УДК 517.946

О разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений при наличии степенных особенностей в правых частях

Я. А. Ройтберг

1. Пусть G — ограниченная область пространства E_n, Γ — ее граница. В $\overline{G}$ задано правильно эллиптическое выражение L с комплексными коэффициентами

$$L = \sum_{|\mu| \leqslant 2m} a_\mu (x) D^\mu \tag{1}$$

$$\left(\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n),\ |\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_n;\ \ D^\mu = \prod_{j=1} \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\mu^j} \right).$$

На Γ задано m дифференциальных выражений

$$B_j = \sum_{|\mu| \leqslant m_j} b_{j\mu} (x)\ D^\mu \quad (x \in \Gamma;\quad j = 1, \ldots, m;\quad m_j \leqslant 2m - 1), \tag{2}$$

которые предполагаем нормальными и накрывающими L.

Целью настоящей работы является изучение граничной задачи

$$Lu (x) = f (x)\ (x \in G);\quad B_j u (x) = \varphi_j (x)\ \ (x \in \Gamma;\quad j = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

[короче: $Au(x) = F(x)$ $(A = (L, B_1, \ldots, B_m)$; $F(x) = (f(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)))$] в случае, когда функции $f(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ имеют в точках конечного множества $E \subset \overline{G}$ сколь угодно большие степенные особенности. Коэффициенты выражений (1), (2) и границу Γ для простоты предполагаем бесконечно гладкими, хотя все результаты справедливы при гораздо более слабых предположениях. Ниже существенно используется теорема о полном наборе гомеоморфизмов для эллиптических операторов в пространствах W_p^s $(p > 1)$ [1].

Для случая $p = 2$ эта теорема доказана в [2, 3], а для случая однородных граничных условий и $p = 2$ в [4]. В данной работе используем обозначения и определения работ [1, 2]. Отметим, что эллиптические задачи в случае, когда правые части имеют степенные особенности лишь внутри G, изучались ранее другим способом в работе С. П. Гавели [5].

2. Пусть функция $f(x)$ имеет особенность лишь в точке $x_0 \in \overline{G}$. Перенесем начало координат в эту точку и пусть $f(x) = h(x) f_\alpha(x)$, где $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$ $(|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, $\alpha > 0)$, а $h(x)$ достаточно гладкая в $\overline{G}$ функция. Если $\alpha < n$, то $f_\alpha(x) \in L_p(G)$ $\left(p < \dfrac{n}{\alpha}\right)$ и определяет функционал f_α над $L_{p'}(G)$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\right)$: $(f_\alpha, v) = \displaystyle\int_G f_\alpha(x)\overline{v(x)}dx$, $v \in L_{p'}(G)$. Если $n + k \leqslant \alpha < n + k + 1$ ($k \geqslant 0$ — целое), то определим регуляризацию f_α функции $f_\alpha(x)$ (ср. [5]):

$$(f_\alpha, v) = \int_G f_\alpha(x)\, \overline{\left[v(x) - v(0) - v'_{x_1}(0)\,x_1 - \ldots - \frac{1}{k!}\frac{\partial^k v(0)}{\partial x_n^k}x_n^k\right]}\,dx. \qquad (4)$$

Регуляризацию f функции $f(x) = f_\alpha(x)\,h(x)$ определим так: $(f, v) = (f_\alpha, \overline{h}v)$.

Лемма 1. *Пусть f — определенная выше регуляризация функции $f(x) = f_\alpha(x)\,h(x)$ $(\alpha > 0)$. Тогда*

$$f \in W_p^{-s_1}(G),\ s_1 \geqslant s = \max\left(0, \left[\alpha - \frac{n}{p}\right] + 1\right)^*.$$

Действительно, достаточно доказать, что $f_\alpha \in W_p^{-s}(G)$. Пусть $\alpha \geqslant n$, $k = [\alpha - n]$. Если $v \in W_{p'}^s(G)$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\right)$, то $v \in C^{s-n+\frac{n}{p}-\varepsilon}(\overline{G})$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, а оператор вложения из $W_{p'}^s(G)$ в $C^{s-n+\frac{n}{p}-\varepsilon}(\overline{G})$ непрерывен. Поэтому

$$|(f_\alpha, v)| \leqslant C\int_G |x|^{s-n+\frac{n}{p}-\alpha-\varepsilon}dx\,\|v\|_{s,p'} \leqslant C_1\|v\|_{s,p'}$$

и $f_\alpha \in W_p^{-s}(G)$. Если $0 < \alpha < n$, то $f \in L_q(G)$ $\left(1 < q < \dfrac{n}{\alpha}\right)$ и утверждение леммы следует из того, что по теоремам вложения $W_{p'}^s(G)$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\right)$ непрерывно вкладывается в $L_{q'}(G)$ $\left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1\right)$.

---

* Если t действительное, то $[t]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее t.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ такая же, как в лемме 1. Тогда*

$$x^{\mu} f \in W_p^{-\max(0, s_1 - |\mu|)}(G) \ (x^{\mu} = x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}; \quad (x^{\mu} f, v) = (f, x^{\mu} v)).$$

Как известно [6], всякая другая регуляризация функции $f(x)$ отличается от выбранной нами на функционал, сосредоточенный в точке x^0. Поэтому полезна следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $\delta(x^0)$ — дельта-функция, сосредоточенная в x^0, $D^{\mu}\delta(x^0)$ $(\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n))$ — ее соответствующая производная. Тогда*

$$D^{\mu}\delta(x^0) \in W_p^{-\left(\left[n - \frac{n}{p}\right] + 1 + |\mu|\right)}(G) \ (p > 1).$$

3. Пусть $\varphi(x)$ $(x \in \Gamma)$ имеет особенность лишь в точке x^0. Перенесем начало координат в эту точку и ось x_n направим по внутренней нормали к Γ. Преобразованием координат добьемся, чтобы некоторая окрестность в Γ точки x^0 лежала в плоскости $x_n = 0$. Пусть в этих координатах $\varphi(x) = h(x)\varphi_{\alpha}(x)$, где $\varphi_{\alpha}(x) = \frac{1}{|x|^{\alpha}}$ $(x \in \Gamma)$, а $h(x)$ достаточно гладкая на Γ функция. Если $\alpha < n - 1$, то $\varphi_{\alpha}(x)$ определяет естественным образом функционал $\varphi_{\alpha} : \langle \varphi_{\alpha}, v \rangle = \int\limits_{\Gamma} \varphi_{\alpha} \bar{v}\, dx$, если же $n + k - 1 \leqslant \alpha < n + k$ $(k \geqslant 0$ — целое), то регуляризацию φ_{α} функции $\varphi_{\alpha}(x)$ определяем, подобно (4), формулой

$$\langle \varphi_{\alpha}, v \rangle = \int\limits_{\Gamma} \varphi_{\alpha}(x) \left[v(x) - v(0) - \ldots - \frac{1}{k!} \frac{\partial^k v(0)}{\partial x_{n-1}^k} x_{n-1}^k \right] dx; \tag{5}$$

регуляризацию φ функции $\varphi(x)$ определим так: $\langle \varphi, v \rangle = \langle \varphi_{\alpha}, \bar{h} v \rangle$.

Лемма 4. *Пусть φ — определенная выше регуляризация функции $\varphi(x) = h(x)\varphi_{\alpha}(x)$. Тогда*

$$\varphi \in W_p^{-s_1 - \frac{1}{p}}(\Gamma) \ (p > 1); \ s_1 \geqslant s = \max\left(0, \left[\alpha - \frac{n}{p}\right] + 1\right).$$

Наметим доказательство; ограничимся рассмотрением случая $n - 1 \leqslant \alpha$ $([\alpha - n + 1] = k \geqslant 0)$. Пусть $v \in W_{p'}^{s+1}(G)$, тогда $v \in C^{s+1-n+\frac{n}{p} - \varepsilon}(\bar{G})$ $(\varepsilon > 0$ сколь угодно мало) и

$$\left| v(x) - v(0) - \ldots - \frac{1}{k!} \frac{\partial^k v(0)}{\partial x_{n-1}^k} x_{n-1}^k \right| \leqslant C |x|^{s+1+\frac{n}{p} - n - \varepsilon} \|v\|_{s+1, p'}.$$

Поэтому

$$|\langle \varphi, v \rangle| \leqslant C_1 \langle\langle v \rangle\rangle_{s+1-\frac{1}{p'}, p'} \text{ и } \varphi \in W_p^{-s-\frac{1}{p}}(\Gamma).$$

Лемма 5. *Пусть $\varphi(x)$ такая же, как в лемме 4. Тогда*

$$x^{\mu'} \varphi \in W_p^{-\frac{1}{p} - \max(0, s_1 - |\mu'|)}(\Gamma)$$

$$(\mu' = (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, 0); \quad \langle x^{\mu'} \varphi, v \rangle = \langle \varphi, x^{\mu'} v \rangle).$$

Лемма 6. $D^{\mu'}\delta(x^0) \in W_p^{-\left(\left[n - \frac{n}{p}\right] + |\mu'|\right) - \frac{1}{p}}(\Gamma)$ $(x^0 \in \Gamma)$.

4. Уточним постановку задачи (3). Пусть функция $F(x) = (f(x),$

$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ имеет произвольные степенные особенности в конечном множестве $E \subset \overline{G}$ точек, вне которого $F(x)$ достаточно гладкая. Пусть $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ произвольная регуляризация $F(x)$. Из лемм 1, 3, 4, 6 следует, что $F \in K_p^s \equiv W_p^s(G) \dotplus \sum_{j=1}^{m} W_p^{2m+s-m_j-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ для некоторого, вообще отрицательного s.

Определение. *Функцию* $u \in \widetilde{W}_p^{-\infty} \equiv \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{W}_p^k(G)$ *назовем решением задачи* (3), *если**

$$Au = F\ (A = (L, B_1, \ldots, B_m);\quad u \in \widetilde{W}_p^{-\infty}(G)), \tag{6}$$

где F — *некоторая регуляризация функции* $F(x)$.

Из теоремы о полном наборе гомеоморфизмов [1—3] следует, что задача (6) имеет решение тогда и только тогда, когда $[F, N^+] = 0$. При этом, если $F \in K_p^s$, то решение $u \in \widetilde{W}_p^{s+2m}(G)$. Далее, решение u будет также слабым обобщенным решением [2]: равенство

$$(u, L^+v) + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u,\ B_j' v\rangle = (f, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j,\ C_j' v\rangle \tag{7}$$

справедливо для всех $v \in C^\infty(\overline{G})$. Если считать, что функции v в (7) дополнительно аннулируются в окрестностях особых точек, то из теоремы о локальном повышении гладкости слабых обобщенных решений [1, 2] следует, что вне особых точек решение u задачи (6) достаточно гладкое и удовлетворяет равенствам (3) в классическом смысле. Справедлива

Теорема 1. *Для разрешимости задачи* (3) *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая регуляризация* F *функции* $F(x)$, *для которой* $[F, N^+] = 0$. *В частности, если* $N^+ = 0$, *то каждой регуляризации* F *функции* $F(x)$ *будет соответствовать решение задачи* (3).

Заметим, что решения, соответствующие различным регуляризациям функции $F(x)$, имеют, вообще говоря, различный порядок особенностей вблизи особых точек.

5. Пусть $N^+ \neq 0$; $v_1, \ldots, v_q$ — базис в N^+, а F — некоторая регуляризация функции $F(x)$. Пусть $[F, N^+] \neq 0$ и

$$[F, v_j] \equiv (f, v_j) + \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi_k,\ C_k' v_j\rangle = t_j\ (j = 1, \ldots, q). \tag{8}$$

Предположим, что ранг прямоугольной матрицы ($x^1 \in E$)

$$(v_j(x^1), D_1 v_j(x^1), \ldots, D_n v_j(x^1), D_1^2 v_j(x^1), D_1 D_2 v_j(x^1), \ldots, D_n^2 v_j(x^1), D_1^3 v_j(x^1), \ldots) \tag{9}$$

$$\left(j = 1, \ldots, q;\ D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

равен q. Выделим отличный от нуля минор q-го порядка этой матрицы $\det (D^{\alpha_k} v_j(x^1))_{k,j=1,\ldots,q} \neq 0$ и положим $f_1 = \sum_{j=1}^{q} l_j D^{\alpha_j}\delta(x^1)$. Постоянные $l_1, \ldots, l_q$ подберем так, чтобы $(f_1, v_j) = -t_j$ $(j = 1, \ldots, q)$. Тогда $F_1 = F + (f_1, 0, \ldots, 0)$ также будет регуляризацией функции $F(x)$, только $[F_1, N^+] = 0$. Справедлива

* Применение дифференциальных выражений к функции $u \in \widetilde{W}_p^s(G)$ понимается в смысле, указанном в замечании 1 работы [2].

Теорема 2. *Пусть $N^+ \neq 0$. Для того чтобы задача* (3) *была разрешима для любой функции $F(x)$, имеющей степенную особенность лишь в точке $x^1 \in \overline{G}$, необходимо и достаточно, чтобы не существовало отличной от нуля функции $v(x) \in N^+$, для которой $D^\mu v(x^1) = 0$ $(|\mu| \geqslant 0)$.*

Доказательство теоремы следует из того, что тогда и только тогда не существует отличной от нуля функции $v(x) \in N^+$, для которой $D^\mu v(x^1) = 0$ $(|\mu| \geqslant 0)$, когда ранг матрицы (9) равен q.

Если $E = \{x^1, \ldots, x^l\}$, то вместо матрицы (9) составим матрицу, состоящую из lq строк:

$$(v_j(x^k), D_1 v_j(x^k), \ldots, D_n v_j(x^k), D_1^2 v_j(x^k), D_1 D_2 v_j(x^k), \ldots, D_n^2 v_j(x^k), \ldots) \quad (10)$$
$$(j = 1, \ldots, q; \; k = 1, \ldots, l).$$

Теорема 2′. *Пусть $N^+ \neq 0$. Для того чтобы задача* (3) *была разрешима для любой функции $F(x)$, имеющей степенные особенности в точках $x^1, \ldots, x^l \in G$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы* (10) *был не менее q.*

6. Покажем, что теорема о полном наборе гомеоморфизмов в сочетании с леммами 2, 5 дает возможность установить порядок особенности найденного решения задачи (3). Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ достаточно гладкие, а функция $f(x)$ имеет особенность лишь в одной точке — в начале координат: $f(x) = \dfrac{h(x)}{|x|^\alpha}$ $(\alpha > 0,\ h(x) \in C^\infty(\overline{G}))$.

Пусть $F = (f_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — та регуляризация $F(x)$, которая определена в пунктах 2, 3, и пусть $[F, N^+] = 0$. Согласно лемме 1 $F \in K_p^{-\max(0,s)}$ $\left(s = \left[\alpha - \dfrac{n}{p}\right] + 1\right)$. Поэтому по теореме о гомеоморфизмах решение задачи (3) $u \in \widetilde{W}_p^{2m - \max(0,s)}(G)$. Если $l = 2m - \max(0, s) - \dfrac{n}{p} > 0$, то по теоремам вложения u непрерывна в $\overline{G}$. Если $l \leqslant 0$, то вычисляем $A(x_i u)$ $(i = 1, \ldots, n)$, проносим x_i и с помощью леммы 2 находим, что $A(x_i u) \in K_p^{-\max(0, s-1)}$. Снова применяя теорему о гомеоморфизмах, найдем, что $x_i u \in \widetilde{W}_p^{2m - \max(0, s-1)}(G)$.

Если $l_1 = 2m - \max(0, s-1) - \dfrac{n}{p} > 0$, то $x_i u$ непрерывна в $\overline{G}$; если же $l_1 \leqslant 0$, то вычисляем $A(x^\mu u)$ $(|\mu| = 2)$ и продолжаем предыдущие рассуждения. Найдем такое наименьшее неотрицательное число k, чтобы $2m - \max(0, s-k) - \dfrac{n}{p} > 0$, тогда $x^\mu u \in C(\overline{G})$ $(|\mu| = k)$*.

7. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда функция $F(x)$ имеет особенность лишь в точке $x_0 \in \overline{G}$. Перенесем начало координат в точку x_0 и пусть $f(x) = \dfrac{h(x)}{|x|^\alpha}$. Регуляризацию f_1 функции $f(x)$ назовем допустимой, если

$$f_1 \in W_p^{-\max(0,s)}(G) \left(s = \left[\alpha - \frac{n}{p}\right] + 1\right).$$

В частности, регуляризация f, построенная в 2, допустима. Если $n + k \leqslant \alpha < n + k + 1$, то допустимой будет регуляризация $f_1 = f +$

---

* Выбирая $p > n$ так, чтобы $s = [\alpha]$, легко найдем, что $|D^\mu u(x)| \leqslant |\tilde{x}|^{[\alpha]+1-2m+|\mu|-\theta}$ $\left(|\mu| \leqslant 2m - 1,\ 0 < \theta < 1 - \dfrac{n}{p}\right)$.

$+\sum_{|\mu|\leqslant k} C_\mu D^\mu \delta(0)$, зависящая от произвольных констант C_μ, а регуляризация $f_1 + D^\mu\delta(0)$ ($|\mu| > k$) уже не будет допустимой. Ниже рассмотрим лишь допустимые регуляризации функции $f(x)$.

Выбор допустимых регуляризаций означает, что мы ограничиваем порядок особенности искомого решения в особой точке. Решения задачи (3), соответствующие допустимым регуляризациям $f(x)$, назовем допустимыми. Если $f(x) = \frac{h(x)}{|x|^\alpha}$, то решение u является допустимым тогда и только тогда, когда $u \in \widetilde{W}_p^{2m-\max\{0,s\}}(G)$ $\left(s = \left[\alpha - \frac{n}{p}\right] + 1\right)$.

Пусть для простоты $N = N^+ = 0$. Тогда каждой допустимой регуляризации функции $f(x)$ соответствует единственное допустимое решение. Если $\alpha < n$, то допустимая регуляризация функции $f(x)$ определяется однозначно, и задача (3) имеет единственное допустимое решение. Если $\alpha \geqslant n$, то допустимая регуляризация функции $f(x)$ определяется неоднозначно, поэтому задача (3) даже в классе допустимых решений имеет неединственное решение. Чтобы из множества допустимых решений задачи (3) выбрать лишь одно, надо в точке x_0 задать дополнительные «граничные» условия. Точный результат здесь сформулируем лишь для случая, когда $n \leqslant \alpha < n+1$. Пусть $G_\varrho \subset G$ — шар $|x| < \varrho$, Γ_ϱ — его граница. Если $u, v \in C^{2m}\overline{(G \setminus G_\varrho)}$ и v аннулируется вблизи границы Γ области G, то с помощью интегрирования по частям легко получим, что

$$(u, L^+v)_{G\setminus G_\varrho} - (Lu, v)_{G\setminus G_\varrho} = \sum_{j=0}^{2m-1} \langle l_{2m-j,\varrho}(x, D)\, u, \frac{\partial^j v}{\partial \nu^j} \rangle \Gamma_\varrho \ (\nu \text{— нормаль к } \Gamma_\varrho), \quad (11)$$

где $l_{2m-j,\varrho}(x, D)$ — дифференциальное выражение порядка $2m - j - 1$.

Теорема 3. *Пусть* $N = N^+ = 0$, *а* $f(x) = \frac{h(x)}{|x|^\alpha}$ $(n \leqslant \alpha < n+1)$. *Тогда задача* (3) *имеет единственное допустимое решение, удовлетворяющее условию*

$$\lim_{\varrho\to 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varrho} l_{2m,\varrho}(x, D)\, u(x)\, dx - \int_{G\setminus G_\varrho} \frac{h(0)}{|x|^\alpha}\, dx + C \right\} = 0. \quad (12)$$

Доказательство следует из того, что допустимой регуляризации $f_C = f + C\delta(0)$ соответствует единственное допустимое решение u_C; из (7) и (11) следует, что u_C удовлетворяет соотношению (12). Подобным образом можно сформулировать условия единственности допустимого решения, когда $n + k \leqslant \alpha < n + k + 1$. Если $N^+ \neq 0$, то допустимое решение, удовлетворяющее (12), существует тогда и только тогда, когда $[F_C, N^+] = 0$ $(F_C = (f_C, \varphi_1, \ldots, \varphi_m))$. Если $N \neq 0$, то допустимое решение, удовлетворяющее (12), определяется с точностью до произвольного слагаемого из N.

8. Полученные выше результаты переносятся на уравнения с разрывными коэффициентами [1], а также на однородные эллиптические системы с нормальными граничными условиями. Приведенная методика применима также в случае, когда $F(x)$ имеет особенности вдоль многообразий размерности $k < n$.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за постоянное внимание к данной работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений, УМЖ, т. 17, № 5, 1965.
2. Я. А. Ройтберг, Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964, 798—801.
3. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, изд-во, «Наукова думка», К., 1965.
4. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963, 745—748.
5. С. П. Гавеля, О решениях линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений с разрывным свободным членом, УМЖ, т. 12, № 3, 1960.
6. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1959.

Поступила 24.V 1966 г.

Черниговский педагогический ин-т