ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ, ПРИЗНАЧЕНІ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Лілія СОКОЛЕНКО – доцент кафедри педагогіки, психології та методик навчання фізики й математики ЧНПУ імені Т.Г. Шевченка, кандидат педагогічних наук, доцент
Василь Швець – завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М.П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук, професор.

Анотація. Обгрунтована можливість використання прикладних задач під час вивчення логарифмічної функції, виділені типи прикладних задач та розкрита їх роль для засвоєння учнями властивостей логарифмічної функції, усвідомлення її застосувань, що вивчаються в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи.
Ключові слова: логарифмічна функція, типи прикладних задач, старша профільна школа.
Лилия Соколенко, Василий Швец.
Прикладные задачи, предназначенные для изучения логарифмической функции в курсе алгебры и начал анализа.
Аннотация. Обоснована возможность использования прикладных задач во время изучения логарифмической функции, выделены типы прикладных задач и раскрыта их роль для усвоения учащимися свойств логарифмической функции, понимания её применений, которые изучаются в курсе алгебры и начал анализа старшей профильной школы.
Ключевые слова: логарифмическая функция, типы прикладных задач, старшая профильная школа.
Liliy Sokolenko, Vasyl Shwets.
Applied sums assigned for the learning of logarithmic function in the course of algebra and the beginning of analysis.
Summary. Substantiated possibility of using applied sums during the learning of logarithmic function, the types of applied sums are identified and their role in learning the properties of logarithmic functions by pupils and awareness of its using in the course of algebra and the beginning of analysis in high profile school is determined.
Key words: logarithmic function, types of applied sums, high profile school.

Значна частина математичних понять та теорій має своїм первинним джерелом реальні явища і процеси. Поняття ”логарифм” та ”логарифмічна функція” не є виключенням. Термін ”логарифм” був запропонований шотландським математиком Джоном Непером (1550-1617 р.р.) на початку 17 століття. Логарифми відігравали роль засобу спрощення розрахунків. Вони швидко почали застосовуватися вченими та інженерами для пришвидшення виконання обчислень. При цьому використовувались логарифмічні лінійки та таблиці логарифмів. Перші таблиці логарифмів були складені швейцарським математиком Бюргі (1552-1623 р.р.). Термін ”натуральний логарифм” був запропонований німецьким математиком Меркатору (1620-1687 р.р.).

Під час розв’язування різноманітних прикладних задач, серед яких задачі про зміну чисельності народонаселення, про розпад радіоактивної речовини та інші, доводиться розв’язувати рівняння $a^x = N$, де a і N - деякі числа, причому $a > 0, a \neq 1$. Саме ці ситуації і мотивують введення поняття *логарифма.*

Відповідність, яка існує між кожним додатним числом x і певним значенням його логарифма $\log_a x$, $(a > 0, a \neq 1)$, приводить до поняття *логарифмічної функції*, визначеної на множині всіх додатних чисел.

Логарифмічна функція є однією з функцій, які вивчаються в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи. Нині діючими навчальними програмами з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів [6] – [9] усіх рівнів передбачено навчання учнів застосування її до опису реальних процесів.

Аналізуючи діючі шкільні підручники з курсу алгебри і початків аналізу 11 класу старшої профільної школи, доходимо до висновку, що у підручниках академічного та профільного рівнів [4], [10] та у підручниках, призначених для класів з поглибленим вивченням математики [5], прикладні задачі, пов'язані з логарифмічною функцією відсутні. Окремі прикладні задачі, пов'язані з логарифмічною функцією включені до підручників [1] та [3].

Аналіз досліджень і публікацій. Питання методики включення прикладних задач та ілюстративних прикладів, призначених для вивчення логарифмічної функції та її застосувань у курс алгебри і початків аналізу розглянуті в статтях В. Ачкана, Л. Мірецької, Л. Соколенко та інших. Приклади таких задач зустрічаються в іноземній [18], [19] та вітчизняній [12], [14]-[16] навчально-методичній літературі.

Дана стаття є продовженням статті Соколенко Л.О., Швеця В.О. ”Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій у курсі алгебри і початків аналізу” [17], яка надрукована в журналі ”Математика в сучасній школі” за 2013 рік, №12.- С.32-41.

Мета статті. Розглянути окремі приклади прикладних задач різних типів та рівнів складності, призначених для вивчення властивостей та застосувань логарифмічної функції у курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи та методику навчання учнів їх розв'язування.

Виклад основного матеріалу. Як уже зазначалось [17, с.35], логарифмічну функцію використовують для визначення *величини землетрусу* $R=\lg\frac{I}{I_0}$, де R - показання шкали Ріхтера, I - інтенсивність землетрусу, I_0 - мінімальна норма інтенсивності, яка визначається підземними виверженнями. В сейсмології використовується й інша величина – *магнітуда землетрусу,* що характеризує кількість енергії, яка виділилась у вогнищі землетрусу. $M=\frac{2}{3}\left(\lg E-11{,}8\right)$, де M - магнітуда землетрусу, E - енергія землетрусу в джоулях.

У фізиці відома формула залежності *інтенсивності звуку* β від сили звуку I: $\beta=10\cdot\lg\frac{I}{I_0}$, де I_0 - сила звуку на порозі чутності (мінімальна інтенсивність, при якій людське вухо перестає сприймати звук).

Крім того логарифмічна функція використовується: 1) в медицині, для визначення *ємності легенів людини;* 2) у хімії, для визначення *водневого показника*; 3) в інформатиці, для визначення *кількості одиниць вимірювання інформації (бітів),* необхідних для збереження в комп'ютері натурального числа n [17, с.35].

У астрономії відома формула $m_1-m_2=-2{,}5\lg\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$, де m_1, m_2 - *зоряні величини* об'єктів, які характеризують блиск небесного тіла (кількість світла, що надходить від нього) з погляду земного спостерігача, L_1, L_2 - *освітленості,* що створюються ними. Чим яскравіший об'єкт, тим менша його видима зоряна величина. Дана формула дає можливість визначати лише різницю зоряних величин, але не самі величини. Щоб з її допомогою побудувати абсолютну шкалу, астрономи задають *нуль-пункт* – освітленість якій відповідає нульова зоряна величина.

Логарифмічна спіраль, рівняння якої має вигляд $\varphi=\frac{1}{k}\ln\frac{r}{C}$, зустрічається в зіркових атласах [17, с.36]. Логарифмічна спіраль є траєкторією точки, яка рухається вздовж прямої, що рівномірно обертається, віддаляючись від полюса зі швидкістю, пропорційною пройденому шляху.

Форма логарифмічної спіралі притаманна мушлі молюска (рис.1), області низького тиску, завитку вуха людини, рогам гірського барана (рис.2) і дзьобу папуг (рис.3).

Рис. 1

Рис. 2

Один з павуків, епейра, сплітаючи павутиння, закручує нитки навколо центра по логарифмічній спіралі (рис.4).

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

У гідротехніці по логарифмічній спіралі вигинають трубу (рис. 5), що підводить потік води до турбіни. Завдяки такій формі труби втрати енергії при зміні напряму течії в трубі виявляються мінімальними і напір води використовується з максимальною продуктивністю.

Розглянуті вище ілюстративні приклади та залежності можуть бути використаними під час вивчення логарифмічної функції в курсі алгебри і початків аналізу старшої профільної школи.

На нашу думку, вивчення **логарифмічної функції,** крім того, варто супроводжувати розглядом прикладних задач таких типів:

1) задач на знаходження значень логарифмічної функції, 2) задач, що приводять до поняття логарифмічного рівняння, 3) задач, математичними моделями яких є логарифмічні та показниково-логарифмічні рівняння (які розв'язуються за означенням логарифма, способом заміни, потенціюванням, логарифмуванням); 4) задач, у яких логарифми використовуються в якості обчислювального апарату.

У даній статті розглядаються прикладні задачі математичні моделі яких містять *логарифмічну функцію* та задачі, роль математичних моделей яких відіграють логарифмічні рівняння.

Ці задачі диференційовано за трьома рівнями складності *А, Б, В.*

До задач ***першого (А)*** рівня складності ми відносимо прикладні задачі, математична модель яких міститься в умові задачі, а їх розв'язування потребує виконання другого та третього етапів математичного моделювання. До того ж дослідження математичної моделі є нескладним, тобто відповідає обов'язковим результатам навчання з курсу алгебри і початків аналізу.

До задач ***другого (Б)*** рівня складності ми відносимо прикладні задачі, розв'язування яких потребує виконання трьох етапів математичного моделювання, але побудова математичної моделі не є складною, оскільки, як правило, її проводять за розглянутим попередньо зразком. До цього ж типу задач ми відносимо й задачі, математична модель яких міститься в умові задачі, але дослідження математичної моделі потребує володіння фактичним матеріалом курсу алгебри і початків аналізу на достатньому рівні.

До задач ***третього (В)*** рівня складності відносяться задачі які потребують виконання трьох етапів математичного моделювання, або задачі розв'язування яких в середині побудованої математичної моделі потребує високого рівня математичної підготовки учнів.

Розпочнемо з задач на **знаходження значень логарифмічної функції.** Ці задачі відносяться до *першого рівня складності (А).*

Приклад 1.1. Швидкість поширення телеграфного сигналу S визначається за формулою $S=\left(\frac{r}{t}\right)^2\lg\frac{t}{r}$, де r – радіус жили кабелю, t – товщина покриваючої частини кабелю. Визначити S, якщо відомо, що $r=\frac{1}{20}$, а t дорівнює: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{8}$.

Вважаючи, що радіус жили кабелю залишається сталим $r=\frac{1}{20}$, а товщина t покриття продовжує спадати, визначте її величину у випадку, коли швидкість поширення сигналу дорівнює нулю.

Відповідь. а) 0,01; б) 0,028; в) 0,064.

Розв'язання. Складемо рівняння, підставивши у формулу швидкості поширення телеграфного сигналу значення $r=\frac{1}{20}, S=0$. $\left(\frac{1}{20t}\right)^2\cdot\lg 20t=0$. Оскільки $t\neq 0$, то дане рівняння рівносильне рівнянню $\lg 20t=0$. За означенням логарифма одержуємо $20t=1$, звідки $t=\frac{1}{20}=0{,}05$.

Відповідь. 0,05.

Пропонуємо добірку задач для самостійного розв'язування.

А

1.1. Залежність температури T (в ^0C) від часу (в *хв*) в доменній печі описується функцією $T(t)=\log_2 t^2$. Чому дорівнює температура T, якщо $t=2;4;8;16$?

Відповідь. $2^0;4^0;6^0;8^0$.

1.2. У відкритих водоймах можлива висота хвилі (в *м*) визначається за формулою: $h=0{,}2\cdot\log_2 v\cdot\log_{5000} l$, де v - швидкість вітру (в $м/с$), l - довжина розгону хвилі (в $м$). Знайдіть висоту хвилі при $v=16м/с$, $l=5км$.

Відповідь. 0,8 *м*.

1.3. Яким буде відношення інтенсивності землетрусу, величина якого за шкалою Ріхтера *8* балів, до інтенсивності землетрусу, величина інтенсивності якого *5* балів?

Вказівка. Використайте формулу $R=\lg\frac{I}{I_0}$, де R - величина землетрусу (*показання шкали Ріхтера*), I - інтенсивність землетрусу, I_0 - мінімальна норма інтенсивності, яка визначається підземними виверженнями.

Відповідь. 1000:1.

1.4. Голосність β рок–музики *110 дб*. У скільки разів сила звуку I перевищує його силу I_0 на порозі чутності, коли відомо, що $\beta = 10\lg\frac{I}{I_0}$?

Відповідь. у 10^{11} раз.

1.5. Наявну в розчині кількість a іонів водню в хімії подають наближено формулою $a = 10^{-k}$ ($k \in N$). Число k називають pH-значенням розчину.

1) Виразіть pH-значення через a. 2) Обчисліть pH-значення для $a = 0{,}01$; $a = 0{,}000001$; $a = 0{,}00000000001$.

Відповідь. 1) $k = \lg\frac{1}{a}$; б) 2, 6, 11.

Слід виділити задачі економічного змісту, в яких з допомогою логарифмування виводиться *формула 7* [17, с.35] $n = \frac{\lg P - \lg C}{\lg\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)}$ (числа проміжків часу n, необхідних для того щоб початкова сума C, при певній відсотковій ставці p, досягла кінцевого значення P).

Б

Приклад 1.2. Використовуючи формулу складних відсотків, з'ясуйте через скільки років n капітал C гр. од., покладений в банк при річній нормі відсоткового нарахування $p\%$, досягне значення P гр. од.?

Розв'язання. Замінимо формулу складних відсотків $P = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ на тотожно рівну їй формулу $\frac{P}{C} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ та пролагорифмуємо останню. Матимемо $\lg\frac{P}{C} = n\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Звідси одержимо $n = \frac{\lg P - \lg C}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$.

Відповідь. $n = \frac{\lg P - \lg C}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ років.

Зауважимо, що під час обчислення за попередньою формулою n може не бути натуральним числом. В цьому випадку результат заокруглюється і відповіддю буде наближене значення з надлишком.

Пропонуємо задачі для розв'язування яких слід використати виведену у прикладі 1.2. формулу.

А

1.6. Через скільки років вкладені в банк 50000 грн., при річному відсотковому нарахуванні 8%, принесуть 5000 грн.?

Відповідь. 1,2 року.

1.7. Через скільки років капітал C, покладений в банк при річній нормі відсоткового нарахування 8%, подвоїться?

Відповідь. 9 років.

Не менш корисними у навчальному процесі є **прикладні задачі, що приводять до поняття *логарифмічного рівняння.*** Розглянемо приклад такої задачі.

А

Приклад 2.3. Визначте, скільки одиниць продукції буде вироблено при повній вартості *800 грн*, якщо повна вартість C n вироблених на фабриці продуктів виражається залежністю: $C(n)=500+100\cdot lg(n+10)$.

Відповідаючи на поставлене запитання, учні одержують рівняння $500+100\cdot\lg(n+10)=800$, якому рівносильне рівняння $lg(n+10)=3$. Аналізуючи їх, можна помітити, що змінна в цих рівняннях міститься під знаком логарифма. Такі рівняння називають *логарифмічними.*

Звідси, за означенням логарифма одержують $n+10=1000$, тому $n=990$.

Відповідь. 990 продуктів.

Під час вивчення способів розв'язування логарифмічних рівнянь(за означенням логарифма, способу заміни, потенціювання, логарифмування) варто розглянути з учнями наступні приклади **задач, математичними моделями яких є логарифмічні рівняння.**

А

За означенням логарифма.

Приклад 3.4. Величина землетрусу *R*, який відбувся *19* вересня *1985* року в Мексиці, складала за шкалою Ріхтера *7,8* бала. У скільки разів інтенсивність землетрусу *I* перевищувала мінімальну норму інтенсивності I_0, зумовлену підземними виверженнями, коли відомо, що $R=\lg\frac{I}{I_0}$?

Розв'язання. Поклавши $I=kI_0$, одержуємо рівняння $R=\lg k$, звідки $k=10^R$. За умовою задачі $R=7{,}8$, отже $k=10^{7,8}\approx 63095734$ (рази).

Відповідь. ≈ 63095734 рази.

Наступну задачу пропонуємо розв'язати самостійно.

А

3.8. При міграції лелек залежність часу польоту від відстані виражається формулою: $t=\log_S\left(S^2-2S+2\right)$, де t - час в днях, S - відстань в *км,* одиниця відстані 10 *км.* Яку відстань пролетять лелеки за перший день?

Відповідь. 20 *км.*

Заміна змінних.

Б

Приклад 3.5. Один парашутист стрибнув з літака на 3 *хв* раніше, ніж другий. Залежність часу t, в *хв,* від відстані S, в *м*, яку пролетіли парашутисти, виражається формулами: $t_1=\log_5^2 S$, $t_2=\log_{\sqrt{5}} S$. На якій відстані другий парашутист наздожене першого?

Розв'язання. За умовою задачі $t_1-t_2=3$, звідси маємо рівняння $\log_5^2 S-\log_{\sqrt{5}} S=3$. Застосовуючи властивості логарифмів, одержуємо $\left(\log_5 S\right)^2-2\cdot\log_5 S-3=0$.

Нехай $\log_5 S=t$, де $S>0$. Використовуючи заміну, одержуємо квадратне рівняння $t^2-2t-3=0$. За теоремою Вієта визначаємо його корені: $t_1=3,\ t_2=-1$.

Отже, $\log_5 S=3$ або $\log_5 S=-1$. Звідки, маємо $S=125$ або $S=\frac{1}{5}$ (сторонній корінь).

Відповідь. $125\,м$.

Потенціювання.

Розглянемо *задачу про обмін речовин,* запропоновану в американському навчально-методичному посібнику [18], перекладену нами, у свій час, на українську мову [16, с.14, №54). Математичною моделлю цієї задачі є статистичний ряд двох змінних. Під час розв'язування задачі проводиться лінійне вирівнювання множини точок статистичного ряду. Багаторічний досвід розгляду цієї задачі з учнями старших класів та студентами фізико-математичного та природничих факультетів переконує у її цікавості для учнів та студентів та у можливості мотивації поняття логарифмічна функція.

В

Приклад 3.6. [18, с.469, №40] (*Задача про обмін речовин).* Для різних ссавців і птахів, представлених у наступній таблиці 1, дані значення їх маси W в кілограмах і число споживаних ними калорій M на одиницю маси щодня. Використовуючи дані таблиці, складіть рівняння залежності між обміном речовин M і масою W.

	миша	морська свинка	курча	кіт	со-бака	лю-дина	по-рося	ко-рова	слон
W, кг	0,02	0,4	1,8	2,8	13,6	60	154	440	3311
M ,кал	159	86	55	51	35	25	21	16	12

табл. 1

Розв'язання. Для складання рівняння залежності між обміном речовин M і масою W необхідно знайти логарифми цих величин для кожного з ссавців і птахів (табл. 2).

	миша	морська свинка	курча	кіт	со-бака	лю-дина	по-рося	ко-рова	слон
$\lg W$	-1,699	-0,398	0,255	0,447	1,134	1,778	2,188	2,643	3,520
$\lg M$	2,201	1,934	1,740	1,708	1,544	1,398	1,322	1,204	1,079

табл.2

Потім побудувати в прямокутній системі координат, вибравши за одиницю вимірювання 1 см, точки з координатами $(\lg W; \lg M)$ (рис. 6).

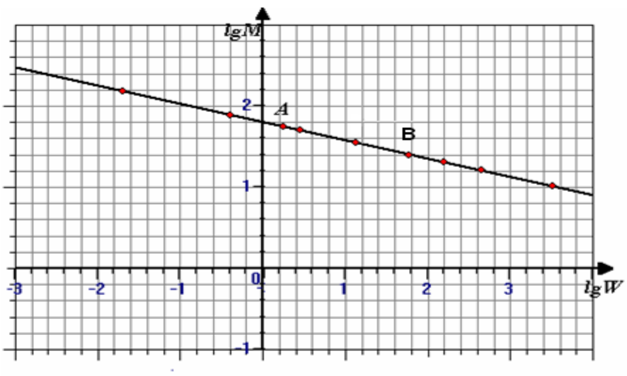

Рис.6

Отже, як бачимо, всі вони належать одній прямій. Для складання рівняння прямої необхідно розглянути дві з них, наприклад $A\,(0{,}255;\ 1{,}740)$ і $B\,(1{,}778;\ 1{,}398)$. Кутовий коефіцієнт прямої: $k = \dfrac{\Delta \lg M}{\Delta \lg W} = \dfrac{1{,}398 - 1{,}740}{1{,}778 - 0{,}255} = \dfrac{-0{,}342}{1{,}523} \approx -0{,}225.$

Пряма AB перетинає вісь ординат у точці 1,8. Отже, $b = 1{,}8 = \lg 63{,}1$. Використовуючи лінійну залежність $y = kx + b$, можемо записати: $\lg M = -0{,}225 \cdot \lg W + \lg 63{,}1$.

Таким чином, маємо **рівняння залежності між обміном речовин** M **і вагою** W**.** Визначимо M, виконавши необхідні тотожні перетворення: $0{,}225 \cdot \lg W = \lg 63{,}1 - \lg M$.

Використавши властивості степеня логарифма додатного числа і логарифма частки двох додатних чисел, одержуємо $\lg W^{0,225} = \lg \frac{63{,}1}{M}$. Звідки на основі властивості логарифмів записуємо : $W^{0,225} = \frac{63{,}1}{M}$, а тому $M = \frac{63{,}1}{W^{0,225}}$.

Відповідь. $M = \frac{63{,}1}{W^{0,225}}$ *– залежність обміну речовин M від маси W.*

Логарифмування.

В

Приклад 3.7. Нехай у деякий початковий момент часу було q одиниць деякого компонента. У наступний момент часу t кількість компоненту змінилась в p разів. Визначте через який проміжок часу (починаючи з початкового моменту) цей компонент досягне заданої кількості B одиниць.

<u>Вказівка.</u> Для розв'язання задачі використайте залежність $y = C_0 \cdot a^x$, яка описує процеси швидкого росту та згасання, де C_0 - початкова кількість компоненту, y - кількість компоненту через x одиниць часу, a - деяка стала.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі маємо, що $C_0 = q$, отже $y = q \cdot a^x$. У момент часу t кількість компоненту дорівнює qp. Одержуємо рівняння $qp = qa^t$, звідки $p = a^t$. Пролагорифмувавши останню рівність одержуємо $\lg p = t \cdot \lg a$. Звідси $a = 10^{\frac{\lg p}{t}}$.

Процес про який йдеться в задачі описується рівнянням $y = q\left(10^{\frac{\lg p}{t}}\right)^x$. Для відповіді на питання задачі слід розв'язати **показниково- логарифмічне рівняння** $B = q\left(10^{\frac{\lg p}{t}}\right)^x$. Пролагорифмувавши рівняння за основою 10, одержуємо $\lg B = \lg q + x \lg 10^{\frac{\lg p}{t}}$, яке рівносильне рівнянню $\lg B = \lg q + x\left(\frac{\lg p}{t}\right)$. Звідси маємо $x = \frac{(\lg B - \lg q) \cdot t}{\lg p}$.

Відповідь. через $\frac{(\lg B - \lg q) \cdot t}{\lg p}$ год.

Запропонуємо декілька задач для самостійного опрацювання учнів. Ці задачі можна розв'язати безпосередньо, скориставшись залежністю $y = C_0 \cdot a^x$, або використати формулу, виведеною у прикладі 7.

Б

3.9. У початковий момент часу було 8 бактерій. Через дві години після розташування їх у живильне середовище їх кількість зросла до 100. Через який час з моменту розташування бактерій у живильне середовище слід очікувати колонію у 500 бактерій?

Відповідь. 3,27 год.

3.10. Відомо, що співвідношення між воднем H^{12} та його радіоактивним ізотопом H^{14} в усіх живих організмах стале. Період піврозпаду водню H^{14} складає 5760 років.

Визначте вік останків мамонта, знайдених у вічній мерзлоті на Таймирі, якщо відносний вміст ізотопу H^{14} в них складає 26% від його кількості у живому організмі.

Вказівка. Використайте результат, одержаний у прикладі 5, де $q = m$, $t = 5760$, $p = 0{,}5$, $B = 0{,}26m$.

Відповідь. 11200 років.

3.11. Собівартість одиниці продукції дорівнювала 25000 *грн.* Після двох послідовних знижень на те саме число відсотків вона стала дорівнювати 20250 *грн.* На скільки відсотків знижувалась собівартість кожного року?

Відповідь. на 10%.

3.12. Вартість книги знижувалась двічі на одне й те ж число відсотків, в результаті чого вона стала складати 64% від початкової. На скільки відсотків знижувалась вартість книги ?

Відповідь. на 20%.

Розглянемо декілька **задач, у яких логарифми використовуються в якості обчислювального апарату.**

Операцію логарифмування можна використати під час розв'язування деяких задач, розглянутих у попередній статті [17, с.38-40], а саме, *задач, на знаходження значення аргументу за відомим значенням показникової функції, яка є в умові задачі, або формула якої учням відома* [17, с.38-39, №2-4]; *задач, математичними моделями яких є показникові рівняння (нерівності)*, що розв'язуються методом логарифмування [16, с.40, приклади 7-8]. Такі та подібні до них задачі слід розв'язувати на етапі узагальнення знань учнів з теми "Показникова та логарифмічна функції". Задачі згаданих щойно типів включені до навчальних посібників [14] – [16].

Б

Приклад 4.8. Середній щорічний приріст деревини на фіксованій ділянці лісу складає *3%*. Через скільки років об'єм деревини подвоїться, потроїться, якщо в початковий момент часу він дорівнює V_0?

Розв'язання. Оскільки щорічний середній приріст деревини на фіксованій ділянці лісу складає 3%, то математичною моделлю даної задачі буде функція $V(t) = V_0 \cdot 1{,}03^t$, де $V(t)$ - об'єм деревини через t років на фіксованій ділянці лісу. Для відповіді на питання задачі слід розв'язати рівняння: $\frac{V(t)}{V_0} = 2$ або $1{,}03^t = 2$ та рівняння $\frac{V(t)}{V_0} = 3$ або $1{,}03^t = 3$.

Рівняння $1{,}03^t = 2$ та $1{,}03^t = 3$ розв'язуються методом логарифмування обох частин рівняння.

Для першого рівняння маємо $\ln 1{,}03^t = \ln 2$, звідки $t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx \frac{0{,}693}{0{,}029} \approx 23(\textit{роки})$.

Друге рівняння розв'язується аналогічно.

Відповідь. 23 роки; 37 років.

Приклад 4.9. Залежність площі S (в гектарах) ділянки лісу від часу t (в роках) описується законом $S = S_0 \cdot e^{kt}$ (*закон природного росту*), де S_0- початкова площа ділянки, $k > 0$- деяка стала. Запишіть цю залежність, коли відомо, що ділянка, площа якої 20 *га*, щороку збільшується на 4%. Через скільки років ділянка збільшиться на 5 га?

Розв'язання. За умовою задачі $S(0) = 20$. Для визначення e^k, скористаємось умовою, що за 1 рік площа ділянки збільшиться на 4%. Тобто $S(1) = S_0 + 0{,}04S_0 = 1{,}04S_0 = 1{,}04 \cdot 20 = 20{,}8$. Отже, маємо $20{,}8 = 20 \cdot e^k$, звідки $e^k = 1{,}04$.

Остаточно дістаємо таку залежність $S = 20 \cdot 1{,}04^t$.

Для визначення часу, через який площа ділянки збільшиться на 5 *га,* тобто дорівнюватиме 25 *га,* розв'яжемо рівняння $25 = 20 \cdot 1{,}04^t$. Останньому рівнянню рівносильне рівняння $1{,}25 = 1{,}04^t$, яке розв'язується методом логарифмування.

Отже, $t = \dfrac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}04} \approx \dfrac{0{,}223}{0{,}039} \approx 5{,}718 \approx 6(\textit{років})$.

Відповідь. 6 років.

Деякі з задач цих типів використовуються в *позакласній роботі з математики*. Розглянемо окремі з них.

Приклад 4.10. [11, с. 181-182]. Знаменитий американський вчений і державний діяч Бенджамін Франклін склав наступний заповіт, який був опублікований у "Збірці різних творів Бенджаміна Франкліна". Зміст заповіту наступний: "Доручаю одну тисячу фунтів стерлінгів жителям міста Бостона. Якщо вони приймуть цю тисячу фунтів, то повинні будуть доручити її вибраним громадянам, а ті будуть давати їх з відсотками, по 5 на сто в рік, у позику молодим ремісникам. Сума ця через 100 років зросте до 131000 фунтів стерлінгів. Я бажаю, щоб тоді 100000 фунтів пустили на будівництво громадських будинків, решту ж 31000 фунтів віддали під ті ж самі відсотки ще на 100 років. Після закінчення другого століття сума зросте до 4061000 фунтів стерлінгів, із яких 1061000 фунтів залишаю в розпорядження бостонських жителів, а 3000000 – правлінню Масачусетської громади. Далі не насмілююсь висловлювати свою думку щодо цього.". Чи правильно були зроблені обчислення, про які йдеться в заповіті?

Розв'язання. Для визначення того, до якої суми зросла сума в 1000 фунтів стерлінгів за 100 років з відсотковою ставкою 5% скористаємось формулою складних відсотків: $x = 1000 \cdot (1 + 0{,}05)^{100} = 1000 \cdot 1{,}05^{100}$. Для обчислення цього значення можуть бути використані логарифми: $\lg x = \lg(1000 \cdot 1{,}05^{100})$, звідки, використовуючи властивості логарифмів, одержуємо $\lg x = 3 + 100 \cdot \lg 1{,}05$. Отже, $\lg x \approx 5{,}1189$. За означення логарифма одержуємо, що $x \approx 131000$.

Далі відомо, що 31000 фунтів стерлінгів протягом наступного століття перетворяться в суму $y = 31000 \cdot 1{,}05^{100}$. За допомогою логарифмів аналогічно можна обчислити, що $y \approx 4076500$. Ця сума істотно не відрізняється від вказаної в заповіті.

Відповідь. Обчислення, про які йдеться в заповіті, були зроблені правильно.

Наступну *класичну задачу*, взяту з "Панів Головльових" М. Салтикова-Щедріна, пропонуємо для самостійного розв'язування.

4.13. [11, с. 182-183]. **"**Порфірій Володимирович сидить у себе в кабінеті, списуючи цифірними викладками аркуші паперу. Цього разу його цікавить запитання: скільки було б у нього тепер грошей, якби мамонька подаровані йому при народженні дідусем, на зубок, сто рублів не привласнила собі, а поклала би внеском у ломбард на ім'я малолітнього Порфирія? Виходить, однак, не багато: всього вісімсот рублів…".

Припускаючи, що Порфирію у той час було 50 років, потрібно встановити скільки відсотків по внесках виплачував у той час ломбард.

Вказівка. Використовуючи формулу складних відсотків, одержують рівняння $800 = 100\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^{50}$, яке розв'язується методом логарифмування.

Відповідь. 4,3 %.

Література

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011.-480 с.
2. Бевз Г.П. Математика 11: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Генеза, 2011.

3. Бевз Г.П. Алгебра (алгебра і початки аналізу):підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, проф. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова – К.: Освіта, 2011.-400 с.
4. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.-331 с.
5. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч./ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.- Ч. 2.-272 с.
6. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна.-Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.6-27.
7. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.28-51.
8. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень.// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.52-83.
9. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики).// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво ”Ранок”, 2011.-С.84-121.
10. Нелін Є.П. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011.-448 с.
11. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия / И.Я. Перельман. – М.: АСТ, 2006.- 474 с.
12. Сморжевський Л.О., Атаманчук П.С., Кух А.М. Задачі з алгебри і початків аналізу для 11 класу (з фізико-технічним змістом). Навчальний посібник. - Кам’янець-Подільський, 1996.-60 с.
13. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість вивчення показникової та логарифмічної функцій в курсі алгебри і початків аналізу. – Евристика та дидактика точних наук: Міжнародний зб. наук. робіт. – Донецьк, 1997. – Вип.6. – С.44-47.
14. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. -Чернігів:Сіверянська думка,2002.-128с.
15. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. –Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.-128с.
16. Соколенко Л.О. Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу: Навч.-метод. посібник для вчителів і учнів 10-11 кл. середн. шк., ліцеїв та гімназій фізико-математичного спрямування. – Київ: ”Тираж”, 1997.-127с.
17. Соколенко Л.О., Швець В.О. Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій у курсі алгебри і початків аналізу // Математика в сучасній школі. – 2013, №12.- С.32-41.
18. Dilley Clyde A. and other. Algebra 2: Teacher’s Edition. – Lexington, Massachutts Toronto: D.C. Health and Company, 1990. – 820 p.
19. Les sujets natban. Maths 94. Terminales F-G-H. Selection de sujets proposée par: Michel Poncy. Édition Nathan, 1993. – 243 p.