ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО ТА НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Лілія СОКОЛЕНКО – доцент кафедри педагогіки, психології та методик навчання фізики й математики ЧНПУ імені Т.Г. Шевченка, кандидат педагогічних наук, доцент

Василь ШВЕЦЬ – завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М.П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук, професор.

Анотація. Дана стаття є продовженням статті ”Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу”. В ній розглянуті прикладні задачі на застосування похідної з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції та прикладні задачі на застосування похідної до дослідження функцій за загальною схемою та методика навчання учнів їх розв’язування.

Ключові слова: прикладна задача, застосування похідної, найбільше і найменше значення функції, загальна схема дослідження функції.

Лилия Соколенко. Василий Швец.

Прикладные задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в курсе алгебры и начал анализа.

Аннотация. Даная статья является продолжением статьи ”Разные типы прикладных задач, предназначенных для изучения производной и её применений в курсе алгебры и начал анализа”. В ней рассмотрены прикладные задачи на применение производной с целью нахождения наибольшего и наименьшего значений функции и прикладные задачи на применение производной к исследованию функции по общей схеме и методика обучения учащихся их решения.

Ключевые слова: прикладная задача, применения производной, наибольшее и наименьшее значения функции, общая схема исследования функции.

Liliy Sokolenko, Vasyl Shwets.

Applied sums on finding the largest and smallest values of the function in the algebra and principles of analysis course.

Summary. The article is a continuation to the article “Different kinds of “**Applied problems** on studying the derivative and its application in the algebra and principles of analysis course”.
Applied sums on applying the derivative for finding the largest and smallest values of the function, applied sums on applying the derivative for studying functions according to the general scheme and methods of teaching pupils were studied in the article.

Keywords: Applied sums, application of the derivative, largest and smallest values of the function, general scheme of studying a function**.**

У статті ”Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри основної школи”[16] представлена класифікація прикладних задач та розглянуті задачі практичного змісту, що приводять до поняття похідної; прикладні задачі, в розв’язуванні яких поняття похідної відіграє першорядну роль та окремі ***типи прикладних задач на застосування похідної*,** зокрема, з метою *дослідження функції на монотонність та екстремум*.

Дана стаття є продовженням згаданої. В ній ми приділимо увагу іншим типам прикладних задач на застосування похідної, а саме прикладним задачам *на знаходження найбільшого і найменшого значень функції* та прикладним задачам *на застосування похідної до дослідження функції за загальною схемою* на основі якого будується її графік.

Діючими навчальними програмами з курсу алгебри і початків аналізу всіх рівнів [8]-[11] в темі ”Похідна та її застосування” передбачено навчання учнів розв’язування прикладних задач на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

У навчально-методичній літературі можна зустріти різні синонімічні назви до ”задач на знаходження найбільшого та найменшого значень”, їх називають ”екстремальні задачі” [2], ”задачі на екстремуми” [3], ”задачі на максимум і мінімум” [12], ”задачі оптимізації” [5].

Задачі на знаходження найбільшого і найменшого значень розв’язуються елементарними прийомами, використовуючи лише факти елементарної математики, та загальним методом – *методом диференціального числення*.

Метод диференціального числення застосовується у випадку, коли цільову функцію f вдається отримати у вигляді явної формули типу $y = f(x)$ і при цьому функція f задовольняє певні додаткові умови, а саме : 1) функція f визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$; 2) функція f диференційована (має похідну) в інтервалі $(a;b)$, за винятком можливо, скінченного числа точок; 3) функція f має скінченне число точок в яких похідна дорівнює нулю (якщо такі точки існують).

Якщо всі ці умови виконуються, то щоб **знайти найбільше і найменше значення функції** f, неперервної на відрізку, яка має на цьому відрізку скінченне число критичних точок, достатньо обчислити значення функції в усіх критичних точках і на кінцях відрізка та з одержаних чисел вибрати найбільше і найменше [5].

Аналізуючи діючі шкільні підручники курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи доходимо висновку, що задачі на **знаходження найбільшого (найменшого) значень функції,** пропонуються в кожному з них, зокрема в [1], [6], [7], [13], але переважна більшість задач має геометричний та алгебраїчний зміст. Лише окремі з них відносяться до задач прикладного характеру.

Аналіз досліджень і публікацій. Окремі питання методики навчання учнів розв’язування прикладних задач на знаходження найбільшого і найменшого значень функції методом диференціального числення розглядають М. Вайнтрауб, Г. Дутка, С. Григулич, А. Парафійник, В. Стасюк, І. Стрельченко, О. Стрельченко та ін. Автори статей зосереджують увагу на задачах з економічним змістом. Проведено ряд дисертаційних досліджень, серед яких дослідження Г. Дутки, Л. Соколенко, Ю. Ткач та ін., у яких, серед інших питань, розглядаються питання методики навчання учнів розв’язування прикладних задач, призначених для вивчення застосувань похідної.

Існують навчально-методичні посібники, серед яких [2], [5], [12], [14], [15], де розглядаються задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції, що відіграє роль математичної моделі прикладної задачі.

Прикладні задачі на застосування похідної до дослідження функцій за загальною схемою з метою побудови її графіка включені до навчальних посібників [14], [15].

Мета статті. Завершити розгляд типів прикладних задач на застосування похідної, а саме, розглянути застосування похідної з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції, яка відіграє роль математичної моделі прикладної задачі, та прикладні задачі на застосування похідної до дослідження функцій за загальною схемою та методику навчання учнів їх розв’язування.

Виклад основного матеріалу. Прикладні задачі на застосування похідної з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції, яка відіграє роль математичної моделі прикладної задачі відносяться до задач двох рівнів складності (*другого рівня складності Б* та *третього рівня складності В*).

До задач ***другого рівня складності (Б)*** відносимо задачі в яких функція, яка відіграє роль математичної моделі, міститься в умові задачі або її нескладно побудувати.

У більшості названих задач *цільова функція,* яка є математичною моделлю визначена і неперервна на деякому проміжку P, скінченному чи нескінченному, має тільки один (мінімум) максимум. Отже він і є найменшим (найбільшим) значенням даної функції. Приклади таких задач були розглянуті нами у статті [16].

До задач ***третього рівня складності (В)*** відносимо задачі які потребують виконання трьох етапів математичного моделювання, або задачі розв'язування яких в середині побудованої математичної моделі потребує високого рівня математичної підготовки учнів.

Під час дослідження функції на найменше (найбільше) значення корисними бувають **такі твердження.**

1. Точка, в якій функція набуває найменшого (найбільшого) значення, не змінюється при таких перетворення виразу, що задає функцію:

а) додаванні сталого доданка;

б) множенні на відмінне від нуля число (тільки при множенні на від'ємне число найменше значення переходить у найбільше і навпаки);

в) піднесенні до степеня з натуральним показником, якщо функція невід'ємна.

2. Якщо додатна функція f набуває в деякій точці найменшого (найбільшого) значення, то функція $-f$ і $\frac{1}{f}$ набувають у цій самій точці найбільшого (найменшого) значення [5].

Розглянемо приклад прикладної задачі на знаходження найменшого значення функції, під час розв'язування якої використовують **правило** дослідження функції на найбільше та найменше значення, сформульоване вище.

В

Приклад 1. Покрівля повністю покритої спортивної зали має у поперечному перерізі арку параболи (рис. 1), вертикальна вісь якої проходить через центр зали. Точки кріплення на землі цієї арки знаходяться на відстані *40 м*. Її вершина *S* розміщена на висоті *20 м* від землі. Мають намір розділити залу на дві частини вертикальною завісою полотна *MNPQ*, яка дотикається землі і висить на горизонтальній балці *MN*. Виходячи з практичних міркувань, довжина балки може знаходитись тільки між двома екстремальними значеннями: *20 м* і *30 м*. Визначте, якої довжини повинна бути балка *MN*, щоб можна було розмістити найменш дорогу завісу.

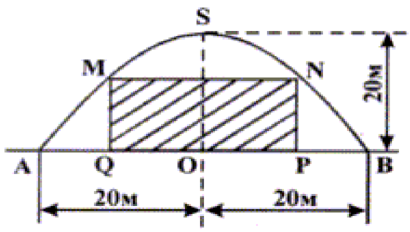


Рис. 1

Після ознайомлення учнів з умовою даної задачі доцільно обговорити з ними *алгоритм розв'язання*, який складається з таких кроків:

1) Складання рівняння параболи *(P)*, яка має вершину *S(0;20)* і проходить через точки *A(–20;0)*, *B(20;0)*. Побудова дуги *(γ)* параболи *(P)*, яка відповідає невід'ємним *y*, в прямокутній системі координат.

2) Побудова цільової функції і складання рівняння залежності площі прямокутника *MNPQ* від довжини відрізка *OP=x*, де $x \in [10;15]$.

3) Дослідження цільової функції з метою знаходження її найменшого значення.

4) Інтерпретація результату, одержаного при розв'язуванні практичної задачі всередині побудованої математичної моделі.

Володіння учнями теоретичним матеріалом на достатньому рівні не повинно викликати особливих труднощів при виконанні алгоритму.

<u>*Вказівка.*</u> Цільовою функцією даної задачі буде функція $S(x) = -\frac{1}{10}x^3 + 40x$, визначена на відрізку [10;15].

Відповідь. найменш дорогу завісу матимемо за умови, якщо довжина балки дорівнюватиме 30 $м$.

Особливістю цієї задачі є те, що під час її розв'язування в середині побудованої математичної моделі знаходять стаціонарну точку, яка виявляється *точкою максимуму,* а розв’язування задачі передбачає знаходження *найменшого значення.* Знайти це найменше значення цільової функції на вказаному відрізку, яким виявиться значення цільової функції у правому кінці відрізка, допоможе саме зазначене вище **правило**.

Отже, використання такої задачі, під час вивчення теми, мотивує необхідність засвоєння *правила заходження найменшого (найбільшого) значення функції визначеної на відрізку.*

Слід зазначити, що в окремих випадках, які визначаються властивостями цільової функції, досліджувати її на найбільше (найменше) значення можна не за вище сформульованим правилом, а на основі таких теорем.

Теорема 1 [5]**.** Якщо функція f, що визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, має тільки один мінімум (максимум), то він і є найменшим (найбільшим) значенням даної функції.

Теорема 2 [5]. Якщо функція f, що визначена і неперервна на деякому проміжку P, скінченному чи нескінченному, має тільки один мінімум (максимум), то він є найменшим (найбільшим) значенням даної функції.

Розглянуті теореми особливо зручні для користування у випадках, коли дослідження функції на мінімум (максимум) проводиться простіше, ніж обчислення і порівняння її значень в окремих точках (наприклад, якщо до виразу, що визначає цю функцію, входять буквені сталі).

Дуже часто математичною моделлю прикладної *задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значень функції* є геометрична фігура. Систематизуємо задачі за видами геометричних моделей, розглянувши задачі з однотипними моделями, але різні за змістом і рівнями складності, щодо побудови математичної моделі і відносно розв'язування прикладної задачі всередині побудованої моделі. При цьому використаємо задачі, фабула яких дещо відрізняється від фабули прикладних задач даного типу, що зустрічаються в діючих шкільних підручниках.

Розпочнемо з прикладних задач, *геометричною моделлю яких є прямокутник*. Розв'язування цих задач, як правило, зводиться до виявлення співвідношення між довжинами сторін прямокутника, яке використовується при створенні цільової функції. До цього виду задач відносяться і дещо складніші задачі, в яких прямокутник поділений відрізками прямих, паралельними до його сторін, на декілька частин. Сформулюємо приклади задач даного виду та запропонуємо методику навчання учнів їх розв’язування.

В

Приклад 2. Для будівництва будинку прямокутної форми, зображеного на плані (рис.2) темним прямокутником, з площею *400 м*^{2} відведено ділянку у вигляді прямокутника, межі якої повинні знаходитись від будинку на відстані *36* і *16 м.* Які розміри потрібно надати будинку, щоб площа ділянки *ABCD* була найменшою?

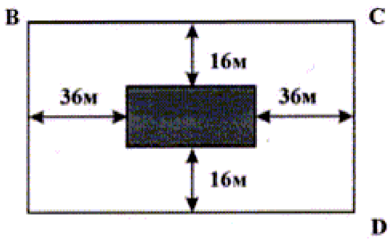


Рис. 2

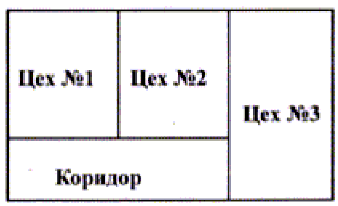


Рис. 3

Розв’язання. В задачі необхідно визначити довжину і ширину прямокутника, що має площу $400 м^2$, який розташований в середині площини прямокутника $ABCD$, так що площа прямокутника $ABCD$ буде найменшою. Сторони прямокутників взаємно паралельні і відстоять одна від іншої на $16 м$ і $36 м$ відповідно.

Позначимо довжину прямокутника x, а ширину - y. Його площа $xy = 400$, звідки $y = \frac{400}{x}$. Площа прямокутника $ABCD$ дорівнює $(72 + x)(32 + y) = (72 + x)\left(32 + \frac{400}{x}\right)$.

Отже, маємо *цільову функцію* $S(x) = (72 + x)\left(32 + \frac{400}{x}\right)$, де $x > 0$. Дослідимо її на найменше значення. Знайшовши похідну функції S і розв'язавши рівняння $32 - \frac{28800}{x^2} = 0$, з'ясуємо, що дана функція, яка визначена на множині додатних чисел, має єдину критичну точку $x = 30$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з "-" на "+", то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці, робимо висновок, що точка $x = 30$ є точкою мінімуму функції S.

Виходячи з єдності такої точки на інтервалі $(0;+\infty)$, можемо стверджувати, що в ній функція $S(x)$ набуває найменшого значення: $S(30) \approx 4620$.

Отже, для того щоб площа ділянки була найменшою, будинок повинен мати розміри $30м \times 13\frac{1}{3}м$.

Відповідь. $30м \times 13\frac{1}{3}м$.

Пропонуємо наступну прикладну задачу, геометричною моделлю яких є прямокутник, для *самостійного розв'язування*.

В

1. Довжина всіх стін промислової будівлі (рис. 3), включаючи перегородки (капітальні), складає *90 м*. У будівлі розміщуються три цехи (№1, №2, №3) і коридор, довжина якого в *5* разів більша, ніж ширина. Ширина цеху №3 відноситься до довжини коридору, як *3:5*. Які повинні бути вибрані розміри будівлі, щоб сума площ трьох цехів була найбільшою?

Вказівка. Позначте ширину коридору x, тоді його довжина - $5x$, а довжина цеха №3 - $3x$. Ширину цеха №3 позначте y. Визначте суму довжин стін промислової будівлі, включаючи перегородки (капітальні). Врахуйте, що сума площ трьох цехів дорівнює різниці площі всієї будівлі і площі коридору.

В результаті одержите цільову функцію $S(x) = 180x - 45x^2$, де $x > 0$.

Відповідь. $16м \times 12{,}5м$.

У багатьох прикладних задачах *роль математичної моделі відіграють трикутники*. Задачі цього виду також бувають різних рівнів складності. Включаючи їх у процес навчання, слід правильно установити послідовність задач за принципом "від простого до складного" з урахуванням індивідуальних особливостей і можливостей учнів. Необхідно дотримуватися розумної різноманітності задач у системі.

Пропонуємо декілька задач названого типу.

В

Приклад 3. Чотири населених пункти, розташовані у вершинах квадрата $ABCD$ (рис. 4), з'єднані системою доріг. При якому x сумарна довжина доріг мінімальна, якщо сторона квадрата дорівнює *20 км*?

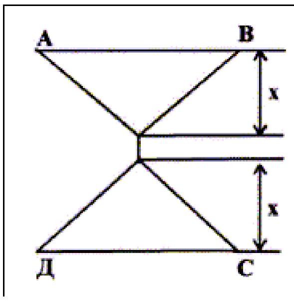


Рис. 4

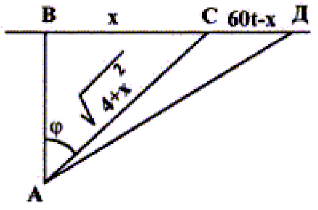


Рис. 5

Розв'язання. Проаналізувавши рисунок 4 з'ясовуємо, що система доріг складається з 4-х однакових ділянок, довжиною $\sqrt{100+x^2}$ $км$, та п'ятої ділянки, довжиною $(20-2x)\,км$

Отже, *цільова функція*, що визначає сумарну довжину доріг $S(x)=4\sqrt{100+x^2}+20-2x$, де $x\in[0;10]$.

Дослідимо її на найменше значення. Знайшовши похідну функції S та виконавши необхідні тотожні перетворення, будемо мати $S^{'}(x)=\dfrac{4x-2\sqrt{100+x^2}}{\sqrt{100+x^2}}$. Розв'язавши рівняння $4x-2\sqrt{100+x^2}=0$, з'ясовуємо, що дана функція, яка визначена на множині додатних чисел, має єдину критичну точку $x=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з "-" на "+", то на основі достатньої умови існування екстремуму в точці, робимо висновок, що точка $x=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ є точкою мінімуму функції S.

Виходячи з єдності такої точки на відрізку $[0;10]$, можемо стверджувати, що в ній функція $S(x)$ набуває найменшого значення.

Відповідь. при $x=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ сумарна довжина доріг є мінімальною.

Приклад 4. Вантажівка, яка на початку руху знаходиться в точці *B* (рис.5) і прямує до пункту *Д* по шосе зі швидкістю *60 км/год,* порушує правила дорожнього руху. На початку руху полем патрульний мотоцикл, який знаходиться в пункті *A,* що за *2 км* від шосе, може розвивати швидкість до *40 км/год*. А на шосе швидкість мотоцикла складає *80км/год*. Під яким кутом φ до напрямку *AB* слід виїхати патрульному мотоциклу, щоб якомога швидше наздогнати вантажівку? За який мінімальний час патруль наздожене порушника?

Розв'язання. Геометричною моделлю даної задачі є прямокутний трикутник ABD, в якому A - точка за $2км$ від шосе, в якій знаходиться патруль, B - точка з якої виїжджає вантажівка, C - точка в яку повинен потрапити патрульний мотоцикл, щоб якомога скоріше наздогнати вантажівку, D - точка на шосе в якій мотоцикл наздожене вантажівку.

Нехай ця подія відбудеться через t годин. За цей час порушник проїде відстань $60t\ \ км$, а патруль $AC+CD=\left(\sqrt{4+x^2}+(60t-x)\right)\ км$, де C - точка на шосе, $BC=x$.

Оскільки на проміжку AC швидкість патрульного мотоцикла $40\,км/год$, а на проміжку CD - $80\,км/год$, то на весь шлях він витратить $\left(\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{40}+\dfrac{60t-x}{80}\right)$ годин, що дорівнює часу t.

Отже, маємо $t=\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{40}+\dfrac{60t-x}{80}$, звідки $t=\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{10}-\dfrac{x}{20}$. Тобто *цільовою функцією* даної задачі є функція $t(x)=\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{10}-\dfrac{x}{20}$, де $x>0$.

Дослідимо її на найменше значення. Знайшовши похідну функції $t(x)$ та виконавши необхідні тотожні перетворення, будемо мати $t^{'}(x)=\dfrac{x}{10\sqrt{4+x^2}}-\dfrac{1}{20}$.

Розв'язавши рівняння $\dfrac{x}{10\sqrt{4+x^2}}-\dfrac{1}{20}=0$, з'ясовуємо, що дана функція, яка визначена на множині додатних чисел, має єдину критичну точку $x_0=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Оскільки друга похідна $t^{''}(x)=\dfrac{2}{5\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ додатна, зокрема і в точці $x_0=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, то на основі достатньої ознаки екстремуму функції (в термінах другої похідної) можна стверджувати, що точка $x_0=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ є *точкою мінімуму* функції $t(x)$ на проміжку $(0;+\infty)$, то в ній функція $t(x)$ набуває найменшого значення $t\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{10}\approx 0{,}17(\textit{год})\approx 10{,}2(\textit{хв})$.

З прямокутного трикутника ABC маємо: $tg\varphi=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Звідси $\varphi=\dfrac{\pi}{6}=30^0$.

Отже, якщо патрульний мотоцикл виїде під кутом 30^0 до напряму AB, то він наздожене порушника за найкоротший час, що дорівнює 10,2 *хв*.

Відповідь. $\varphi=30^0$, $t=\dfrac{\sqrt{3}}{10}\approx 0{,}17(\textit{год})\approx 10{,}2(\textit{хв})$.

Серед прикладних задач, геометричною моделлю яких є трикутники, існують такі, які утворюють їх певну серію, кожна наступна задача з цієї серії є поступовим ускладненням попередньої.

Пропонуємо серію таких задач для *самостійного розв'язування.*

B

2. Село *C* розташоване за *50 км* від райцентру *A* і за *30* км від магістралі, що проходить через райцентр (рис. 6). Під яким кутом до магістралі слід провести під'їзну колію з *C*, щоб вартість перевезення вантажу з *C* в *A* і з *A* в *C* була найменшою, якщо відомо, що вартість перевезення по магістралі вдвічі менша, ніж по під'їзній колії?

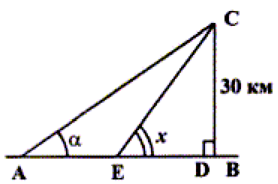


Рис. 6

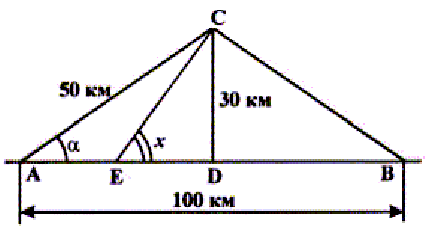


Рис. 7

<u>*Вказівка.*</u> Нехай p - вартість перевезення 1 тони вантажу на $1\,км$ по магістралі, тоді $2p$ - вартість перевезення 1 тони вантажу на $1\,км$ по під'їзній колії. $T(x)$ - вартість перевезення вантажу з C в A та у протилежному напрямі, $T(x)=pAE+2pCE$.

Для визначення CE розгляньте прямокутний трикутник CDE, $AE=AD-ED$.

Цільовою функцією даної задачі є функція $T(x)=p\left(40-30ctgx+\dfrac{60}{\sin x}\right)$, де

$\arcsin\frac{3}{5} < x < \frac{\pi}{2}$.

Відповідь. під'їзну колію слід провести до магістралі під кутом 60^0.

3. Визначте, яким повинен бути кут примикання під'їзного шляху *CE* до магістралі *AB*, щоб сумарний річний пробіг автомобілів з *C* в *A* і *B* був найменшим, якщо відомо, що рух між *C* і *A* буде вдвічі інтенсивнішим, ніж між *C* і *B*, а *AB=100 км*, *AC=50 км*, *CD=30 км* (рис.7).

Вказівка. Нехай m - кількість рейсів, які плануються в середньому протягом року з C в B. Тоді *сумарний річний пробіг автотранспорту* з C в A і B можна підрахувати за формулою $S(x) = 2m(AE + EC) + m(BE + EC) = m(3EC + AE + AB)$.

З цієї формули видно, що точку примикання під'їзного шляху E не доцільно обирати правіше ніж D, тому що в цьому випадку $AE > AD$ і значення S буде більшим ніж при $E = D$. Отже $x \in \left[\alpha; \frac{\pi}{2}\right]$.

Цільовою функцією даної задачі є функція $S(x) = m\left(\frac{90}{\sin x} - 30ctgx + 140\right)$, де $x \in \left[\alpha; \frac{\pi}{2}\right]$.

Відповідь. сумарний річний пробіг автомобілів з A в B і з B в A буде найменшим якщо кут примикання під'їзного шляху $x = \arccos\frac{1}{3} \approx 70^0$.

4. Знайдіть оптимальний кут примикання в ситуації попередньої задачі, змінивши лише відстань між *A* і *C* з *50 км* на *31 км*.

Вказівка. Див. попередню задачу, при цьому врахуйте, що в даному випадку рівняння $S'(x) = 0$ не має розв'язків. $S'(x) > 0$ на відрізку $\left[\alpha; \frac{\pi}{2}\right]$ і тому $S(x)$ на цьому відрізку зростає.

Відповідь. під'їзний шлях слід підвести прямо в пункт A.

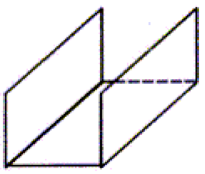
Головна ідея, яка проходить через всю серію задач, міститься в першій задачі. В наступних задачах вона певним чином поступово ускладнюється. Зрозумівши принцип розв'язання першої задачі, учні зможуть без особливих труднощів розв'язати другу. Третя задача розрахована на сильних учнів, які досконало володіють теоретичним матеріалом даного розділу.

Крім прямокутників і трикутників в ролі геометричних моделей прикладних задач на знаходження найбільшого (найменшого) значень функції, ще зустрічаються *трапеція*, різноманітні *стереометричні фігури*, їх *частини і комбінації*. Серед цих задач є задачі подібні, в певному розумінні, але переважна більшість з них вимагає під час розв'язування індивідуального підходу.

Пропонуємо деякі з таких задач.

В

5. Проектують зрошувальний канал з поперечним перерізом *4,5 $м^2$* (рис. 8). Якими повинні бути розміри перерізу, щоб для облицювання стінок і дна пішла найменша кількість матеріалу? Яку найменшу кількість матеріалу потрібно використати для облицювання *1 км* каналу?



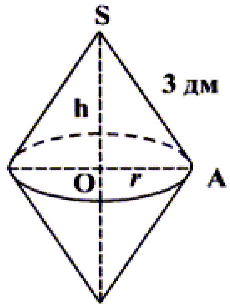


Рис. 8 Рис. 9

Вказівка. Функція $S(x)=a\left(\frac{4,5}{x}+2x\right)$, де x $(x>0)$ - висота частини прямокутного паралелепіпеда, a - його довжина (стале додатне число), S - площа повної поверхні частини даної фігури, є *цільовою функцією* даної задачі.

Відповідь. $3м\times1,5м$; $6000м^2$.

6. Рятувальний буй, який має форму подвійного конуса, конструюють з допомогою двох кругових секторів радіуса *3 дм* металевої площини (рис. 9). Якими повинні бути радіус *r* основи конуса і його висота *h*, щоб об'єм буя був найбільшим?

Вказівка. Функція $V(h)=\frac{2}{3}\pi\left(9h-h^3\right)$, $h\in(0;3)$, де h - висота конуса, V - об'єм буя, є *цільовою функцією* даної задачі.

Відповідь. $h=\sqrt{3}\approx1,73дм$, $r=\sqrt{6}\approx2,45дм.$.

Під час *дослідження функцій за загальною схемою* з метою побудови їх графіків слід розглянути з учнями декілька прикладних задач. Це внесе елемент зацікавленості у навчальний процес і активізує пізнавальну діяльність учнів. Пропонуємо приклади таких задач.

В

7. Конструкторське бюро виконує підвісний проект. На рисунку 10 представлений переріз місцевості і вибрана система координат. Припускають, що всі канати, натягнуті між точками *O(0;0)* і *A(2;1)*, прийняли положення рівноваги, яке співпадає на відрізку *[0;2]* з графіком функції $f(x)=b(e^{x-a}+e^{-x+a})+C$, де *a*, *b*, *C* – дійсні числа. Крім цього, припускають, що дотична в точці *O* до графіка *f(x)* горизонтальна. 1) Знайдіть точні значення чисел *a*, *b*, *C*. 2) Дослідіть функцію *f(x)*, визначену на відрізку *[0;2]*, і побудуйте її графік. 3) Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції *f(x)* в точці *A*. Побудуйте її графік у вибраній системі координат.

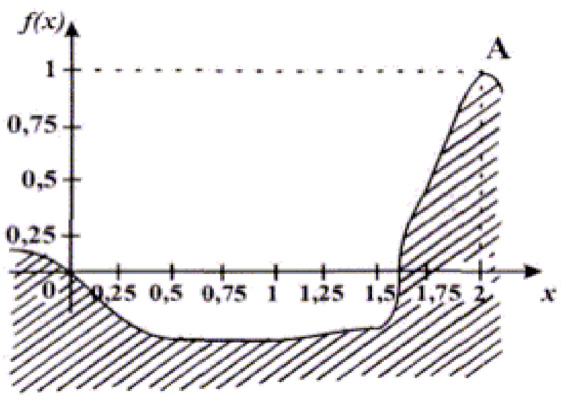


Рис. 10

Вказівка. Числа a,b,C є розв'язком системи трьох рівнянь
$$\begin{cases} b\left(\frac{1}{e^a}+e^a\right)+C=0;\\ b\left(\frac{e^2}{e^a}+\frac{e^a}{e^2}\right)+C=1;\\ b\left(\frac{1}{e^a}-e^a\right)=0.\end{cases}$$

Відповідь. 1) $a=0$, $b=\frac{e^2}{\left(e^2-1\right)^2}$, $C=\frac{-2e^2}{\left(e^2-1\right)^2}$;

2) функція $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}-2}{e^2+e^{-2}-2}$ зростає на відрізку $[0;2]$;

3) $y=1,313x-1,626.$

Б

8. Концентрація сахарози (виражена в моль/л) в момент часу t (час виражено в хв) задається формулою $f(t)=e^{-0{,}0035t}$, де $t\geq 0$. Дослідіть функцію $f(t)$ і побудуйте її графік в прямокутній системі координат, вибравши такі одиниці вимірювань: 1 см для 20 хв на осі абсцис, 1 см для 0,1 моль/л на осі ординат. Визначте час, необхідний для того, щоб концентрація досягла половини свого початкового значення. Підтвердіть результат графічно.

Відповідь. 1316 хв $\approx 21{,}9$ *год*.

9. Кількість хворих $p(t)$ під час епідемії грипу змінювалась з часом t (вимірюється днями) від початку вакцинації населення за законом $p(t)=\dfrac{200t}{t^2+100}$. Визначте час максимуму захворювання, інтервали його зростання і спадання та побудуйте графік заданої функції.

Відповідь. $t=10$ днів.

10. З допомогою графіків зобразіть процеси зменшення маси (чи концентрації) лікарського препарату в організмі за рахунок виведення його природним шляхом, якщо його кількість у крові хворого (виражена у відповідних одиницях) після t годин складає: а) $C(t)=\dfrac{100}{1+t^2}$; б) $C(t)=100+100e^{-t}$.

11. З допомогою графіків зобразіть процеси неперервного зростання чисельності популяції з нульового моменту часу, задані за допомогою таких функцій: а) $P(t)=90+10t^2$; б) $P(t)=10e^{\frac{t}{10}}$.

12. Побудувати графік залежності швидкості поширення *S* телеграфного сигналу від товщини покриваючої частини кабелю *t* на відрізку *[0,05;1]*, якщо радіус жили кабелю $r=\dfrac{1}{20}$. Як товщина покриття *t* впливає на швидкість сигналу $S(t)=\left(\dfrac{r}{t}\right)^2\lg\dfrac{t}{r}$?

Відповідь. $\max\limits_{[0{,}05;1]} S=S\left(\dfrac{\sqrt{e}}{20}\right)\approx S(0{,}082)\approx 0{,}080$.

Запропоновані в даній статті прикладні задачі є лише складовою системи прикладних задач, призначених для вивчення теми ”Похідна та її застосування”. З іншими задачами та методикою навчання учнів їх розв’язування можна ознайомитись за посібниками [2], [5], [12], [14], [15] та ін.

Література

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011.-480 с.
2. Беляева Э.С., Монахов В.М. Экстремальные задачи. - М.: Просвещение, 1977.-64 с.
3. Возняк Г.М., Гусев В.А. Прикладные задачи на экстремумы в курсе математики 4-8 классов: Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1985.-144с.
4. Возняк Г.М., Маланюк М.П. Взаємозв’язок теорії з практикою в процесі навчання математики: Посібник для вчителя.- К.: Рад шк., 1989.-128с.
5. Задачі оптимізації: Посібник для факультативних занять, 10-11 кл./ Л.М. Вивальнюк, О.І. Соколенко, Ю.В. Костарчук та ін. – К.: Рад. шк., 1991.-175 с.
6. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.-331 с.

7. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч./ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.- Ч. 1.- 256 с.

8. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна.-Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.6-27.

9. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.28-51.

10. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.52-83.

11. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики).// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.84-121.

12. Натансон И.П. Простейшие задачи на максимум и минимум. М.-Л.: Физматгиз, 1960.-32с.

13. Нелін Є.П. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011.-448 с.

14. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. -Чернігів:Сіверянська думка,2002.-128с.

15. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. –Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.-128с.

16. Соколенко Л.О., Швець В.О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу. // Математика в сучасній школі. – 2014, № 9, С. 2-10.