УДК 51(07)

Соколенко Л.О.

ШКІЛЬНА МАТЕМАТИКА З ТОЧКИ ЗОРУ ВИЩОЇ

Розкрито зміст спецкурсів з математики та методики навчання математики, які читав доктор фізико–математичних наук, професор Я.А. Ройтберг для випускників фізико–математичного факультету Чернігівського державного педагогічного інституту імені Т.Г. Шевченка.

Ключові слова: *спецкурс, курс алгебри і початків аналізу, функція, границя, неперервність, похідна, інтеграл, нестандартна задача.*

На початку 90–х років минулого століття студенти випускних курсів фізико–математичного факультету Чернігівського державного педагогічного інституту імені Т.Г. Шевченка мали можливість відвідувати спецкурси за вибором з математики та методики навчання математики.

Завідувач кафедри математичного аналізу доктор фізико–математичних наук, професор Яків Абрамович Ройтберг на той час читав спецкурси "Олімпіадні задачі" та "Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої".

На спецкурсі з математики "Олімпіадні задачі" розглядались методи розв’язування олімпіадних задач. Значна увага приділялась задачам курсу алгебри і початків аналізу (на знаходження границь послідовностей та границь функцій; розв’язуванню нестандартних рівнянь, нерівностей; побудові графіків функцій; доведенню тотожностей, нерівностей). Крім цього викладач пропонував та вчив розв’язувати олімпіадні задачі з всього курсу шкільної математики. Розглядались задачі, які у 80–х роках пропонувались учасникам обласних та республіканської олімпіад з математики для школярів.

Методичний спецкурс "Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої" давав можливість випускникам фізико–математичного факультету осмислити зміст шкільного курсу алгебри і початків аналізу з точки зору математичного аналізу. Спецкурс проводився у формі лекційних, практичних та семінарських занять.

На лекційних заняттях Яків Абрамович розкривав теоретичні питання пов’язані зі змістом шкільного курсу алгебри і початків аналізу з точки зору вищої математики, зокрема алгебри і математичного аналізу.

Значна увага приділялась питанням пов’язаним з *множиною дійсних чисел,* а саме переконливо доводилась необхідність розширення множини раціональних чисел *Q* до множини дійсних чисел *R*; розглядалась аксіоматична теорія множини *R* (основні поняття теорії та основні відношення між ними), питання повноти та неперервності цієї множини.

Декілька лекцій спецкурсу були присвячені питанням "Границі і неперервності функції ". Ці лекції були особливо важливими для майбутніх вчителів математики, оскільки на той час у програмі для загальноосвітніх шкіл та діючому шкільному підручнику поняття границі функції було замінено поняттям граничного переходу. Пояснювалось це тим, що переважна більшість учнів не сприймає означення границі функції. Вважалось, що інтуїтивне уявлення про границю учні мають дістати в процесі введення поняття похідної.

Однак шкільна практика переконала, що вилучення зі шкільної програми явного вивчення границь не сприяло полегшенню і глибшому усвідомленню поняття похідної та інтеграла.

Поняття границі функції є одним з найважливіших понять математичного аналізу і водночас – одним з найскладніших не тільки для учнів, а й для студентів. Саме тому, читаючи лекції, Яків Абрамович звертав увагу на питання означення поняття границі функції, основні властивості границь, поняття нескінченно малої функції; наводив приклади функцій, що не мають границі в точці.

Достатньо ґрунтовно на лекціях розкривалось питання неперервності функції, а саме приділялась увага означенням неперервної функції в точці, властивостям функцій неперервних на відрізку (теореми Веєрштрасса, теорема Кантора), умові неперервності монотонної функції, теоремі про неперервність оберненої функції, рівномірній неперервності.

Розгляд цих питань був корисним для майбутніх вчителів математики, оскільки діюча на той час програма з математики для X–IX класів передбачала їх опрацювання в класах і школах з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики.

Значна увага на лекційних заняттях приділялась елементарним функціям курсу алгебри і початків аналізу: показниковій, логарифмічній, степеневій, тригонометричним та оберненим тригонометричним.

Поступово розглядались властивості показникової функції на множині раціональних, ірраціональних та дійсних чисел. Ці властивості обґрунтовувались та при необхідності доводились. Зокрема доводились властивості монотонності та неперервності на кожній з множин *Q, I, R*. Логарифмічна функція розглядалась як обернена до показникової. Крім того увага приділялась питанню диференційовності згаданих функцій, а саме виводились формули похідних цих функцій; пропонувався один з підходів до введення числа e в школі.

Для степеневої функції $y=x^{\alpha}$, $\alpha \in R$ відокремлювались випадки коли α – натуральне число, ціле від'ємне число, дробове додатне та ірраціональне числа, та відповідно до них розглядались і узагальнювались властивості функції.

Під час огляду властивостей тригонометричних функцій, серед інших питань зверталась увага на диференційовність та розклад в степеневі ряди цих функцій. Достатньо детально висвітлювались питання пов'язані з оберненими тригонометричними функціями (означення функцій, побудова графіків, властивості функцій, питання диференційовності, тотожності які пов'язують тригонометричні та обернені тригонометричні функції).

Крім того на лекціях достатня увага приділялась задачам, що приводять до поняття похідної, диференціала, первісної та інтеграла. Численні з цих задач були задачами прикладного характеру. До того ж розглядались питання застосування цих понять на практиці.

Окремі лекції були присвячені диференціальним рівнянням та методиці їх вивчення в школі.

Не менш цікавими і корисними для майбутнього вчителя математики були практичні заняття. Яків Абрамович приділяв належну увагу нестандартним задачам курсу алгебри і початків аналізу.

Розглянемо приклади декількох задач які розв'язувались на спецкурсі.

Задача 1. Розв'яжіть нерівність: $\arccos 2^{x+1}\cdot\left(10^{1+x^2}-10^{1-x^2}-99\right)\le 0$ (1).

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ $-1\le 2^{x+1}\le 1,$ але $0<2^{x+1}\le 1.$ Звідки $2^{x+1}\le 2^0$, $x+1\le 0,$ $x\le -1.$

Оскільки $0\le \arccos 2^{x+1}\le \Pi,$ то нерівність (1) рівносильна системі

$$\begin{cases}\arccos 2^{x+1}=0,\\ 10^{1+x^2}-10^{1-x^2}-99\le 0\end{cases} \qquad (2)$$

$\arccos 2^{x+1}=0,$ якщо $2^{x+1}=1,$ $x+1=0,$ а $x=-1.$

Нерівності (2) рівносильна нерівність $10\cdot 10^{x^2}-\dfrac{10}{10^{x^2}}-99\le 0.$

Нехай $10^{x^2}=y,$ $y>0.$ Тоді маємо $10y-\dfrac{10}{y}-99\le 0.$ Оскільки $y>0,$ то остання нерівність рівносильна нерівності $10y^2-99y-10\le 0.$ Звідси маємо $10\left(y+0,1\right)\left(y-10\right)\le 0,$ $-0,1\le y\le 10.$

Оскільки $y>0,$ то маємо $0<y\le 10,$ $0<10^{x^2}\le 10,$ $0<x^2\le 1,$ тобто $|x|\le 1.$ Враховуючи ОДЗ $x\le -1$ одержуємо відповідь $x=-1.$

Відповідь. –1.

Задача 2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}2^{1+\log_2(x-y)}=4,\\ \log_2\left(x-y\right)+\log_2\left(x+y\right)=2+\log_2 3.\end{cases}$$

Розв'язання. $2^{1+\log_2(x-y)}=4,$ тому $2^{1+\log_2(x-y)}=2^2,$ звідси $1+\log_2\left(x-y\right)=2,$ $\log_2\left(x-y\right)=1,$ $x-y=2.$

Враховуючи це маємо $1+\log_2\left(x+y\right)=2+\log_2 3.$ Звідси $\log_2\left(x+y\right)=1+\log_2 3.$ За означенням логарифма $x+y=2^{1+\log_2 3}=2\cdot 2^{\log_2 3}=2\cdot 3=6.$

Остаточно маємо $x-y=2,$ $x+y=6.$ Звідси $x=4, y=2.$

Відповідь. (4;2).

Задача 3. Спростіть вираз: $x_n=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right).$

Розв'язання. Після віднімання в дужках одержимо:

$$x_n=\frac{\left(2^2-1\right)\left(3^2-1\right)\left(4^2-1\right)\ldots\left(n^2-1\right)}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2}.$$

Розкладемо чисельник на множники та виконаємо їх перестановку:

$$x_n = \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)(4-1)(4+1)\ldots(n-1)(n+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2} =$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Відповідь. $x_n = \dfrac{n+1}{2n}$.

Задача 4. Обчисліть: $\int\limits_{-1}^{1} x^2 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $D(f)=R$, тобто область визначення симетрична відносно нуля.

$$f(-x) = (-x)^2\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right) = x^2\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = x^2\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = -x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) =$$

$= -f(x)$. Отже, $f(x)$ – непарна функція, тому $\int\limits_{-1}^{1} x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = 0$.

Відповідь: 0.

Задача 5. Розв'яжіть рівняння: $\left(\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^x = \left(\sqrt{10}\right)^x$.

Розв'язання. Зрозуміло, що $x=2$ є коренем рівняння. Доведемо, що інших коренів рівняння не має. Поділимо ліву та праву частини рівняння на $\left(\sqrt{10}\right)^x$.

Одержимо: $\left(\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{3}}{10}}\right)^x + \left(\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{3}}{10}}\right)^x = 1$. Оскільки $0 < \sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{3}}{10}} < 1$, $0 < \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{3}}{10}} < 1$, то ліва частина рівняння є сумою двох спадних функцій, тобто спадною функцією. З цього випливає, що рівняння має єдиний корінь.

Відповідь. 2.

Використані джерела

1. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2–х томах. Т.1. Арифметика. Алгебра. Анализ: Пер. с нем. / Под ред. В.Г. Болтянского.–4–е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит., 1987. – 432 с.
2. Саакян С.М. и др. Задачи по алгебре а началам анализа для 10–11 классов / С.М. Саакян, А.М. Гольдман, Д.В. Денисов. – М.: Просвещение, 1990. – 256 с.

Sokolenko L.

SCHOOL MATHEMATICS IN TERMS OF HIGHER MATHEMATICS

The content of special courses on mathematics and teaching methodology of mathematics, which were given by the professor Ya.A. Roitberg for graduates of physic and mathematics faculty of Chernihiv state pedagogical institute named after T.G. Shevchenko is disclosed.

Keywords: *special course, course of algebra and principles of calculus, function, limit, continuity, derivative, integral, unconventional task.*

Стаття надійшла до редакції 16.09.2010 р.