УДК 517.946

О граничных значениях обобщенных решений эллиптических систем

И. А. Коваленко, Я. А. Ройтберг

Известно, что если аналитическая в круге функция имеет при подходе к границе степенной рост, то для нее существуют обобщенные граничные значения, по которым можно с помощью ядер Пуассона восстановить функцию. В [1] показано, что этим свойством обладают также обобщенные решения эллиптических уравнений. В данной работе будут изучены граничные значения обобщенных решений эллиптической по Петровскому системы. Оказывается, что если для такой системы существует эллиптическая граничная задача, то остаются справедливыми результаты, полученные в скалярном случае.

В работе доказана теорема о следах, из которой следуют, в частности, матричные аналоги теорем Лионса — Мадженеса [2] (см. также [3]): построена матрица Грина эллиптической граничной задачи для рассматриваемой системы и показано, что с помощью ее можно по обобщенным граничным значениям обобщенных решений восстановить решения. Применяемая методика позволяет также получить точные оценки в весовых классах обобщенных решений эллиптических по Петровскому систем. В скалярном случае такие оценки получены в [4—7].

Данную работу можно рассматривать как продолжение работы [1], основные результаты и обозначения которой здесь существенно используются. В работе используется также теорема о полном наборе изоморфизмов для эллиптических систем, доказанная в [8—10].

§ 1. Основные обозначения. Теорема о полном наборе изоморфизмов

1.1. Пусть G — ограниченная область n-мерного евклидова пространства R^n, ∂G — ее граница, которую для простоты предполагаем бесконечно гладкой. Если $s \geqslant 0$, то $H^s(G)$, $H^s(\partial G)$ — пространства Соболева — Слободецкого, $H^{-s}(G)$, $H^{-s}(\partial G)$ — сопряженные им пространства относительно расширений скалярных произведений $(.,.)$, $\langle .,. \rangle$ соответственно в $L_2(G)$, $L_2(\partial G)$: $\|\cdot\|_t$, $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_t$ $(t \in R^1)$ — нормы этих пространств. Для любого мультииндекса $\alpha =$
$$= (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)\ (\alpha_j \in R^1) \text{ положим } H^\alpha(G) = \prod_{j=1}^N H^{\alpha_j}(G),\ \|u\|_\alpha = \left(\sum_{j=1}^N \|u_j\|^2_{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{2}} -$$
норма этого пространства. Если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_N = a$, то полагаем $H^\alpha(G) = H^{a,N}(G)$, $\|u\|_{a,N}$ — норма в $H^{a,N}(G)$. Подобным образом определяем пространства $H^\alpha(\partial G)$, $H^{a,N}(\partial G)$, нормы в этих пространствах обозначаем соответ-

ственно через $\langle\langle u\rangle\rangle_{\alpha}$, $\langle\langle u\rangle\rangle_{a,N}$. Положим также $C^{\infty,N}(\overline{G}) \stackrel{\text{def}}{=} (G^{\infty}(\overline{G}))^{N}$, $C^{\infty,N}(\partial G) \stackrel{\text{def}}{=} (C^{\infty}(\partial G))^{N}$.

Пусть l — произвольное целое, а r — натуральное число. Обозначим (см. [1, 11], также [12, стр. 245]) через $\widetilde{H}^{l}_{r}(G)$ пополнение множества $C^{\infty}(\overline{G})$ по норме

$$\| w \|_{\widetilde{H}^{l}_{r}(G)} = \left(\| w \|_{l}^{2} + \sum_{j=1}^{r} \langle\langle D_{\nu}^{j-1} w \rangle\rangle^{2}_{l-j+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

$\left(D_{\nu} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \nu},\ \nu\text{ — орт внутренней нормали к } \partial G \text{ в точке } x\right)$.

При $l \geqslant r$ норма (1.1) эквивалентна норме $\| w \|_{l}$ и $\widetilde{H}^{l}_{r}(G) = H^{l}(G)$. При $l < r$ эти нормы не эквивалентны.

Замыкание $S = S_{r+1}$ отображения $w \to (w|_{G}, w|_{\partial G}, \ldots, D_{\nu}^{r-1} w|_{\partial G})$ $(w \in C^{\infty}(\overline{G}))$ устанавливает изометрическое соответствие между $\widetilde{H}^{l}_{r}(G)$ и подпространством прямого произведения $K_{l}^{r+1} = H^{l}(G) \times \prod_{j=1}^{r} H^{l-j+\frac{1}{2}}(\partial G)$.

Если s — нецелое, то определим $\widetilde{H}^{s}_{r}(G)$ с помощью комплексной интерполяции между $\widetilde{H}^{[s]}_{r}(G)$ и $\widetilde{H}^{[s]+1}_{r}(G)$. Для каждого $s \in R^{1}$ обозначим через $|||\cdot|||_{s,(r)}$ норму в $\widetilde{H}^{s}_{r}(G)$. Это пространство подробно изучено в [1], его свойства будут здесь неоднократно использованы. Компоненты вектора Sw будем называть также компонентами элемента $w \in \widetilde{H}^{s}_{r}(G)$. Ниже $w|_{\overline{G}}$ — первая компонента элемента w. Если $s \leqslant 0$, то $S\widetilde{H}^{s}_{r}(G) = H^{s}(G) \times \prod_{j=1}^{r} H^{s-j+\frac{1}{2}}(\partial G)$. Отметим (см. [1,12]), что если $N(x, D)$ $(x \in G)$ — произвольное дифференциальное выражение порядка $q \leqslant r$, а $M(x, D)$ $(x \in \partial G)$ — произвольное граничное дифференциальное выражение порядка $t \leqslant r-1$, то для каждого $s \in R^{1}$ существует постоянная C_{s}, не зависящая от w, такая, что

$$\| Nw \|_{s-q} \leqslant C_{s} |||w|||_{s,(r)},\quad \langle\langle Mw \rangle\rangle_{s-t-\frac{1}{2}} \leqslant C_{s} |||w|||_{s,(r)}\quad (w \in C^{\infty}(\overline{G})). \tag{1.2}$$

Поэтому замыкания N, M отображений $w \to Nw$, $w \to Mw|_{\partial G}$ $(w \in C^{\infty}(\overline{G}))$ непрерывно действуют из всего $\widetilde{H}^{s}_{r}(G)$ соответственно в $H^{s-q}(G)$, $H^{s-t-\frac{1}{2}}(\partial G)$. В этом (сильном) смысле для произвольного $w \in \widetilde{H}^{s}_{r}(G)$ определены $Nw \in H^{s-q}(G)$, $Mw|_{\partial G} \in H^{s-t-\frac{1}{2}}(\partial G)$.

Применение дифференциальных выражений к элементам из $\widetilde{H}^{s}_{r}(G)$ можно понимать и в другом (слабом) смысле [1]. С помощью интегрирования по частям найдем

$$(Nw, z) = (w, N^{+}z) + \sum_{j=1}^{q} \langle D_{\nu}^{j-1} w, R_{j} z\rangle \quad (w, z \in C^{\infty}(\overline{G})),$$

$$\langle Mw, z\rangle = \sum_{j=1}^{t+1} \langle D_{\nu}^{j-1} w, M_{j}^{+} z\rangle \quad (w, z \in C^{\infty}(\partial G)),$$

где N^+ — выражение, формально сопряженное N, а M_j^+ — дифференциальные (или псевдодифференциальные) выражения вдоль ∂G. Если теперь $w \in \widetilde{H}_r^s(G)$, $Sw = (w_0, \ldots, w_r)$, то $Nw = g \in H^{s-q}(G)$ тогда и только тогда, когда

$$(w_0, N^+z) + \sum_{j=1}^{q} \langle w_j, R_j z \rangle = (g, z) \quad (z \in C^\infty(\overline{G})), \tag{1.3}$$

аналогично, $Mw|_{\partial G} = \zeta \in H^{s-t-\frac{1}{2}}(\partial G)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{t+1} \langle w_j, M_j^+ z \rangle = \langle \zeta, z \rangle \quad (z \in C^\infty(\partial G)). \tag{1.4}$$

Формулу (1.4) можно интерпретировать так: если $M = \sum_{j=1}^{t+1} M_j(x, D') D_\nu^{j-1}$, $w \in \widetilde{H}_r^s(G)$, $Sw = (w_0, \ldots, w_r)$, то $Mw|_{\partial G} = \sum_{j=1}^{t+1} M_j(x, D') w_j$, где применение тангенциальных выражений $M_j(x, D')$ к обобщенной функции w_j понимается в смысле теории обобщенных функций, поэтому (1.2) справедливо, если порядок t выражения $M(x, D)$ произвольный, лишь бы относительно D_ν порядок $M = M(x, D)$ не превосходил $r - 1$.

Ниже будем рассматривать прямые произведения пространств $\widetilde{H}_r^s(G)$. Для фиксированного вектора $T = (t_1, \ldots, t_N)$ (t_i — натуральные числа) и любого $s \in R^1$ положим $\widetilde{H}^{T+s}(G) = \prod_{j=1}^{N} \widetilde{H}^{t_j+s}(G)$. Если $t_1 = \ldots = t_N = t$, то будем это пространство обозначать через $\widetilde{H}^{t+s, N}(G)$; $|||\cdot|||_{T+s}$ и $|||\cdot|||_{t+s, N}$ — нормы в этих пространствах.

1.2. Пусть в G задана эллиптическая по Петровскому система уравнений порядка $T = (t_1, \ldots, t_N)$ ($t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_N$ — натуральные числа) с комплексными коэффициентами*

$$l(x, D)\, u(x) = (l_{ij}(x, D))_{i, j=1, \ldots, N}\, u(x) = f(x), \tag{1.5}$$

где $u(x)$, $f(x)$ — функциональные столбцы высоты N, а

$$l_{ij}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant t_j} a_\alpha^{ij}(x) D^\alpha \quad (i, j = 1, \ldots, N)$$

$$\left(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n);\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n;\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n};\ D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}\right). \tag{1.6}$$

Эллиптичность системы (1.5) означает, что $L(x, \xi) = \det (l_{ij}^0(x, \xi))_{i, j=1, \ldots, N} \neq 0$ ($\xi \neq 0$, $\xi \in R^n$, $x \in \overline{G}$), где $l_{ij}^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = t_j} a_\alpha^{ij}(x) \xi^\alpha$ ($\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ —) характеристический полином выражения $l_{ij}(x, D)$.

---

* Коэффициенты всех рассматриваемых в работе выражений будем для простоты предполагать бесконечно гладкими, хотя все результаты справедливы при менее жестких предположениях о гладкости.

Как уже указывалось во введении, предполагается что для системы (1.5) существует эллиптическая граничная задача. Пусть на ∂G заданы m граничных условий

$$b_h u(x) = \sum_{j=1}^{N} b_{hj}(x, D)\, u_j(x) = \varphi_h(x) \quad (h = 1, \ldots, m;\ x \in \partial G), \tag{1.7}$$

где $b_{hj}(x, D) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant t_j + \sigma_h} b_\alpha^{hj}(x)\, D^\alpha$, $\sigma_h \leqslant 0\ (h = 1, \ldots, m)$ — целые.

Предположим, что задача (1.5), (1.7) — эллиптическая. Это означает, что: 1) система (1.5) эллиптична по Петровскому; 2) для каждого $x \in \partial G$ и любого действительного касательного вектора $\tau \neq 0$ в точке x полином $L(\eta) = L(x, \tau + \eta\nu)$ имеет m корней с положительной и m корней с отрицательной мнимыми частями (при этом $2m = t_1 + \ldots + t_N$); 3) выполнены условия Шапиро — Лопатинского [13 — 15], [8]. Тогда существует конечномерное пространство $\mathfrak{M}^+ \in C^{\infty, N}(\overline{G}) \times C^{\infty, m}(\partial G)$ такое, что задача (1.5), (1.7) или, короче, задача

$$lu(x) = f(x)\ \ (x \in G), \quad bu(x) = \varphi(x)\ \ (x \in \partial G) \tag{1.8}$$

имеет решение $u \in H^{T+s}(G)$ $(T + s = (t_1 + s, \ldots, t_N + s),\ s \geqslant 0)$ тогда и только тогда, когда $F = (f, \varphi) \in H^{s, N}(G) \times \prod\limits_{h=1}^{m} H^{s - \sigma_h - \frac{1}{2}}(\partial G) \overset{\mathrm{def}}{=} K_{s, \sigma}$ удовлетворяет условиям

$$[F, V] \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} (f_j, v_{0j}) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, v^j \rangle = 0\ \ (V = (v_0, v^1, \ldots, v^m) \in \mathfrak{M}^+,\ v_0 = (v_{01}, \ldots, v_{0N})). \tag{1.9}$$

1.3. Ниже понадобится теорема о полном наборе изоморфизмов для задачи (1.8). Из сказанного в п. 1.1 следует, что для любого $s \in R^1$ отображение*

$$\widetilde{A}_s : u \to (lu, bu)\ \ (u \in \widetilde{H}^{T+s}(G) = \prod_{j=1}^{N} \widetilde{H}_{t_j}^{t_j + s}(G)) \tag{1.10}$$

непрерывно действует из всего пространства $\widetilde{H}^{T+s}(G)$ в

$$K_{s, \sigma} = H^{s, N}(G) \times \prod_{j=1}^{m} H^{s - \sigma_j - \frac{1}{2}}(\partial G). \tag{1.11}$$

Оказывается, что если матрица $b(x, D)$ нормальна [8], то ядро $\mathfrak{N} = \{u \in \widetilde{H}^{T+s}(G) : \widetilde{A}_s u = 0\}$ оператора $\widetilde{A}_s$ конечномерно, не зависит от s и $\mathfrak{N} \subset C^{\infty, N}(\overline{G})$; для того, чтобы задача (1.8) с $F = (f, \varphi) \in K_{s, \sigma}$ имела решение $u \in \widetilde{H}^{T+s}(G)$, необходимо и достаточно, чтобы вектор F удовлетворял соотношениям (1.9); сужение $\widetilde{\mathbf{A}}_s$ оператора $\widetilde{A}_s$ на подпространство $\widetilde{P}\widetilde{H}^{T+s}(G) = \{u \in \widetilde{H}^{T+s}(G) : (u|_G, \mathfrak{N}) = 0\}$ пространства $\widetilde{H}^{T+s}(G)$ устанавливает изоморфизм

$$\widetilde{P}\widetilde{H}^{T+s}(G) \to Q^+ K_{s, \sigma}, \tag{1.12}$$

где $Q^+ K_{s, \sigma} = \{F = (f, \varphi) \in K_{s, \sigma};\ [F, \mathfrak{M}^+] = 0\}$ — подпространство $K_{s, \sigma}$.

---

* Применение дифференциальных выражений к элементам из $\widetilde{H}^{T+s}(G)$ понимается здесь и ниже в смысле, указанном в п. 1.2.

Без предположения о нормальности эта теорема доказана в [9, 10]. В этих работах предполагается, что задача (1.8) эллиптична и что матрицу $b(x, D)$ можно дополнить m новыми строками такого же вида до матрицы $\widehat{b}(x, D) = (\widehat{b}_{hj}(x, D))_{\substack{h=1,\ldots,2m \\ j=1,\ldots,N}}$ так, чтобы в каждой точке $x \in \partial G$ для каждого действительного касательного вектора $\tau \neq 0$ к ∂G точке x строки матрицы $(b_{hj}^0(x, \tau + \eta\nu))$, элементы которой рассматриваются как полиномы от η, были линейно независимыми (здесь $b_{hj}^0(x, \xi)$ — характеристический полином выражения $b_{hj}(x, D)$). Ниже будем считать, что для задачи (1.8) справедлива теорема о полном наборе изоморфизмов. Заметим также, что в [10] эта теорема доказана для граничных выражений произвольного порядка.

Из теоремы об изоморфизмах и конечномерности $\mathfrak{N}$ следует оценка

$$|||u|||_{T+s} \leqslant C_s (\| lu \|_{s,N} + \langle\langle bu \rangle\rangle_{s-\sigma-\frac{1}{2}} + \| u \|_{s,N}) \tag{1.13}$$

$$\left(u \in C^{\infty,N}(\overline{G}),\ s \in R^1,\ s - \sigma - \frac{1}{2} = \left(s - \sigma_1 - \frac{1}{2}, \ldots, s - \sigma_m - \frac{1}{2}\right)\right).$$

§ 2. Существование граничных значений у обобщенных решений эллиптических систем

2.1. Представим выражение $l(x, D)$ в некоторой окрестности V_x в G точки $x_0 \in \partial G$ в локальных координатах в виде

$$l_{ij}(x, D) = \sum_{|\tau|+\nu \leqslant t_j} a_{\tau\nu}^{ij}(x) D'^{\tau} D_n^{\nu} \quad (i, j = 1, \ldots, N), \tag{2.1}$$

где $x_n = 0$ — уравнение куска поверхности ∂G, а $D'^{\tau} = D_1^{\tau_1} \ldots D_{n-1}^{\tau_{n-1}}$ — тангенциальная производная, а $D_n = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}$ — производная по нормали к ∂G. Пусть $u, v \in C^{\infty,N}(\overline{G})$, v аннулируется вне указанной окрестности, тогда с помощью интегрирования по частям найдем, что (ср. [8, 9])

$$(lu, v) - (u, l^+ v) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{t_j} \langle D_n^{k-1} u_j, \sum_{i=1}^{N} M_{ji}^k v_i \rangle,\ M_{ji}^k v_i = -\sqrt{-1} \sum_{\substack{|\tau|+\nu \leqslant t_j \\ \nu \geqslant k}} D_n^{\nu-k} D'^{\tau} (\overline{a}_{\tau\nu}^{ij} v_i), \tag{2.2}$$

где $l^+(x, D)$ — матричное дифференциальное выражение, формально сопряженное к $l(x, D)$. Воспользовавшись теперь стандартными рассуждениями, связанными с разложением единицы, убедимся в справедливости следующей формулы Грина:

$$(lu, v) - (u, l^+ v) = \langle U, Mv \rangle_{L_2^{2m}(\partial G)} \quad (u, v \in C^{\infty,N}(\overline{G})), \tag{2.3}$$

где

$$U = (U_1, \ldots, U_N),\ U_k = (U_{k1}, \ldots, U_{kt_k})\ (k = 1, \ldots, N),\ U_{ki} = D_\nu^{i-1} u_k|_{\partial G}\ (i = 1, \ldots$$

$$\ldots, t_k);\ Mv = (M_1 v, \ldots, M_N v),\ M_j v = (M_j^1 v, \ldots, M_j^{t_j} v),\ M_j^k v =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} M_{ji}^k v_i|_{\partial G} \quad (k = 1, \ldots, t_j). \tag{2.4}$$

Выражения $M_{ji}^k(x, D)$ в локальных координатах имеют вид (2.2).

Пусть $u\in\widetilde{H}^{T+s}(G)$, $v\in\widetilde{H}^{-s,N}(G)$ $(s\in R')$ и пусть u^n (v^n) — последовательность гладких функций, стремящихся к $u(v)$ в $\widetilde{H}^{T+s}(G)$ $(\widetilde{H}^{-s,N}(G))$. Записав формулу Грина (2.3) с $u=u^n$, $v=v^n$ и перейдя к пределу, получим

$$(lu, v|_{\overline{G}})-(u|_{\overline{G}}, l^+v)=\langle U, Mv\rangle_{L_2^{2m}(\partial G)}\quad (u\in\widetilde{H}^{T+s}(G),\ v\in\widetilde{H}^{-s,N}(G)). \tag{2.5}$$

Здесь $u|_{\overline{G}}$ $(v|_{\overline{G}})$ — первая компонента элемента $u(v)$ (см. п. 1.1), а U и Mv выражаются через $u\in\widetilde{H}^{T+s}(G)$, $v\in H^{-s,N}(G)$ формулами (2.4).

Определение 1. Элемент $u_0=(u_{01},\ldots,u_{0N})\in H^{T+s}(G)$ $(s\in R^1)$ назовем слабым решением в G уравнения $lu=f\in H^{s,N}(G)$, если

$$(u_0, l^+v)=(f, v|_{\overline{G}})\quad (v\in\widetilde{H}^{-s,N}(G),\ Mv|_{\partial G}=0). \tag{2.6}$$

Естественность этого определения вытекает из формулы Грина (2.5). Нам понадобится также лемма, которая непосредственно следует из леммы 2.2 работы [1] и леммы 1 работы [8].

Лемма 1. *Пусть* $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_N)$, $\psi_j=(\psi_{j1},\ldots,\psi_{jt_j})$ $(j=1,\ldots,N)$, $\psi\in\prod_{j=1}^{N}\prod_{k=1}^{t_j}H^{s+k-t_j-\frac{1}{2}}(\partial G)=\Psi_{s,T}(\partial G)$ $(s\in R^1)$. *Тогда существует вектор* $v=(v_1,\ldots,v_N)\in\widetilde{H}^{s,N}(G)$ *такой, что* $Mv=\psi$, *а оператор* $X_s:\psi\to v$ *непрерывен из* $\Psi_{s,T}(\partial G)$ *в* $\widetilde{H}^{s,N}(G)$. *При* $s_1<s_2$ *оператор* X_{s_1} *является расширением по непрерывности оператора* X_{s_2}.

Отметим также, что если в (1.5) $t_1=\ldots=t_N=t$, то множество $\widetilde{H}_M^{-s,N}(G)=\{v\in\widetilde{H}^{-s,N}(G): Mv|_{\partial G}=0\}$ совпадает с множеством $\widetilde{H}_0^{-s,N}(G)=\{v\in\widetilde{H}^{-s,N}(G): D_\nu^{j-1}v_k|_{\partial G}=0\ (j=1,\ldots,t;\ k=1,\ldots,N)\}$, т. е., согласно лемме 2.1 из [1], совпадает с замыканием в $\widetilde{H}^{-s,N}(G)$ множества $H^{-s,N}(G)\cap\overset{0}{H}{}^{t,N}(G)$ $(\overset{0}{H}{}^{t,N}(G)=\{v=(v_1,\ldots,v_N)\in H^{t,N}(G): D_\nu^{k-1}v_j|_{\partial G}=0\ (j=1,\ldots,N;\ k=1,\ldots,t)\})$. Поэтому можно в рассматриваемом случае считать, что в (2.6) $v\in H^{-s,N}(G)\cap\overset{0}{H}{}^{t,N}(G)$. Если же равенство $t_1=\ldots=t_N$ не выполняется, то $H^{-s,N}(G)\cap\overset{0}{H}{}^{t,N}(G)$, вообще говоря, не плотно в подпространстве $\widetilde{H}_M^{-s,N}(G)$ пространства $\widetilde{H}^{-s,N}(G)$.

2.2. Теорема 1. *Для каждого действительного* s *норма* $|||u|||_{T+s}$ *(см. конец п.* 1.1) *эквивалентна норме*

$$\|u\|_{H_l^{T+s}(G)}=\|u\|_{T+s}+\|lu\|_{s,N}. \tag{2.7}$$

Поэтому $\widetilde{H}^{T+s}(G)$ *совпадает с пополнением* $H_{l(x,D)}^{T+s}(G)=H_l^{T+s}(G)$ *множества* $C^{\infty,N}(\overline{G})$ *по норме* (2.7).

Пространство $H_l^{T+s}(G)$ *совпадает с множеством всех пар* (u_0, f), *где* $u_0\in H^{T+s}(G)$, $f\in H^{s,N}(G)$ *и* $lu_0=f$ *в смысле определения* 1.

Доказательство. Зафиксируем $u\in C^{\infty,N}(\overline{G})$ и рассмотрим функционал

$$l(v)=(lu, v|_{\overline{G}})-(u, l^+v)\quad (v\in\widetilde{H}^{-s,N}(G)). \tag{2.8}$$

Покажем, что $l(v)$ зависит лишь от вектора $Mv=\psi$. Действительно, если

v' и $v'' \in \widetilde{H}^{-s,N}(G)$ таковы, что $Mv' = Mv'' = \psi$, то из (2.5) следует, что $l(v') = l(v'')$. Положим $l(v) = l_1(\psi)$ $\left(\psi \in \prod_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{t_i} H^{-s+k-t_i-\frac{1}{2}}(\partial G)\right)$. Тогда из соотношений (2.8), (1.2) и леммы 1 имеем

$$|l(v)| = |l_1(\psi)| = |l(v')| \leqslant C_1 (\|u\|_{T+s} + \|lu\|_{s,N}) |||v'|||_{-s,N} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \|u\|_{H_l^{T+s}(G)} \|\psi\|_{\prod_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{t_i} H^{-s+k-t_i-\frac{1}{2}}(\partial G)} \quad (v' = X_{-s}\psi). \tag{2.9}$$

Учитывая (2.5) и (2.4), получим

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{t_i} \langle\langle D_\nu^{k-1} u_j \rangle\rangle_{t_j+s-k+\frac{1}{2}} \leqslant C \|u\|_{H_l^{T+s}(G)}. \tag{2.10}$$

Если s — целое, то из этого неравенства и соотношений (1.1) и (2.7) следует, что

$$|||u|||_{T+s} \leqslant C_1 \|u\|_{H_l^{T+s}(G)} \quad (u \in C^{\infty,N}(\bar{G})). \tag{2.11}$$

Если s — нецелое, то из (1.13) и того, что (ср. (1.2)) $\langle\langle bu \rangle\rangle_{s-\sigma-\frac{1}{2}} \leqslant \leqslant C \langle\langle U \rangle\rangle_{\prod_{j=1}^{N} \prod_{k=1}^{t_j} H^{t_j+s-k+\frac{1}{2}}(\partial G)}$ снова следует оценка (2.11). Тогда из соотношений (1.2) получаем эквивалентность норм $|||u|||_{T+s}$ и $\|u\|_{H_l^{T+s}(G)}$.

Докажем вторую часть теоремы. Если последовательность $\{u^n\} \in C^{\infty,N}(\bar{G})$ фундаментальна в метрике (2.7), то $u^n \to u_0$ в $H^{T+s}(G)$, $lu^n \to f$ в $H^{s,N}(G)$ и $lu_0 = f$ в смысле определения 1.

Наоборот, пусть $u_0 \in H^{T+s}(G), f \in H^{s,N}(G)$ и $lu_0 = f$ в смысле определения 1. Рассмотрим функционал $l(v) = (u_0, l^+ v) - (f, v|_{\bar{G}})$ $(v \in \widetilde{H}^{-s,N}(G))$. Из определения 1 и леммы 1 следует, что $l(v) = l_1(\psi)$ зависит лишь от вектора $\psi = Mv \in \prod_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{t_i} H^{-s+k-t_i-\frac{1}{2}}(\partial G)$. Действительно, если $v \in \widetilde{H}^{-s,N}(G)$, $Mv = 0$, то $l(v) = 0$. Поэтому $l(v) = l_1(\psi) = l(v')$, где $\psi = Mv$, а $v' = X_{-s}(\psi)$ построен по элементу ψ с помощью леммы 1. Воспользовавшись (1.2), получим

$$|l(v)| = |l_1(\psi)| = |l(v')| \leqslant C_1 (\|u_0\|_{T+s} + \|f\|_{s,N}) |||v'|||_{-s,N} \leqslant$$
$$\leqslant C (\|u_0\|_{T+s} + \|f\|_{s,N}) \|\psi\|_{\prod_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{t_i} H^{-s+k-t_i-\frac{1}{2}}(\partial G)}.$$

Поэтому существует единственный вектор $U \in \prod_{j=1}^{N} \prod_{k=1}^{t_i} H^{s-k+t_i+\frac{1}{2}}(\partial G)$ такой, что $(f, v) - (u, l^+ v) = \langle U, Mv \rangle_{L_2^{2m}(\partial G)}$ $(v \in H^{-s,N}(G))$. Отсюда следует, что элемент $u = S^{-1}(u_0, U) \in \prod_{j=1}^{N} \widetilde{H}^{\min(t_j+s,0)}(G)$ (см. п. 1.1) удовлетворяет равенству $lu = f$ (см. (1.3)).

Вычислим теперь $bu|_{\partial G} = \varphi$. Учитывая, что согласно (1.4) $bu|_{\partial G} = \varphi$ определяется лишь вектором $U \in \prod_{j=1}^{N} \prod_{k=1}^{t_j} H^{s-k+t_j-\frac{1}{2}}(\partial G)$, получим, что $\varphi \in \prod_{j=1}^{N} H^{s-\sigma_j-\frac{1}{2}}(\partial G)$. Поэтому u является решением задачи (1.8) с $F = (f, \varphi) \in K_{s,\sigma}$. Тогда по теореме об изоморфизмах $u \in \widetilde{H}^{T+s}(G)$. Если теперь $u^n \in C^{\infty,N}(\overline{G})$, $u^n \to u$ в $\widetilde{H}^{T+s}(G)$, то согласно (1. 2) $lu^n \to f$ в $H^{s,N}(G)$, а $u^n \to u$ в $H^{T+s}(G)$. Теорема доказана.

2.3. Из теоремы 1 и сказанного в п. 1.1 следует, что для обобщенных решений эллиптических по Петровскому систем существуют обобщенные граничные значения. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $u_0 \in H^{T+s}(G), f \in H^{s,N}(G)(s \in R')$ и $lu_0 = f$ в смысле определения* 1, *и пусть $B(x, D) = (B_1(x, D), \ldots, B_N(x, D))$ $(x \in \partial G, \operatorname{ord} B_j = t_j + k$, k — любое целое; порядок $B_j(x, D)$ относительно производных D_ν по нормали к ∂G не превосходит $t_j - 1)$ — строка дифференциальных выражений. Тогда для каждой последовательности $u^n \in C^{\infty,N}(\overline{G})$ такой, что $u^n \to u_0$ в $H^{T+s}(G)$, $lu^n \to f$ в $H^{s,N}(G)$ (такие последовательности существуют) последовательность $\{Bu^n|_{\partial G}\} \to \psi$ в $H^{s-k-\frac{1}{2}}(\partial G)$.*

Действительно, пусть элемент $u \in \widetilde{H}^{T+s}(G)$ соответствует паре (u_0, f) в изоморфизме $\widetilde{H}^{T+s}(G) \simeq H_l^{T+s}(G)$, установленном теоремой 1, и пусть $u^n \in C^{\infty,N}(\overline{G}), u^n \to u$ в $\widetilde{H}^{T+s}(G)$. Тогда согласно (1.2)

$$\langle\!\langle Bu^n \rangle\!\rangle_{s-k-\frac{1}{2}} \leqslant C \, ||| u^n |||_{T+s} \leqslant C_1 \| u^n \|_{H_l^{T+s}(G)}. \tag{2.12}$$

Поэтому $Bu^n \to \psi$ в $H^{s-k-\frac{1}{2}}(\partial G)$. Теорема доказана.

С помощью рассуждений, приведенных в п. 2.4 работы [1], можно отсюда получить другие теоремы о следах (в том числе и матричные аналоги теорем о следах Лионса — Мадженеса [2, 3]) для обобщенных решений эллиптических систем.

Отметим здесь также, что из неравенств (1.2) и (1.13) непосредственно следует, что

$$\langle\!\langle Bu \rangle\!\rangle_{s-k-\frac{1}{2}} \leqslant C \, ||| u |||_{T+s} \leqslant C_1 (\| lu \|_{s,N} + \langle\!\langle bu \rangle\!\rangle_{s-\sigma-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \| u \|_{s,N}) \quad (u \in \widetilde{H}^{T+s}(G)). \tag{2.13}$$

При этом, в частности, если $(u|_{\overline{G}}, \mathfrak{N}) = 0$, то член $\| u \|_{s,N}$ можно в (2.13) опустить. Если, кроме того, $lu = 0$, то получаем неравенство

$$\langle\!\langle Bu \rangle\!\rangle_{-k-\frac{1}{2}} \leqslant C_s \langle\!\langle bu \rangle\!\rangle_{s-\sigma-\frac{1}{2}} \, (u \in C^{\infty,N}(\overline{G}), (u, \mathfrak{N}) = 0, \; s \in R^1). \tag{2.14}$$

В скалярном случае для уравнений 2-го порядка оценка $\langle\!\langle D_\nu u \rangle\!\rangle_0 \leqslant C \langle\!\langle u \rangle\!\rangle_1$ была получена в [16], эта же оценка в L_p-нормах — в [17]. Общая оценка вида (2. 14) получена в скалярном случае (также и в L_p-нормах $(1 < p < \infty)$) в [7]. Если $t_1 = \ldots = t_N$, то оценки (2.14) справедливы также и в L_p-нормах (ср. [7]).

§ 3. Матрица Грина. Восстановление решения по его обобщенным граничным значениям

3.1. Пусть $(R_0(x,y), R(x,y))$ $(R_0(x,y) = (R_0^{ij}(x,y))_{i,j=1,\ldots,N}$ $(x, y \in \bar{G})$; $R(x,y) = (R^{ij}(x,y))_{\substack{i=1,\ldots,N\\ j=1,\ldots,m}}$ $(x \in G, y \in \partial G)$ матрица Грина задачи (1.8). Тогда для каждого $F = (f, \varphi) \in C^{\infty,N}(\bar{G}) \times C^{\infty,m}(\partial G)$, удовлетворяющего соотношениям (1.9), функция

$$u(x) = (R_0(x,\cdot), \bar{f})_{L_2^N(G)} + \langle R(x,\cdot), \bar{\varphi}\rangle_{L_2^m(\partial G)} \tag{3.1}$$

дает решение $u \in C^{\infty,N}(\bar{G})$, $(u, \mathfrak{N}) = 0$, задачи (1.8). Существование матрицы Грина для задачи типа (1.8) доказано с помощью теоремы об изоморфизмах в [8, 18], там же изучены ее свойства.

Уточним соответствующие результаты, ограничившись для простоты рассмотрением случая отсутствия дефекта: $\mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{M}^+ = 0$. Матрицу $R_0(x,y) = (R_0^{ij}(x,y))_{i,j=1,\ldots,N}$ $(x, y \in \bar{G})$ определяем как решение задачи

$$l(x, D_x) R_0(x,y) = \delta(y-x) I_N \ (x \in \bar{G}), \quad b(x, D_x) R_0(x,y) = 0 \ (x \in \partial G). \tag{3.2}$$

Здесь I_N — единичная матрица порядка N. Поскольку $|(\delta(y-x), W(x))| = |W(y)| \leqslant C\|u\|_q$ $(q > \frac{n}{2})$, то $\delta(y-x)$ — непрерывная вектор-функция от $y \in \bar{G}$ со значениями в $H^{-q}(G)$. Поэтому по теореме об изоморфизмах столбики матрицы $R_0(\cdot, y)$ являются непрерывными вектор-функциями от $y \in \bar{G}$ со значениями $\widetilde{H}^{T-q}(G)$. Более того, поскольку $D_y^\alpha \delta(y-x)$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, α_j — произвольные целые числа) — непрерывная вектор-функция от $y \in \bar{G}$ со значениями в $H^{-q-|\alpha|}(G)$, то и столбики матрицы $D_y^\alpha R_0(\cdot, y)$ являются непрерывными вектор-функциями от $y \in \bar{G}$ со значениями в $\widetilde{H}^{T-q-|\alpha|}(G)$.

Аналогично, матрицу $R(x,y) = (R^{ij}(x,y))_{\substack{i=1,\ldots,N\\ j=1,\ldots,m}}$ $(x \in \bar{G}, y \in \partial G)$ определяем как решение задачи

$$l(x, D_x) R(x,y) = 0 \ (x \in G), \ b(x, D_x) R(x,y) = \hat{\delta}(y-x) I_m \ (x \in \partial G). \tag{3.3}$$

Здесь $\hat{\delta}(y)$ — дельта-функция на ∂G. По определению $\int_{\partial G} \hat{\delta}(x-y)\varphi(x)\,dx = \varphi(y)$. Поэтому $|<\hat{\delta}(y-x), \varphi>| = |\varphi(y)| \leqslant C\|w\|_q$, где $w|_{\partial G} = \varphi$, $q > \frac{n}{2}$.

Перейдя к inf по всем $w|_{\partial G} = \varphi$, получаем $|<\hat{\delta}(y-x), \varphi>| \leqslant \langle\!\langle \varphi \rangle\!\rangle_{q-\frac{1}{2}}$, поэтому $\hat{\delta}(y-x)$ — непрерывная вектор-функция от $y \in \partial G$ со значениями в $H^{-(q-\frac{1}{2})}(\partial G)$. По теореме об изоморфизмах отсюда следует, что столбик $R_j(x,y)$ $(j = 1, \ldots, m)$ матрицы $R(x,y)$ является непрерывной вектор-функцией от $y \in \partial G$ со значениями $\widetilde{H}^{T-q+\sigma_j+1}(G)$. Аналогично, если $M(y, D_y)$ — тангенциальное выражение порядка k, то $M(y, D_y) R_j(x,y)$ — непрерывная вектор-функция от $y \in \partial G$ со значениями в $\widetilde{H}^{T-q+\sigma_j+1-k}(G)$. Из (3.2) и (3.3) непосредственно следует, что для каждого вектора $F = (f, \varphi) \in K_{0,\sigma} \cap C^{0,N}(\bar{G}) \times C^{0,m}(\partial G)$ функция $u = (u_1, \ldots, u_N)$

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_G R_0^{ij}(x,y) f_j(y)\,dy + \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial G} R^{ij}(x,y)\varphi_j(y)\,dy \ (i = 1, \ldots, N) \tag{3.4}$$

(интегралы в (3.4) понимаются как интегралы от вектор-функций соответственно из $\widetilde{H}_{t_i}^{t_i-q}(G)$ и $\widetilde{H}_{t_i}^{t_i+\sigma_i-q+1}(G)$ (см., например, [19, § 3.7])) является решением задачи (1. 8). Формулу (3. 4) кратко запишем следующим образом:

$$u(x) = (R_0(x, \cdot), \bar{f}(\cdot)) + \langle R(x, \cdot), \bar{\varphi}(\cdot)\rangle. \tag{3. 4'}$$

С помощью предельного перехода легко убедиться, что для любого $F \in K_{s,\sigma}$ $(s \geqslant 0)$ формула (3.4′) дает решение $u \in \widetilde{H}^{T+s}(G)$ задачи (1.8). Более того, поскольку функция $|||R_0^{ij}(\cdot, y)|||_{t_i-q-k,(t_i)} = r_{ij}(y)$ (k — целое) принадлежит $C^k(\bar{G})$, то

$$|||\int_G R_0^{ij}(x, y) f_j(y)\, dy|||_{t_i-q-k,(t_i)} \leqslant \int_G r_{ij}(y) f_j(y)\, dy \leqslant \|r_{ij}(y)\|_k \|f_j\|_{-k}$$

и с помощью предельного перехода можно определить в $\widetilde{H}_{t_i}^{t_i-q-k}(G)$ интеграл $\int_G R_0^{ij}(x, y) f_j(y)\, dy$ для $f_j \in H^{-k}(G)$. Подобным же образом можно придать смысл $\int_{\partial G} R^{ij}(x, y) \varphi_j(y)\, dy$ для функций φ_l из негативных пространств на ∂G.

Таким образом, для каждого $F \in K_{s,\sigma}$ $(s \in R^1)$ найденная по формуле (3. 4′) функция $u \in \widetilde{H}^{T+s}(G)$ дает решение задачи (1.8).

Если дефект отличен от нуля, надо из правых частей в (3. 2) и (3. 3) вычесть их проекции на $\mathfrak{M}^+$ и за $R_0(x, y)$ и $R(x, y)$ взять те решения, у которых $R_0(\cdot, y)|_{\bar{G}}$, $R(\cdot, y)|_{\bar{G}}$ ортогональны в $L_2^N(G)$ к $\mathfrak{N}$. Тогда для каждого $F \in K_{s,\sigma}$ $(s \in R^1)$, удовлетворяющего соотношениям (1.9), найденная по формуле (3.4′) функция u является решением из $\widetilde{H}^{T+s}(G)$ задачи (1.8); при этом $(u|_{\bar{G}}, \mathfrak{N}) = 0$. Общий вид решения задачи (1.8) следующий:

$$u(x) = (R_0(x, \cdot), \bar{f}(\cdot)) + \langle R(x, \cdot), \bar{\varphi}\rangle + \omega\ (\omega \in \mathfrak{N}). \tag{3. 5}$$

Из теоремы о локальном повышении гладкости [8, 18] следует, что при $x \neq y$ функции $R_0(x, y)$ и $R(x, y)$ бесконечно гладкие. Методика работ [20, 21] позволяет оценить особенности этих функций при $x = y$. Отсюда следует, что если $F \in K_{s,\sigma}$ $(s \geqslant 0)$ и $x \in G$, то интегралы в (3.4) — обыкновенные интегралы Лебега. Так как $R^{ij}(x, \cdot) \in C^\infty(\partial G)$ при $x \in G$, то для элемента φ из негативного пространства $\langle R(x, \cdot), \bar{\varphi}(\cdot)\rangle$ $(x \in G)$ — значение функционала φ на гладком элементе $R(x, \cdot)$.

3.2. Пусть $u_0 \in H^{T+s}(G)$, $f \in H^{s,N}(G)$ $(s \in R^1)$ и $lu_0 = f$ в смысле определения 1. По теореме 1 элемент (u_0, f) можно отождествить с элементом $u \in \widetilde{H}^{T+s}(G)$. Вычислим $b(x, D)u = \varphi$. Тогда $u \in \widetilde{H}^{T+s}(G)$ решение задачи (1. 8) с $F \in K_{s,\sigma}$. Поэтому для элемента u справедлива формула (3.5), при этом функция $\omega \in C^{\infty,N}(\bar{G})$ равна проекции в $L_2^N(G)$ функции u_0 на $\mathfrak{N}$. Таким образом,

$$u_0(x) = (R_0(x, \cdot), \bar{f}) + \langle R(x, \cdot), \bar{\varphi}\rangle + \omega(x)\ (x \in G). \tag{3.6}$$

Пусть, например, $t_1 = \ldots = t_N = t$, $u_0(x) \in C^{\infty,N}(G)$, $lu_0(x) = 0$ и пусть $u_0(x)$ имеет при подходе к ∂G степенной рост. Ясно, что $(u_0(x), l^+v(x)) = 0$ $(v \in C_0^{\infty,N}(G))$. Поэтому, если $u_0 \in L_2^N(G)$, то, учитывая плотность $C_0^{\infty,N}(G)$ в $\overset{0}{H}{}^{t,N}(G)$, получим, что $(u_0, l^+v) = 0$ $(v \in \overset{0}{H}{}^{t,N}(G))$, т. е. $lu_0 = 0$ в смысле определения 1 (см. конец п. 2.1). Для $u_0(x)$, следовательно, справедлива формула (2.6) с $f = 0$.

Если $u_0(x) \bar{\in} L_2^N(G)$, то можно естественным образом определить регуляризацию u_0 функции $u_0(x)$ (ср. [1, 22]), при этом $u_0 \in H^{t+s,N}(G)$ с некоторым $s < -t$, зависящим от порядка особенности $u_0(x)$ вблизи ∂G. Теперь в смысле определения 1 $lu_0 = f$ с некоторым* $f \in H^{s,N}(G)$, сосредоточенным на ∂G. Поэтому для $u_0(x)$ справедлива формула (3.6).

Действительно, пусть G_ε — ε-окрестность в G поверхности ∂G : точки G_ε находятся от ∂G на расстоянии, не превышающем $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы через каждую точку G_ε проходила единственная нормаль к ∂G, лежащая в G_ε. Пусть $x' \in \partial G$ — основание нормали, проведенной через $x \in G_\varepsilon$, $r(x) = |x - x'|$. Говорят, что функция $w_0(x) \in C^\infty(G)$ имеет вблизи ∂G степенную особенность порядка $\alpha > 0$, если $w_0(x) = \dfrac{\omega(x)}{(\rho(x))^\alpha}$, где $\omega(x)$ — ограниченная в $\bar{G}$ функция, отличная от тождественного нуля на ∂G, а $\rho(x) \in C^\infty(\bar{G})$ — положительная в G функция, равная $r(x)$ в G_ε. Если $k \leqslant \alpha < k + 1$ (k — натуральное число), то регуляризацию w_0 функции $w_0(x)$ определим следующим образом:

$$(w_0, v) = \int_{G \setminus G_\varepsilon} w_0(x)\,\bar{v}(x)\,dx + \int_{G_\varepsilon} w_0(x)\,\overline{\left(v(x) - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(j-1)!}\,\frac{\partial^{j-1} v(x)}{\partial \nu^{j-1}}\,(r(x))^{j-1}\right)}\,dx$$

$$(v \in C^\infty(\bar{G})). \qquad (3.\ 7)$$

Можно показать, что $w_0 \in H^{-\tau}(G)$, где $\tau > \alpha - \dfrac{1}{2}$ (см. [22]).

Если условие $t_1 = \ldots = t_N$ не выполняется, $u_0 \in C^{\infty,N}(G)$, $lu_0(x) = 0$, $u_0(x)$ имеет степенную особенность вблизи ∂G, а u_0 — полученная по формуле вида (3. 7) регуляризация функции $u_0(x)$, то по-прежнему $u_0 \in H^{T+s}(G)$ с некоторым $s < 0$. Однако теперь $H^{-s,N}(G) \cap \overset{0}{H}{}^{t,N}(G)$ уже, вообще говоря, не плотно в $\widetilde{H_M^{-s,N}}(G)$ и легко показать, что в смысле определения 1 $lu_0 = f \in H^{\min(s,-t),N}(G)$ с некоторым** f, вообще говоря, отличным от нуля и сосредоточенным на ∂G. По теореме 1 для элемента $u = (u_0, f)$ существуют обобщенные граничные значения, можно вычислить $Bu|_{\partial G} = \varphi$ и для $u_0(x)$ $(x \in G)$ снова справедливо представление (3.6).

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Ю. М. Березанскому и С. Д. Эйдельману за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Ройтберг, О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений, Матем. сб., т. 86 (128), № 10, 1971.
2. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, «Мир», М., 1971.
3. G. Geymonat, Su alcuni problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici secondo Petrovsky, Matematiche, 20, N 2, 1965, 211—251.
4. А. С. Фохт, Интегральные оценки производных полигармонической функции в n-мерной области в метрике L_p и некоторые их приложения, Дифференц. уравнения, т. 7, № 8, 1971.

* Отметим здесь, что в [1] ошибочно сказано, что $f = 0$ (см. [1, стр. 249 и 265]). Это верно лишь для другой, вообще говоря, отличной от построенной здесь регуляризации функции $u_0(x)$.

** И теперь существует регуляризация u_0' функции $u_0(x)$, для которой $lu_0' = 0$ в смысле определения 1.

5. А. С. Фохт, Интегральные оценки производных решений однородных уравнений эллиптического типа с пониженными требованиями на класс гладкости границы области, УМЖ, т. 24, № 6, 1972.
6. В. А. Кондратьев, С. Д. Эйдельман, Положительные решения уравнений с частными производными, Труды Моск. матем. о-ва, т. 31, 1975.
7. Я. А. Ройтберг, Об оценках в весовых классах производных решений эллиптических уравнений, Математическая физика, вып. 17, «Наукова думка», К., 1975.
8. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения, Матем. сб., т. 78 (120), № 3, 1969.
9. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем с граничными условиями, не являющимися нормальными, Матем. исследования, Кишинев, т. 7, № 2 (24), 1972.
10. И. А. Коваленко, Теоремы об изоморфизмах для эллиптических систем с граничными условиями, не являющихся нормальными, УМЖ, т. 25, № 3, 1973.
11. Я. А. Ройтберг, Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
12. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
13. Л. Р. Волевич, Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. Матем. сб., т. 67(110), № 3, 1965.
14. В. А. Солонников, Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса—Л. Ниренберга, I — Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 3, 1964; II — Труды Математического ин-та АН СССР, т. 92, № 4, 1966.
15. Л. Хермандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.
16. М. И. Вишик, Об одном неравенстве для граничных значений гармонических функций в шаре, УМН, т. 6, вып. 2(42), 1951.
17. И. Д. Маергойз, Оценка градиента решения эллиптических уравнений на границе области, ДАН СССР, т. 212, № 2, 1973.
18. И. А. Коваленко, Некоторые применения теоремы о полном наборе изоморфизмов для эллиптических, по Петровскому, систем, сб. Приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений, Изд. Киевск. пед. ин-та, 1973.
19. Э. Хилле, Р. Филипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.
20. Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач, УМЖ, т. 19, № 5, 1967.
21. И. А. Коваленко, Я. А. Ройтберг, О функции Грина общей эллиптической граничной задачи с псевдодифференциальными граничными условиями, УМЖ, т. 23, № 6, 1971.
22. Ю. В. Костарчук, Общие эллиптические граничные задачи со степенными особенностями в правых частях. УМЖ, т. 25, № 4, 1973.

Поступила 4.X 1973 г.
Черниговский педагогический институт