}).$$

Действительно, утверждение а) сразу следует из нетеровости оператора (2.5), так как $\mathfrak{N}^+$ совпадает с множеством первых компонент элементов из $\mathfrak{M}^+$; утверждение б) следует из теоремы 2 и леммы 4. ■

Теорема 3. *Пусть задача* (2.1) *эллиптична и матрица* $B(x, D)$ *граничных условий* 2μ-*нормальна. Тогда*: а) *для того, чтобы задача* (2.1) *с* $\mathfrak{F} = (f, \varphi) \in H^{s,p}(G, \Gamma)$ (*см.* (2.6)) *имела решение* $u \in H^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ $(s \geqslant 0)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(f, v) + \langle \varphi, C'v \rangle_{L_2^l(\Gamma)} = 0 \quad (v \in \mathfrak{N}^+). \qquad (2.19)$$

Сужение $\mathfrak{L}_{s,p}$ *оператора* $\Lambda_{s,p}$ (*см.* (2.5)) *на подпространство* $PH^{2\mu+s,p}(G_1, G_2) = \{u \in H^{2\mu+s,p}(G_1, G_2) : (u, \mathfrak{N}) = 0\}$ *пространства* $H^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ *осуществляет изоморфизм*

$$PH^{2\mu+s,p}(G_1, G_2) \to Q^+ H^{s,p}(G, \Gamma). \qquad (2.20)$$

Здесь $Q^+H^{s,p}(G, \Gamma)$ — *подпространство элементов* $\mathfrak{F} = (f, \varphi)$ *пространства* $H^{s,p}(G, \Gamma)$, *удовлетворяющих условию* (2.19); б) *для того чтобы задача* (2.2) *с* $\mathfrak{G} = (g, \psi) \in H_+^{s,p}(G, \Gamma)$ $(s \geqslant 0)$ (см. (2.9)) *имела решение* $v \in H^{2M+s,p}(G_1, G_2)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(u, g) + \langle Cu, \psi \rangle_{L_2^l(\Gamma)} = 0 \quad (u \in \mathfrak{N}). \qquad (2.21)$$

Сужение $\mathfrak{L}_{s,p}^+$ *оператора* $\Lambda_{s,p}^+$ *на подпространство* $P^+H^{2M+s,p}(G_1, G_2) = \{v \in H^{2M+s,p}(G_1, G_2) : (v, \mathfrak{N}^+) = 0\}$ *пространства* $H^{2M+s,p}(G_1, G_2)$ *осуществляет изоморфизм*

$$P^+H^{2M+s,p}(G_1, G_2) \to QH_+^{s,p}(G, \Gamma). \qquad (2.22)$$

Здесь $QH_+^{s,p}(G, \Gamma)$ — *подпространство элементов* $\mathfrak{G} = (g, \psi)$ *пространства* $H_+^{s,p}(G, \Gamma)$, *удовлетворяющих условию* (2.21).

Докажем утверждение а) (второе утверждение доказывается аналогично). Необходимость условия (2.19) сразу следует из формулы Грина (1.27). Достаточность следует из лемм 6 и 1. Действительно, пусть выполнено условие (2.19). По лемме 1 найдем такую $u_0 \in H^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$, что $Bu_0|_\Gamma = \varphi$; тогда из (2.19) и (1.27) следует, что $(f - Lu_0, \mathfrak{N}^+) = 0$ и в силу леммы 6 задача $Lw = f - Lu_0$, $Bw|_\Gamma = 0$ имеет решение $w \in H^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$. Теперь ясно, что функция $u = w + u_0$ является решением задачи (2.1). Оператор $\mathfrak{L}_{s,p}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $PH^{2\mu+s,p}(G_1, G_2)$ на $Q^+H^{s,p}(G, \Gamma)$, поэтому и обратный оператор непрерывен. ■

Авторы глубоко признательны Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, ДАН СССР, т. 185, № 4, 1969.
2. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Об одном классе общих нелокальных эллиптических задач, ДАН СССР, т. 192, № 3, 1970.
3. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем, Сиб. матем. ж., т. 13, № 1, 1972.
4. Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман, О нелокальных граничных задачах для эллиптических уравнений, Математические исследования, т. 6, № 2(20), Кишинев, 1971.
5. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Формула Грина и теоремы о гомеоморфизмах для нелокальных эллиптических граничных задач, ДАН СССР, т. 201, № 5, 1971.
6. Э. Мадженес, Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных, УМН, т. 21, вып. 2, 1966.
7. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения, Матем. сб., т. 78, вып. 3, 1969.
8. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
9. М. Шехтер, Общие граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных, Математика (сб. переводов), т. 4, № 5, 1960.

Поступила 19.II 1971 г.
Черниговский педагогический институт