Я. А. Ройтберг, Задача Коши для общих гиперболических систем в полной шкале пространств типа соболевских, *Докл. АН СССР*, 1991, том 316, номер 2, 300–304

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

© Я.А. РОЙТБЕРГ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЩИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛНОЙ ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВСКИХ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 7 V 1990)

1. После известной работы С.Л. Соболева [1] обобщенные функции часто использовались для исследования задачи Коши для гиперболических уравнений (отметим здесь книги [1–5], обзор [6] и приведенную в них библиографию). В данной работе задача Коши для строго гиперболической по Лере–Волевичу системы изучается в полной шкале пространств типа соболевских, зависящих от действительных параметров s и τ; s характеризует порядок гладкости решения по всем переменным, τ характеризует дополнительную гладкость по тангенциальным переменным. Чем меньше s и τ, тем "более обобщенным" является решение; для достаточно больших s и τ решение является обычным классическим решением рассматриваемой задачи. В [7, 8] такие задачи изучались для одного уравнения. Ранее в работах Лионса, Мадженеса, Ю.М. Березанского, С.Г. Крейна и др. (см. [9–14] и приведенную там библиографию) эллиптические задачи изучались в шкалах пространств типа соболевских, зависящих от параметра $s \in \mathbf{R}$. В этих работах установлены так называемые теоремы о полном наборе изоморфизмов, нашедшие многочисленные приложения. Для параболических задач подобные теоремы доказаны Н.В. Житарашу [15].

2. Пусть $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $(\sigma, \xi) = (\sigma, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ – двойственные переменные,

(1) $\quad l = l(D_t, D_x) = (l_{kj}(D_t, D_x))_{k,j=1,\ldots,N}$,

l – матричное дифференциальное выражение, l_{kj} – однородные дифференциальные выражения порядков $s_k + t_j$ с постоянными комплексными коэффициентами, $l_{kj} = 0$, если $s_k + t_j < 0$. Здесь $D_t = i\,\partial/\partial t$, $D_x = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j = i\,\partial/\partial x_j$, $s_1, \ldots, s_N$, $t_1, \ldots, t_N$ – целые числа, $t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_N \geqslant 0 = s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_N$. Пусть $s_1 + \ldots + s_N + t_1 + \ldots + t_N = r$, а

(2) $\quad L(\sigma, \xi) = \det(l(\sigma, \xi)) = \sum\limits_{j+|\alpha|\leqslant r} a_{j\alpha}\sigma^j\xi^\alpha.$

Выражение (1) называют *строго гиперболическим* по Лере–Волевичу, если многочлен (2) строго гиперболический; коэффициент $a_{r,0,\ldots,0}$ при σ^r в (2) отличен от нуля и для каждого $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ корни уравнения $L(\sigma, \xi) = 0$ относительно σ вещественны и различны.

Всюду в работе предполагается, что выражение (1) строго гиперболическое. Исследуется разрешимость в $\mathbf{R}^{n+1}$ задачи

(3) $\quad lu = f, \quad u = (u_1, \ldots, u_N), \; f = (f_1, \ldots, f_N)$,

и разрешимость задачи Коши в полупространстве $\Omega = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1} : t > 0\}$:

(4) $\quad lu = f \;$ (в Ω), $\; D_t^{k-1} u_j|_{t=0} = u_{jk} \quad \forall j: \; t_j \geqslant 1; \; k = 1, \ldots, t_j$,

а также разрешимость этих задач для системы

(5) $\quad (l(D_t, D_x) + l'(t, x, D_t, D_x))u = f$,

полученной возмущением уравнения (3) младшими членами с бесконечно гладкими коэффициентами, все производные которых ограничены. Разрешимость этих задач будет установлена в полной шкале пространств типа соболевских. Для точной постановки задач надо ввести функциональные пространства.

3. Пусть $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}$. Через $H^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$ обозначим пространство распределений f с нормой

$$(6) \qquad \|f, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma\|_{s,\tau} = \left(\int (1+\gamma^2+\sigma^2+|\xi|^2)^s (1+\gamma^2+|\xi|^2)^\tau |\tilde f(\sigma,\xi)|^2 \, d\sigma\, d\xi\right)^{1/2};$$

здесь $\tilde f(\sigma, \xi)$ — преобразование Фурье элемента f, интегрирование проводится по всему пространству. Понятно, что для каждого фиксированного $\gamma \in \mathbf{R}$ норма $\|f, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma\|_{s,\tau}$ эквивалентна норме $\|f, \mathbf{R}^{n+1}, 0\|_{s,\tau} = \|f, \mathbf{R}^{n+1}\|_{s,\tau}$ и поэтому множество $H^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$ не зависит от γ. Однако в данной работе удобно рассматривать лишь такие нормы, эквивалентные (6), для которых постоянные в соответствующих двусторонних оценках можно выбрать не зависящими от γ.

Через $H^{s,\tau}(\Omega, \gamma)$, $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}, s \geqslant 0$, обозначим множество сужений на Ω функций из $H^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$ с нормой фактор-пространства $\|w, \Omega, \gamma\|_{s,\tau} = \inf \|u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma\|_{s,\tau}$, $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}, s \geqslant 0$, где inf берется по всем $u \in H^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$, равным w в Ω. Через $H^{-s,-\tau}(\Omega, \gamma)$, $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}$, $s \geqslant 0$, обозначим пространство, сопряженное $H^{s,\tau}(\Omega, \gamma)$ относительно расширения $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_\Omega$ скалярного произведения в $L_2(\Omega)$,

$$\|u, \Omega, \gamma\|_{-s,-\tau} = \sup_{v \in H^{s,\tau}(\Omega,\gamma)} |(u, v)| \, \|v, \Omega, \gamma\|_{s,\tau}^{-1}$$

есть норма в $H^{-s,-\tau}(\Omega, \gamma)$, $s \geqslant 0$.

Пространство $H^s(\partial\Omega, \gamma)$, $s, \gamma \in \mathbf{R}$, — это пространство распределений g в $\partial\Omega$ с нормой

$$\|g, \partial\Omega, \gamma\|_s = \left(\int_{\partial\Omega} |\hat g(\xi)|^2 (1+|\xi|^2+\gamma^2)^s d\xi\right)^{1/2} < \infty;$$

здесь $\hat g(\xi) = (F_{x\to\xi} g)(\xi)$ — преобразование Фурье элемента g.

Зафиксируем натуральное число r и пусть $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}$, $s \neq k + 1/2$, $k = 0, \ldots, r-1$. Через $\tilde H^{s,\tau,(r)}(\Omega, \gamma)$ обозначим пополнение $C_0^\infty(\bar\Omega)$ по норме

$$(7) \qquad |||u, \Omega, \gamma|||_{s,\tau,(r)} = \left(\|u, \Omega, \gamma\|_{s,\tau}^2 + \sum_{1\leqslant \gamma\leqslant r} \|D_t^{j-1} u, \partial\Omega, \gamma\|_{s+\tau-j+1/2}^2\right)^{1/2}$$

(здесь и ниже $C_0^\infty(\bar\Omega)$ обозначает множество сужений на $\bar\Omega$ функций из $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$. Подобное пространство введено автором в [12] и изучено в [13] (см. также [10, гл. 3, § 6, п. 8]). Для $s = k + 1/2, k = 0, \ldots, r-1$, пространство $\tilde H^{s,\tau,(r)}(\Omega, \gamma)$ и норма $|||u, \Omega, \gamma|||_{s,\tau,(r)}$ определяются с помощью интерполяции. Из (7) следует, что замыкание S отображения $u \mapsto (u|_{\bar\Omega}, u|_{\partial\Omega}, \ldots, D_t^{r-1} u|_{\partial\Omega}$, $u \in C_0^\infty(\bar\Omega)$, устанавливает изометрию между $\tilde H^{s,\tau,(r)}(\Omega, \gamma)$ и подпространством прямого произведения $H^{s,\tau}(\Omega, \gamma) \times \prod_{1\leqslant j\leqslant r} H^{s+\tau-j+1/2}(\partial\Omega, \gamma)$. Условимся ниже отождествлять элемент $u \in \tilde H^{s,\tau,(r)}(\Omega, \gamma)$ с элементом $Su = (u_0, \ldots, u_r)$, будем писать $u = (u_0, \ldots, u_r) \in \tilde H^{s,\tau,(r)}(\Omega, \gamma)$. Если $r = 0$, то $\tilde H^{s,\tau,(0)}(\Omega, \gamma) \overset{\text{def}}{=} H^{s,\tau}(\Omega, \gamma)$, $|||u, \Omega, \gamma|||_{s,\tau,(0)} = \|u, \Omega, \gamma\|_{s,\tau}$.

Введем еще пространства $\mathcal{H}^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$, $\mathcal{H}^{s,\tau}(\Omega, \gamma)$, $\tilde{\mathcal{H}}^{s,\tau,(r)}(\Omega, \gamma)$; нормы в них обозначим соответственно $|u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{s,\tau}$, $|u, \Omega, \gamma|_{s,\tau}$, $|u, \Omega, \gamma|_{s,\tau,(r)}$: $\mathcal{H}^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma) = \{u\colon e^{-\gamma t} u \in H^{s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)\}$; $|u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma|_{s,\tau} = \|e^{-\gamma t} u, \mathbf{R}^{n+1}, \gamma\|_{s,\tau}$. Если здесь $\mathbf{R}^{n+1}$ заменить на Ω, то получим определение $\mathcal{H}^{s,\tau}(\Omega, \gamma)$ и нормы в нем; совершенно аналогично $\widetilde{\mathcal{H}}^{s,\tau,(r)}(\Omega,\gamma) = \{u\colon e^{-\gamma t}u \in \widetilde{H}^{s,\tau,(r)}(\Omega,\gamma)\}$, $|u,\Omega,\gamma|_{s,\tau,(r)} = |||e^{-\gamma t}u,\Omega,\gamma|||_{s,\tau,(r)}$.

4. Лемма 1. *Пусть $M = M(t,x,D_t,D_x)$, $(t,x)\in\mathbf{R}^{n+1}$, – линейное дифференциальное выражение порядка m с бесконечно гладкими коэффициентами, все производные которых ограничены. Тогда для любых $s,\tau\in\mathbf{R}$ существует постоянная $c>0$, не зависящая от u и γ, такая, что*

$$(8)\qquad |Mu,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{s-m,\tau}\leqslant c\,|u,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{s,\tau},\quad u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1});$$

если $m\leqslant r$, *то*

$$(9)\qquad |Mu,\Omega,\gamma|_{s-m,\tau}\leqslant c\,|u,\Omega,\gamma|_{s,\tau,(r)},\quad u\in C_0^\infty(\overline{\Omega});$$

$$(10)\qquad |Mu,\Omega,\gamma|_{s-m,\tau,(r-m)}\leqslant c\,|u,\Omega,\gamma|_{s,\tau,(r)},\quad u\in C_0^\infty(\overline{\Omega});$$

если $m\leqslant r-1$, *то*

$$(11)\qquad \|Mu,\partial\Omega,\gamma\|_{s-m+\tau-1/2}\leqslant c\,|u,\Omega,\gamma|_{s,\tau,(r)},\quad u\in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. Поскольку $M(t,x,D_t,D_x)u = e^{\gamma t}M(t,x,D_t+i\gamma,D_x)\times$ $\times\,(e^{-\gamma t}u)$, то

$$|Mu,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{s-m,\tau} = \|e^{-\gamma t}M(t,x,D_t,D_x)u,\mathbf{R}^{n+1},\gamma\|_{s-m,\tau} =$$
$$= \|M(t,x,D_t+i\gamma,D_x)(e^{-\gamma t}u),\mathbf{R}^{n+1},\gamma\|_{s-m,\tau}\leqslant$$
$$\leqslant c\,\|e^{-\gamma t}u,\mathbf{R}^{n+1},\gamma\|_{s,\tau} = c\,|u,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{s,\tau},$$

и оценка (8) установлена. Неравенства (9)–(11) устанавливаются совершенно аналогично (ср. [13, 14, 7, 8]).

5. Изучим теперь гиперболические системы в $\mathbf{R}^{n+1}$. Из оценки (8) следует, что для любых $s,\tau\in\mathbf{R}$ замыкания l, $l+l'$ отображений $u\mapsto lu$, $u\mapsto(l+l')u$ $(u\in(C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1}))^N)$ непрерывно действуют в паре пространств

$$(12)\qquad \mathcal{H}^{T+s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1},\gamma)\overset{\mathrm{def}}{=}\prod_{1\leqslant j\leqslant N}\mathcal{H}^{t_j+s,\tau}(\mathbf{R}^{n+1},\gamma)\to\prod_{1\leqslant k\leqslant N}\mathcal{H}^{s-s_k,\tau}(\mathbf{R}^{n+1},\gamma)\equiv\mathcal{H}^{s-S,\tau};$$

$$(13)\qquad |lu,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{s-S,\tau}\leqslant c\,|u,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{T+s,\tau},\quad |(l+l')u,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{s-S,\tau}\leqslant$$
$$\leqslant c\,|u,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{T+s,\tau},$$

где $|f,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{s-S,\tau}$, $|u,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{T+s,\tau}$ – нормы соответственно в пространстве образов и прообразов отображения (12), постоянная $c>0$ не зависит от u и γ. Возникает вопрос об обратимости операторов l и $l+l'$.

Теорема 1. *Для каждого $f\in\mathcal{H}^{s-S,\tau}(\mathbf{R}^{n+1},\gamma)$, $s,\tau,\gamma\in\mathbf{R}$, $|\gamma|\geqslant\gamma_0>0$, существует один и только один элемент $u\in\mathcal{H}^{T+s,\tau-1}(\mathbf{R}^{n+1},\gamma)$ такое, что $lu=f$. Существует постоянная $c>0$, не зависящая от f, u, γ, $|\gamma|\geqslant\gamma_0>0$, такая, что*

$$(14)\qquad |u,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{T+s,\tau-1}\leqslant c\,|\gamma|^{-1}|f,\mathbf{R}^{n+1},\gamma|_{s-S,\tau}.$$

Если $\operatorname{supp}f\subset\overline{\Omega}$, *то* $\operatorname{supp}u\subset\overline{\Omega}$.

Для доказательства надо в уравнении $l(D_t+i\gamma,D_x)(e^{-\gamma t}u) = e^{-\gamma t}f$, эквивалентном уравнению (3), перейти к фурье-образам и воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2. *Существует постоянная $c>0$, независящая от $(\sigma,\gamma,\xi)\in\mathbf{R}^{n+2}$ такая, что $|L(\sigma+i\gamma,\xi)|\geqslant c|\gamma|(\sigma^2+\gamma^2+|\xi|^2)^{(r-1)/2}$, $(\sigma,\gamma,\xi)\in\mathbf{R}^{n+2}$), существует постоянная $M>0$ такая, что для $(\gamma,\xi)\in\mathbf{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ на множестве $|\sigma|\geqslant$ $\geqslant M(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2}$ справедлива оценка $|L(\sigma+i\gamma,\xi)|\geqslant c(\sigma^2+\gamma^2+|\xi|^2)^{r/2}$.*

Последнее утверждение теоремы следует из теоремы типа Палея–Винера.

Сравнение оценок (13) и (14) показывает, что при переходе $f \mapsto u$ "теряется единица гладкости в тангенциальном направлении", вместе с тем норма этого оператора оценивается через $c|\gamma|^{-1}$ и мала при больших $|\gamma|$. Поэтому из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Существует число* $\gamma_0 > 0$ *такое, что при* $|\gamma| \geqslant \gamma_0 > 0$ *задача* (5) *с любым* $f \in \mathcal{H}^{s-S,\tau}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$, $s, \tau \in \mathbf{R}$, *имеет одно и только одно решение* $u \in \mathcal{H}^{T+s,\tau-1}(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma)$. *Существует постоянная* $c > 0$, *не зависящая от* f, *и* u γ, $|\gamma| \geqslant \gamma_0$, *такая, что справедлива оценка* (14). *Если* $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}$, *то и* $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}$.

6. С задачей Коши (4) свяжем оператор $A = A_{s,\tau}$, $s, \tau \in \mathbf{R}$, – замыкание отображения $u \mapsto (lu, \{D_t^{k-1} u_j \ (\forall j: t_j \geqslant 1;\ k = 1, \ldots, t_j)\})$, $u \in (C_0^\infty(\overline{\Omega}))^N$, непрерывно действующий из всего $\widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau,(T)}(\Omega, \gamma) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \widetilde{\mathcal{H}}^{t_j+s,\tau,(t_j)}(\Omega, \gamma)$ в пространство

$$\widetilde{K}^{s,\tau} \overset{\text{def}}{=} \prod_{1 \leqslant j \leqslant N} \widetilde{\mathcal{H}}^{s-s_j,\tau,(-s_j)}(\Omega,\gamma) \times \prod_{j: t_j \geqslant 1} \prod_{1 \leqslant k \leqslant t_j} H^{t_j+s+\tau-k+1/2}(\partial\Omega,\gamma) =$$

$$= \widetilde{\mathcal{H}}^{s-S,\tau,(-S)}(\Omega,\gamma) \times B^{s,\tau}(\partial\Omega,\gamma)$$

(см. (10), (11)).

Пусть в (4) $f = (f_1, \ldots, f_N) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{s-S,\tau,(-S)}(\Omega,\gamma)$, $f_k = f_{k0}, \ldots, f_{k,-s_k}) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{s-s_k,\tau,(s_k)}(\Omega,\gamma)$, $U = \{u_{jk};\ j:\ t_j \geqslant 1,\ k = 1, \ldots, t_j\} \in B^{s,\tau}(\partial\Omega, \gamma)$, $s, \tau \in \mathbf{R}$. Элемент $u = (u_1, \ldots, u_N) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau,(T)}(\Omega,\gamma)$, для которого $Au = (f, U)$, назовем решением (обобщенным) задачи Коши (4). Совершенно аналогично определяется решение задачи Коши для уравнения (5).

Для разрешимости задачи Коши (4) необходимо, чтобы f и U были связаны определенными условиями совместности. Действительно, если l_k – строка с номером k матрицы l, а $u \in \widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau,(T)}(\Omega, \gamma)$ – решение задачи (4), то, согласно (12),

$$(15)\quad D_t^{m-1} l_k u|_{t=0} = D_t^{m-1} f_k|_{t=0} = f_{km} \in H^{s+\tau-s_k-m+1/2}(\partial\Omega,\gamma)$$
$$\forall k:\ -s_k \geqslant 1,\ \ m = 1, \ldots, -s_k.$$

Левая часть (15) вполне определяется вектором U начальных данных задачи Коши, правая часть определяется вектором f. Поэтому условия (15) определяют необходимые условия разрешимости задачи Коши.

Теорема 3. *Пусть* $s, \tau, \gamma \in \mathbf{R}$, $|\gamma| \geqslant \gamma_0 > 0$, $F = (f, U) \in K^{s,\tau}$ *и выполнены условия совместности. Тогда задача Коши* (4) *имеет одно и только одно решение* $u \in \widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau-1,(T)}(\Omega, \gamma)$. *Существует постоянная* $c > 0$, *не зависящая от* F, u, γ, $|\gamma| \geqslant \gamma_0 > 0$, *такая, что*

$$(16)\quad \|u\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau-1,(T)}(\Omega,\gamma)} \leqslant c\,|\gamma|^{-1} \|F\|_{K^{s,\tau}}.$$

Для доказательства решение u_0 продолжается нулем на все пространство и задача Коши (4) сводится к задаче в $\mathbf{R}^{n+1}$ (ср. [7, 8], а также [4, § 15]), после такого сведения используется теорема 1.

Отметим, что и в теореме 3 при переходе $F \mapsto u$ "теряется единица гладкости в тангенциальном направлении", зато норма этого оператора не превосходит $c|\gamma|^{-1}$ и мала при больших $|\gamma|$. Поэтому справедлива

Теорема 4. *Пусть* $s, \tau \in \mathbf{R}$. *Существует число* $\gamma_0 > 0$ *такое, что при* $|\gamma| \geqslant \gamma_0$ *для каждого* $F = (f, U) \in K^{s,\tau}$, *удовлетворяющего условиям совместности, задача Коши для уравнения* (5) *имеет одно и только одно решение* $u \in \widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau-1,(T)}(\Omega,\gamma)$; *при этом справедлива оценка* (16).

7. Понятно, что условия совместности не возникают, если $s_1 = \ldots = s_N = 0$. В общем случае от них отказаться нельзя. Изменим несколько постановку. Будем в этом пункте считать, что в (4) $f = f_0 = (f_{10}, \ldots, f_{N0}) \in \prod_{1 \leqslant k \leqslant N} \mathcal{H}^{s-s_k,\tau}(\Omega,\gamma) = \mathcal{H}^{s-S,\tau}(\Omega,\gamma)$, а решение будем по-прежнему искать в $\widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau,(T)}(\Omega,\gamma)$. Возможность такого подхода легко следует из неравенств (9), (11). Определим теперь по формулам (15) элементы $f_{km} \in H^{s+\tau-s_k-m+1/2}(\partial\Omega,\gamma)$. Тогда условия

$$(17)\qquad (f_{k0}, \ldots, f_{k,-s_k}) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{s-s_k,\tau,(-s_k)}(\Omega,\gamma)\,(\forall k\colon\ -s_k \geqslant 1)$$

необходимы для разрешимости в $\widetilde{\mathcal{H}}^{T+s,\tau,(T)}(\Omega,\gamma)$ задачи Коши (4) с $f = f_0 \in \mathcal{H}^{s-S,\tau}(\Omega,\gamma)$. Если $|\gamma| \geqslant \gamma_0 > 0$, то согласно теореме 3 условия (17) также достаточны для разрешимости этой задачи. Таким образом, в рассматриваемой здесь постановке условия (17) заменяют условия совместности (15). Однако если $s \in \mathbf{R}$ таково, что

$$(18)\qquad s < s_j + 1/2,\ \ j = 1, \ldots, N,$$

то условие (17) выполняется. Поэтому в классе "не очень гладких функций" задача Коши всегда разрешима, требовать выполнения условия совместности не обязательно. Однако гладкость такого решения не всегда растет вместе с гладкостью правых частей: как только (18) перестает выполняться, нужны условия совместности. Совершенно аналогичное утверждение справедливо и для задачи Коши для уравнения (5).

8. Теоремы 3, 4 применяются для изучения задачи Коши со степенными особенностями в правых частях, для построения и изучения матрицы Грина рассматриваемых задач, для изучения задачи Коши для вырождающихся гиперболических систем.

Черниговский государственный педагогический институт им. Т.Г. Шевченко

Поступило 14 V 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* – Матем. сб., 1936, т. 1, с. 39–72. 2. *Лере Ж.* Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 208 с. 3. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: ИЛ, 1961. 122 с. 4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с. 5. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1987, т. 3. 694 с. 6. *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* – УМН, 1972, т. 27, № 4, с. 65–143. 7. *Ройтберг Я.А.* – ДАН, 1986, т. 290, № 2, с. 296–300. 8. *Ройтберг Я.А.* В кн.: Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений. Киев, 1986, т. 290, № 2, с. 296–300. 3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с. 10. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965. 800 с. 11. *Березанский Ю.М., Крейн С.Г., Ройтберг Я.А.* – ДАН, 1963, т. 148, № 4, с. 745–749. 12. *Ройтберг Я.А.* – ДАН, 1964, т. 157, № 4, с. 798–801. 13. *Ройтберг Я.А.* – Матем. сб., 1971, т. 86, № 2, с. 248–267. 14. *Ройтберг Я.А., Сердюк В.А.* Эллиптические задачи с параметром в пространствах обобщенных функций для общих систем уравнений. Препринт Ин-та матем. АН УССР. Киев, 1982. 62 с. 15. *Житарашу Н.В.* – ДАН, 1981, т. 260, № 5, с. 1054–1057.