1967 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 19, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач

Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг

Введение

Настоящая работа посвящена доказательству новой теоремы о полном наборе гомеоморфизмов, порожденных эллиптическим выражением порядка $2m$ и общими неоднородными граничными условиями, и применению теорем о гомеоморфизмах к исследованию функции Грина для эллиптических задач. Другие теоремы о гомеоморфизмах устанавливались Лионсом и Медженесом [1, 2] (см. также обзор [3]), С. Г. Крейном и авторами [4] и одним из авторов [5, 6] (см. также [7], стр. 170—177, 245—265).

Поясним для простого случая оператора Лапласа характер установленной в данной работе теоремы. Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства R_n, Γ — ее граница. Формула Грина

$$\int\limits_G u\,\overline{(-\Delta v + v)}\,dx + \int\limits_\Gamma u\,\frac{\overline{\partial v}}{\partial \nu}\,dx = \int\limits_G (-\Delta u + u)\,\bar v\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Gamma \frac{du}{\partial \nu}\,\bar v dx$$

(ν — внешняя нормаль к Γ) приводит к мысли рассмотреть отображение $(u|_G, u|_\Gamma) \to \left(-\Delta u + u\Big|_G, \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma\right)$.

Подобное отображение применялось Удновым [8] для изучения соответствующей граничной задачи с параметром в граничном условии; конструкция Уднова была обобщена на общие эллиптические задачи Эрколано и Шехтером [9, 10], В. В. Барковским и одним из авторов [11], В. В. Барковским [12, 13]. В работах [8—13] это отображение рассматривалось в пространствах обычных функций, в этой статье — в пространствах обобщенных функций. Опишем возникающую здесь картину.

Ясно, что для каждого целого $s \geqslant 0$ оператор $\mathfrak{L}_s : (u|_G, u|_\Gamma) \to \left(-\Delta u + u|_G, \frac{\partial u}{d\nu}\Big|_\Gamma\right)$ непрерывно действует из пространства $K_{\left(2+s,\, 2+s-\frac{1}{2}\right)} = W_2^{2+s}(G) \oplus W_2^{2+s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ в $K_{\left(s, s+\frac{1}{2}\right)} = W_2^s(G) \oplus W_2^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ($W_2^k(G)$ и $W_2^l(\Gamma)$ — соболевские пространства на G и Γ). Более того, $\mathfrak{L}_s$ осуществляет гомеоморфизм

$$K_{\left(2+s,\, 2+s-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр}) \to K_{\left(s,\, s+\frac{1}{2}\right)} \quad (s = 0, 1, 2, \ldots). \tag{I}$$

Здесь $K_{\left(2+s,\, 2+s-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$ (см. п. 1, § 1) — подпространство $K_{\left(2+s,\, 2+s-\frac{1}{2}\right)}$, состоящее из элеметов вида $(u|_G, u|_\Gamma)$. Оказывается, что можно пару пространств вида (I) так определить для целого $s < 0$, чтобы расширение $\mathfrak{L}_s$ по непрерывности оператора $\mathfrak{L}_0$ осуществляло гомеоморфизм между этими пространствами. А именно, пусть $K_{\left(2+s,\ 2+s-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) $(s < 0)$ — замыкание в метрике $K_{\left(2+s,\ 2+s-\frac{1}{2}\right)}$ множества $K_{\left(2,\ \frac{3}{2}\right)}$ (пр), а $K'_{\left(s,\ s+\frac{1}{2}\right)}$ (пр)— пространство, сопряженное $K_{\left(-s,\ -(s+\frac{1}{2})\right)}$ (пр) относительно $L_2(G) \oplus L_2(\Gamma)$. Тогда указанное расширение устанавливает гомеоморфизм

$$K_{\left(2+s,\ s+\frac{3}{2}\right)}(\text{пр}) \to K'_{\left(s,\ s+\frac{1}{2}\right)}(\text{пр}). \tag{II}$$

Заметим, что если $s \geqslant 0$, то $K'_{\left(s,\ s+\frac{1}{2}\right)}(\text{пр}) = K_{\left(s,\ s+\frac{1}{2}\right)}$ (см. п. 2, §1). Поэтому можно сказать, что $\mathfrak{L}_s$ устанавливает гомеоморфизм между пространствами (II) для любого целого s.

Доказательство этой теоремы ведется на следующем пути. Гомеоморфизм (I) следует из теории разрешимости эллиптических задач, гомеоморфизм (II) при $s \leqslant -2$ выводится из (I) с помощью метода М. И. Вишика — С. Л. Соболева [14] перехода к сопряженным операторам. Чтобы установить гомеоморфизмы (II) для $-2 < s < 0$, мы пользуемся интерполяцией и развиваем методику работы [4].

Приведем содержание § 1 статьи. В п. 1—3 приведены необходимые сведения из теории эллиптических уравнений, а также проведены некоторые вспомогательные построения. Теорема о гомеоморфизмах доказана в п. 4. В п. 5 выводится из этой теоремы другая теорема о гомеоморфизмах, установленная ранее в [5] (см. также [7], стр. 245—253), а в п. 6 сравниваются обе эти теоремы. В п. 7 и 8 даются их приложения к краевым задачам и вопросу о повышении гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения. В п. 1—8 рассматриваются функциональные пространства типа L_2, в п. 9 все результаты переносятся на пространства L_p $(1 < p < \infty)$. В работе коэффициенты дифференциальных выражений и поверхность Γ предполагаются для простоты бесконечно гладкими, в конце п. 9 приведены гораздо менее жесткие предположения о гладкости, достаточные для справедливости теорем.

Отметим, что изложение ведется нами в общем случае наличия дефектов N и N^+. Вводимые ниже конструкции пространств значительно упрощаются в случае $N = N^+ = 0$.

Теоремы о гомеоморфизмах, установленные в [4—6], нашли ряд применений: в [4—7] с их помощью доказаны утверждения о локальном повышении гладкости вплоть до границы области обобщенных решений эллиптических уравнений, в [15] (см. также [7], гл. VI) доказано существование вплоть до границы и изучены свойства регулярности спектральной функции самосопряженной эллиптической задачи как в случае ограниченной, так и неограниченной области, в [16] доказано существование решения с повышенной гладкостью нелинейного эллиптического уравнения, в [17] исследована эллиптическая граничная задача в случае, когда функции, стоящие в правых частях, имеют сколь угодно большие степенные особенности.

В § 2 дается еще одно приложение теорем о гомеоморфизмах — к доказательству существования и изучения свойств гладкости по совокупности переменных вплоть до границы области функции Грина общей эллиптической задачи с неоднородными граничными условиями, при этом отсутствие дефекта не предполагается. В различных более частных случаях функция Грина исследовалась ранее в работах [18—23]. В случае отсутствия дефекта свойства функции Грина общей эллиптической задачи были недавно анонсированы Ю. П. Красовским [24], который использовал методы теории потенциала. Сущность нашего метода поясним на примере первой краевой задачи для оператора Лапласа. Функцию Грина этой задачи мы находим как решение (обобщенное) $R_x = R(x, \cdot) = R(x, y)$ задачи $-\Delta R_x = \delta_x$, $R_x|_\Gamma = 0$, где δ_x — функция Дирака, сосредоточенная в точке $x \in G \cup \Gamma$. Так как известно, к какому негативному пространству принадлежит δ_x, то по теореме о гомеоморфизмах мы определяем, к какому пространству принадлежит $R_x = R(x, \cdot) = R(x, y)$. Такой подход позволил также изучить свойства разности функций Грина основной и возмущенной задачи; близкие вопросы другим способом для уравнения второго порядка изучались М. Ш. Бирманом [25].

В настоящей работе рассматривается случай ограниченной области. Развитый подход вместе с теоремами о локальном повышении гладкости позволяет также исследовать свойства регулярности по совокупности переменных функций Грина в неограниченной области. Более подробно эти вопросы будут изложены в другом месте. Заметим также, что полученные в работе оценки для функции Грина позволяют получить оценки собственных чисел эллиптических операторов, для этого надо лишь воспользоваться результатами М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [26, 37].

§ 1. Теорема о гомеоморфизмах

1. Напомним в требуемом аспекте некоторые сведения из теории эллиптических уравнений, соответствующие определения и результаты см. например, в [7], гл. III, § 6. Попутно мы проведем также некоторые новые по сравнению с [7] построения.

Пусть G-ограниченная область n-мерного пространства R_n точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, Γ—ее граница. В $G \cup \Gamma$ рассматривается правильно эллиптическое выражение с комплексными коэффициентами

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u \ (D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \qquad D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n), \tag{1}$$

на Γ—m граничных дифференциальных выражений

$$B_j u = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha u \quad (j = 1, \ldots, m;\ m_j \leqslant 2m - 1). \tag{2}$$

Предполагается, что $\{B_j\}_{j=1}^m$ накрывают L и образуют нормальную систему; Γ и коэффициенты $a_\alpha(x)$ $(x \in G \cup \Gamma)$ и $b_{j\alpha}(x)$ $(x \in \Gamma)$ считаются бесконечно дифференцируемыми.

Пусть L^+ — выражение, формально сопряженное L, а $\{C_j\}_{j=1}^m$ — произвольная система граничных выражений вида (2), дополняющая систему $\{B_j\}_{j=1}^m$ до системы Дирихле порядка $2m$. Тогда существует такая зависящая от выбора $\{C_j\}_{j=1}^m$ система граничных выражений $\{B_j', C_j'\}_{j=1}^m$, также образующая систему Дирихле порядка $2m$, что для всех u и v из соболевского пространства $W_2^{2m}(G)$ справедлива формула Грина

$$(Lu, v) + \sum_{j=1}^m \langle B_j u, C_j' v\rangle = (u, L^+ v) + \sum_{j=1}^m \langle C_j u, B_j' v\rangle \tag{3}$$

($(\cdot, \cdot)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярные произведения в $L_2(G)$ и $L_2(\Gamma)$). Порядки m_j, m_j',

l_j, l'_j дифференциальных выражений B_j, B'_j, C_j, C'_j связаны соотношением $m_j + l'_j = m'_j + l_j = 2m - 1$ (см., например, [27], [7], стр. 236). При этом выражения $\{B'_j\}_{j=1}^m$ накрывают выражение L^+ тогда и только тогда, когда выражения $\{B_j\}_{j=1}^m$ накрывают L.

Будем обозначать $W_2^k(G)$ и $W_2^r(\Gamma)$ $\left(k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots; r = \ldots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots\right)$ соболевские пространства на G и Γ, $\|\cdot\|_k$, $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_r$ — нормы в них ($\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$, $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_0 = \langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle$).

Пусть

$$K_{(k, r_j)} = W_2^k(G) \oplus W_2^{r_1}(\Gamma) \oplus \ldots \oplus W_2^{r_m}(\Gamma) \tag{4}$$

$$\left(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots; \quad r_1, \ldots, r_m = \ldots, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \ldots\right)$$

— ортогональная сумма $m+1$ указанных пространств. Ясно, что $K_{(k', r'_j)} \supseteq K_{(k'', r''_j)}$, если $k' \leqslant k''$, $r'_j \leqslant r''_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Пространство $K_{(0, 0)}$ обозначим L_2. Понятно, что пространства $K_{(-k, -r_j)}$ и $K_{(k, r_j)}$ взаимно сопряжены относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_{L_2}$: каждый линейный непрерывный функционал l над $K_{(k, r_j)}$ может быть записан в виде $l(U) = (U, V)_{L_2}$ $(U \in K_{(k, r_j)})$, где $V \in K_{(-k, -r_j)}$, $\|l\| = \|V\|_{K_{(-k, -r_j)}}$ $\left(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots; r_1, \ldots, r_m = \ldots, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \ldots\right)$. Отметим, что $|(U, V)_{L_2}| \leqslant \|U\|_{K_{(k, r_j)}} \times \|V\|_{K_{(-k, -r_j)}}$ для рассматриваемых U, V.

Пусть $s = 0, 1, \ldots$. Определим оператор

$$\mathfrak{L}_s : K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)} \to K_{\left(s,\ 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}, \tag{5}$$

беря в качестве его области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_s)$ (замкнутое) подпространство векторов из $K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ вида $U = (u, C_1 u, \ldots, C_m u)$ $(u \in W_2^{2m+s}(G))$ и полагая

$$\mathfrak{L}_s U = \mathfrak{L}_s(u, C_1 u, \ldots, C_m u) = (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u). \tag{6}$$

Так как множество $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_s)$ зависит от способа *продолжения* выражений (2) до системы Дирихле порядка $2m$, то будем указанное выше подпространство векторов из $K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ обозначать $K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр).

Аналогично определим формально сопряженный оператор $\mathfrak{L}_s^+ : \mathfrak{D}(\mathfrak{L}_s^+) = K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$ — подпространство элементов $V = (v, C'_1 v, \ldots, C'_m v)$ $(v \in W_2^{2m+s}(G))$ пространства $K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$; $\mathfrak{L}_s^+ V = (L^+ v, B'_1 v, \ldots, B'_m v) \in K_{\left(s,\ 2m+s-m'_j-\frac{1}{2}\right)}$. Теперь формула Грина (3) может быть переписана в виде:

$$(\mathfrak{L}_0 U, V)_{L_2} = (U, \mathfrak{L}_0^+ V)_{L_2} \quad (U \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}_0),\ V \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}_0^+)). \tag{7}$$

Обозначим N_s ядро оператора $\mathfrak{L}_s : N_s = \{U \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}_s) : \mathfrak{L}_s U = 0\}$, т. е. N_s состоит из векторов $U = (u, C_1 u, \ldots, C_m u)$ $(u \in W_2^{2m+s}(G))$ таких, что $Lu = 0$, $B_j u|_\Gamma = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Так как поверхность Γ, коэффициенты дифференциальных выражений L, $\{B_j\}_{j=1}^m$ по предположению бесконечно гладкие, то из $u \in W_2^{2m}(G)$, $Lu = 0$, $B_j u|_\Gamma = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ следует, что $u \in C^\infty(G \cup \Gamma$, (см. [7], стр. 240), поэтому N_s не зависит от s и можно писать $N_s = N$.

Как известно, N конечномерно, поэтому его можно рассматривать и как подпространство любого пространства $K_{(k, r_j)}$ вида (4). В частности, будем считать N подпространством L_2 и обозначим $\widehat{N}$ ортогональное дополнение в L_2 к N; $L_2 = N \oplus \widehat{N}$. Пусть P_N и $P_{\widehat{N}}$ — ортогональные проекторы в L_2 на N и $\widehat{N}$ соответственно.

Эти операторы можно распространить до операторов проектирования (косого) в любом $K_{(k, r_j)}$. Именно, пусть $A \in K_{(k, r_j)}$ $\left(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots; \right.$ $\left. r_j = \ldots, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \ldots\right)$. Функционал $l(U) = (A, U)_{L_2}$ $(U \in N)$ является непрерывным в N с метрикой L_2: $|l(U)| \leqslant \|A\|_{K_{(k, r_j)}} \|U\|_{K_{(-k, -r_j)}} \leqslant c\|U\|_{L_2}$ $(U \in N$; мы воспользовались конечномерностью N), поэтому его можно записать посредством элемента $V \in N: (A, U)_{L_2} = l(U) = (V, U)_{L_2}$ $(U \in N)$. Полагаем $P_N A = V$. Если $k, r_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, то мы, очевидно, получили некоторое сужение прежнего оператора P_N. Если хотя бы одно из этих чисел отрицательно, то P_N—расширение некоторого подобного сужения. В любом случае P_N действует непрерывно из $K_{(k, r_j)}$ в N, снабженном метрикой $K_{(k, r_j)}$:

$$|(P_N A, U)_{L_2}| = |(A, U)_{L_2}| \leqslant \|A\|_{K_{(k, r_j)}} \|U\|_{K_{(-k, -r_j)}} \leqslant c_1 \|A\|_{K_{(k, r_j)}} \|U\|_{L_2} \quad (U \in N),$$

т. е.

$$\|P_N A\|_{L_2} \leqslant c_1 \|A\|_{K_{(k, r_j)}} \text{ и } \|P_N A\|_{K_{(k, r_j)}} \leqslant c_2 \|A\|_{K_{(k, r_j)}} \quad (A \in K_{(k, r_j)}).$$

Ранее определенные $P_{\widehat{N}}$ распространяем на произвольные $K_{(k, r_j)}$ $\left(k = \ldots \right.$ $\left. \ldots, -1, 0, 1, \ldots; r_j = \ldots, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \ldots\right)$ как $1 - P_N$, где 1 — единичный оператор в $K_{(k, r_j)}$. Ясно, что при увеличении k и r_j операторы P_N и $P_{\widehat{N}}$ становятся сужениями подобных операторов при меньших значениях индексов k и r_j.

Итак, определены операторы P_N и $P_{\widehat{N}}$, непрерывно действующие во всех пространствах $K_{(k, r_j)}$, где k и r_j имеют любые знаки, и обладающие свойствами: $1 = P_N + P_{\widehat{N}}$, область значений $\mathfrak{R}(P_N)$ оператора P_N совпадает с N, область значений $\mathfrak{R}(P_{\widehat{N}})$ ортогональна (в L_2) к N.

Аналогичные построения можно провести, исходя не из оператора $\mathfrak{L}_s$, а из $\mathfrak{L}_s^+$. В этом случае для соответствующих понятий вводим обозначения N^+, $\widehat{N}^+$, P_{N^+}, $P_{\widehat{N}^+}$.

2. Введем те пространства, которые будут фигурировать в теоремах о гомеоморфизмах. Для $s = 0, 1, \ldots$ выше уже было введено пространство $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) — подпространство $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$, состоящее из векторов $(u, C_1 u, \ldots, C_m u)$ $(u \in W_2^{2m+s}(G))$. Для целого $s < 0$ $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) —замыкание $K_{\left(2m,\, 2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) в метрике $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$. Из плотнос-

ти множества $K_{\left(2m,\, 2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) в L_2 следует, что при $s \leqslant -2m$ $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) совпадает с $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$. Для любого целого s $K'_{\left(-(2m+s),\, -\left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр) обозначает пространство, сопряженное $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) относительно $(\cdot, \cdot)_{L_2}$. Ясно, что если $s \leqslant -2m$, то $K'_{\left(-(2m+s),\, -\left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр) совпадает с $K_{\left(-(2m+s),\, \left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$. Если $s > -2m$, то $K'_{\left(-(2m+s),\, -\left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр) совпадает с фактор-пространством $K_{\left(-(2m+s),\, -\left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}/M$, где M — подпространство $K_{\left(-(2m+s),\, -\left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$, ортогональное $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр)*.

Аналогично определим для любого целого s пространства $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр)$^+$ и им сопряженные $K'_{\left(-(2m+s),\, -\left(2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр)$^+$. Если $s \geqslant 0$, то $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр)$^+$ — подпространство $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$, состоящее из векторов $(v,\ C'_1 v, \ldots$ $\ldots, C'_m v)$ $(v \in W_2^{2m+s}(G))$, если $s < 0$, то $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр)$^+$ — замыкание $K_{\left(2m,\, 2m-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр)$^+$ в метрике $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}$; $K'_{\left(-(2m+s),\, -\left(2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр)$^+ =$ $= K_{\left(-(2m+s),\, -\left(2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}/M^+$.

В частности, в дальнейшем будут фигурировать те пространства, в которых индекс $2m+s$ заменен на s. При этом надо учитывать, что $m_j + l'_j = m'_j + l_j = 2m-1$.

Пусть $P_N, P_{\hat{N}}$ — проектирующие операторы, построенные в предыдущем пункте. Из конечномерности N легко следует, что пространства $P_N K_{(k,\, r_j)}$ и $P_{\hat{N}} K_{(-k,\, -r_j)}$ взаимно сопряжены относительно $(\cdot, \cdot)_{L_2}$ ([7], стр. 265). Операторы P_N и $P_{\hat{N}}$ можно определить на $K'_{\left(-(2m+s),\, -\left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр) (s—произвольное целое). Действительно, так как $N \subset K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) $\subset$

---

* Мы здесь воспользовались следующим известным утверждением [28]. Пусть B, B_1 — банаховы пространства, а B', B'_1 — им сопряженные пространства; B_1 — подпространство B. Тогда B'_1 — изоморфно (алгебраически и топологически) фактор-пространству B'/M, где M — подпространство B', состоящее из элементов, аннулирующихся на B_1. Если B и B_1 — гильбертовы пространства (именно такой случай рассматривается в тексте), то B'_1 изоморфно (алгебраически и топологически) с подпространством пространства B', ортогональным M.

$\subset K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$, то $K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) инвариантно относительно P_N. Определим P_N в $K'_{\left(-(2m+s),\ -\left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр) по сопряжению — это пространство сопряжено относительно L_2 к $K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр), где P_N определен (ср. со стр. 7). Далее, положим $P_{\widehat{N}} = 1 - P_N$. Ясно, что при этом пространства $P_{\widehat{N}} K'_{\left(-(2m+s),\ -\left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр) и $P_{\widehat{N}} K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) будут взаимно сопряжены. Соответствующие утверждения справедливы, конечно, и для операторов P_{N+}, $P_{\widehat{N}+}$.

3. Ниже нам понадобятся также следующие пространства. Обозначим $\widetilde{W}_2^s(G)$ (s — произвольное целое) ([5], см. также [7], стр. 245) пополнение множества $C^\infty(G \cup \Gamma)$ по норме

$$|||u|||_s^2 = \|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^{2m} \langle\langle \frac{\partial^{j-1}}{\partial \nu^{j-1}} u \rangle\rangle^2_{s-j+\frac{1}{2}} \tag{8}$$

(ν — внешняя нормаль к Γ). Ясно, что если $s \geqslant 2m$, то нормы $|||\cdot|||_s$ и $\|\cdot\|_s$ эквивалентны, при $s < 2m$ такой эквивалентности нет.

Целесообразность введения нормы (8) объясняется следующей леммой (см. [7], стр. 246).

Лемма 1. *Пусть E — произвольное выражение порядка $r \leqslant 2m$ с достаточно гладкими коэффициентами. Тогда $\|Eu\|_{s-r} \leqslant c_s |||u|||_s$. Аналогично, для произвольного граничного выражения B порядка $r \leqslant 2m-1$ с достаточно гладкими коэффициентами $\langle\langle Bu \rangle\rangle_{s-r-\frac{1}{2}} \leqslant c_s |||u|||_s$ (s — произвольное целое; $u \in C^\infty(G \cup \Gamma)$).*

Заметим, что из этой леммы следует, что замыкания отображений $u \to Eu$, $u \to Bu|_\Gamma$ ($u \in C^\infty(G \cup \Gamma)$) непрерывно действуют из всего $\widetilde{W}_2^s(G)$ соответственно в $W_2^{s-r}(G)$, $W_2^{s-r-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. В частности, отображение $u \to (Lu, B_1u, \dots$ $\dots, B_mu)$ ($u \in C^\infty(G \cup \Gamma)$) после замыкания непрерывно действует из всего $\widetilde{W}_2^s(G)$ в $K_{\left(s-2m,\ s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ (s — произвольное целое). Ниже для произвольного $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$ через Eu (Bu) условимся обозначать значение замыкания (в соответствующих пространствах) оператора $u \to Eu$ ($u \to Bu$) на элементе u.

Из леммы 1 следует, что замыкание S отображения $u \to \left(u|_G, u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma, \dots\right.$ $\left.\dots, \frac{\partial^{2m-1} u}{\partial \nu^{2m-1}}\Big|_\Gamma\right)$ ($u \in C^\infty(G \cup \Gamma)$) непрерывно действует из всего $\widetilde{W}_2^s(G)$ в $K^{(2m+1)}_{\left(s,\ s-(j-1)-\frac{1}{2}\right)} = K^{(2m+1)}_{\left(s,\ s-j+\frac{1}{2}\right)} = W_2^s(G) \oplus \sum_{j=0}^{2m-1} W_2^{s-j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$*. Оказывается, что S — изоморфизм между $\widetilde{W}_2^s(G)$ и соответствующим подпространством пространства $K^{(2m+1)}_{\left(s,\ s-j+\frac{1}{2}\right)}$. Действительно, норма $|||u|||_s$ функции $u \in C^\infty(G \cup \Gamma)$

---

* Здесь верхний индекс $2m+1 = t$ обозначает, что в отличие от (4) в ортогональной сумме участвует t слагаемых. Ниже также будут встречаться другие значения t.

совпадает с нормой элемента $Su = \left(u|_G, u|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{2m-1} u}{\partial \nu^{2m-1}}\right|_\Gamma \right)$ в ортогональной сумме $K^{(2m+1)}_{\left(s, s-j+\frac{1}{2}\right)}$. Поэтому $\widetilde{W}_2^s(G)$ изоморфно (алгебраически и топологически) с замыканием множества $F = \{Su, u \in C^\infty(G \cup \Gamma)\}$ в $K^{(2m+1)}_{\left(s, s-j+\frac{1}{2}\right)}$. Так как множество F плотно в $L_2(G) \oplus \underbrace{L_2(\Gamma) \oplus \ldots \oplus L_2(\Gamma)}_{2m}$, то при $s \leqslant 0$ $\widetilde{W}_2^s(G)$ изоморфно со всем $K^{(2m+1)}_{\left(s, s-j+\frac{1}{2}\right)}$. При $0 < s < 2m$ оно изоморфно с $K^{(s+1)}_{\left(s, s-j+\frac{1}{2}\right)}(Д) \oplus W_2^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \oplus W_2^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \oplus \ldots \oplus W_2^{s-2m+\frac{1}{2}}(\Gamma)$, где $K^{(s+1)}_{\left(s, s-j+\frac{1}{2}\right)}(Д)$ — подпространство $W_2^s(G) \oplus \sum\limits_{j=0}^{s-1} W_2^{s-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) = K^{(s+1)}_{\left(s, s-j+\frac{1}{2}\right)}$, состоящее из элементов $\left(u|_G, u|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{s-1} u}{\partial \nu^{s-1}}\right|_\Gamma \right)$ $(u \in W_2^s(G))$; при $s \geqslant 2m$ $\widetilde{W}_2^s(G)$ изоморфно $K^{(2m+1)}_{\left(s, s-j+\frac{1}{2}\right)}(Д)$—подпространству $K^{(2m+1)}_{\left(s, s-j+\frac{1}{2}\right)}$ элементов $\{Su, u \in \widetilde{W}_2^s(G)\}$. Значение оператора S на произвольном элементе $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$ будем записывать в виде $Su = \left(u|_G, u|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{2m-1} u}{\partial \nu^{2m-1}}\right|_\Gamma \right)$.

Ясно, что если $s < 2m$, то различные элементы u_1 и u_2 из $\widetilde{W}_2^s(G)$ могут совпадать «как элементы из $W_2^s(G)$» — это означает лишь, что первые компоненты элементов Su_1, Su_2 совпадают.

Из леммы 1 и того факта, что $\{B_j, C_j\}_{j=1}^m$ образуют систему Дирихле порядка $2m$, следует, что *нормы* $|||\cdot|||_s$ и

$$\{u\}_s = \left(\|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^m \left(\langle\!\langle B_j u \rangle\!\rangle^2_{s-m_j-\frac{1}{2}} + \langle\!\langle C_j u \rangle\!\rangle^2_{s-l_j-\frac{1}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

(s — *произвольное целое*) *эквивалентны*. Действительно, оценка

$$\|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^m \left(\langle\!\langle B_j u \rangle\!\rangle^2_{s-m_j-\frac{1}{2}} + \langle\!\langle C_j u \rangle\!\rangle^2_{s-l_j-\frac{1}{2}} \right) \leqslant c\, |||u|||_s^2 \quad (u \in C^\infty(G \cup \Gamma)) \tag{10}$$

следует из леммы 1. Докажем противоположную оценку. Пусть $G_\delta = \{x \in R_n : |x| < \delta, x_n > 0\}$ — полушар, γ_δ — плоский кусок его границы. При помощи разложения единицы и спрямления участка границы обычным образом (ср. [7], стр. 233, 263) получаем, что искомое неравенство достаточно доказать для функций $u \in C^\infty(G_\delta \cup \gamma_\delta)$, дополнительно аннулирующихся в окрестностях сферической части границы G_δ. Множество таких функций обозначим через Φ.

Напомним вид граничных дифференциальных выражений на куске γ_δ ([7], стр. 233—236). Через $D^\tau = D_1^{\tau_1} \ldots D_{n-1}^{\tau_{n-1}}$ $(\tau = \tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ будем обозначать тангенциальные производные, $D_n = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}$ — нормальная производная. Система $\{B_j, C_j\}_{j=1}^m$ — система Дирихле порядка $2m$, поэтому для этих выражений можно ввести новые обозначения A_j $(j=1, \ldots, 2m)$ таким образом, что

$$A_j = \sum_{t=1}^{j} T_{jt} D_n^{t-1} \qquad (j=1, \ldots, 2m), \tag{11}$$

где $T_{jt} = T_{jt}(x, D)$ — дифференциальные выражения, содержащие только тангенциальные производные D^τ порядка $|\tau| \leqslant j-t$; $T_{jj}(x) \neq 0$ $(j=1, \ldots$ $\ldots, 2m;\ x \in \gamma_\delta)$. В этих обозначениях

$$A_j = \begin{cases} B_k, & \text{если} \quad m_k = j-1, \\ C_k, & \text{если} \quad l_k = j-1. \end{cases} \tag{12}$$

Треугольную систему (11) благодаря условию $T_{jj}(x) \neq 0$ $(j=1, \ldots$ $\ldots, 2m;\ x \in \gamma_\delta)$ можно решить относительно D_n^{j-1}, и мы получим

$$D_n^{j-1} = \sum_{t=1}^{j} \widehat{T}_{jt} A_t \qquad (j=1, \ldots, 2m), \tag{13}$$

где $\widehat{T}_{jt} = \widehat{T}_{jt}(x, D)$ имеют такой же вид, как и T_{jt}; $\widehat{T}_{jj}(x) = \dfrac{1}{T_{jj}(x)}$ $(j=1, \ldots$ $\ldots, 2m;\ x \in \gamma_\delta)$. Из (13) теперь следует, что

$$|||\, u \,|||_s \leqslant \|u\|_s + \sum_{j=1}^{2m} \sum_{t=1}^{j} \langle\!\langle \widehat{T}_{jt} A_t u \rangle\!\rangle_{s-j+\frac{1}{2}} \leqslant \|u\|_s + c_1 \sum_{t=1}^{2m} \langle\!\langle A_t u \rangle\!\rangle_{s-t+\frac{1}{2}} =$$

$$= \|u\|_s + c_1 \sum_{j=1}^{m} \left(\langle\!\langle B_j u \rangle\!\rangle_{s-m_j-\frac{1}{2}} + \langle\!\langle C_j u \rangle\!\rangle_{s-l_j-\frac{1}{2}} \right) \leqslant c_2 \{u\}_s \qquad (u \in \Phi),$$

и требуемое неравенство доказано.

Пусть H — подмножество $C^\infty(G \cup \Gamma)$, состоящее из таких функций u, для которых $P_N(u, C_1 u, \ldots, C_m u) = 0$. Замыкание множества H в метрике $\widetilde{W}_2^s(G)$ обозначим через $\widetilde{H}_s$.

4. В этом пункте докажем теорему о гомеоморфизмах. Для каждого целого s рассмотрим отображение $(u, C_1 u, \ldots, C_m u) \to (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u)$ $(u \in C^\infty(G \cup \Gamma))$ как оператор, действующий из $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$ в $K'_{\left(s,\, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$. Замыкание этого оператора обозначим через $\mathfrak{L}_s$. Если $s \geqslant 0$, то $\mathfrak{L}_s$ совпадает с соответствующим оператором, рассмотренным в п. 1. Пусть Λ_s — сужение оператора $\mathfrak{L}_s$ на $P_{\widehat{N}} K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$. Совершенно аналогично, исходя из отображения $(v, C_1' v, \ldots, C_m' v) \to (L^+ v, B_1' v, \ldots$ $\ldots, B_m' v)$, определим операторы $\mathfrak{L}_s^+, \Lambda_s^+$. Справедлива

Теорема 1. *Для каждого целого s оператор Λ_s устанавливает гомеоморфизм:*

$$P_{\widehat{N}} K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр}) \to P_{\widehat{N}^+} K'_{\left(s,\, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+. \tag{14}$$

Аналогичное утверждение справедливо для оператора Λ_s^+.

Из сказаного в п. 2 следует, что теорему 1 можно сформулировать и так. *Оператор Λ_s устанавливает следующий гомеоморфизм:*

$$P_{\widehat{N}} K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр}) \to P_{\widehat{N}^+} K_{\left(s,\, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)} \qquad (s \geqslant 0),$$

$$P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр}) \to P_{\hat{N}^+} K'_{\left(s,\ 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+ \qquad (-2m \leqslant s \leqslant 0),$$

$$P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)} \to P_{\hat{N}^+} K'_{\left(s,\ 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+ \qquad (s \leqslant -2m).$$

Аналогичные гомеоморфизмы устанавливает Λ_s^+.

Доказательство. Пусть сначала целое $s \geqslant 0$, $U = (u, C_1 u, \ldots, C_m u) \in K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$. Используя неравенство коэрцитивности ([7], стр. 244), получим

$$\| U \|^2_{K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}} = \| u \|^2_{2m+s} + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle C_j u \rangle\!\rangle^2_{2m+s-l_j-\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left(\| Lu \|^2_s + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j u \rangle\!\rangle^2_{2m-m_j-\frac{1}{2}} + \| u \|^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \| u \|^2_{2m+s} \leqslant c_2 \| U \|^2_{K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}}. \tag{15}$$

Покажем теперь, что если $U = (u, C_1 u, \ldots, C_m u) \in P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$, то слагаемое $\| u \|^2$ можно отбросить:

$$c_3 \| U \|^2_{K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}} \leqslant \| Lu \|^2_s + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j u \rangle\!\rangle^2_{2m+s-m_j-\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \| U \|^2_{K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}}. \tag{16}$$

Правая часть неравенства (16) непосредственно следует из (15); докажем левую часть. Предположим противное. Тогда можно найти последовательность

$$U^{(n)} = (u^{(n)}, C_1 u^{(n)}, \ldots, C_m u^{(n)}) \in P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$$

такую, что

$$\| U^{(n)} \|_{K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}} = 1 \text{ и } \| Lu^{(n)} \|^2_s + \sum_{j=1}^{m} \langle\!\langle B_j u^{(n)} \rangle\!\rangle^2_{2m+s-m_j-\frac{1}{2}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Так как $\| u^{(n)} \|_{2m+s} \leqslant 1$, то в силу теорем вложения можно выделить последовательность $U^{(n')}$ такую, что $\| u^{(n')} - u^{(m')} \|_0 \to 0$ при $n', m' \to \infty$. Теперь из (15) заключаем, что $\| U^{(n')} - U^{(m')} \|_{K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}} \to 0$. Поэтому $U^{(n')} \to U$ в $K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$, а так как $P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$ замкнуто в $K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$, то $U \in P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$. Вместе с тем $\mathfrak{L}_s U = \lim_{n' \to \infty} \mathfrak{L}_s U^{(n')} = 0$, т.е. $U \in N$, что невозможно. Итак, неравенство (16) установлено. Из него следует, что $\mathfrak{L}_s$ действует взаимно однозначно и взаимно непрерывно из $P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$ на область значений $\mathfrak{R}(\Lambda_s) = \Lambda_s P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s,\ 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$, являющуюся подпространством $K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Осталось доказать, что $\mathfrak{R}(\Lambda_s)=P_{\widehat{N}+}K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Включение $\mathfrak{R}(\Lambda_s)\subseteq P_{\widehat{N}+}K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ немедленно следует из формулы Грина (7): если $V\in N^+$, то $(\Lambda_s U, V)_{L_2}=(\mathfrak{L}_0 U,V)_{L_2}=(U,\mathfrak{L}_0^+V)_{L_2}=0$. Пусть теперь $F=(f,\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\in P_{\widehat{N}+}K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, т. е. $(F,N^+)_{L_2}=0$. Согласно [7], стр. 241, существует функция $u\in W_2^{2m+s}(G)$ такая, что $(Lu,B_1u,\ldots,B_mu)=F$. Но тогда $U=P_{\widehat{N}}(u,C_1u,\ldots,C_mu)\in\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_s)$ и $\mathfrak{L}_sU=F$. Итак, в случае $s\geqslant 0$ теорема доказана. Она справедлива, конечно, и для оператора Λ_s^+ $(s\geqslant 0)$.

С помощью известного метода перехода к сопряженному оператору докажем теорему для $s\leqslant -2m$. Действительно, оператор Λ_s^+ $(s=0,1,\ldots)$ устанавливает гомеоморфизм между $P_{\widehat{N}+}K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$ и $P_{\widehat{N}}K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. В частности,

$$c_1\|V\|_{K_{\left(2m+s,2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}}\leqslant\|\Lambda_s^+V\|_{K_{\left(s,2m+s-m'_j-\frac{1}{2}\right)}}\leqslant c_2\|V\|_{K_{\left(2m+s,2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\left(V\in P_{\widehat{N}+}K_{\left(2m+s,2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+\right). \qquad (17)$$

Оператор Λ_s^+ непрерывно действует из $P_{\widehat{N}+}K_{\left(2m+s,2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$ в $P_{\widehat{N}}K_{\left(s,2m+s-m'_j-\frac{1}{2}\right)}$. Поэтому существует ему сопряженный оператор $\widetilde{\Lambda}_s$, непрерывно действующий из $P_{\widehat{N}}K_{\left(-s,-\left(2m+s-m'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ в $P_{\widehat{N}}K'_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}(\text{пр})^+$, такой, что

$$(A,\Lambda_s^+V)_{L_2}=(\widetilde{\Lambda}_sA,V)_{L_2}\ \left(A\in P_{\widehat{N}}K_{\left(-s,-\left(2m+s-m'_j-\frac{1}{2}\right)\right)},V\in\mathfrak{D}(\Lambda_s^+)\right). \qquad (18)$$

Из формулы Грина (7) и формулы (18) легко следует, что $\widetilde{\Lambda}_s$ является расширением оператора Λ_s, поэтому из непрерывности $\widetilde{\Lambda}_s$ следует, что

$$\|\Lambda_sU\|_{K'_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}(\text{пр})^+}\leqslant c\|U\|_{K_{\left(-s,-\left(2m+s-m'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}}$$

$$\left(U\in P_{\widehat{N}}K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})\right). \qquad (19)$$

Чтобы получить неравенство, противоположное (19), рассуждаем так. Оператор $(\Lambda_s^+)^{-1}$ $(s\geqslant 0)$ непрерывно действует из $P_{\widehat{N}}K_{\left(s,2m+s-m'_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $P_{\widehat{N}+}K_{\left(2m+s,2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$. Поэтому существует ему сопряженный оператор $\widetilde{\Lambda}_s^{-1}$, непрерывно действующий из $P_{\widehat{N}}+K'_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}(\text{пр})^+$ в

$P_{\widehat{N}}K_{\left(-s,-\left(2m+s-m'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$. Снова с помощью формулы Грина (7) доказываем, что $\widetilde{\Lambda}_s^{-1}$ является расширением оператора Λ_s^{-1}. Из непрерывности $\widetilde{\Lambda}_s^{-1}$ получаем справедливость неравенства, противоположного (19). Из плотности $P_{\widehat{N}}K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$(пр) и $P_{\widehat{N}+}K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ соответственно в $P_{\widehat{N}}K_{\left(-s,-\left(2m+s-m'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ и $P_{\widehat{N}+}K'_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l'_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр)$^+$ мы из неравенства (19) и противоположного ему с помощью предельного перехода получаем доказательство теоремы 1 для $s\leqslant-2m$.

Докажем теперь теорему при $-2m\leqslant s\leqslant 0$. Так как она справедлива для $s=0$ и $s=-2m$, и так как оператор Λ_{-2m}^{-1} является расширением по непрерывности оператора Λ_0^{-1}, то заключаем, что $\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}$ непрерывно действует из всего $K_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $K_{\left(2m+t,2m+t-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ для $t=0$ и $t=-2m$. Применяя интерполяционную теорему С. Г. Крейна — Лионса ([29 — 31], см. также [7], стр. 253—255), найдем, что $\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}$ непрерывно действует из $K_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $K_{\left(2m+t,2m+t-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ $(-2m\leqslant t\leqslant 0)$. Пусть $B\in K_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ таково, что $(B,V)_{L_2}=0$, где V — произвольный вектор из $P_{\widehat{N}+}K_{\left(-t,-\left(2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (пр)$^+$ ($t\in[-2m,0]$, t — целое). Нетрудно понять, что $\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}B=0$. В самом деле, пусть последовательность $B^{(n)}\in K_{\left(0,2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ сходится в $K_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ к B. Для $W\in K_{\left(0,2m-m'_j-\frac{1}{2}\right)}\subset K_{\left(-2m-t,-2m-t+l_j+\frac{1}{2}\right)}$ $(t=-2m,\ldots,0)$ имеем

$$(\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}B^{(n)},W)_{L_2}=(\Lambda_0^{-1}P_{\widehat{N}+}B^{(n)},W)_{L_2}=(\Lambda_0^{-1}P_{\widehat{N}+}B^{(n)},P_{\widehat{N}}W)_{L_2}=$$

$$=(P_{\widehat{N}+}B^{(n)},(\Lambda_0^{+})^{-1}P_{\widehat{N}}W)_{L_2}=(B^{(n)},(\Lambda_0^{+})^{-1}P_{\widehat{N}}W)_{L_2}\to(B,(\Lambda_0^{+})^{-1}P_{\widehat{N}}W)_{L_2}=0. \tag{20}$$

С другой стороны, $(\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}B^{(n)},W)_{L_2}\to(\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}B,W)_{L_2}$, поэтому $(\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}B,W)_{L_2}=0$. Так как W пробегает плотное множество в соответствующем пространстве, то $\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}B=0$. Пусть $A\in K_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ $(t=-2m,\ldots,0)$, тогда

$$\|\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}A\|_{K_{\left(2m+t,2m+t-l_j-\frac{1}{2}\right)}}=\|\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}(A+B)\|_{K_{\left(2m+t,2m+t-l_j-\frac{1}{2}\right)}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|A+B\|_{K_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}} \tag{21}$$

$$(t=-2m,\ldots,0).$$

Перейдя в (21) к inf по рассматриваемым B, найдем

$$\|\Lambda_{-2m}^{-1}P_{\widehat{N}+}A\|_{K_{\left(2m+t,2m+t-l_j-\frac{1}{2}\right)}}\leqslant c\,\|A\|_{K'_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+} \tag{22}$$

(мы здесь воспользовались тем, что пространство, сопряженное к подпространству $K_{\left(-t,-\left(2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)\right)}(\text{пр}^+)$, совпадает с соответствующим фактор-пространством, см. начало п. 2). Подставляя в (22) вместо A вектор $\mathfrak{L}_0 U$ ($U \in P_{\hat{N}} K_{\left(2m,2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$), получим

$$\| U \|_{K_{\left(2m+t,2m+t-l_j-\frac{1}{2}\right)}} \leqslant c \| \mathfrak{L}_0 U \|_{K'_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+} \tag{23}$$

$$(U \in P_{\hat{N}} K_{\left(2m,2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр});\quad t = -2m, \ldots, 0).$$

Покажем, что имеет место неравенство, противоположное (23), т.е.

$$\| \mathfrak{L}_0 U \|_{K'_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+} \leqslant c_1 \| U \|_{K_{\left(2m+t,2m+t-l_j-\frac{1}{2}\right)}} \tag{24}$$

$$(U \in P_{\hat{N}} K_{\left(2m,2m-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр});\quad t = -2m, \ldots, 0).$$

Неравенство (24) будет, конечно, следовать из неравенства

$$\| (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u) \|_{K'_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \| (u, C_1 u, \ldots, C_m u) \|_{K_{\left(2m+t,2m+t-l_j-\frac{1}{2}\right)}}$$

$$(u \in W_2^{2m}(G);\quad t = -2m, \ldots, 0).$$

Так как $K'_{\left(t,2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$ — пространство, сопряженное к $K_{\left(-t,-\left(2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)\right)}(\text{пр})^+$, то надо доказать, что

$$\sup_{v \in W_2^{2m}(G)} \frac{\left| (Lu, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C'_j v \rangle \right|}{\| v \|_{-t} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle C'_j v \rangle\rangle_{-\left(2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left(\| u \|_{2m+t} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle C_j u \rangle\rangle_{2m+t-l_j-\frac{1}{2}} \right) \tag{25}$$

$$(u \in W_2^{2m}(G);\quad t = -2m, \ldots, 0).$$

При помощи разложения единицы и спрямления участка границы, как и в п. 3 (ср. [7], стр. 233, 263), убеждаемся, что оценку (25) достаточно установить для класса Φ функций $u \in C^\infty(G_\delta \cup \gamma_\delta)$, аннулирующихся дополнительно в окрестности сферической части границы G_δ. Напомним, что G_δ — полушар $|x| < \delta$, $x_n > 0$; γ_δ — плоский кусок его границы. Систему Дирихле $\{B_j, C_j\}_{j=1}^m$ запишем в виде (11), отметим формулы (12) и (13). Дифференциальное выражение можно переписать в виде

$$Lu = \sum_{|\tau|+\nu \leqslant 2m} a_{\tau\nu}(x) D^\tau D_n^\nu u. \tag{26}$$

Посредством интегрирования по частям с помощью (13), получаем для $u, v \in \Phi$:

$$(Lu, v) - (u, L^{+}v) = \sum_{s=1}^{2m} \int_{\gamma_\delta} D_n^{s-1} u \cdot \sum_{\nu=s}^{2m} \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} D_n^{\nu-s} D^{\tau} (a_{\tau\nu} \bar{v})\, dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{2m} \sum_{t=1}^{s} \int_{\gamma_\delta} \hat{T}_{st} A_t\, u \cdot \sum_{\nu=s}^{2m} \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} D_n^{\nu-s} D^{\tau} (a_{\tau\nu} \bar{v})\, dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{2m} \sum_{t=1}^{s} \int_{\gamma_\delta} A_t u \cdot \sum_{\nu=s}^{2m} \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} \overline{\hat{T}_{st}^{+} D_n^{\nu-s} D^{\tau} (\bar{a}_{\tau\nu} v)}\, dx =$$

$$= \sum_{t=1}^{2m} \int_{\gamma_\delta} A_t u \cdot \sum_{s=t}^{2m} \sum_{\nu=s}^{2m} \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} \overline{\hat{T}_{st}^{+} D_n^{\nu-s} D^{\tau} (\bar{a}_{\tau\nu} v)}\, dx = \sum_{t=1}^{2m} \langle A_t u, A'_{2m-t+1} v \rangle; \quad (27)$$

$$A'_{2m-t+1} v = \sum_{s=t}^{2m} \sum_{\nu=s}^{2m} \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} \hat{T}_{st}^{+} D_n^{\nu-s} D^{\tau} (\bar{a}_{\tau\nu} v) \quad (t = 1, \ldots, 2m). \quad (28)$$

Система выражений $\{A'_j\}_{j=1}^{2m}$ (с точностью до знаков) совпадает с системой $\{B'_j, C'_j\}_{j=1}^{m}$, равенство (27) является формулой Грина (3).

Приступим теперь к доказательству неравенства (25). Имеем

$$(Lu, v) = \sum_{|\tau|+\nu \leqslant 2m} (a_{\tau\nu}(x) D^{\tau} D_n^{\nu} u, v) = \sum_{\nu=0}^{2m} \left(D_n^{\nu} \cdot u, \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} D^{\tau} (\bar{a}_{\tau\nu} v) \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2m+t} \left(D_n^{\nu} u, \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} D^{\tau} (\bar{a}_{\tau\nu} v) \right) + \sum_{\nu=2m+t+1}^{2m} \left(D_n^{\nu} u, \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} D^{\tau} (\bar{a}_{\tau\nu} v) \right). \quad (29)$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что тангенциальные производные D^{τ} можно свободно перебрасывать на v интегрированием по частям и интегралы по γ_δ не будут появляться. Перебрасывая должным образом такие производные, получим, что для первой суммы в правой части (29) справедлива оценка $\left| \sum_{\nu=0}^{2m+t} \ldots \right| \leqslant c_2 \| u \|_{2m+t} \| v \|_{-t}$. Рассмотрим теперь вторую сумму. Перебросим в каждом ее слагаемом столько производных D_n с u на v, чтобы их осталось ровно $2m + t$. Как уже пояснялось, нужно оценить лишь появившиеся при переброске интегралы по γ_δ. Они будут иметь вид (ср. (27))

$$\sum_{\nu=2m+t+1}^{2m} \sum_{k=2m+t+1}^{\nu} \int_{\gamma_\delta} D_n^{k-1} \sum_{|\tau| \leqslant 2m-\nu} D_n^{\nu-k} D^{\tau} (a_{\tau\nu} \bar{v})\, dx = \sum_{k=2m+t+1}^{2m} \sum_{\nu=k}^{2m} \ldots =$$

$$= \sum_{k=2m+t+1}^{2m} \int_{\gamma_\delta} D_n^{k-1} \overline{N_k v}\, dx = \sum_{k=2m+t+1}^{2m} \sum_{s=1}^{k} \int_{\gamma_\delta} A_s u \cdot \overline{\hat{T}_{ks}^{+} N_k v}\, dx =$$

$$= \sum_{k=2m+t+1}^{2m} \left(\sum_{s=1}^{2m+t} \ldots + \sum_{s=2m+t+1}^{k} \ldots \right) = \sum_{k=2m+t+1}^{2m} \sum_{s=1}^{2m+t} \ldots + \sum_{s=2m+t+1}^{2m} \sum_{k=s}^{2m} \ldots =$$

$$= \sum_{k=2m+t+1}^{2m} \sum_{s=1}^{2m+t} \int_{\gamma_\delta} A_s u \cdot \overline{\hat{T}_{ks}^{+} N_k v}\, dx + \sum_{s=2m+t+1}^{2m} \int_{\gamma_\delta} A_s u \cdot \overline{A'_{2m-s+1} v}\, dx. \quad (30)$$

Мы здесь обозначили

$$N_k v = \sum_{\nu=k}^{2m} \sum_{|\tau|+\nu\leqslant 2m} D_n^{\nu-k} D^\tau (\overline{a}_{\tau\nu} v) \qquad (k = 1, \ldots, 2m).$$

Воспользовавшись тождеством $\int\limits_{\gamma_\delta} fg dx = -i \int\limits_{G_\delta} (D_n f\cdot g + f D_n g)\, dx$ $(f, g \in \Phi)$ и предварительно продолжив коэффициенты A_s и $\widehat{T}^+_{ks}$ гладким образом внутрь G_δ, убедимся, что первая сумма правой части (30) также оценивается через $c_3 \| u \|_{2m+t} \| v \|_{-t}$. Учитывая формулу (12), формулу Грина (3), (27), мы получаем, что

$$\left|(Lu, v) + \sum_{j=1}^{m} \langle B_j u, C_j' v\rangle\right| \leqslant c_4 \| u \|_{2m+t} \| v \|_{-t} + $$
$$+ \sum_{j:l_j\geqslant 2m+t} |\langle C_j u, B_j' v\rangle| + \sum_{j:m_j\leqslant 2m+t-1} |\langle B_j u, C_j' v\rangle|; \tag{31}$$

$$\sum_{j:l_j\geqslant 2m+t} |\langle C_j u, B_j' v\rangle| \leqslant \sum_{j:l_j\geqslant 2m+t} \langle\langle C_j u\rangle\rangle_{2m+t-l_j-\frac{1}{2}} \langle\langle B_j' v\rangle\rangle_{-\left(2m+t-l_j-\frac{1}{2}\right)} \leqslant$$
$$\leqslant c_5 \| v \|_{-t} \sum_{j:l_j\geqslant 2m+t} \langle\langle C_j u\rangle\rangle_{2m+t-l_j-\frac{1}{2}}; \tag{32}$$

$$\sum_{j:m_j\leqslant 2m+t-1} |\langle B_j u, C_j' v\rangle| \leqslant \sum_{j:m_j\leqslant 2m+t-1} \langle\langle B_j u\rangle\rangle_{2m+t-m_j-\frac{1}{2}} \langle\langle C_j' v\rangle\rangle_{-\left(2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)} \leqslant$$
$$\leqslant c_6 \| u \|_{2m+t} \sum_{j:m_j\leqslant 2m+t-1} \langle\langle C_j' v\rangle\rangle_{-\left(2m+t-m_j-\frac{1}{2}\right)}. \tag{33}$$

Из (31), (32), (33) непосредственно следует требуемая оценка (25) и неравенство (24) доказано. Из неравенств (23), (24) с помощью предельного перехода теперь получаем доказательство теоремы 1 для $-2m \leqslant t \leqslant 0$.

5. В этом пункте приведем другую теорему о гомеоморфизмах, установленную ранее в [5] (см. также [7], стр. 245 — 253), в следующем пункте мы сравним обе теоремы. Для любого целого s рассмотрим отображение $u \to (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u)$ $(u \in C^\infty(G \cup \Gamma))$ как оператор из $\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ в $K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Замыкание этого оператора обозначим через $\widetilde{\mathfrak{L}}_s$.

Из леммы 1 следует, что $\widetilde{\mathfrak{L}}_s$ непрерывно действует из всего $\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ в $K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Сужение оператора $\widetilde{\mathfrak{L}}_s$ на $\widetilde{H}_{2m+s}$ обозначим $\widetilde{\Lambda}_s$ (определение пространств $\widetilde{W}_2^s(G)$ и $\widetilde{H}_s$ см. в п. 3). Совершенно аналогично, исходя из отображения $v \to (L^+ v, B_1' v, \ldots, B_m' v)$, определим операторы $\widetilde{\mathfrak{L}}_s^+$, $\widetilde{\Lambda}_s^+$.

Теорема 2. ([5], [7], стр. 245 — 253). *Для каждого целого s оператор $\widetilde{\Lambda}_s$ устанавливает гомеоморфизм: $\widetilde{H}_{2m+s} \to P_{\widehat{N}^+} K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Аналогичное утверждение справедливо также для оператора $\widetilde{\Lambda}_s^+$.*

Доказательство теоремы 2 легко следует из теоремы 1, леммы 1 и того факта, что для каждого s нормы $|||\cdot|||_s$ и $\{\cdot\}_s$ (см. (9)) эквивалентны. Действительно, если $s \geqslant 0$, то нормы $|||\cdot|||_{2m+s}$ и $\|\cdot\|_{2m+s}$ эквивалентны и утверждения теоремы 2 по существу не отличается от соответствующего утверждения теоремы 1, так как при $s \geqslant 0$ $U = (u, C_1 u, \ldots, C_m u)$ входит в $P_{\hat{N}} K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр), тогда и только тогда, когда $u \in \widetilde{H}_{2m+s}$. Кроме того,

$$|||u|||_{2m+s} \leqslant c_1 \| u \|_{2m+s} \leqslant c_2 \| U \|_{K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}} \leqslant c_3 \| u \|_{2m+s} \leqslant c_4 |||u|||_{2m+s}. \tag{34}$$

Пусть $s \leqslant 0$, $U = (u, C_1 u, \ldots, C_m u) \in P_{\hat{N}} K_{\left(2m, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр); тогда из теоремы 1 и очевидных неравенств следует, что

$$\| u \|_{2m+s} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle C_j u \rangle\rangle_{2m+s-l_j-\frac{1}{2}} \leqslant c_1 \| (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u) \|_{K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})+} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \| (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u) \|_{K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}}. \tag{35}$$

Но тогда

$$|||u|||_{2m+s} \leqslant c_3 \left(\| u \|_{2m+s} + \sum_{j=1}^{m} \left(\langle\langle C_j u \rangle\rangle_{2m+s-l_j-\frac{1}{2}} + \langle\langle B_j u \rangle\rangle_{2m+s-m_j-\frac{1}{2}} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \left(\| Lu \|_s + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle B_j u \rangle\rangle_{2m+s-m_j-\frac{1}{2}} \right) \leqslant c_5 |||u|||_{2m+s} \quad (u \in \widetilde{H}_{2m}), \tag{36}$$

где первое неравенство (36) следует из эквивалентности норм $|||\cdot|||_s$ и $\{\cdot\}_s$, второе следует из (35), а третье — из леммы 1. Из двустороннего неравенства (36) и плотности $P_{\hat{N}^+} K_{\left(2m, 2m-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ в $P_{\hat{N}^+} K_{\left(2m+s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ и $\widetilde{H}_{2m}$ в $\widetilde{H}_{2m+s}$ следует утверждение теоремы 2 также в случае, когда $s \leqslant 0$.

6. Перейдем к сравнению теорем 1 и 2, ограничившись для простоты рассмотрением случая отсутствия дефекта: $N = N^+ = 0$. Пусть $u \in C^\infty(G \cup \Gamma)$, $(Lu, B_1 u, \ldots, B_m u) = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = F$. Теорема 1 по существу эквивалентна двустороннему неравенству

$$c_1 \left(\| u \|_{2m+s} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle C_j u \rangle\rangle_{2m+s-l_j-\frac{1}{2}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \| (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u) \|_{K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})+} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \left(\| u \|_{2m+s} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle C_j u \rangle\rangle_{2m+s-l_j-\frac{1}{2}} \right) \qquad (u \in C^\infty(G \cup \Gamma)). \tag{37}$$

а теорема 2 — неравенству

$$c_3 \left(\| u \|_{2m+s} + \sum_{j=1}^{m} \left(\langle\langle C_j u \rangle\rangle_{2m+s-l_j-\frac{1}{2}} + \langle\langle B_j u \rangle\rangle_{2m+s-m_j-\frac{1}{2}} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \| (Lu, B_1 u, \ldots, B_m u) \|_{K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}} \leqslant$$

$$\leqslant c_4\left(\|u\|_{2m+s}+\sum_{j=1}^{m}\left(\langle\langle\langle C_ju\rangle\rangle_{2m+s-l_j-\frac{1}{2}}+\langle\langle B_ju\rangle\rangle_{2m+s-m_j-\frac{1}{2}}\right)\right)(u\in C^\infty(G\cup\Gamma))$$

(38)

(в (37) и (38) s — произвольное целое). Так как $K'_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$ — фактор-пространство $K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}/M^+$ пространства $K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ (или само это пространство при $s\geqslant 0$), то

$$\|(Lu, B_1u, \ldots, B_mu)\|_{K'_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+}\leqslant\|(Lu, B_1u, \ldots, B_mu)\|_{K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}}. \tag{39}$$

Из (39) следует, что левое неравенство в (37) влечет левое неравенство в (38). Повторив рассуждения, с помощью которых доказывались соотношения (21) и (22), можно вывести из левого неравенства в (38) левое неравенство в (37). Правые же части неравенств (37), (38) для общих дифференциальных выражений не следуют друг из друга.

Сравним гомеоморфизмы теорем 1 и 2. При $s\geqslant 0$ пространства их образов совпадают и сами гомеоморфизмы по существу одинаковые. Пусть $s<0$. Пространством образов в случае теоремы 1 служит фактор-пространство пространства образов в случае теоремы 2 по подпространству M^+: $K'_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+=K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}/M^+$. Поэтому прообразы для теоремы 1 «склеиваются» из прообразов для теоремы 2. Точнее: $F_1, F_2\in\in K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ *принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда* $(u_1, C_1u_1, \ldots, C_mu_1)=(u_2, C_1u_2, \ldots, C_mu_2)$, *где* $u_i=\widetilde{\mathfrak{L}}_s^{-1}F_i\in\in\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ $(i=1, 2)$. В самом деле, имеем $F_i=(Lu_i, B_1u_i, \ldots, B_mu_i)$ $(i==1, 2)$. С помощью формулы Грина заключаем, что для любого $v\in C^\infty(G\cup\Gamma)$

$$(u_1-u_2, L^+v)+\sum_{j=1}^{m}\langle C_ju_1-C_ju_2, B_j'v\rangle=(Lu_1-Lu_2, v)+\sum_{j=1}^{m}\langle B_ju_1-B_ju_2, C_j'v\rangle \tag{40}$$

(формулу Грина (3) можно распространить посредством предельного перехода на $u\in\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ и $v\in C^\infty(G\cup\Gamma)$; такой формулой мы и воспользовались). Из (40) следует, что если $F_1-F_2\in M^+$, т. е. $(F_1-F_2, K_{\left(-s,-\left(2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)\right)}(\text{пр})^+)==(F_1-F_2, K_{\left(-s,-s-l_j'-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+)=0$, то

$$(u_1-u_2, L^+v)+\sum_{j=1}^{m}\langle C_ju_1-C_ju_2, B_j'v\rangle=0, \qquad (v\in C^\infty(G\cup\Gamma)).$$

Благодаря произвольности $v\in C^\infty(G\cup\Gamma)$ отсюда следует, что $(u_1-u_2, C_1u_1--C_1u_2, \ldots, C_mu_1-C_mu_2)=0$. Обратно, если $(u_1, C_1u_1, \ldots, C_mu_1)=(u_2, C_1u_2, \ldots, C_mu_2)$, то из (40) заключаем, что $F_1-F_2\in M^+$. Утверждение доказано.

Итак, при переходе к теореме 1 пространство прообразов $\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ (6) распадается на классы: $u_1, u_2\in\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ попадают в один класс, если $(u_1, C_1u_1, \ldots, C_mu_1)=(u_2, C_1u_2, \ldots, C_mu_2)$. Это соответствуют тому, что для теоремы 1 пространством прообразов служит $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр). Заметим, что на этом пути можно получить и второе доказательство теоремы 1 — гомеоморфизм этой теоремы можно установить, должным образом «склеив» гомеоморфизм теоремы 2.

7. Остановимся на «краевых» задачах, которые возникают при пользовании гомеоморфизмами теорем 1 и 2 (по-прежнему для простоты считаем $N = N^+ = 0$. Итак, пусть L и $B_1, \ldots, B_m$ фиксированы. Предположим, что $s \geqslant 0$. В этом случае имеется задача нахождения по заданному $F = (f, \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_m) \in K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ такого $u \in W_2^{2m+s}(G)$, чтобы

$$Lu = f, \quad B_1 u = \varphi_1, \ldots, B_m u = \varphi_m. \tag{41}$$

Она однозначно разрешима. При желании найденное u можно идентифицировать с набором $(u|_G, C_1 u|_\Gamma, \ldots, C_m u|_\Gamma) \in K_{\left(2m+s, 2m+s-j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) или с набором $\left(u|_G, u|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{2m-1}u}{\partial \nu^{2m-1}}\right|_\Gamma\right) \in K^{(2m+1)}_{\left(2m+s,\, 2m+s-j-\frac{1}{2}\right)}$ (д) $= \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$.

Пусть $s < 0$. В этом случае выражения $Lu, B_1 u, \ldots, B_m u$ можно понимать как замыкания операторов $u \to Lu$, $u \to B_1 u|_\Gamma, \ldots, u \to B_m u|_\Gamma$, причем в пространстве образов и прообразов введена подходящая метрика, от которой зависит вид задачи. Если вводить метрику согласно теореме 1, то пространством образов служит $K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр)$^+$, а для пространства прообразов при замыкании «удерживаются» $C_1 u, \ldots, C_m u$, причем $C_j u \in W_2^{2m+s-l_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Различный выбор $\{C_j\}_{j=1}^m$, т. е. продолжений $\{B_j\}_{j=1}^m$ до системы Дирихле, определяет в некотором смысле «различные задачи». При использовании теоремы 2 имеется «одна задача»: пространством образов служит $K_{\left(s,\, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, а для прообразов «удерживаются» все нормальные производные $u|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{\partial^{2m-1}u}{\partial\nu^{2m-1}}\right|_\Gamma$, причем $\left.\frac{\partial^{j-1}u}{\partial\nu^{j-1}}\right|_\Gamma \in W_2^{2m+s-(j-1)-\frac{1}{2}}(\Gamma) =$ $= W_2^{2m+s-j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Изложим эти наводящие соображения более аккуратно (равенство нулю дефектов уже не предполагается). Элемент $U \in K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр), для которого

$$\mathfrak{L}_s U = F \in K'_{\left(2m+s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+ \qquad (s \text{ — произвольное целое}) \tag{42}$$

назовем сильным обобщенным решением задачи (42). Из формулы Грина

$$(u, \mathfrak{L}_0^+ V)_{L_2} = (\mathfrak{L}_s U, V)_{L_2} \quad (V = (v, C_1' v, \ldots, C_m' v),\ v \in C^\infty(G \cup \Gamma)) \tag{43}$$

(получаемой из (7) с помощью предельного перехода) следует, что для разрешимости задачи (42) необходимо, чтобы $(F, N^+)_{L_2} = 0$, т. е. $F \in$ $\in P_{\hat{N}^+} K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр)$^+$. Из теоремы 1 следует, что это условие и достаточно. При этом решение определяется, вообще говоря, неоднозначно: его общий вид $U = \Lambda_s^{-1} F + W$ $(W \in N)$.

Элемент $U=(u, u_1, \ldots, u_m) \in K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ назовем слабым обобщенным решением задачи (42), если

$$(U, \mathfrak{L}_0^+ V)_{L_2} = (F, V)_{L_2} \quad (V=(v, C_1' v, \ldots, C_m' v);\ v \in C^\infty(G \cup \Gamma)). \tag{44}$$

Из (44) непосредственно следует, что для слабой разрешимости задачи (42) необходимо, чтобы $(F, N^+)_{L_2}=0$. Так как сильное решение задачи (42) будет также слабым, то это условие также и достаточно для слабой разрешимости задачи (42).

Если U и U_1 — два обобщенных слабых решения задачи (42), то $(U-U_1, \mathfrak{L}_0^+ V)_{L_2}=0$ $(V=(v, C_1' v, \ldots, C_m' v);\ v \in C^\infty(G \cup \Gamma))$, поэтому из плотности множества $\{\mathfrak{L}_0^+ V\}$ в $P_{\widehat{N}} K_{\left(0, 2m-m_j'-\frac{1}{2}\right)}$ следует, что $U-U_1 \in N$. Считая, что U_1 — сильное, а значит, и слабое обобщенное решение задачи (42), мы отсюда получаем, что всякое другое слабое решение U этой задачи отличается от U_1 на элемент из N, поэтому оно будет также и сильным решением задачи (42). Итак, *множества слабых и сильных решений задачи* (42) *совпадают*. Поэтому, если $U=(u, u_1, \ldots, u_m) \in K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ — слабое обобщенное решение задачи (42), то $U \in K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр).

Аналогично можно определить сильное обобщенное решение задачи, связанной с теоремой 2 и оператором $\widetilde{\mathfrak{L}}_s$ (ср. [5,7], стр. 266): функцию $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$, для которой

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_s u = F \in K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)} \qquad (s \text{ — произвольное целое}) \tag{45}$$

назовем (сильным) обобщенным решением задачи (45). Как и выше, убеждаемся, что для сильной разрешимости задачи (45) необходимо и достаточно, чтобы $(F, N^+)_{L_2}=0$, при этом ее общее решение имеет вид $u=\widetilde{\Lambda}_s^{-1} F+w$ $((w, C_1 w, \ldots, C_m w) \in N)$.

Соотношение между задачами (42) и (45) было фактически изучено в предыдущем пункте: если $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ — сильное обобщенное решение задачи (45), то $U=(u, C_1 u, \ldots, C_m u)$ — решение (в сильном и слабом смысле) задачи (42); если $F_1, F_2 \in K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, $(F_1-F_2, V)_{L_2}=0$ $(V=(v, C_1' v, \ldots$ $\ldots, C_m' v);\ v \in C^\infty(G \cup \Gamma))$, а $u_i=\widetilde{\Lambda}_s^{-1} F_i$, то $U_1=U_2$ $(U_i=(u_i, C_1 u_i, \ldots, C_m u_i);$ $i=1,2)$. Обратно, если $U=\Lambda_s^{-1} F$ — решение задачи (42), а $F_1 \in K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ принадлежит к тому классу из $K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, который определяет $F \in$ $\in K'_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр)$^+$, то $U=U_1=(u_1, C_1 u_1, \ldots, C_m u_1)$, где $u_1=\widetilde{\Lambda}_s^{-1} F_1$. Так как множества сильных и слабых решений задачи (42) совпадают, то тем самым выше установлена связь между слабыми решениями задачи (42) и решениями (сильными) задачи (45).

Сравним данное здесь определение слабого обобщенного решения задачи (42) с ранее данным ([5], [7], стр. 269): функция $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ называется слабым обобщенным решением задачи (45), если

$$(u, L^+ v) + \sum_{j=1}^{m} \langle C_j u, B_j' v\rangle = (F, V)_{L_2} \quad (V=(v, C_1' v, \ldots, C_m' v);\ v \in C^\infty(G \cup \Gamma)). \tag{46}$$

Это определение означает, что $(u, C_1u, \ldots, C_mu)$ является слабым обобщенным решением задачи (42). Ясно, что сильное решение задачи (45) будет также слабым решением этой задачи. Заметим, что правая часть (46) не изменится, если F заменить F_1, где $(F - F_1V)_{L_2} = 0$ $(V = (v, C_1'v, \ldots, C_m'v);$ $v \in C^\infty(G \cup \Gamma))$ (такие функции F и F_1 будем называть эквивалентными). Поэтому естественно в определении слабого решения задачи (45) не различать эквивалентные правые части.

Пусть $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ — *слабое обобщенное решение задачи* (45) *с фиксированным* F. *Тогда существует сильное обобщенное решение* $u_1 \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ *этой задачи такое, что* $U = (u, C_1u, \ldots, C_mu)$ *совпадает с* $U_1 = (u_1, C_1u_1, \ldots$ $\ldots, C_mu_1)$ *в* $K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$. Действительно, U является слабым, а значит, и сильным решением задачи (42). Пусть $P_NU = (w, C_1w, \ldots, C_mw) \in N$; тогда $u_1 = \widetilde{\Lambda}_s^{-1}F + w$ будет сильным решением задачи (45) таким, что $U_1 =$ $= U$ $(U_1 = (u_1, C_1u_1, \ldots, C_mu_1))$.

Если F_2 эквивалентно F, $u_2 = \widetilde{\Lambda}_s^{-1}F_2 + w$, $U_2 = (u_2, C_1u_2, \ldots, C_mu_2)$, то U_2 совпадает с U в $K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$. В частности, можно найти такой эквивалентный F элемент F_0, что $\widetilde{\Lambda}_s^{-1}F_0 + w = u$ в $\widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$. Действительно, достаточно положить $F_0 = \widetilde{\mathfrak{L}}_su$, где $\widetilde{\mathfrak{L}}_s$ применяется в сильном смысле. Таким образом, каждое слабое решение $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ задачи (45) является сильным решением задачи $\widetilde{\mathfrak{L}}_su = F_0$ с некоторым F_0, эквивалентным F. Так как в определении слабого обобщенного решения задачи (45) мы не различаем эквивалентные правые части, то *в этом смысле можно считать, что каждое слабое решение задачи* (45) *является сильным решением этой задачи* *.

8. В этом пункте мы изучим вопрос о повышении гладкости обобщенных решений задач (42), (45). Пусть $U \in K_{\left(2m+s, 2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр) — сильное (или слабое) обобщенное решение задачи (42). Если в действительности $F \in K'_{\left(s+1,\, 2m+s+1-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})^+$, то и $U \in K_{\left(2m+s+1,\, 2m+s+1-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр). В самом деле, $U = \Lambda_s^{-1}F + W$ $(W = P_NU \in N)$. Но операторы Λ_s и $\mathfrak{L}_s$ являются расширениями по непрерывности операторов Λ_{s+1}, $\mathfrak{L}_{s+1}$; поэтому $\Lambda_s^{-1}F = \Lambda_{s+1}^{-1}F$ и $U \in K_{\left(2m+s+1,\, 2m+s+1-l_j-\frac{1}{2}\right)}$ (пр).

Совершенно аналогично можно доказать [5,7], что если $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ — сильное обобщенное решение задачи (45) и в действительности $F \in$ $\in K_{\left(s+1,\, 2m+s+1-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, то $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s+1}(G)$. Из рассмотрений предыдущего пункта непосредственно следует: пусть $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ — слабое обобщенное решение задачи (45). Если существует элемент $F_1 \in K_{\left(s+1, 2m+s+1-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, эквивалентный F, то существует элемент $u_1 \in \widetilde{W}_2^{s+1}(G)$ такой, что $(u, C_1u, \ldots$ $\ldots, C_mu) = (u_1, C_1u_1, \ldots, C_mu_1)$ в $K_{\left(2m+s,\, 2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$.

Нам понадобится также утверждение о локальном повышении гладкости сильных обобщенных решений задачи (45) (ср. [5],[7], стр. 267 — 268).

Пусть $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$ $(s$ — *произвольное целое*) — *сильное обобщенное ре-*

* Заметим, что именно в таком смысле следует понимать лемму 2 из [5] и лемму 6.16 из [7], стр. 269.

шение задачи (45); а $\chi \in C^\infty(G \cup \Gamma)$. *Если* $\chi F \in K_{\left(s+1,\,2m+s+1-m_j-\frac{1}{2}\right)}$, то $\chi u \in \widetilde{W}_2^{2m+s+1}(G)$. Приведем соответствующие разъяснения и одновременно наметим доказательство сформулированного утверждения.

Прежде всего заметим, что оператор $u(x) \to \chi(x)u(x)$ $(u \in C^\infty(G \cup \Gamma))$ непрерывно действует из $\widetilde{W}_2^s(G)$ в $\widetilde{W}_2^s(G)$ (s — произвольное целое):

$$|||\chi u|||_s \leqslant c_1 |||u|||_s \qquad (u \in C^\infty(G \cup \Gamma)). \tag{47}$$

Действительно, если $s \geqslant 0$, то неравенство $\|\chi u\|_s \leqslant c_1 \|u\|_s$ очевидно. Если $s < 0$, то $\|\chi u\|_s = \sup\limits_{v \in C^\infty(G\cup\Gamma)} \dfrac{|(\chi u, v)|}{\|v\|_{-s}} = \sup\limits_{v \in C^\infty(G\cup\Gamma)} \dfrac{|(u, \chi v)|}{\|v\|_{-s}} \leqslant c_2 \|u\|_s$. Аналогично, для произвольного целого s $\langle\langle \chi u \rangle\rangle_{s-\frac{1}{2}} \leqslant c_3 \langle\langle u \rangle\rangle_{s-\frac{1}{2}}$. Поэтому

$$\langle\langle \frac{\partial^{j-1}(\chi u)}{\partial \nu^{j-1}} \rangle\rangle_{s-j+1} \leqslant c_4 \sum_{t=0}^{j-1} \langle\langle \frac{\partial^{j-t-1} u}{\partial \nu^{j-t-1}} \rangle\rangle_{s-j+\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \sum_{t=0}^{j-1} \langle\langle \frac{\partial^{j-t-1} u}{\partial \nu^{j-t-1}} \rangle\rangle_{s-j+t+\frac{1}{2}} \leqslant c_5 |||u|||_s \qquad (j = 1, \ldots, 2m).$$

Из приведенных оценок непосредственно следует неравенство (47). Замыкание оператора умножения $u(x) \to \chi(x)u(x)$ $(u \in C^\infty(G \cup \Gamma))$ в $\widetilde{W}_2^s(G)$ также обозначим через χ; для произвольного $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$ определен $\chi u \in \widetilde{W}_2^s(G)$. Оценка (47) справедлива, конечно, для всех $u \in \widetilde{W}_2^s(G)$.

Совершенно аналогично можно определить оператор умножения на χ в пространстве $K_{\left(s,\,2m+s-m_j-\frac{1}{2}\right)}$ (s — произвольное целое).

Если $u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$, то и $\chi u \in \widetilde{W}_2^{2m+s}(G)$, поэтому можно вычислить $\widetilde{\mathfrak{L}}_s(\chi u) = \chi\widetilde{\mathfrak{L}}_s u + Mu = \chi F + Mu = F_1$, где $M = (M_0, M_1, \ldots, M_m)$ — дифференциальный оператор, полученный в результате перенесения χ. Легко видеть, что Mu, а значит, и F_1 принадлежат $K_{\left(s+1,\,2m+s+1-m_j-\frac{1}{2}\right)}$. Поэтому и $\chi u \in \widetilde{W}_2^{2m+s+1}(G)$.

Из установленной выше связи между задачами (42) и (45) можно теперь сделать заключение о локальном повышении гладкости решений задачи (42). Мы здесь точных формулировок приводить не будем, так как они нам ниже не понадобятся.

9. В этом пункте мы перенесем предыдущие результаты на пространства L_p. Приведем прежде всего необходимые определения. Ниже $1 < p < \infty$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, s — целое. Если $s \geqslant 0$, то $W_p^s(G)$ — пространство С. Л. Соболева, $\|\cdot\|_{s,p}$ — норма в нем. Если $s < 0$, то $W_p^s(G)$ обозначает пополнение множества $C^\infty(G \cup \Gamma)$ по норме $\|u\|_{s,p} = \sup\limits_{v \in W_{p'}^{-s}(G)} \dfrac{|(u,v)|}{\|v\|_{-s,p'}}$. Если $s \geqslant 1$, то $W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ — пополнение множества $C^\infty(\Gamma)$ по норме $\langle\langle\varphi\rangle\rangle_{s-\frac{1}{p},\,p} = \inf\|u\|_{s,p}$, где inf берется по всем $u \in W_p^s(G)$, равным φ на Γ, а $W_{p'}^{-\left(s-\frac{1}{p}\right)}(\Gamma)$ — пополнение

$C^\infty(\Gamma)$ по норме $\langle\langle\varphi\rangle\rangle_{-\left(s-\frac{1}{p}\right),p'} = \sup\limits_{\psi\in W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)} |\langle\varphi,\psi\rangle| / \langle\langle\psi\rangle\rangle_{s-\frac{1}{p},p}$. Пространства $W_p^s(G)$ и $W_{p'}^{-s}(G)$ двойственны относительно $(\cdot,\cdot)$; пространства $W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$ и $W_{p'}^{-\left(s-\frac{1}{p}\right)}(\Gamma)$ двойственны относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ [3, 32, 33]; эти пространства можно было определить и для нецелых s [3, 32, 33], но ниже такие пространства нам не понадобятся. Если κ, $r_1, \ldots, r_m$ — целые, то через $K_{\left(k,r_j-\frac{1}{p},p\right)}$ обозначим прямую сумму пространств $W_p^k(G)$, $W_p^{r_1-\frac{1}{p}}(\Gamma), \ldots$ $\ldots, W_p^{r_m-\frac{1}{p}}(\Gamma)$:

$$K_{\left(k,r_j-\frac{1}{p},p\right)} = W_p^k(G) \dotplus W_p^{r_1-\frac{1}{p}}(\Gamma) \dotplus \ldots \dotplus W_p^{r_m-\frac{1}{p}}(\Gamma). \tag{48}$$

Утверждения предыдущих пунктов переносятся с понятными изменениями на пространства L_p. В п. 1 надо вместо оператора $\mathfrak{L}_s$ (см. (5)) рассмотреть оператор $\mathfrak{L}_{s,p}$, действующий из $K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{p},p\right)}(\text{пр})$ в $K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{p},p\right)}$; вместо оператора $\mathfrak{L}_s^+$ надо рассмотреть оператор $\mathfrak{L}_{s,p'}^+$, вместо $K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$ — подпространство $K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{p},p\right)}(\text{пр})$ и т. д. Формула Грина (7) теперь примет вид

$$(\mathfrak{L}_{0,p}U, V)_{L_2} = (U, \mathfrak{L}_{0,p'}^+V)_{L_2} \qquad (U \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}_{0,p}),\ V \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}_{0,p'}^+)). \tag{49}$$

Ядро $N_{s,p} = N$ оператора $\mathfrak{L}_{s,p}$ не зависит от s и p [34, 35]. Все рассуждения об операторах проектирования P_N, $P_{\widehat{N}}$, P_{N^+}, $P_{\widehat{N}^+}$ переносятся на наш случай.

В п. 2 надо вместо $K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)}(\text{пр})$ $(s \leqslant 0)$ рассмотреть $K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{p},p\right)}(\text{пр})$ — замыкание $K_{\left(2m,2m-l_j-\frac{1}{p},p\right)}(\text{пр})$ в метрике $K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{p},p\right)}$; вместо $K'_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l_j-\frac{1}{2}\right)\right)}(\text{пр})$ надо рассмотреть $K'_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l_j-\frac{1}{p}\right),p'\right)}(\text{пр})$ — пространство, сопряженное $K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{p},p\right)}(\text{пр})$.

Теперь, если $s \leqslant -2m$, то $K'_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l_j-\frac{1}{p}\right),p\right)}(\text{пр})$ совпадает с $K_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l_j-\frac{1}{p}\right),p'\right)}$; если $s > -2m$, то $K'_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l_j-\frac{1}{p}\right),p'\right)}(\text{пр})$ совпадает с фактор-пространством $K_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l_j-\frac{1}{p}\right),p'\right)}/M$, где M — подпространство $K_{\left(-(2m+s),-\left(2m+s-l_j-\frac{1}{p}\right),p'\right)}$, ортогональное $K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{p},p\right)}(\text{пр})$.

В п. 3, как и в [6], вместо пространства $\widetilde{W}_2^s(G)$ введем пространство

$\widetilde{W}^s_p(G)$ — пополнение $C^\infty(G\cup\Gamma)$ по норме

$$|||u|||_{s,p}=\left(\|u\|^p_{s,p}+\sum_{j=1}^{2m}\langle\langle\frac{\partial^{j-1}u}{\partial v^{j-1}}\rangle\rangle^p_{s-j+1-\frac{1}{p},p}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (50)$$

С понятными изменениями остаются справедливыми все утверждения п. 1 — 3. Справедливыми остаются также теоремы 1 и 2, надо лишь операторы $\mathfrak{L}_s$, Λ_s, $\widetilde{\mathfrak{L}}_s$, $\widetilde{\Lambda}_s$ заменить операторами $\mathfrak{L}_{s,p}$, $\Lambda_{s,p}$, $\widetilde{\mathfrak{L}}_{s,p}$, $\widetilde{\Lambda}_{s,p}$, а пространства $\widetilde{H}_{2m+s}$ — пространствами $\widetilde{H}_{2m+s,p}$.

Теорема 1′. *Для каждого целого s оператор $\Lambda_{s,p}$ устанавливает гомеоморфизм:*

$$P_{\widehat{N}}K_{\left(2m+s,\,2m+s-l_j-\frac{1}{p},\,p\right)}(\text{пр})\to P_{\widehat{N}+}K'_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{p},p\right)}(\text{пр})^+. \qquad (51)$$

Теорема 2′ [6]. *Для каждого целого s оператор $\widetilde{\Lambda}_{s,p}$ устанавливает гомеоморфизм*

$$\widetilde{H}_{2m+s,p}\to P_{\widehat{N}+}K_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{p},p\right)}. \qquad (52)$$

Аналогичные утверждения справедливы для операторов $\Lambda^+_{s,p'}$, $\widetilde{\Lambda}^+_{s,p'}$.

Для доказательства этих теорем надо лишь понятным образом видоизменить предыдущие рассуждения. Теперь вместо интерполяционной теоремы С. Г. Крейна—Лионса нужно воспользоваться интерполяционной теоремой Кальдерона-Лионса (см. [3, 32, 33]). Остаются справедливыми и утверждения п. 6 — 9.

Заметим лишь, что справедливо утверждение о повышении гладкости по p: пусть $U\in K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{p},p\right)}(\text{пр})$ является решением задачи

$$\mathfrak{L}_{s,p}U=F\in K'_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{p},p\right)}(\text{пр})^+. \qquad (53)$$

Если в действительности $F\in K'_{\left(s,2m+s-m_j-\frac{1}{p_1},p_1\right)}(\text{пр})^+$ с $p_1>p$, то $U\in$ $\in K_{\left(2m+s,2m+s-l_j-\frac{1}{p_1},p_1\right)}(\text{пр})$. Для доказательства мы рассуждаем так же, как в п. 8, и учитываем, что операторы $\Lambda_{s,p}$, $\mathfrak{L}_{s,p}$ являются расширениями по непрерывности операторов Λ_{s,p_1}, $\mathfrak{L}_{s,p_1}$.

Утверждение о повышении гладкости по p справедливо, конечно, и для задачи, аналогичной (45).

Выше мы всюду предполагаем, что коэффициенты дифференциальных выражений и граница Γ — бесконечно гладкие, хотя все приведенные результаты справедливы при значительно менее жестких предположениях о гладкости. В частности, проследив доказательства, нетрудно убедиться, что для справедливости теорем 1, 2, 1′, 2′ достаточны следующие предположения о гладкости:

1) при $s\geqslant 0$ $a_\alpha(x)\in C^{2m+\max(|\alpha|,s)}(G\cup\Gamma)$, $b_{j\alpha}(x)\in C^{\max(2m+s-1,2m-mj)}(\Gamma)$, $b'_{j\alpha}(x)\in C^{\max\left(2m+s-1,2m-m'_j\right)}(\Gamma)$ $(j=1,\ldots,m)$, Γ класса C^{4m+s};

2) при $-2m\leqslant s\leqslant 0$ — такие же, как в 1), с заменой s на 0 и, кроме того, $c_{j\alpha}(x)\in C^{2m-l_j}(\Gamma)$, $c'_{j\alpha}(x)\in C^{2m-l'_j}(\Gamma)$ $(j=1,\ldots,m)$;

3) при $s\leqslant -2m$ — такие же, как в 1), но с заменой s на $|2m+s|$ и, кроме того, $c_{j\alpha}(x)\in C^{|s|-l_j}(\Gamma)$, $c'_{j\alpha}(x)\in C^{|s|-l'_j}(\Gamma)$ $(j=1,\ldots,m)$ (здесь $a_\alpha(x)$,

$b_{j\alpha}(x)$, $b'_{j\alpha}(x)$, $c_{j\alpha}(x)$, $c'_{j\alpha}(x)$ $(j=1,\ldots,m)$ — коэффициенты дифференциальных выражений L, B_j, B'_j, C_j, C'_j (см. п. 1)).

Кроме того, для справедливости теорем 1 и 1′ надо еще потребовать, чтобы при $s\geqslant 0$ $c_{j\alpha}(x)\in C^{2m-l_j+s}(\Gamma)$, $c'_{j\alpha}(x)\in C^{2m-l'_j+s}(\Gamma)$ $(j=1,\ldots,m)$.

§ 2. Функция Грина

В этом параграфе теорема 2′ о гомеоморфизмах будет использована для доказательства существования и изучения свойств регулярности функции Грина эллиптической задачи

$$(Lu)(x)=f(x)\quad(x\in G),\quad (B_ju)(x)=\varphi_j(x)\quad(x\in\Gamma;\ j=1,\ldots,m).\quad(54)$$

Будет также изучена разность функций Грина основной и возмущенной задач. В п. 1—4 мы для простоты предполагаем, что дефект отсутствует: $N=N^+=0$, в п. 5 освобождаемся от этого предположения.

Как и в § 1, коэффициенты дифференциальных выражений и поверхность Γ считаются для простоты бесконечно гладкими, хотя все результаты справедливы при значительно менее жестких предположениях о гладкости: достаточно проследить для каких целых применяется теорема о гомеоморфизмах, тогда из сказанного в конце п. 9, § 1, следует, какие требования гладкости достаточны для справедливости формулируемых утверждений.

Заметим также, что применение дифференциальных выражений к элементам из $\widetilde{W}^s_p$ понимается ниже в смысле, указанном после леммы 1. Как и в п. 9, § 1, ниже $1<p<\infty$, $p'=\dfrac{p}{p-1}$.

1. Определение и доказательство существования функции Грина задачи (54). Пусть δ_{x_0} $(x_0\in G\cup\Gamma)$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке $x_0:(\delta_{x_0},u)=\overline{u(x_0)}$. Легко видеть, что $\delta_x\in W_p^{-q}(G)$ $\Big($во всем дальнейшем $q=\left[\dfrac{n}{p}\right]+1$; $[t]$ — наибольшее целое, не превосходящее $t\Big)$ и равномерно относительно $x\in G\cup\Gamma$ справедлива оценка $\|\delta_x\|_{-q,p}\leqslant c_1$. Действительно, так как оператор вложения из $W_p^q(G)$ в $C(G\cup\Gamma)$ ограничен, то функционал δ_x определен на функциях из $W_p^q(G)$. Далее $\|\delta_x\|_{-q,p}=\sup\limits_{v\in W_p^q(G)}\dfrac{|(\delta_x,v)|}{\|v\|_{q,p}}=$

$=\sup\limits_{v\in W_p^q(G)}\dfrac{|v(x)|}{\|v\|_{q,p}}\leqslant C_1$. Совершенно аналогично можно показать, что δ_x — дифференцируемая функция от $x\in G\cup\Gamma$, $D_x^\mu\delta_x\in W_{p'}^{-q-|\mu|}(G)$ и равномерно относительно $x\in G\cup\Gamma$ справедлива оценка $\|D_x^\mu\delta_x\|_{-q-|\mu|,p'}\leqslant c_2$.

При этом производную δ_x по x_i в точке x_0 определяем обычным образом. Именно, пусть $l_i=(a_1,\ldots,a_n)$, где $a_i=1$, $a_k=0$, $k\neq i$ $(i=1,\ldots,n)$, h — действительное число; положим $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\delta_{x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}(\delta_{x_0+hl_i}-\delta_{x_0})$, где сходимость понимается в слабом смысле: при $v=C^1(G\cup\Gamma)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\delta_{x_0},v\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}(\delta_{x_0+hl_i}-\delta_{x_0}),v\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\overline{(v(x_0+hl_i)-\overline{v(x_0)})}=\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)(x_0)}.$$

Ясно, что $\left\|\dfrac{1}{h}(\delta_{x_0+hl_i}-\delta_{x_0})-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\delta_{x_0}\right\|_{-q-1,p'}\to 0$ при $h\to 0$.

Так как по предположению дефект отсутствует ($N = N^+ = 0$), то по теореме 2′ задача

$$L^+\overline{R}_x = \delta_x \in W_{p'}^{-q}(G), \qquad B_j'\overline{R}_x = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{55}$$

имеет единственное решение $\overline{R}_x \in \widetilde{W}_{p'}^{2m-q}(G)$, причем равномерно относительно $x \in G \cup \Gamma$ справедлива оценка

$$|||\overline{R}_x|||_{2m-q,p'} \leqslant c_1 \|\delta_x\|_{-q,p'} \leqslant c_2. \tag{56}$$

(Здесь черта обозначает комплексное сопряжение.)

Рассмотрим теперь задачу (54), в которой $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{p}, p\right)}$, $s \geqslant \max(q - 2m, 0)$. По теореме 2′ эта задача имеет (единственное) решение $u \in \widetilde{W}_p^{2m+s}(G)$. Записав теперь формулу Грина (3) с этим u и $v = \overline{R}_x \in \widetilde{W}_p^{2m-q}(G)$ (на такие u и v она распространяется предельным переходом), найдем, учитывая (54) и (55), что

$$u(x) = (f, \overline{R}_x) + \sum_{j=1}^{m} \langle \varphi_j, C_j'\overline{R}_x \rangle. \tag{57}$$

Итак, если $F = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in K_{\left(s, 2m+s-m_j-\frac{1}{p}, p\right)}$, $s \geqslant \max(q - 2m, 0)$, то решение $u(x) \in W_p^{2m+s}(G) = \widetilde{W}_p^{2m+s}(G)$ задачи (54) можно найти по формуле (57). Поэтому будем функцию $R_x \in W_{p'}^{2m-q}(G)$ называть функцией Грина задачи (54).

Заметим, что выше можно было бы брать s и таким, чтобы только $s \geqslant q - 2m$. Тогда (57) дает первую компоненту решения $u \in \widetilde{W}_p^{2m+s}(G)$ задачи (54).

2. В этом пункте изучим свойства регулярности функции Грина $R_x = R(x, \cdot) = R(x, y)$. Обозначим через $\zeta(x, y)$ произвольную функцию класса $C^\infty((G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma))$, тождественно равную 1 в некоторой окрестности диагонали $x = y$ в $(G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)$ (в частности, $\zeta \equiv 1$). Пусть

$$\omega_i(x, y) = (x_i - y_i)\,\zeta(x, y)\ (x, y \in G \cup \Gamma; \quad i = 1, \ldots, n);$$

$$\omega^\alpha(x, y) = \omega_1^{\alpha_1}(x, y) \ldots \omega_n^{\alpha_n}(x, y) \qquad (\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \geqslant 0 \text{ — целые}),$$

т. е. $\omega^\alpha(x, y)$ достаточно произвольная функция с заданным порядком нуля на диагонали. Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $R_x \in \widetilde{W}_{p'}^{2m-q}(G)\left(q = \left[\dfrac{n}{p}\right] + 1\right)$ *— функция Грина задачи* (54). *Тогда существуют все производные вида* $D_x^\beta(\omega^\alpha(x, \cdot)\overline{R}_x)$ $(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n))$, *являющиеся непрерывными вектор-функциями от* $x \in G \cup \Gamma$ *со значениями в* $\widetilde{W}_{p'}^{2m-q+|\alpha|-|\beta|}(G)$. *Равномерно относительно* $x \in G \cup \Gamma$ *справедливо неравенство*

$$|||D_x^\beta(\omega^\alpha(x, \cdot)\overline{R}_x)|||_{2m-q+|\alpha|-|\beta|, p'} \leqslant C_{\alpha\beta}. \tag{58}$$

Если $2m - n + 1 + |\alpha| \geqslant 0$, *то функция* $\omega^\alpha(x, y)\,R(x, y)$ *непрерывна в* $G \cup \Gamma$ *по совокупности переменных, точнее*

$$D_x^\beta D_y^\gamma(\omega^\alpha(x, y)\,R(x, y)) \in C((G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma)) \tag{59}$$

$$(|\beta| + |\gamma| \leqslant 2m - n + 1 + |\alpha|).$$

Доказательство. Из (56) следует, что $\overline{R}_x$ является непрерывной вектор-функцией от $x \in G \cup \Gamma$ со значениями в $\widetilde{W}_{p'}^{2m-q}(G)$. Обозначим через $\overline{T}_x^{(i)} \in \widetilde{W}_{p'}^{2m-q-1}(G)$ решение задачи

$$L^+\overline{T}_x^{(i)} = \frac{\partial}{\partial x_i}\delta_x \in W_{p'}^{-q-1}(G), \qquad B'_j\overline{T}_x^{(i)} = 0 \tag{60}$$

$$(j = 1, \ldots, m).$$

Ясно, что $|||\overline{T}_x^{(i)}|||_{2m-q-1,p'} \leqslant c_1 \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\delta_x \right\|_{-q-1,p'} < c_2$, поэтому $\overline{T}_x^{(i)}$ — непрерывная вектор-функция от $x \in G \cup \Gamma$ со значениями в $\widetilde{W}_{p'}^{2m-q-1}(G)$. Пусть $l_i = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i = 1$, $a_k = 0$, $k \neq i$ $(i = 1, \ldots, n)$, а h — действительное число, x, $x + hl_i \in G \cup \Gamma$. Тогда

$$\begin{gathered} L^+\left(\frac{1}{h}(\overline{R}_{x+hl_i} - \overline{R}_x) - \overline{T}_x^{(i)}\right) = \frac{1}{h}(\delta_{x+hl_i} - \delta_x) - \frac{\partial}{\partial x_i}\delta_x = f_{x,i,h}, \\ B'_j\left(\frac{1}{h}(\overline{R}_{x+hl_i} - \overline{R}_x) - \overline{T}_x^{(i)}\right) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n); \end{gathered} \tag{61}$$

$$\left|\left|\left| \frac{1}{h}(\overline{R}_{x+hl_i} - \overline{R}_x) - \overline{T}_x^{(i)} \right|\right|\right|_{2m-q-1,p'} \leqslant c\, \| f_{x,i,h} \|_{-q-1,p'}. \tag{62}$$

Перейдя в(62) к пределу при $h \to 0$, получим, что $\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{R}_x = \overline{T}_x^{(i)} \in \widetilde{W}_{p'}^{2m-q-1}(G)$.

Обозначив теперь через $\overline{T}_x^{(i,k)} \in \widetilde{W}_{p'}^{2m-q-2}(G)$ решение задачи вида (60), в которой правая часть первого уравнения продифференцирована еще и по x_k, мы, повторив предыдущие рассуждения, найдем, что $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\overline{R}_x = \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{T}_x^{(i)} = \overline{T}_x^{(i,k)}$ и т. д. Таким образом, мы получим, что существуют производные $D_x^\beta \overline{R}_x$, являющиеся непрерывными вектор-функциями от $x \in G \cup \Gamma$ со значениями в $W_{p'}^{2m-q-|\beta|}(G)$ и что равномерно относительно $x \in G \cup \Gamma$ справедливо неравенство (58) с $|\alpha| = 0$.

Далее вычисляем

$$\begin{gathered} L^+(\omega_i(x, y)\overline{R}_x) = \omega_i(x, y)\delta_x + M^{(i)}\overline{R}_x, \\ B'_j(\omega_i(x, y)\overline{R}_x) = \omega_i(x, y)B'_j\overline{R}_x + N_j^{(i)}\overline{R}_x \end{gathered} \tag{63}$$

$$(j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n);$$

здесь $M^{(i)}$-дифференциальное выражение порядка $2m-1$, $N_j^{(i)}$—дифференциальное выражение порядка $m'_j - 1$, если $m'_j > 0$, при $m'_j = 0$, $N_j^{(i)} = 0$. Эти выражения появились в результате пронесения $\omega_i(x, y)$. Ясно, что $M^{(i)}\overline{R}_x \in W_{p'}^{1-q}(G)$, $N_j^{(i)}\overline{R}_x \in W_{p'}^{2m-q+1-m'_j-\frac{1}{p'}}(\Gamma)$ и что равномерно относительно $x \in G \cup \Gamma$ справедливо неравенство (см. лемму 1)

$$\| M^{(i)}\overline{R}_x \|_{1-q,p'} + \sum_{j=1}^{m} \langle\langle N_j^{(i)}\overline{R}_x \rangle\rangle_{2m-q+1-m'_j-\frac{1}{p'},\,p'} \leqslant c_1 |||\overline{R}_x|||_{2m-q,p'} \leqslant c_2. \tag{64}$$

Поэтому из (63), учитывая, что $\omega_i(x, \cdot)\,\delta_x = 0$, $B'_j\overline{R}_x = 0$, мы с помощью теоремы о гомеоморфизмах найдем, что $\omega_i(x, \cdot)\,\overline{R}_x \in \widetilde{W}^{2m-q+1}_{p'}(G)$ и что равномерно относительно $x \in G \cup \Gamma$ справедливо неравенство $|||\,\omega_i(x, \cdot)\,\overline{R}_x\,|||_{2m-q+1,\,p'} \leqslant c_3$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Далее мы с функциями $\omega_i(x, \cdot)\,\overline{R}_x$ $(i = 1, \ldots, n)$ проводим те же рассуждения, что в начале доказательства проводили с $\overline{R}_x$. Обозначаем через $T_x^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ решение задачи (63), в которой правые части продифференцированы по x_k, затем доказываем, что $\dfrac{\partial}{\partial x_k}(\omega_i(x, \cdot)\,\overline{R}_x) = T_x^{(k)}$ и т. д. Мы убедимся в справедливости неравенства (58) с $|\alpha| = 1$. После этого вычисляем $L^+(\omega^\alpha(x, \cdot)\,\overline{R}_x)$, $B'_j(\omega^\alpha(x, \cdot)\,\overline{R}_x)$ с $|\alpha| = 2$ и, повторяя приведенные выше рассуждения, доказываем неравенство (58) с $|\alpha| = 2$. Тогда вычисляем $L^+(\omega^\alpha(x, \cdot)\,\overline{R}_x)$, $B'_j(\omega^\alpha(x, \cdot)\,\overline{R}_x)$ с $|\alpha| = 3$, и т. д.; мы убедимся в справедливости первой части теоремы.

Вторая часть теоремы легко следует из первой с помощью теорем вложения. Действительно, $D_x^\beta(\omega^\alpha(x, \cdot)\,\overline{R}_x)$ является непрерывной вектор-функцией от $x \in G \cup \Gamma$ со значениями в $W_{p'}^{2m-q+|\alpha|-|\beta|}(G)$, поэтому она будет непрерывной вектор-функцией от $x \in G \cup \Gamma$ со значениями в $C^k(G \cup \Gamma)$ $\left(k = 2m - q + |\alpha| - |\beta| - \left[\dfrac{n}{p'}\right] - 1 = 2m - \left[\dfrac{n}{p}\right] - \left[n - \dfrac{n}{p}\right] + |\alpha| - |\beta| - 2\right)$. Теорема доказана.

3. Пусть в (54) $\varphi_1 = \ldots = \varphi_m = 0$. Тогда, если $f \in W_p^s(G)$, $s \geqslant \max(q - 2m, 0)$, то решение $u(x) \in W_p^{2m+s}(G) = \widetilde{W}_p^{2m+s}(G)$ задачи (54) можно найти по формуле (см. 57)

$$u(x) = \int_G R(x, y)\, f(y)\, dy. \tag{65}$$

Из теоремы 3 следует, что $\omega^\alpha(x, y)\, R(x, y) \in C((G \cup \Gamma) \times (G \cup \Gamma))$ $(|\alpha| \geqslant n + 1 - 2m)$, поэтому $\int_G |R(x, y)|^t\, dx \leqslant c_1$, $\int_G |R(x, y)|^t\, dy \leqslant c \left(0 < t < \dfrac{n}{n + 1 - 2m}\right)$. Но тогда (см., например, [36], стр. 324) оператор $f(x) \to (Rf)(x) = \int_G R(x, y)\, f(y)\, dy$ непрерывно действует из $L_p(G)$ в $L_p(G)$ для каждого $p > 1$. Поэтому формула (65) дает решение $u \in W_p^{2m}(G)$ задачи (55) с $\varphi_1 = \ldots = \varphi_m = 0$ и в случае, когда $f \in L_p(G)$.

Заметим еще, что теорема 3 дает также возможность оценить особенность ядра $G'_j\overline{R}_x$ $(j = 1, \ldots, m)$.

4. Рассмотрим вместе с задачей (54) подобную «возмущенную» эллиптическую задачу

$$(\check{L}u)(x) = f(x) \quad (x \in G); \quad (\check{B}_j u)(x) = \varphi_j(x) \quad (x \in \Gamma;\ j = 1, \ldots, m) \tag{66}$$

и оценим разности их функций Грина.

Пусть L^+, B'_j и $\check{L}^+$, $\check{B}'_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ — дифференциальные выражения, фигурирующие в задачах, сопряженных к (54) и (66). Мы будем требовать, чтобы порядки выражений L^+ и $\check{L}^+$, B'_j и $\check{B}'_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ совпадали и, более того, чтобы соответствующие выражения имели одинаковые старшие части. Таким образом, выражение $L^+ - \check{L}^+ = K$ имеет порядок $k < 2m$, выражения $B'_j - \check{B}'_j = N_j$ порядков $n_j < m'_j$ или равны нулю $(j = 1, \ldots, m)$.

Функция Грина $\check{R}_x = R(x, \cdot) = R(x, y)$ задачи (66) удовлетворяет равенствам

$$\hat{L}^+ \bar{\check{R}}_x = \delta_x, \qquad \check{B}'_j \bar{\check{R}}_x = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{67}$$

Из (55) и (67) следует, что

$$\check{L}^+ (\bar{\check{R}}_x - \bar{R}_x) = K\bar{R}_x, \qquad \check{B}'_j (\bar{\check{R}}_x - \bar{R}_x) = N_j \bar{R}_x \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{68}$$

Имеем $K\bar{R}_x \in W_{p'}^{2m-q-k}(G)$, $N_j \bar{R}_x \in W_{p'}^{2m-q-n_j-\frac{1}{p'}}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Обозначим

$$t = \min(2m - k,\ m'_j - n_j) > 0, \tag{69}$$

где минимум распространяется лишь на те j, для которых $B'_j - \check{B}'_j = N_j \not\equiv 0$. Тогда $(K\bar{R}_x, N_1\bar{R}_x, \ldots, N_m\bar{R}_x) \in K_{\left(-q+t, 2m-q+t-m'_j-\frac{1}{p'}\right)}$, так как $2m - q - k \geqslant -q + t$ и $2m - q - n_j - \dfrac{1}{p'} \geqslant 2m - q + t - m'_j - \dfrac{1}{p'}$ для тех j, для которых $N_j \not\equiv 0$. Применяя к (68) теорему 2′, заключаем, что *справедливо неравенство*

$$|||\check{R}_x - R_x|||_{2m-q+t, p'} \leqslant c. \tag{70}$$

Как и при доказательстве теоремы 3, убеждаемся, что

$$|||D_x^\beta \omega^\alpha (x, \cdot)(\check{R}_x - R_x)|||_{2m-q+|\alpha|-|\beta|+t, p'} \leqslant c_{\alpha\beta}.$$

Из (70) следует, в частности, что если $t \geqslant \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1 - 2m$, то ядро $\check{R}(x, y) - R(x, y) \in L_2(G \times G)$, т. е. является ядром Гильберта — Шмидта.

Пусть G_1 — подобласть G, примыкающая к куску Γ_0 поверхности Γ, $G_2 = G \setminus G_1$. Предположим, что «возмущение» задачи (54) сосредоточено внутри $G_1 \cup \Gamma_0$. Это означает, что коэффициенты выражения $K = L^+ - \check{L}^+$ аннулируются тождественно в некоторой окрестности (в $G \cup \Gamma$) замыкания $\bar{G}_2$ множества G_2, а коэффициенты выражений $N_j = B_j - \check{B}'_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ равны нулю в некоторой окрестности (в Γ) замыкания $\Gamma \setminus \Gamma_0$. Тогда из теоремы 3 следует, что правые части (68) являются бесконечно дифференцируемыми функциями по (x, y) в $\bar{G}_2 \times (G \cup \Gamma)$. Поэтому также $\check{R}(x, y) - R(x, y) \in C^\infty(\bar{G}_2 \times (G \cup \Gamma))$. Таким образом $\check{R}(x, y) - R(x, y)$ будет иметь, возможно, особенности при $x = y$ лишь внутри $G_1 \cup \Gamma_0$.

5. В этом пункте перенесем результаты п. 1 — 4 на случай, когда дефект отличен от нуля. Обозначим через N_0 множество функций $u \in W_p^{2m}(G)$, для которых $Lu = 0$, $B_j u = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Как уже указывалось, N_0 конечномерно и состоит из бесконечно дифференцируемых функций. Пусть $e_1, \ldots, e_r$ — ортонормированный относительно $L_2(G)$ базис в N_0. Функцию Грина $R_x = R(x, \cdot) = R(x, y)$ определим теперь как решение из $\widetilde{H}^+_{2m-q, p'}$ задачи (ср. (55)).

$$L^{+}\bar{R}_x=\delta_x-\sum_{i=1}^{r}\overline{e_i(x)}\,e_i(y)=\Delta_x,\qquad B_j'\bar{R}_x=0\qquad (j=1,\ldots,m).\quad (71)$$

Так как $(\Delta_x, N_0)=0$, то $((\Delta_x, 0, \ldots, 0), N)_{L_2}=0$, и по теореме $2'$ найдем, что задача (71) имеет единственное решение $\bar{R}_x$, принадлежащее $\widetilde{H}^{+}_{2m-q,p'}$, при этом оценка (56) заменяется следующей:

$$|||\bar{R}_x|||_{2m-q,p'}\leqslant c_1\|\Delta_x\|_{-q,p'}\leqslant c_2. \qquad (72)$$

Пусть в (54) $F\in P_{\hat{N}+}K_{\left(s,\,2m+s-m_j-\frac{1}{p},p\right)}$, $s\geqslant\max(q-2m, 0)$, тогда по теореме $2'$ существует решение $u(x)\in W_p^{2m+s}(G)=\widetilde{W}_p^{2m+s}(G)$ этой задачи. Ясно, что его можно выбрать так, чтобы $(u, N_0)=0$; в этом случае решение определяется единственным образом. Ниже будем выбирать именно такое решение задачи (54). Учитывая (71) и формулу Грина (3), мы снова получим формулу (57) для $u(x)$. Аналогично можно было бы считать $s\geqslant q-2m$. Утверждения п. 1 — 4 полностью сохраняются. В доказательствах надо лишь всюду δ_x заменить на Δ_x, в п. 3 надо считать, что $((f, 0, \ldots, 0), N^{+})_{L_2}=0$, в (67) надо δ_x заменить на $\check{\Delta}_x=\delta_x-\sum_{j=1}^{\check{r}}\overline{\check{e}_j(x)\check{e}_i}(y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. L. Lions, E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei. (III), Ann. Scuola norm. Super. Pisa, Ser. III, **15**, N 1—2, 1961, 39—101.
2. J. L. Lions, E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei. (V), Ann. Scuola norm. Super. Pisa, Ser. III, **16**, N 1, 1962, 1—44.
3. E. Magenes, Spazi di interpolatione ed equazioni a derivate parziali, Conferenza tenuta al VII Congresso dell'UMI, Genova, 30 settembre — 5 ottobre 1963. Русск. перевод: УМН, т. 21, № 2, 1966, 169—218.
4. Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 148, № 4, 1963, 745—748.
5. Я. А. Ройтберг, Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964, 798—801.
6. Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений, УМЖ, т. 17, № 5, 1965, 122—129.
7. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, изд-во «Наукова думка», К., 1965.
8. J. Odhnoff, Operators generated by differential problems with value parameter in equation and boundary condition, Lund, 1959.
9. J. Ercolano, M. Schechter, Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems, Comm. Pure Appl. Math., **18**, N 1—2, 1965, 83—105.
10. J. Ercolano, M. Schechter, Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems, Comm. Pure Appl. Math., **18**, N 3, 1965.
11. В. В. Барковский, Я. А. Ройтберг, О минимальном и максимальном операторах, соответствующих общей эллиптической задаче с неоднородными граничными условиями, УМЖ, т. 18, № 2, 1966, 91—97.
12. В. В. Барковский, О функции Грина самосопряженного эллиптического оператора, порожденного дифференциальным выражением и неоднородными граничными условиями, УМЖ, т. 18, № 2, 1966, 84—91.
13. В. В. Барковский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, соответствующих общим эллиптическим задачам с собственным значением в граничных условиях, УМЖ, т. 19, № 1, 1967.
14. М. И. Вишик, С. Л. Соболев, Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных, ДАН СССР, т. 111, № 3, 1956, 521—523.
15. Ю. М. Березанский, О гладкости вплоть до границы области спектральной функции самосопряженного дифференциального эллиптического оператора, ДАН СССР, т. 152, № 3, 1963, 511—514.

16. С. Г. Крейн, А. С. Симонов, Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения, ДАН СССР, т. 167, № 6, 1966, 1226—1229.
17. Я. А. Ройтберг, О разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений при наличии степенных особенностей в правых частях, УМЖ, т. 20, № 1, 1968.
18. А. Я. Повзнер, О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$, Матем. сб., т. 32, № 1, 1953, 109—156.
19. F. E. Browder, The eigenfunctionexpansion theorem for the general self— adjont singular elliptic partial differential operator, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **40**, № 6, 1954, 454—467.
20. F. E. Browder, On the spectral theory of elliptic differential operators. I, Math. Ann., **142**, 1961, 22—130.
21. К. Морен, Методы гильбертова пространства, изд-во «Мир», М., 1965.
22. В. А. Ильин, И. А. Шишмарев, Об эквивалентности систем обобщенных и классических собственных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 24, № 5, 1960, 757—774.
23. Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, О гладкости вплоть до границы области ядра резольвенты эллиптического оператора, УМЖ, т. 15, № 2, 1963, 185—189.
24. Ю. П. Красовский, Исследование функции Грина, УМН, т. 20, № 5, 1965, 267—268.
25. М. Ш. Бирман, Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий, Вестн. Лен. гос. ун-та, сер. матем., мех., астр., № 1, 1962, 22—55.
26. М. Ш. Бирман, З. С. Соломяк, О приближении функций классов W_p^α кусочно-полиномиальными функциями, ДАН СССР, т. 171, № 5, 1966, 1015—1018.
27. M. Schechter, General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **12**, N 3, 1959, 457—486 (Русск. перевод: Математика, т. 4, № 5, 1960, 93—122).
28. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.
29. С. Г. Крейн, Доклад на Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям, Баку, 1959.
30. С. Г. Крейн, Об одной интерполяционной теореме в теории операторов, ДАН СССР, т. 130, № 3, 1960, 491—494.
31. J. L. Lions, Espaces intermediaires entre espaces hilbertiens et applications, Bull. Math. Soc. Math. Phys., RPR, **2** (50), N 3, 1959, 419—432.
32. M. Schechter, On L^p estimates and regularity. I, Amer. J Math., **85**, N 1, 1963, 1—13.
33. M. Schechter, On L^p estimates and regularity. II, Math. Scand., **13**, N 1, 1963, 47—69.
34. М. С. Агранович, Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, т. 20, № 5, 1965, 3—120.
35. Л. Р. Волевич, Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем, Матем. сб., т. 68, № 3, 1965, 373—416.
36. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
37. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов. I, Вестн. Лен. гос. ун-та, сер. матем., мех., астр., № 7, 1967.

Поступила 2.I 1967 г.

Ин-т матем. АН УССР, Киев
Черниговский пед. ин-т