Граничные задачи с параметром в L_p для эллиптических в смысле Дуглиса — Ниренберга систем

Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель

1°. Эллиптические задачи с параметром изучались в работах [1, 2]. В [1] рассматривались задачи для одного эллиптического уравнения с линейно входящим параметром и нормальных граничных условий. В [2] исследовались граничные задачи в L_2 для систем эллиптических уравнений с общими граничными условиями при полиномиальной зависимости их коэффициентов от параметра. В настоящей заметке устанавливается разрешимость в L_p общих граничных задач с параметром для эллиптических в смысле Дуглиса — Ниренберга систем как с непрерывными, так и с разрывными коэффициентами. Наши результаты получаются благодаря объединению методов, примененных в [1, 2].

2°. В ограниченной области G n-мерного эвклидова пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с границей Γ рассматривается система уравнений с комплексными коэффициентами вида

$$l_i u = \sum_{j=1}^{N} l_{ij}(x, D, \lambda)\, u_j(x) = f_i(x) \quad (i = 1, \ldots, N); \tag{1}$$

здесь $l_{ij}(x, D, \lambda) = \sum\limits_{k+|\alpha| \leqslant p_{ij}} a_{k\alpha}^{ij}(x)\, \lambda^k D^\alpha$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$ $D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$ $u = (u_1, \ldots, u_N))$; λ— комплексный параметр, $\lambda = q e^{i\theta}$, q — вещественное.

Мы предполагаем, что выполнены сформулированные ниже условия I—III.

Условие I. Для $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ (не исключается случай $\theta_0 = \theta = \theta_1$) система

$$l_i(x, D, e^{i\theta}D_t)\, u(x, t) = \sum_{j=1}^{N} l_{ij}(x, D, e^{i\theta}D_t)\, u_j(x, t) = f_i(x, t) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{2}$$

эллиптична в смысле Дуглиса — Ниренберга [3, 4] в цилиндре $G \times (-\infty, \infty)$. Это означает, что порядки p_{ij} выражений $l_{ij}(x, D, e^{i\theta}D_t)$ зависят от двух систем целых чисел $s_1, \ldots, s_N$ и $t_1, \ldots, t_N$, так что $p_{ij} \leqslant s_i + t_j$ и $l_{ij} \equiv 0$ при $s_i + t_j < 0$, при этом полином $L(x, \xi, e^{i\theta}q) = \det(l_{ij}^0(x, \xi, e^{i\theta}q))$, где l_{ij}^0 — главная часть l_{ij}, содержащая только члены порядка $s_i + t_j$, не обращается в нуль ни для какого вещественного вектора $(\xi, q) \neq 0$. Добавляя ко всем s_i подходящую постоянную и вычитывая ее из всех t_j, можно добиться того, чтобы $\max s_i = 0$, тогда обязательно $t_j \geqslant 0$. Через $L^{ji}(x, \xi, e^{i\theta}q)$ будем обозначать алгебраическое дополнение элемента l_{ij}^0 детерминанта $L(x, \xi, e^{i\theta}q)$.

Пусть x — любая фиксированная точка на Γ. Рассмотрим полином $L(\eta) = L(x, \tau + \eta\nu, e^{i\theta}q)$, где τ — любой вещественный вектор, касательный к Γ в точке x ($|\tau| + |q| \neq 0$), ν — орт нормали к Γ в точке x. Из условия I следует, что полином $L(\eta)$ не имеет вещественных корней.

Условие II. Полином $L(\eta)$ имеет четную степень ($= 2m$) и корни его расположены поровну в верхней и нижней полуплоскостях. При $n \geqslant 2$ это условие всегда выполняется. Мы положим $L(\eta) = L^+(\eta)L^-(\eta)$, где корни L^+ (L^-) лежат в верхней (нижней) полуплоскости.

Мы будем изучать решения уравнения (1), удовлетворяющие на границе Γ области G следующим граничным условиям

$$B_k u = \sum_{j=1}^{N} B_{kj}(x, D, \lambda)\, u_j(x) = \varphi_k(x) \; (x \in \Gamma; \qquad k = 1, \ldots, m), \tag{3}$$

где $B_{kj} = \sum\limits_{t+|\alpha| \leqslant r_{kj}} b_{t\alpha}^{kj}(x)\, \lambda^t D^\alpha$.

Условие III. Граничные условия

$$B_k(x, D, e^{i\theta}D_t)\, u(x, t) = \\ = \sum_{j=1}^{N} B_{kj}(x, D, e^{i\theta}D_t)\, u_j(x, t) = \varphi_k(x, t) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

для $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ являются дополнительными в смысле [3, 4] для системы (2) в цилиндре $G \times (-\infty, \infty)$. Это означает следующее. Существуют такие целые σ_k, что $r_{kj} \leqslant \sigma_k + t_j$ и $B_{kj} \equiv 0$ при $\sigma_k + t_j < 0$. Обозначим через B_{kj}^0 главную часть B_{kj}, состоящую из членов порядка $\sigma_k + t_j$. При этом в любой точке $x \in \Gamma$ и для любых вещественных τ, q ($|\tau| + |q| \neq 0$) и $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ строки матрицы

$$\left(\sum_{j=1}^{N} B_{kj}^0(x, \tau + \eta\nu, e^{i\theta}q)\, L^{ji}(x, \tau + \eta\nu, e^{i\theta}q) \right)_{\substack{k=1,\ldots,m,\\ i=1,\ldots,N.}} \tag{5}$$

элементы которой рассматриваются как полиномы от η, линейно независимы по модулю $L^+(\eta)$.

3°. Пусть целое $l \geqslant \max\{0, \sigma_k + 1\}$, $p > 1$. Введем в рассмотрение прямые произведения соболевских пространств целых и дробных порядков

$$H_p^l(G) = \prod_{j=1}^{N} W_p^{l+t_j}(G), \tag{6}$$

$$K_p^l(G) = \prod_{i=1}^{N} W_p^{l-s_i}(G) \times \prod_{k=1}^{m} W_p^{l-\sigma_k-\frac{1}{p}}(\Gamma). \tag{7}$$

Для $u \in W_p^s(G)$ ($s \geqslant 0$—целое) введем наряду с обычными нормами $\|\cdot\|_{s,p}$ также нормы

$$\|| u |\|_{s,p} = \left(\sum_{k=0}^{s} |q|^{pk} \| u \|_{s-k,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{8}$$

зависящие от параметра q, входящего в систему. Для $\varphi \in W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ положим

$$\||\varphi|\|_{s-\frac{1}{p},p} = \inf \||u|\|_{s,p}, \tag{9}$$

где inf берется по всем $u \in W_p^s(G)$, равным φ на Γ. Для фиксированного q нормы $\|\cdot\|$ и $\||\cdot|\|$ эквивалентны. Нормы $\||\cdot|\|$ индуцируют соответствующие нормы в пространствах $H_p^l(G)$ и $K_p^l(G)$; мы их будем обозначать через $\||\cdot|\|_{H_p^l(G)}$ и $\||\cdot|\|_{K_p^l(G)}$.

С задачей (1), (3) мы свяжем оператор $\mathfrak{U}$, переводящий вектор-функцию $u = (u_1, \ldots, u_N) \in H_p^l$ в $\mathfrak{U}u = (l_1 u, \ldots, l_N u, B_1 u, \ldots, B_m u) \in K_p^l(G)$. При естественных предположениях гладкости Γ и коэффициентов уравнений и граничных условий справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I, II, III. Тогда для достаточно большого $|q|$ справедливо неравенство*

$$\||u|\|_{H_p^l(G)} \leqslant K \||\mathfrak{U}u|\|_{K_p^l(G)} \qquad (u \in H_p^l(G)), \tag{10}$$

где постоянная $K > 0$ не зависит от u и q.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия I, II, III. Если $|q|$ достаточно велико, то для любого $F = (f_1, \ldots, f_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_p^l(G)$ существует единственное решение $u = (u_1, \ldots, u_N) \in H_p^l(G)$ задачи* (1), (3).

Для доказательства теоремы 1 мы рассматриваем задачу (2), (4) в цилиндре $G \times (-\infty, \infty)$. Если $\zeta(t) \in C^\infty(-\infty, \infty)$, $\zeta(t) \equiv 1$ при $|t| \leqslant \frac{1}{2}$, $\zeta(t) \equiv 0$ при $|t| \geqslant 1$, а $u(x) \in H_p^l(G)$, то для функции $u(x, t) = \zeta(t) e^{iqt} u(x)$ можно записать априорную оценку [3, 4]

$$\| u(x,t) \|_{H_p^l\left(G \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{N} \| l_i(x, D, e^{i\theta} D_t) u(x,t) \|_{W_p^{l-s_i}(G \times (-1,1))} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \| B_k(x, D, e^{i\theta} D_t) u(x,t) \|_{W_p^{l-\sigma_k-\frac{1}{p}}(\Gamma \times (-1,1))} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \| u_j(x,t) \|_{L_2(G \times (-1,1))}. \tag{11}$$

Из оценки (11) легко получить требуемое неравенство (10) (ср. [1]).

Теорему 2 достаточно доказать для случая $p \geqslant 2$. Действительно, пусть она верна в этом случае и $F \in K_p^l(G)$ ($p < 2$). Рассматривая последовательность достаточно гладких $F_\nu \to F$ в $K_p^l(G)$ мы для каждой F_ν

найдем решение $u_\nu \in H_2^l(G) \subset H_p^l(G)$ задачи (1), (3). Записав для этих решений неравенство (10), мы убедимся, что $u_\nu \to u$ в $H_p^l(G)$, причем u является решением задачи (1), (3).

Итак, достаточно доказать существование решения $u \in H_p^l(G)$ $(p \geqslant 2)$ задачи (1), (3) с $F \in K_p^l(G)$ (единственность решения следует из неравенства (10)). Для доказательства мы, как и в [2] (см. также [5 — 7]), строим оператор $\mathfrak{M}$ (правый регуляризатор), непрерывно действующий из $K_p^l(G)$ в $H_p^l(G)$ $(p \geqslant 2)$, такой, что

$$\mathfrak{U}\mathfrak{M} = E + T, \tag{12}$$

где E — единичный оператор, а $\|T\| < 1$, если только $|q|$ выбрано достаточно большим. Тогда $\mathfrak{R}(\mathfrak{U}) \supseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{U}\mathfrak{M}) = \mathfrak{R}(E+T) = K_p^l(G)$, откуда и следует требуемое утверждение.

Построение оператора $\mathfrak{M}$ основывается на следующей лемме.

Лемма. *Рассмотрим задачу типа* (1), (3) *с постоянными коэффициентами в полупространстве E_n^+ точек $x_n > 0$ (граничные условия типа* (3) *с постоянными коэффициентами задаются на гиперплоскости E_{n-1} точек $x_n = 0$); при этом мы предполагаем, что $l_{ij} = l_{ij}^0$, $B_{kj} = B_{kj}^0$ (см. п. 2) и что выполнены условия* I — III. *В этом случае задача*

$$\begin{aligned} l_i^0(D,\lambda)\,u(x) &= f_i(x) \qquad (x_n > 0;\quad i = 1, \ldots, N), \\ B_k^0(D,\lambda)\,u(x) &= \varphi_k(x) \qquad (x_n = 0;\quad k = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{13}$$

при достаточно больших $|\lambda| = |q|$ имеет единственное решение $u \in H_p^l(E_n^+)$ для любого $F \in K_p^l(E_n^+)$ $(2 \leqslant p < \infty,\ l \geqslant \max\{0, \sigma_k + 1\})$ и

$$|||u|||_{H_p^l(E_n^+)} \leqslant C\,|||F|||_{K_p^l(E_n^+)}, \tag{14}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от F и q.

Докажем лемму сначала для $p = 2$. Ясно, что ее достаточно доказать для случая, когда правые части (13) — бесконечно дифференцируемые финитные относительно ∞ функции. Такими мы и будем их считать при доказательстве. Обозначим через E_{n+1} пространство точек $(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$; E_{n+1}^+ — полупространство $x_n > 0$. Рассмотрим в E_{n+1}^+ задачу

$$\begin{aligned} l_i^0(D, e^{i\theta}D_t)\,u(x,t) &= f_i(x)\,\zeta(t) \qquad (x_n > 0;\ i = 1, \ldots, N), \\ B_k^0(D, e^{i\theta}D_t)\,u(x,t) &= \varphi_k(x)\,\zeta(t) \qquad (x_n = 0;\quad k = 1, \ldots, m), \end{aligned} \tag{15}$$

или, короче, $\mathfrak{U}^0(D, e^{i\theta}D_t)\,u(x,t) = F(x)\,\zeta(t)$. Здесь $\zeta(t)$ — достоточно гладкая быстро убывающая на ∞ функция, преобразование Фурье которой $\widetilde{\zeta}(q)$ не обращается в нуль при действительных q; для определенности будем считать, что $\zeta(t) = e^{-t^2}$, $\widetilde{\zeta}(q) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-q^2/4}$. Как известно [3, 4], задача (15) имеет единственное решение $u(x,t) \in H_2^s(E_{n+1}^+)$. Вычисляя последовательно $\mathfrak{U}^0(D, e^{i\theta}D_t(t^r u(x,t))$ для $r = 1, 2, \ldots$, мы убеждаемся, что $t^r u(x,t) \in H_2^s(E_{n+1}^+)$ для любых натуральных r и s. Отсюда в силу теорем вложения $t^r u_j(x,t) \in C^\nu(\overline{E_{n+1}^+})$, где ν — любое натуральное; при этом $\|t^r u_j(x,t)\|_{C^\nu(\overline{E_{n+1}^+})} \leqslant C = C(\nu, r, F)$ $(j = 1, \ldots, N)$. Отсюда следует, что интегралы вида

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itq} D_x^\alpha u(x,t)\, t^k dt = v^{\alpha k}(x,q)$$

$$(v^{00}(x,q) = v(x,q))$$

сходятся равномерно относительно (x, q) поэтому $v^{\alpha k}(x,q) = D_x^\alpha D_q^k v(x, q)$. Проинтегрировав равенство Парсеваля $\int |t^k D_x^\alpha u_j(x,t)|^2 dt = \int |v_j^{\alpha k}(x, q)|^2 dq$ по x, мы убеждаемся, что $v_j(x,q) \in W_2^h(E_{n+1}^+)$ и в силу теорем вложения $v_j(x,q) \in W_2^{h-1}(E_n^+)$ при каждом q $(j = 1, \ldots, N;$ h — любое натуральное). Применив к (15) преобразование Фурье по t, мы получаем $\mathfrak{U}^0(D, e^{i\theta}q)v(x,q) = F(x)\tilde{\zeta}(q)$.

Итак, задача (13) разрешима при всех q для рассматриваемых $F(x)$ в классе $H_2^s(E_n^+)$, где натуральное число s можно считать сколь угодно большим. Повторяя для найденных решений рассуждения, с помощью которых доказывалась теорема 1, мы убеждаемся, что для всех достаточно больших $|q|$ справедливо неравенство (14) с $p = 2$, и лемма в этом случае доказана.

Докажем теперь лемму для $p > 2$. Пусть $F \in K_p^l(E_n^+)$ $(p > 2)$. Найдем последовательность бесконечно дифференцируемых финитных относительно ∞ элементов $F_\nu \to F$ в $K_p^l(E_n^+)$. Для каждого F_ν найдем решение $u_\nu \in H_2^{l+s}(E_n^+)$, где натуральное число s выбрано достаточно большим, тогда по теоремам вложения $u_\nu \in H_p^l(E_n^+)$. Применяя теперь рассуждения, с помощью которых доказывается теорема 1, мы получим, что для достаточно больших $|q|$ справедливо неравенство $|||u_\nu|||_{H_p^l(E_n^+)} \leqslant C|||F_\nu|||_{K_p^l(E_n^+)}$. С помощью предельного перехода мы получаем утверждение леммы в случае $p > 2$.

4°. Рассмотрим системы с разрывными коэффициентами. Пусть G разбита на две части G_1 и G_2 поверхностью γ, не имеющей общих точек с границей Γ области G. В области $G \setminus \gamma$ рассматривается система уравнений (1) с коэффициентами, терпящими разрыв 1-го рода вдоль поверхности γ. Изучаются решения системы (1), удовлетворяющие на Γ условиям (3), а на поверхности разрыва γ следующим условиям сопряжения

$$\sum_{j=1}^{N} [B_{hj}^1(x, D, \lambda)\, u_j^1(x) - B_{hj}^2(x, D, \lambda)\, u_j^2(x)] = \psi_h(x) \quad (h = 1, \ldots, 2m).$$

Здесь $u_j^r(x)$ $(x \in \gamma)$ — предельное значение $u_j(x)$ со стороны G_r $(r = 1, 2)$, B_{hj}^r — дифференциальные выражения, определенные на γ. Используя результаты работы [8], мы, как и выше, получаем, что *для рассматриваемой задачи справедливы утверждения, полностью аналогичные теоремам* 1, 2.

5°. Результаты данной работы дают возможность, как и в [2], провести исследование смешанной задачи для параболических систем.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Agmon, On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure Appl. Math., **15**, № 2, 1962.
2. М. С. Агранович, М. И. Вишик, Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, 19, № 3, 1964.
3. В. А. Солонников, Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга I, Изв. АН СССР, сер. матем., **28**, № 3, 1964.

4. S. A g m o n, A. D o u g l i s, L. N i r e n b e r g, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations. II, Comm. Pure Appl. Math., **17**, N 1, 1964.
5. F. E. B r o w d e r, Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **45**, N 3, 1959.
6. М. С. А г р а н о в и ч, А. С. Д ы н и н, Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области, ДАН , **146**, № 3, 1962.
7. З. Г. Ш е ф т е л ь, Разрешимость в L_p и классическая разрешимость общих граничных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, УМН, 19, № 4, 1964.
8. З. Г. Ш е ф т е л ь, Общая теория граничных задач для эллиптических систем с разрывными коэффициентами, УМЖ, 18, № 3, 1966.
9. М. З. С о л о м я к, Оценка нормы резольвенты эллиптического оператора в пространствах L_p, УМН, 15, № 6, 1960.

Поступила 7.VII 1965 г.
Чернигов — Дрогобыч