РІЗНІ ТИПИ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ, ЩО ПРИЗНАЧЕНІ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІНТЕГРАЛА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАНЬ У КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Лілія Соколенко – доцент кафедри педагогіки, психології та методик навчання фізики й математики ЧНПУ імені Т.Г. Шевченка, кандидат педагогічних наук, доцент.
Василь ШВЕЦЬ – завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М.П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук, професор.

Метою вивчення початків інтегрального числення в курсі алгебри і початків аналізу старшої школи є ознайомлення учнів з його основними ідеями і застосуваннями.

Розглядаючи питання геометрії та механіки в кінці XVII століття, англійський фізик та математик І. Ньютон і майже одночасно з ним німецький філософ і математик Г. Лейбніц створили основи *диференціального* та *інтегрального числень*.

Інтегральне числення – це розділ математичного аналізу, в якому вивчаються *інтеграли*, їх властивості, способи обчислення та *застосування*.

Інтегральне числення виникло з розгляду численних задач природознавства та математики. Найважливішою з них є фізична *задача про визначення шляху*, який пройде тіло за даний час, за відомою змінною швидкістю руху та найбільш старовинна *задача обчислення площ та об'ємів геометричних фігур.*

Дана стаття присвячена одній з провідних змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу старшої школи – ”***Інтеграл та його застосування***”. Численність задач природознавства, математики, техніки, економіки дає можливість створити систему прикладних задач, призначених для вивчення згаданої змістової лінії в курсі алгебри і початків аналізу на різних рівнях (рівні стандарту, академічному, профільному та поглибленому).

Згідно з чинними програмами курсу алгебри і початків аналізу, всіх рівнів [5] – [8], в даній темі передбачено вивчення понять ***”первісна”*** та ***”визначений інтеграл”.*** Програми профільного та поглибленого рівнів [7], [8] передбачають також введення поняття *”**невизначений інтеграл**”*. У відповідності до ключових понять змістової лінії та програмної вимоги - навчання учнів застосувань інтеграла до розв'язування прикладних задач, пропонуємо до системи прикладних задач курсу алгебри і початків аналізу включити такі **типи задач:**

1) Прикладні задачі, що приводять до поняття первісна.
2) Прикладні задачі на застосування поняття первісної у природничих науках та економіці.
3) Прикладні задачі, що приводять до поняття визначений інтеграл.
4) Прикладні задачі на застосування визначеного інтеграла у фізиці, біології, економіці та інших галузях.
5) Задачі практичного змісту на застосування інтеграла до обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл обертання.

Аналізуючи діючі шкільні підручники з курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, серед яких [2] - [4], [9], доходимо висновку, що в більшості з них перевага віддається фізичній задачі, в якій за відомим законом швидкості визначають закон руху. Ця задача розглядається на етапі мотивації, перед введенням поняття ”первісна” та під час закріплення згаданого поняття. Крім того, у підручниках [2], [9] розглядаються прикладні задачі фізичного змісту на застосування визначеного інтеграла.

Більше прикладних задач з теми ”Інтеграл та його застосування” пропонується у підручнику інтегрованого курсу ”Математика, 11 клас” [1], але всі вони мають фізичний зміст. Численні застосування визначеного інтеграла до вирішення фізичних та деяких економічних і технічних проблем представлені у підручнику [17].

Аналіз досліджень і публікацій. Розглядаючи питання методики включення прикладних задач під час навчання теми ”Інтеграл та його застосування” автори

А. Парафійник, І. Стрельченко, О. Стрельченко зосереджують увагу на задачах з економічним змістом. У статтях [13], [14] Л. Соколенко розглядає застосування первісної та визначеного інтеграла до вирішення природничих, зокрема біологічних, фізичних проблем, та до обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл обертання, які є геометричними моделями прикладних задач. Проведено ряд дисертаційних досліджень, серед яких дослідження Г. Дутки, Л. Соколенко, Ю. Ткач та ін., у яких серед інших питань розглядаються питання методики навчання розв'язування прикладних задач, призначених для вивчення інтеграла та його застосувань.

Існують навчально-методичні посібники, а саме, [10]-[12], в яких представлені різні типи прикладних задач, призначених для розв'язування, під час навчання теми "Інтеграл та його застосування" курсу алгебри і початків аналізу старшої школи та посібник для проведення курсу за вибором [16], що містять окремі типи задач на застосування невизначеного та визначеного інтегралів в задачах економічного змісту.

Мета статті. Розглянути систему прикладних задач, призначених для вивчення інтеграла та його застосувань у курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи, виділити типи задач та розкрити їх роль у навчанні змістової лінії курсу, диференціювати задачі за рівнями складності, звернути увагу на ті типи задач, яким приділено недостатньо уваги у діючих шкільних підручниках, та методику навчання учнів їх розв'язування.

Виклад основного матеріалу. Розпочинаючи вивчення теми "Інтеграл та його застосування", на етапі актуалізації опорних знань старшокласників варто пригадати окремі з численних *прикладних задач про визначення*: миттєвої швидкості нерівномірного руху, прискорення, сили струму, кутової швидкості, лінійної густини стержня, потужності, питомої теплоємності речовини даного тіла, швидкості хімічної реакції , швидкості зростання популяції, продуктивності праці за час t та результати їх розв'язування, одержані під час навчання теми "Похідна та її застосування". Ці задачі та результати їх розв'язування представлені у статті [15] у таблицях 1, 2.

Запропоновані в таблицях функції та їх похідні дають можливість урізноманітнити *прикладні задачі, що приводять до поняття первісної* та *прикладні задачі на застосування первісної у природничих науках та економіці*. Відбір задач, призначених для мотивації введення згаданого поняття та розгляду його застосувань, варто здійснювати залежно від профілю класу в якому вивчається дана тема. Зупинимось на окремих зі згаданих задач більш детально.

Якщо під час вивчення попередньої теми курсу „Похідна та її застосування" в учнів сформувалось уявлення про те, що похідна є швидкістю зміни значень певної функції в залежності від зміни аргументу, зокрема уявлення про хімічний та біологічний зміст похідної, то під вивчення первісної корисним буде розгляд задач такого типу.

1. Прикладні задачі, що приводять до поняття первісна.

А

Приклад 1. Знайдіть закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини, якщо через 1 годину після введення 10*мг* препарату його маса зменшилась вдвічі. Вважати, що швидкість розчинення відбувається за законом $\upsilon(t) = -10t$.

Розв'язання. Шуканий закон є функцією часу від t. Позначимо цю функцію через $m(t)$ і пригадаємо, що $\upsilon(t) = m'(t)$. Одержуємо рівність $m'(t) = -10t$.

Задача зводиться до відшукання функції $m = m(t)$ такої, що $m'(t) = -10t$, а $m(1) = 5$.

Очевидно, що $m(t) = -5t^2 + C$, де C - довільна стала. (1)

Враховуючи умову $m(1) = 5$ і рівність (1), обчислимо значення C: $5 = -5 + C$, звідки $C = 10$.

Підставивши знайдене значення у формулу (1), дістанемо *закон зменшення маси лікувального препарату в організмі людини:* $m(t) = -5t^2 + 10$.

Наведена задача є прикладом задачі, що приводить до поняття первісної і розкриває смисл довільної сталої C у загальному вигляді первісної.

Розгляд задач такого типу корисний для учнів. Він сприяє глибокому усвідомленню ними поняття первісної і операції інтегрування. Дану, та подібні до неї задачі, ми відносимо до задач ***першого рівня складності (А),*** оскільки для її розв'язання необхідно виконати два кроки, а саме, з'ясувати від якої функції слід взяти похідну, щоб одержати функцію швидкості, представлену в умові задачі, та, використовуючи початкову умову, знайти значення сталої C.

2. Прикладні задачі на застосування поняття первісної у природничих науках та економіці.

Серед вправ, що закріплюють поняття первісної, сприяють засвоєнню основної властивості первісної і трьох правил її знаходження, доцільно розглянути прикладні задачі, розв'язуючи які, учні набуватимуть навички відшукання первісних.

Наступний та подібні до нього приклади ми відносимо до задач ***першого (А) та другого (Б) рівнів складності,*** залежно від складності знаходження первісної, яку доводиться визначати у задачі.

Б

Приклад 2. Знайдіть закон, за яким визначається необхідна кількість $Q(T)$ теплоти (у *Дж*) для нагрівання *1 кг* рідини від $0°C$ до $T°C$, питома теплоємність якої $C(T) = 1{,}7 - 2\cdot 10^{-5}T + 12\cdot 10^{-7}T^2$, якщо для нагрівання цієї рідини від $0°C$ до $50°C$ необхідно *85,025 Дж* теплоти.

Розв'язання. Шуканий закон є функцією температури T. Позначивши цю функцію через $Q=Q(T)$ і пригадавши, що $C(T)=Q'(T)$, тобто, $Q(T)$ є первісною для $C(T)$, за основною властивістю первісної одержують $Q(T)=1{,}7T- 10^{-5}T^2+4\cdot 10^{-7}\ T^3+C$.

Враховуючи, що $Q(50)=85{,}025$, з рівняння $85{,}025=1{,}7\cdot 50- -25\cdot 10^{-3}+4\cdot 125\cdot 10^{-4}+C$ одержують $C=0$.

Отже, кількість теплоти Q, необхідна для нагрівання *1 кг* рідини від $0°C$ до $T°C$ визначається за законом $Q(T)=1{,}7T- -10^{-5}T^2+4\cdot 10^{-7}T^3$.

Відповідь. $Q(T) = 1{,}7T - 10^{-5}T^2 + 4\cdot 10^{-7}T^3$.

Пропонуємо декілька подібних задач для *самостійного розв'язування.*

А

1. Швидкість руху точки задана рівнянням $v=t+3t^2$ (v вимірюється в *м/с*). Знайдіть рівняння руху, якщо в момент часу $t = 0$ *с* точка знаходиться на відстані *1 м* від початкового положення.

Відповідь. $x(t) = t^3 + \frac{t^2}{2} + 1$ *- рівняння руху.*

2. Популяція комах, початкова чисельність якої дорівнює *1000,* змінюється зі швидкістю $\omega(t) = \frac{900}{(1+t)^2}$ комах у день. Знайдіть закон зміни чисельності P популяції комах в залежності від часу t (час виражено у днях).

Відповідь. $P(t) = \frac{-9000}{1+t} + 10000$.

3. Деяка епідемія поширюється зі швидкістю $v(t) = 0{,}15t - 0{,}015t^2$ осіб, що захворіли за добу. Знайдіть закон зміни кількості хворих в залежності від часу t, якщо за першу добу захворіло 7 осіб.

Вказівка. Використайте умови $v(t) = p'(t)$.

Відповідь. $P(t) = 0{,}075t^2 - 0{,}005t^3 + 32{,}92$.

4. Зменшення концентрації лікарського препарату в організмі за рахунок виведення його природним шляхом відбувається зі швидкістю $w(t) = -100e^{-t}$, де t – час, виражений у годинах. Знайдіть закон зміни його кількості у крові хворого, якщо початкова кількість складає 200 відповідних одиниць.

Вказівка. Використайте умови $w(t) = C'(t)$, де $C(t)$ - кількість лікарського препарату в організмі, та $C(0) = 200$.

Відповідь. $C(t) = 100 + 100e^{-t}$.

Існують дещо складніші задачі, в яких спочатку шукають первісну заданої функції, за тим же принципом що і у попередніх задачах, а потім шукану функцію, яка є первісною останньої знайденої. Ці задачі ми відносимо до ***другого рівня складності (Б).***

Б

5. Точка рухається вздовж прямої із прискоренням *a=2t* (*a* вимірюється в $м/с^2$). Знайдіть рівняння руху *S=S(t),* якщо відомо, що в момент часу *t=1с* точка знаходилась на відстані *10 м* від початкового положення і мала швидкість *4 м/с*.

Відповідь. $S(t) = \frac{t^3}{3} + 3t + 6\frac{2}{3}$ *- рівняння руху точки.*

6. В момент часу *t=0* тіло масою *1 кг* перебуває в спокої в початку координат. Знайдіть закон руху тіла під дією сили $F = 2 - \cos t$ (*t* вимірюється в секундах, *F* – у ньютонах).

Вказівка. Використайте закон Ньютона $F = ma$.

Відповідь. $S(t) = t^2 + \cos t - 1$ *- закон руху тіла.*

3. Прикладні задачі, що приводять до поняття визначений інтеграл.

У підручниках шкільного курсу алгебри і початків аналізу, зокрема [9], [17] перед введенням означення інтеграла розглядають ***задачу про площу криволінійної трапеції***. Дана задача розв'язується одним і тим самим методом, яким розв'язуються багато інших прикладних задач (про масу неоднорідного стержня [17]; про шлях, який пройшло тіло при прямолінійному русі [1]; про роботу змінної сили; про силу тиску рідини на вертикально розміщену пластинку; про кількість речовини, яка вступила в хімічну реакцію; про чисельність популяції; про обсяг випуску продукції та інші).

Будь-яка зі згаданих задач може мотивувати введення поняття визначений інтеграл, залежно від профілю класу в якому це поняття вивчається.

Проводячи *узагальнення спільного способу розв'язування* названого вище типу задач доцільно використати таблицю 1, в якій розглянуті декілька прикладних задач і виділені п'ять кроків даного способу:

1) розбиття відрізка *[a;b]*, на якому визначена неперервна і невід'ємна функція *y=f(x)*, точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ на *n* рівних частин;

2) визначення довжини кожного з відрізків $[x_{k-1};x_k]$;

3) утворення добутків $f(x_0)\cdot\Delta x$; $f(x_1)\cdot\Delta x$; ...; $f(x_{n-1})\cdot\Delta x$;

4) знаходження їх суми $S_n=f(x_0)\cdot\Delta x+f(x_1)\cdot\Delta x+\ldots+f(x_{n-1})\cdot\Delta x$;

5) обчислення границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, яку за означенням називають інтегралом функції *y=f(x)* від *a* до *b* і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$.

До таблиці 1 включено розв'язання задач *про знаходження площі криволінійної трапеції*, запропоноване у шкільному підручнику курсу алгебри і початків аналізу [17], та сформульованих нижче задач *фізичного змісту* (приклади 3-6).

Застосовуючи поняття інтеграла до розв'язаної в таблиці 1 першої задачі приходять до висновку, що $S=\int_a^b f(x)dx$ є **площею криволінійної трапеції.** Висновки, одержані при розв'язуванні прикладів 3 – 6, подані у відповідях відповідно до кожної задачі.

Оскільки ці задачі розв'язуються за відомим алгоритмом, то вони відносяться до ***другого рівня складності (Б).***

Б

Приклад 3. Виведіть формулу для обчислення маси m неоднорідного стержня, тобто такого, в якому густина $\rho(x)$ змінюється від точки до точки на ділянці $[0;l]$.

Відповідь. $m=\int_0^l \rho(x)dx$ *- маса неоднорідного стержня.*

Приклад 4. Визначте шлях S, який пройшло тіло при прямолінійному нерівномірному русі за проміжок часу $[\tau_1;\tau_2]$, якщо відомо, що воно рухалось зі швидкістю $v=v(t)$.

Відповідь. $S=\int_{\tau_1}^{\tau_2} v(t)dt$ *- шлях, який пройшло тіло при прямолінійному нерівномірному русі за проміжок часу* $[\tau_1;\tau_2]$.

Приклад 5. Виведіть формулу для обчислення роботи A змінної сили $F(x)$ при переміщенні тіла по прямій з положення a в положення b, коли напрям сили співпадає з напрямом руху.

<u>Вказівка.</u> Здійсніть розбиття відрізка $[a;b]$, на якому визначена неперервна і невід'ємна функція $F=F(x)$ сили, під дією якої тіло переміщується вздовж прямої з положення a в положення b (напрям сили співпадає з напрямом руху), точками вказаними у таблиці 1 та виконайте розв'язання за вказаним в таблиці алгоритмом. За означенням інтеграла одержують результат.

Відповідь. $A=\int_a^b F(x)dx$ *- робота змінної сили* F *при переміщенні тіла по прямій з положення* a *в положення* b*, коли напрям сили співпадає з напрямом руху.*

<u>Таблиця 1.</u> Задачі фізики, що приводять до поняття інтеграла

	1	2	3	4	5
Неперервна і невід'ємна на відрізку функція	Розбиття відрізка на n рівних частин точками	Довжина кожного з відрізків $(k=\overline{1,n})$	Добутки	Сума добутків	Границя
$y=f(x)$, $x\in[a;b]$	$a=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots$ $\ldots<x_{n-1}<x_n=b$	$x_k-x_{k-1}=$ $=\frac{b-a}{n}=\Delta x$	$f(x_{k-1})\Delta x$ - площа кожного з прямокутників	$S_n=(f(x_0)+$ $+f(x_1)+\ldots$ $\ldots+f(x_{n-1}))\Delta x$ - площа східчастого многокутника, утвореного всіма прямокутниками	$S=\lim_{n\to\infty} S_n$ - площа криволінійної трапеції

3. $\rho=\rho(x)$, $x\in[0;l]$ - густина неоднорід–ного стержня довжини l	$0=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots$ $\ldots<x_{n-1}<x_n=l$	$x_k-x_{k-1}=$ $=\frac{l}{n}=\Delta x$	$\rho(x_{k-1})\Delta x$ - маса кожного з відрізків стержня	$m_n=(\rho(x_0)+$ $+\rho(x_1)+\ldots$ $\ldots+\rho(x_{n-1}))\Delta x$ - наближене значення маси всього стержня	$m=\lim\limits_{n\to\infty} m_n$ - маса неодно-рідного стержня
4. $v=v(t)$, $t\in[\tau_1;\tau_2]$ - швидкість нерівномір-ного руху тіла	$\tau_1=t_0<t_1<t_2<\ldots$ $\ldots<t_{k-1}<t_k<\ldots$ $\ldots<t_{n-1}<t_n=\tau_2$	$t_k-t_{k-1}=$ $=\frac{\tau_2-\tau_1}{n}=\Delta t$	$v(t_{k-1})\Delta t$ - шлях, який пройшло тіло за кожний з відрізків часу	$S_n=(v(t_0)+$ $+v(t_1)+\ldots$ $\ldots+v(t_{n-1}))\Delta t$ - наближене значення всього шляху, яке пройшло тіло	$S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ - шлях, який пройшло тіло при нерівно-мірному русі
5. $F=F(x)$, $x\in[a;b]$ - сила, під дією якої тіло переміщується з пол. a в пол. b (напрям сили співпадає з напрямом руху)	$a=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots$ $<x_{n-1}<x_n=b$	$x_k-x_{k-1}=$ $=\frac{b-a}{n}=\Delta x$	$F(x_{k-1})\Delta x$ - робота, яка здійснюється силою на кожному з відрізків шляху	$A_n=(F(x_0)+$ $+F(x_1)+\ldots$ $\ldots+F(x_{n-1}))\Delta x$ - наближене значення роботи змінної сили	$A=\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ - робота, яка буде виконана тілом при перемі-щенні
6. $F(x)=\rho gxS$ $x\in[a;b]$ - сила тиску рідини на горизон– тально розміщену пластинку площею S на глибині x	$a=x_0<x_1<x_2<\ldots$ $<x_{k-1}<x_k<\ldots$ $<x_{n-1}<x_n=b$	$x_k-x_{k-1}=$ $=\frac{b-a}{n}=\Delta x$	$F(x_{k-1})\Delta x=$ $=\rho g x_{k-1}\times$ $\times y(x_{k-1})\Delta x$ - сила тиску рідини на смугу вертикально зануреної пластинки на відстані x_{k-1} від поверхні рідини	$F_n=(\rho g x_0 y(x_0)+$ $+\rho g x_1 y(x_1)+\ldots+$ $+\rho g x_{n-1} y(x_{n-1}))\Delta x$ - наближене значення сили тиску рідини на вертикально занурену пластинку	$F=\lim\limits_{n\to\infty} F_n$ - сила тиску рідини на вертикально розташовану пластинку

Наступна задача більш складна, для її розв’язування за відомим алгоритмом необхідні додаткові відомості з шкільного курсу фізики та вміння застосувати їх при вирішенні практичної ситуації. Тому цю задачу ми відносимо до ***третього рівня складності (В).***

Приклад 6. Визначте силу тиску F рідини, густина якої дорівнює ρ, на вертикально розміщену пластину, верхній край якої занурено на глибину a, а нижній на глибину b (рис. 1).

Вказівка. З курсу фізики відомо, що сила тиску рідини на горизонтально розміщену площадку, що має площу S, глибина занурення якої дорівнює h, визначається за формулою $F=\rho g h S$, де $g=9{,}8\,м/с^2$, ρ - густина рідини.

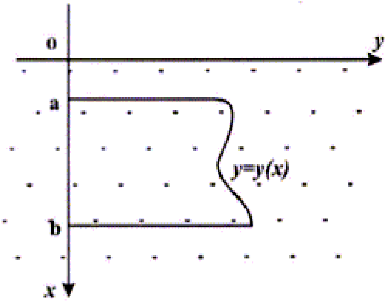

Рис. 1

Оскільки у даній задачі пластинка розташована вертикально, то різні її частини знаходяться на різній глибині і сила тиску рідини на них не однакова. Для виводу формули потрібно розділити пластинку на n горизонтальних смуг однакової висоти точками вказаними у таблиці 1. Довжина кожного з відрізків $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{0, n}$, дорівнює $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Якщо $n \to \infty$, то $\Delta x \to 0$. Кожну смугу наближено вважайте прямокутником. Сила тиску рідини на таку смугу за законом Паскаля дорівнює силі тиску рідини на горизонтально розташовану смугу, тієї ж площі, зануреної на ту ж саму глибину. Тоді згідно з наведеною вище формулою сила тиску на смугу, яка знаходиться на відстані x_{k-1} від поверхні рідини дорівнює $\rho g x_{k-1} \cdot y(x_{k-1})\Delta x$, а сума F_n, вказана у таблиці 1 дасть наближене значення сили тиску F рідини на вертикально занурену пластинку. Природно вважати, що $F = \lim\limits_{n\to\infty} F_n$. За означенням інтеграла одержують результат.

Відповідь. $F = \int\limits_a^b \rho g x y(x) dx$ *- сила тиску рідини,* густина якої дорівнює ρ, на вертикально розміщену пластинку, верхній край якої занурено на глибину a, а нижній - на глибину b; $x, y(x)$ - розміри пластинки (у даному випадку x - вертикальна сторона, $y(x)$ горизонтальна).

Перед введенням означення інтеграла достатньо обмежитись розглядом декількох прикладних задач, включених до таблиці 1. Решту задач корисно розглянути у конкретній числовій формі після введення означення інтеграла і ознайомлення учнів з формулою Ньютона–Лейбніца.

Як уже зазначалось, до поняття інтеграла приводять не лише задачі фізичного змісту, а і задачі хімічного, біологічного та економічного змісту. Розглянемо окремі з них. Ці задачі відносяться також до *другого* ***рівня складності (Б)***.

Б

Приклад 7. Виведіть формулу для обчислення кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[\tau_1; \tau_2]$, швидкість хімічного перетворення якої $v = v(t)$.

Розв'язання. Оскільки $v = v(t)$ неперервна і невід'ємна функція на відрізку $[\tau_1; \tau_2]$, то для розв'язання задачі виконаємо такі кроки:

1) Розбиття відрізка $[\tau_1; \tau_2]$ на n рівних частин точками $\tau_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_{n-1} < t_n = \tau_2$;

2) Знаходження довжини кожного з відрізків $[t_{k-1}; t_k]$, ($k = \overline{1, n}$): $t_k - t_{k-1} = \dfrac{\tau_2 - \tau_1}{n} = \Delta t$;

3) Утворення добутків $v(t_{k-1})\,\Delta t$ – кількості речовини, яка вступила в реакцію за проміжок часу Δt;

4) Знаходження суми добутків:

$m_n = (v(t_0) + v(t_1) + v(t_2) + \ldots + v(t_{n-1}))\,\Delta t$ – наближене значення кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію;

5) Знаходження $m = \lim\limits_{n\to\infty} m_n$ – кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[\tau_1; \tau_2]$.

Застосувавши поняття інтеграла, приходимо до *висновку*: кількість хімічної речовини m, яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[\tau_1; \tau_2]$, дорівнює $m = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} v(t)\,dt$.

За таким же алгоритмом розв'язується і *задача про визначення чисельності популяції*. Пропонуємо наступну задачу 8 для самостійного розв'язування.

Приклад 8. Виведіть формулу для обчислення приросту P особин популяції за проміжок часу $[\tau_1;\tau_2]$, швидкість зростання якої $v = v(t)$.

Відповідь. $P = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} v(t)\,dt$ *- приріст особин популяції за проміжок часу* $[\tau_1;\tau_2]$.

На основі одержаних вище загальних результатів виникає можливість конкретизувати прикладні задачі. Як саме це зробити, покажемо розглядаючи наступний тип прикладних задач.

4. Прикладні задачі на застосування визначеного інтеграла у фізиці, природничих науках та економіці.

Засвоєні учнями способи розв'язування прикладних задач загального характеру та одержані при цьому результати допоможуть їм під час розв'язування класів типових задач, запропонованих у діючих шкільних підручниках. Наприклад, використовуючи результат розв'язання задачі про роботу змінної сили, учні зможуть без особливих труднощів розв'язати задачі про розтяг та стиск пружини, про викачування води з ями або про заповнення бака водою, про підняття тіла масою *m* на висоту *h*.

Прикладні задачі на ***застосування інтеграла у фізиці***, ***природничих науках, економіці*** можуть бути включені у процес навчання після введення означення інтеграла і ознайомлення учнів з формулою Ньютона–Лейбніца. Їх бажано розділити на три рівні складності, врахувавши умови диференціації навчання.

Сформулюємо задачі даного типу, які відносяться до трьох рівнів складності, і з'ясуємо особливості їх розв'язування.

Розпочнемо з ***задач першого рівня складності (А).*** Приступаючи до розв'язування запропонованих задач, необхідно пригадати з учнями задачі, які розв'язувались під час вивчення поняття похідної (табл. 1, 2) [15] та деякі прикладні задачі загального характеру, які приводять до поняття інтеграл (табл. 1). Результати, які були одержані при їх розв'язанні, допоможуть відповісти на питання, поставлені в задачах даного типу.

Розв'язуючи задачі наведеного рівня складності, учні повинні визначити первісну функції, заданої в умові задачі (або функції, яку неважко задати), встановити межі інтегрування, після чого обчислити інтеграл, підінтегральною функцією якого є задана в умові задачі функція. Одержаний при цьому результат і буде відповіддю або може бути використаний для знаходження відповіді на поставлене в задачі питання.

А

Приклад 9. Знайдіть масу стержня завдовжки $\frac{\pi}{6}$ *м,* якщо його лінійна густина змінюється за законом *p(l)=(2l+cos3l) кг/м*.

Розв'язання. Для знаходження маси стержня слід використати формулу одержану під час розв'язання прикладної задачі 3 попереднього типу - $m = \int\limits_0^l \rho(x)dx$, де ρ - густина неоднорідного стержня, який має довжину l, m - його маса.

Підставляючи відповідні дані, одержуємо

$$m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2l + \cos 3l)dx = l^2 + \frac{1}{3}\sin 3l \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{36} + \frac{1}{3} \approx 0{,}601 \ \ (кг).$$

Відповідь. 0,601 кг.

Пропонуємо декілька подібних задач для *самостійного розв'язування* учнів.

7. Знайдіть кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за час від *2* до *6 с*, якщо сила струму змінюється за законом $I(t)=(3t^2-2t+1)$ *А*.

Відповідь. 180 *Кл.*

8. Швидкість зміни концентрації речовини, що вступила в реакцію, виражається функцією $v(t)=3t+1$, де t – час (в секундах), v – швидкість (в моль/с·м^3). Як зміниться концентрація речовини за час від $t_1=0$ до $t_2=5$ с?

<u>*Вказівка.*</u> Оскільки $v(t)=C'(t)$, то $C(t)$ – концентрація речовини і первісна для $v(t)$.

Відповідь. зміниться на 42,5 *моль/м*^{3}.

9. Зміна чисельності популяції бактерій відбувається зі швидкістю $v=10^4-2\cdot10^3t$ (бактерій за годину). Обчисліть приріст популяції бактерій за проміжок часу від 1 до 4 годин.

Відповідь. 15000 бактерій.

10. Продуктивність праці бригади робітників за зміну визначається функцією $y=-0{,}0033t^2-0{,}08t+20{,}96$, де t – час (виражено у годинах). Визначте обсяг випуску продукції протягом року (за *240* робочих днів), якщо одна зміна триває *7* годин.

Відповідь. 34560 *одиниць продукції.*

Наступний набір задач відноситься до ***другого рівня складності (Б).*** Причиною тому є те, що підінтегральна функція не міститися в умовах її треба побудувати, використовуючи відомі учням формули та факти з суміжних предметів.

Б

Приклад 10. Водій автомобіля загальмував у той момент, коли швидкість автомобіля дорівнювала *36 км/год*. Знайдіть шлях, який проїде автомобіль за час від $t_1=2$ *с* до $t_2=6$ *с*, якщо при ввімкнених гальмах автомобіль рухається з прискоренням *-5 м/с*^{2}.

<u>*Вказівка.*</u> Під час розв'язування задачі використайте формулу швидкості $v=v_0+at$, де a - прискорення.

Розв'язання. Починаючи розв'язувати задачу слід перевести швидкість автомобіля 36 *км/год* в м/с: $36\frac{км}{год}=\frac{36\cdot1000}{3600}\frac{м}{с}=10\frac{м}{с}$. Тоді $v(t)=10-0{,}5t\ \left(\frac{м}{с}\right)$.

Використовуючи формулу, одержану під час розв'язування прикладної задачі 4 попереднього типу $S=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}v(t)dt$, запишемо

$$S=\int\limits_2^6(10-0{,}5t)dt=10t-\frac{t^2}{4}\Big|_2^6=60-9-20+1=32(м).$$

Відповідь. 32 *м.*

Задачі для самостійного розв'язування учнів.

11. Два тіла починають рухатись одночасно з однієї точки: одне зі швидкістю $v_1=(6t^2+4t)$ *м/с*, друге зі швидкістю $v_2=4t$ *м/с*. Через скільки секунд відстань між ними буде дорівнювати *250 м*, якщо рух відбувається вздовж прямої лінії в одному напрямку?

<u>*Вказівка.*</u> Для визначення часу t, через який відстань між тілами дорівнюватиме 250 *м,* слід скласти рівняння однією з частин якого буде різниця двох інтегралів з межами інтегрування нуль і t.

Відповідь. 5 с.

12. Реактивний літак протягом *20 с* збільшує свою швидкість від *240 км/год* до *720 км/год*. Вважаючи рух рівноприскореним, знайдіть прискорення і шлях, який пролетів літак за цей час.

<u>*Вказівка.*</u> Визначте яку швидкість у $\frac{м}{с}$ мав літак. Для розв'язання задачі використайте формулу прискорення $a=\frac{v(t)-v(0)}{t}$, де $v(t)$ - швидкість в момент часу t, $v(0)$ - початкова швидкість. З вказаної формули виразіть $v(t)$ та проінтегруйте.

Відповідь. $a = 6\frac{2}{3}\ \frac{м}{c^2}$; $S \approx 2{,}7км$.

13. Пружина розтягується на *6 см* під дією сили *19,62 Н.* Яку роботу виконує ця сила, розтягуючи пружину на *10 см*?

Вказівка. Для розв'язання задачі використайте закон Гука – сила F пропорційна розтягу або стисканню пружини, тобто $F = kx$, де x - величина розтягу або стискання, k - коефіцієнт пружності. Знайшовши функцію $F(x) = 327x$ про інтегруйте її, скориставшись формулою роботи $A = \int_a^b F(x)dx$, яка була виведена у попередньому параграфі, межі інтегрування виразіть у метрах.

Відповідь. 1,64 *Дж.*

14. Прямокутна пластинка, горизонтальна сторона якої дорівнює *1 м,* а вертикальна – *2 м,* розміщена вертикально у воді. Верхня сторона знаходиться на глибині *0,5 м.* Визначте силу тиску *F* води на пластинку.

Вказівка. Використайте формулу для визначення сили тиску F рідини на вертикально розміщену пластинку, верхній край якої занурено на глибину a а нижній на глибину b: $F = \int_a^b \rho g x y(x) dx$, $x, y(x)$ - розміри пластинки (у даному випадку x - вертикальна сторона, $y(x)$ горизонтальна).

Відповідь. $29{,}4кН$.

Розглянемо задачі на застосування поняття інтеграла, які відносяться до ***третього рівня складності (В).*** Їх розв'язання передбачає побудову математичної моделі, проведення додаткових досліджень перед інтегруванням і побудова самої моделі є дещо складнішою ніж у задачах попереднього рівня.

Розглянемо приклади таких задач.

В

Приклад 11. Газ замкнено у циліндр з рухомим поршнем (рис.2). Обчисліть роботу, яку здійснює газ при збільшенні висоти частини циліндра, яка замикає газ, від значення, що дорівнює h_1, до значення, що дорівнює h_2 (температура газу стала).

Вказівка. Для знаходження сили *F(h),* яка діє на поршень, використайте закон Бойля-Маріотта: $PV = k$, де V – об'єм газу, P – тиск, а $k = P_0V_0$ - стала величина. З цього закону $P = \frac{k}{V}$.

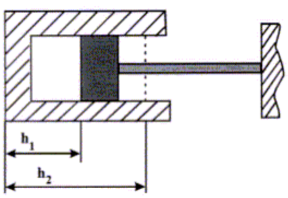

Рис. 2

Розв'язання. Нехай радіус циліндра дорівнює r, а висота циліндра - h. Тоді його об'єм $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Для знаходження сили $F(h)$, яка діє на поршень і дорівнює PS, використаємо закон Бойля-Маріотта. Отже, будемо мати $F(h) = PS = \frac{k}{V} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{k}{\pi r^2 h} \cdot \pi r^2 = \frac{k}{h}$.

Залишилось скористатись формулою роботи змінної сили $A = \int_a^b F(x)dx$.

Маємо $A = \int_{h_1}^{h_2} \frac{k}{h} dh = k\int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h} = k \ln h \Big|_{h_1}^{h_2} = k \ln \frac{h_2}{h_1}$.

Відповідь. $A = k \ln \frac{h_2}{h_1}$.

Приклад 12. При розтягуванні пружини на *5 см* затрачена робота в *29,43 Дж*. На скільки розтягнеться пружина, якщо затратити роботу в *9,81 Дж*?

Розв'язання. Для розв'язування задачі формулу роботи $A = \int_a^b F(x)dx$ потрібно використати двічі.

1) $A_1 = 29{,}43 = \int_0^{0{,}05} kxdx = \frac{kx^2}{2}\Big|_0^{0{,}05} = \frac{k \cdot 0{,}0025}{2}$. Звідки обчислюють, що $k = 23544$. Отже, $F(x) = 23544x$.

2) $A_2 = 9{,}81 = \int_0^{x_2} 23544xdx = 23544\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_2} = 11772x_2^2$. Звідси $x_2^2 \approx 8{,}3 \cdot 10^{-4}$, $x_2 > 0$.

Отже, маємо

$x_2 \approx 0{,}029(м) \approx 2{,}9(см)$

Відповідь. $2{,}9 см$.

Пронуємо наступні задачі для *самостійного розв'язування* учнів.

B

15. Пластинку у формі трикутника *ABC* занурено вертикально в бак з бензином так, що його основа розміщена горизонтально, а вершина лежить на поверхні рідини. Обчисліть силу тиску *F* бензину на трикутну пластинку, якщо її основа *AC=0,1м*, висота *h=0,08 м*, густина бензину $\rho=700$ *кг/м*^{3}.

Вказівка. Під час розв'язування задачі використайте формулу $F = \int_a^b \rho gxy(x)dx$, яка була виведена в попередньому параграфі, де ρ - густина рідини, $x, y(x)$ - розміри пластинки (у даному випадку x - вертикальна сторона, $y(x)$ горизонтальна).

Для визначення залежності *y(x)* розгляньте подібні трикутники, вершина *B* у яких спільна, а основи паралельні. Одержите пропорцію $\frac{y(x)}{0{,}1} = \frac{x}{0{,}08}$.

Відповідь. 1,46 *Н*.

16. Визначте силу тиску води на дамбу, що має форму трапеції, нижня основа якої дорівнює *16 м*, верхня – *20 м*, висота – *5 м*, якщо вода доходить до верху дамби.

Вказівка. Для визначення залежності *y(x)* скористайтесь тим, що площа трапеції дорівнює сумі площ її частин.

Відповідь. 2 *МН*.

5. Задачі практичного змісту на застосування інтеграла до обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл обертання.

Задачі на застосування інтеграла до обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл обертання, також відносяться до трьох рівнів складності. Розпочнемо з розгляду задач ***першого рівня складності (А)***, під час розв'язування яких безпосередньо використовуються відомі формули площі плоскої фігури та об'єму тіла обертання. Межі інтегрування в цих задачах або відомі або їх нескладно знайти.

17. На рисунку 3 зображено графік швидкості *v* тіла, яке рухається прямолінійно. Користуючись графіком, визначте шлях, який пройшло тіло за час від *t=1 с* до *t=6 с*.

Відповідь. 20 *м*.

18. На рисунку 4 зображено графік прискорення *a* тіла, що рухається вздовж прямої. Користуючись графіком, визначте значення швидкості *v=v(t)* в момент часу *t=4 с*, якщо *v(0)=2 м/с*.

Відповідь. 11 *м/с*.

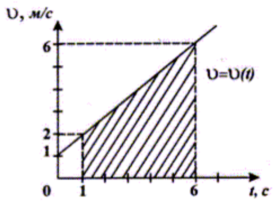

Рис. 3

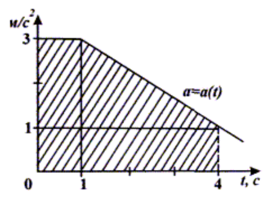

Рис.4

Розглянемо задачі ***другого рівня складності (Б).*** Це задачі в яких знаходження площі чи об'єму геометричної моделі дещо складніше ніж у попередніх задачах.

Б

Приклад 13. На рисунку 5 зображена башта конденсатора, висота якої $H=48$ *м*. Обчисліть об'єм башти двома способами: 1) як об'єм тіла обертання, утвореного поворотом навколо осі Ox заштрихованої області S площини (рис. 6), яка обмежена графіками функцій $f(x)=12\sqrt{1+\dfrac{x^2}{12^2}}$, $x=-36$, $x=12$ і віссю Ox; 2) використовуючи трьохрівневу формулу: $V=\dfrac{H}{6}\left(B_1+B_2+4B_3\right)$, де H – висота конденсатора; B_1, B_2, B_3 – площі основи, верхнього отвору і серединного перерізу конденсатора. Порівняйте одержані результати.

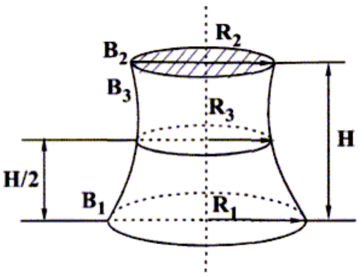

Рис. 5

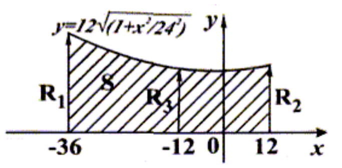

Рис. 6

Розв'язання. 1) Оскільки функція $f(x)=12\sqrt{1+\dfrac{x^2}{24^2}}$ диференційована та додатна на відрізку $[-36;12]$ і S – множина точок $M(x;y)$ площини, для яких $-36\le x\le 12$ і $0\le y\le f(x)$, то об'єм V тіла обертання утвореного поворотом S навколо осі Ox, визначається за формулою

$$V=\pi\int_{-36}^{12} f^2(x)dx=\pi\int_{-36}^{12}144\left(1+\frac{x^2}{24^2}\right)dx=$$

$$=144\pi\left(x+\frac{1}{24^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-36}^{12}=144\pi\left(x+\frac{x^3}{1728}\right)\Bigg|_{-36}^{12}=144\pi\cdot 76=$$

$$=10944\pi\approx 34382\,(м^3).$$

Обчислюючи об'єм башти другим способом, за допомогою трьохрівневої формули, учні одержать той самий результат, але при цьому їм доведеться виконати значно більше обчислень (обчислення радіусів R_1, R_2, R_3 та площ B_1, B_2, B_3 основи, верхнього отвору і серединного перерізу конденсатора).

Відповідь. 34382 $м^3$.

Розгляд задач такого типу демонструє перевагу методу інтегрального числення над іншими математичними методами, що застосовуються при розв'язуванні практичних технічних проблем.

У задачах ***третього рівня складності (В)*** побудова математичної моделі потребує застосування більш ґрунтовних знань з курсу алгебри і початків аналізу. Приклади таких задач та задач вище розглянутих рівнів запропоновані у посібниках [10], [12] та статті [14].

Побудована таким чином система прикладних задач, як показує досвід її використання, сприяє реалізації прикладної спрямованості навчання змістової лінії

”Інтеграл та його застосування” під час навчання курсу алгебри і початків аналізу старшої школи.

Література

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011.-480 с.
2. Бевз Г.П. Алгебра (алгебра і початки аналізу):підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова – К.: Освіта, 2011.-400 с.
3. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.-331 с.
4. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч./ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.- Ч. 2.-272 с.
5. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна.-Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.6-27.
6. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.28-51.
7. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.52-83.
8. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики).// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.84-121.
9. Нелін Є.П. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011.-448 с.
10. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. -Чернігів:Сіверянська думка,2002.-128с.
11. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. –Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.-128с.
12. Соколенко Л.О. Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу: Навч.-метод. посібник для вчителів і учнів 10-11 кл. середн. шк., ліцеїв та гімназій фізико-математичного спрямування. – Київ: ”Тираж”, 1997.-127с.
13. Соколенко Л.О. Прикладні аспекти математики: інтеграл та його застосування в класах природничого профілю // Вісник ЧДПУ імені Т.Г. Шевченка. Серія: Педагогічні науки,-2006, Вип. 42, -С. 74-77.
14. Соколенко Л.О. Про підготовку вчителів до навчання математики в старшій профільній школі // Вісник ЧНУ імені Богдана Хмельницького. Серія: Педагогічні науки, -2010, Вип. 191, Ч.1, -С.111-121.
15. Соколенко Л.О., Швець В.О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу // Математика в рідній школі, - 2014, №9, - С.2-10.
16. Ткач Ю.М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці: Навчально-методичний посібник / Ю.М. Ткач. – Х.: Вид-во ”Ранок”, 2011.-176с.
17. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. -К.: Зодіак-ЕКО, 2002.-384 с.