

**ЛУЦЬКИЙ ІНСТИТУТ РОЗВИТКУ ЛЮДИНИ
УНІВЕРСИТЕТУ “УКРАЇНА”**

кафедра “Комп’ютерні технології”



Матвійчук Л.А.

ЕМПІРИЧНІ МЕТОДИ ПРОГРАМНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напрямку підготовки 6.050103 «Програмна інженерія»
денної та заочної форми навчання



УДК 31:33 (07)

ББК 65.051я7

МЗ4

Матвійчук Л.А. Конспект лекцій для студентів напрямку підготовки 6.050103 «Програмна інженерія» денної та заочної форми навчання з дисципліни «Емпіричні методи програмної інженерії»./ Укладач: Л.А. Матвійчук. - Луцьк: ЛІРоЛ Університету “Україна”, 2012. – 124 с.

Дане методичне видання призначене для студентів напрямку підготовки «Програмна інженерія» денної та заочної форми навчання. Конспект лекцій вміщує теоретичний матеріал, супроводжується необхідними поясненнями та ілюстраціями, а також питання для самоперевірки, які є актуальними на всіх етапах навчального процесу. Також є помічником у самостійній роботі студентів.

Рецензенти:

В.О. Ліщина, к.т.н., доцент, зав. кафедри комп’ютерних технологій Луцького інституту розвитку людини Університету “Україна”

І.Н. Бурчак, к.т.н., доцент кафедри інженерної та комп’ютерної графіки ЛНТУ

Розглянуто та схвалено кафедрою комп’ютерних технологій ЛІРоЛ Університету “Україна” (протокол № 4 від 28 листопада 2012 р.)

Затверджено та рекомендовано до друку вченою радою факультету комп’ютерних технологій, економіки та права Луцького інституту розвитку людини Університету «Україна».

Протокол № 4 від 27 грудня 2012 р.

©Матвійчук Л.А. (укладання), 2012 рік

© ЛІРоЛ, 2012 рік

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Програма навчальної дисципліни.....	5
Лекційне заняття №1.....	7
Питання для самоконтролю.....	16
Лекційне заняття №2.....	17
Питання для самоконтролю.....	29
Лекційне заняття №3.....	29
Питання для самоконтролю.....	43
Лекційне заняття №4.....	44
Питання для самоконтролю.....	49
Лекційне заняття №5.....	50
Питання для самоконтролю.....	67
Лекційне заняття №6.....	67
Питання для самоконтролю.....	73
Лекційне заняття №7.....	73
Питання для самоконтролю.....	82
Лекційне заняття №8.....	82
Питання для самоконтролю.....	86
Лекційне заняття №9.....	86
Питання для самоконтролю.....	92
Лекційне заняття №10.....	92
Питання для самоконтролю.....	104
Лекційне заняття №11.....	104
Питання для самоконтролю.....	108
Лекційне заняття №12.....	109
Питання для самоконтролю.....	114
Глосарій.....	115
Використана література.....	120
Додатки.....	121

Вступ

Одна із основних форм навчання студентів – самостійна робота над навчальним матеріалом, яка в першу чергу складається з вивчення теоретичних відомостей за підручником.

При вивченні матеріалу за підручником треба переходити до наступного питання тільки після правильного зрозуміння попереднього, виконуючи на папері усі обчислення, навіть і ті, які пропущені у підручнику. Розв'язання задач при вивченні дисципліни «Емпіричні методи програмної інженерії» часто пов'язано з багатьма склад. Якщо складається скрутне становище при розв'язанні задачі, то треба вказати характер цього утруднення, привести припущення відносно плану розв'язку.

В даному методичному виданні представленні теми лекційного матеріалу, які допоможуть студентам досягнути більше інформації, яка важлива при підготовці майбутніх інженерів-програмістів.

Конспект лекцій складається із 12 тем лекційного матеріалу та до кожної із лекцій підготовлені питання для самоконтролю.

Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль I. Основи описової статистики.

Тема 1: Основи емпіричного дослідження.

Основи емпіричної інженерії. Визначення програмної інженерії як наукової дисципліни. Інженерна діяльність

Тема 2: Значення метриків в програмній інженерії.

Поняття метрики. Напрями застосування метриків. Метричні шкали. Критерії метриків. Метрики складності ПП (програмного продукту). Характеристика якості програмного засобу. Класифікація видів складності програмних продуктів.

Тема 3: Статистичні ряди розподілу.

Статистичні ряди розподілу. [Атрибутивні ряди розподілу.](#) [Варіативні ряди розподілу.](#) [Розрахунок середніх величин рядів розподілу.](#) Розрахунок моди й медіани.

Тема 4: Статистичні розподіли вибірок та їх числові характеристики.

Дискретний статистичний розподіл вибірки та її числові характеристики. Інтервальний статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики.

Тема 5: Вибіркове спостереження.

Поняття про вибіркове спостереження та його основні завдання. Основні умови наукової організації вибіркового спостереження. Методи і способи відбору одиниць у вибіркову сукупність. Знаходження середньої і граничної помилок та необхідної чисельності для різних видів вибірок. Способи поширення даних вибіркового спостереження на генеральну сукупність.

Тема 6: Точкові та інтервальні оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності.

Точкові оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності. Основні закони розподілу та вибіркові оцінки параметрів розподілу. Інтервальні оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності.

Тема 7: Графічні методи зображення статистичних даних.

Поняття про статистичні графіки і правила їх побудови. Види графіків. Основні елементи статистичних графіків. Графічне зображення статистичних даних рядів розподілу.

Змістовий модуль II. Застосування принципів дискретної ймовірності в ІТ.

Тема 8: Моделювання рядів розподілу.

Фактичний та теоретичний розподіл. Крива нормального розподілу. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл. Критерії згоди: Пірсона, Романовського, Колмогорова. Практичне значення моделювання рядів розподілу.

Тема 9: Перевірка статистичних гіпотез.

Принцип практичної впевненості. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох дисперсій.

Тема 10: Елементи дисперсійного аналізу.

Дисперсійний аналіз. Однофакторний аналіз. Поняття про двофакторний дисперсійний аналіз.

Тема 11: Елементи кореляційного аналізу.

Види залежності. Загальні положення кореляційного аналізу.

Тема 12: Елементи регресійного аналізу.

Рівняння лінійної парної регресії. Множинна лінійна регресія. Нелінійна регресія.

Лекційне заняття №1

Тема 1: Основи емпіричного дослідження

План

1. Основи емпіричної інженерії
2. Визначення програмної інженерії як наукової дисципліни
3. Інженерна діяльність

§1. Основи емпіричної інженерії

Емпіричні знання отримують в результаті застосування **емпіричних методів пізнання - спостереження, вимірювання, експерименту**. Це знання про видимі взаємозв'язки між окремими подіями і фактами в предметній області. Воно, як правило, констатує якісні і кількісні характеристики об'єктів і явищ. Емпіричні закони часто носять імовірнісний характер і не є строгими.

Емпіричні дослідження орієнтуються на безпосереднє вивчення явищ, теорія орієнтуються на рівень сутності й об'єктивної закономірності в досліджуваному процесі, явищі.

Емпіричні дослідження як методи використовують реальне спостереження, реальний експеримент, емпіричний опис, складання графіків, таблиць тощо. На теоретичному рівні застосовують методи ідеалізації, уявного експерименту, історичні і логічний; методи сходження від абстрактного до конкретного, аксіоматичний, гіпотетико-дедуктивний використовуються як методи побудови теорії. **До методів емпіричних досліджень програмного забезпечення належать: керовані експерименти, дослідження конкретних випадків (*case studies*), дослідження-огляди, етнографії, дослідження дій.**

Загальні методи емпіричного дослідження

Спостереження - це систематичне цілеспрямоване, спеціально організоване сприймання предметів і явищ об'єктивної дійсності, які виступають об'єктами дослідження.

Емпірична сукупність стає основою попередньої систематизації об'єктів реальності, роблячи їх вихідними об'єктами наукового дослідження.

Спостереження мусить відповідати таким вимогам:

- передбачуваності заздалегідь (спостереження проводиться для певного, чітко поставленого завдання);
- планованості (виконується за планом, складеним відповідно до завдання спостереження);
- цілеспрямованості (спостерігаються лише певні сторони явища, котрі викликають інтерес при дослідженні);
- вибіркової (спостерігач активно шукає потрібні об'єкти, риси, явища);
- системності (спостереження ведеться безперервно або за певною системою).

Порівняння - це процес зіставлення предметів або явищ дійсності з метою установлення схожості чи відмінності між ними, а також знаходження загального, притаманного, що може бути властивим двом або кільком об'єктам дослідження.

Метод порівняння буде плідним, якщо при його застосуванні виконуються такі вимоги:

- порівнюватись можуть тільки такі явища, між якими може існувати певна об'єктивна спільність;
- порівняння повинно здійснюватись за найважливішими, найсуттєвішими (у плані конкретного завдання) ознаками.

Порівняння завжди є важливою передумовою узагальнення

Узагальнення - логічний процес переходу від одиничного до загального чи від менш загального до більш загального знання, а також продукт розумової діяльності, форма відображення загальних ознак і якостей об'єктивних явищ. Найпростіші узагальнення полягають в об'єднанні, групуванні об'єктів на основі окремої ознаки (синкретичні об'єднання).

Вимірювання - це процедура визначення числового значення певної величини за допомогою одиниці виміру. Цінність цієї процедури полягає в тому, що вона дає точні, кількісно визначені відомості про об'єкт.

При вимірюванні необхідні такі основні елементи: об'єкт вимірювання, еталони, вимірювальні прилади, методи вимірювання. Вимірювання ґрунтується на порівнянні матеріальних об'єктів.

Найважливішою складовою наукових досліджень є **експеримент** - апробація знання досліджуваних явищ в контрольованих або штучно створених умовах. Це такий метод вивчення об'єкта, коли дослідник активно і цілеспрямовано впливає на нього шляхом створення штучних умов чи застосування звичайних умов, необхідних для виявлення відповідних властивостей.

Сам термін «**експеримент**» (від латинського *experimentum* - спроба, дослід) означає науково поставлений дослід, спостереження досліджуваного явища у певних умовах, що дозволяють багаторазово відтворювати його при повторенні цих умов.

Експеримент проводять:

- при необхідності відшукати у об'єкта раніше невідомі властивості;
- при перевірці правильності теоретичних побудов;
- при демонстрації явища.

Переваги експериментального вивчення об'єкта порівняно зі спостереженням полягають у тому, що:

- під час експерименту є можливість вивчати явище «у чистому вигляді», усунувши побічні фактори, які приховують основний процес;
- в експериментальних умовах можна досліджувати властивості об'єктів;
- існує можливість повторюваності експерименту, тобто проведення випробування стільки разів, скільки в цьому є необхідність.

Дослідження об'єкта проводиться поетапно: на кожному етапі застосовуються найдоцільніші методи відповідно до конкретного завдання. На першому етапі збору фактичного матеріалу і його первинної систематизації використовують методи: опитування (**анкетування, інтерв'ювання, тестування**), експертних оцінок, а також лабораторні експерименти (у фізиці, хімії).

Опитування дає змогу отримати як фактичну інформацію, так і оцінні дані, проводиться в усній або письмовій формі.

При створенні анкети або плану **інтерв'ю** важливо сформулювати запитання так, щоб вони відповідали поставленій меті. Анкета може включати

декілька блоків запитань, пов'язаних не лише з рівнем періодичності використання тих чи інших засобів, а й оцінкою об'єкта дослідження.

Метод експертних оцінок використовується для отримання змінних емпіричних даних. Проводиться опитування спеціальною групою експертів (5-7 осіб) з метою визначення певних змінних величин, необхідних для оцінки досліджуваного питання. Експерти підбираються за ознакою їх формального професійного статусу - посади, наукового ступеня, стажу роботи тощо.

На даному етапі широко використовуються методи статистичного аналізу: кореляційний, факторний аналіз, метод імплікаційних шкал та інші.

Кореляційний аналіз - це процедура для вивчення співвідношення між незалежними змінними. Зв'язок між цими величинами виявляється у взаємній погодженості спостережуваних змін. Обчислюється коефіцієнт кореляції. Чим вищим є коефіцієнт кореляції між двома змінними, тим точніше можна прогнозувати значення однієї з них за значенням інших.

Факторний аналіз дає можливість встановити багатомірні зв'язки змінних величин за кількома ознаками. На основі парних кореляцій, отриманих у результаті кореляційного аналізу, одержують набір нових, укрупнених ознак - факторів. У результаті послідовної процедури отримують фактори другого, третього та інших рівнів. Факторний аналіз дає змогу подати отримані результати в узагальненому вигляді.

Метод імплікаційних шкал - це наочна форма виміру та оцінки отриманих даних, які градуюються за кількістю або інтенсивністю ознак. Шкали класифікуються за типами або рівнем виміру. Прості шкали дають однозначну оцінку тієї чи іншої ознаки. Серію шкал (так звану батарею) можна перетворити в єдину шкалу значень окремих ознак. Ця процедура називається шкалюванням (схема 1).



Схема 1. Структура методології та техніки наукових досліджень

§2. Визначення програмної інженерії як наукової дисципліни

Термін програмна інженерія вперше був введений у 1968 р. З того часу протягом 40 років зміст цього поняття, поступово змінювався і вдосконалювався, що обумовлювалося постійним розвитком програмування, спочатку як мистецтва одинаків, потім як теоретичної та прикладної науки, і, з часом, як інженерної діяльності.

Програмна інженерія (Software Engineering) – це система методів, способів і дисципліни з планування, розробки, експлуатації і супроводження програмного забезпечення (ПЗ), призначених для промислового виробництва ПЗ. Це інженерна дисципліна охоплює усі аспекти створення ПЗ від початку формулювання системних вимог, через розроблення продукту і до його використання, супроводження та остаточного списання.

Визначення 2. Програмна інженерія – розділ комп'ютерної науки, який вивчає методи і засоби побудови комп'ютерних програм; відображає закономірності розвитку та узагальнює накопичений досвід програмування; оперує об'єктами (модулями, компонентами, програмними аспектами тощо) та

визначає автоматизовані операції щодо їхнього застосування; виробляє правила, порядок інженерної діяльності і керування технологічним процесом побудови з простих об'єктів нових, більш складних, цільових об'єктів (програмного забезпечення, програмних систем (ПС), сімейств систем, програмних проектів тощо), а також методи вимірювання і оцінювання готового продукту.

§3. Інженерна діяльність

Програмна інженерія як наука включає:

- 1) основні поняття і об'єкти;
- 2) теорію програмування і методи керування виготовленням програмного продукту;
- 3) засоби і інструменти процесів розроблення продукту.

1. Основні поняття програмної інженерії це: дані і їхні структури (прості і складні), функції і композиції, базові об'єкти (модуль, об'єкт, компонент, каркас, контейнер, повторно використовуваний компонент (ПВК) тощо) і цільові об'єкти, що будуються.

Програмна система (Application) – комплекс інтегрованих програм і засобів, що реалізують набір взаємопов'язаних функцій деякої предметної області в заданому середовищі.

Сімейство систем (systems family) – сукупність програмних систем із загальним (незмінним для всіх членів сімейства) і керованим (змінним) набором характеристик, що задовольняють визначеним потребам прикладної області (домену).

Програмний проект (program project) – унікальний і інтегрований комплекс взаємозалежних заходів, орієнтованих на досягнення цілей і задач об'єкта розроблення за визначеними вимогами до строків, бюджету та характеристик очікуваних результатів діяльності від нього.

Складні програмні об'єкти – сукупність взаємопов'язаних цільових об'єктів різних типів (сімейство систем), які виконують необхідні функції в складній системі, подані як самостійно розроблені прості та цільові об'єкти або вибрані з репозитарію готових ресурсів.

Програмний продукт - сукупність програм і супровідної документації по їх установці, налаштуванню, використанню та доопрацюванню.

Життєвий цикл програмного продукту завершується висновком продукту з експлуатації та зняттям його з підтримки і супроводу (рис. 1.1).



Рис. 1.1. Життєвий цикл програмного продукту

Модель процесу розробки ПЗ - формалізоване представлення процесу розробки ПЗ. Часто при описі процесів замість слова модель вживається термін методологія, що призводить до невиправданого розширення даного поняття.

2. Теорія програмування – сукупність формальних методів, мов і засобів опису та проектування цільових об’єктів, а також методів їхнього доказу, верифікації і тестування. Поряд з об’єктами теорії програмування до програмної інженерії залучені формальні методи керування проектом (персоналом, матеріальними та фінансовими ресурсами) і його окремими характеристиками. Відповідно проведеної нами класифікації методів теорії програмування, у програмній інженерії застосовані наступні (рис. 1.2):



Рис. 1.2. Сукупність методів теорії програмування

- **методи програмування теоретичні** (алгебраїчний, алгоритмічний, експлікативний, функціональний, VDM, RAISE тощо) і **прикладні** (об’єктний, компонентний, аспектний, генеруючий тощо), призначені для проектування різних типів цільових об’єктів;
- **методи перевірки правильності за формальними процедурами** (твердження, вивід, доказ) та тестуванням ПП;
- **методи оцінювання результатів послідовного** проектування (проміжних робочих продуктів) і кінцевого продукту відносно встановлених показників (надійність, якість, точність, продуктивність тощо);
- **методи керування** (менеджменту) і контролю розроблення проміжних результатів під час виконання процесів проекту, а також допоміжні розрахункові методи (трудовитрат кожного розробника, вартості робіт тощо).

Об’єктну теорію побудовано з використанням формалізму трикутника Фреге (рис. 1.3) для узагальнення поняття об’єкту, як елементу реального світу з відповідними **властивостями і характеристиками** (знак – ідентифікатор, денотат – сутність знаку, концепт – семантика денотату), які визначаються на рівнях об’єктного аналізу із залученням математичних формалізмів їхнього опису та уточнення відрізняючи один об’єкт від іншого.

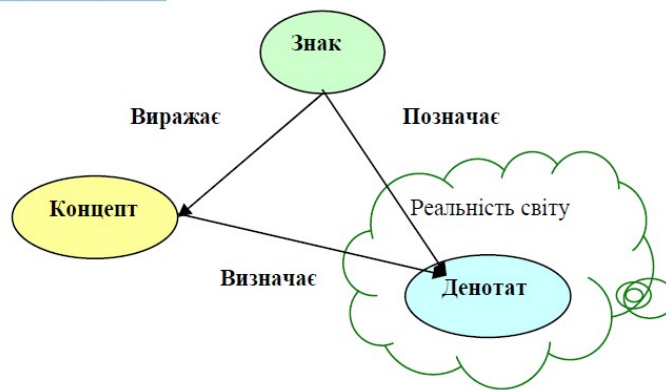


Рис. 3. Трикутник Фреге

Рис. 1.3. Трикутник Фреге

Визначення програмної інженерії як інженерної дисципліни

Програмна інженерія як інженерна дисципліна (або інженерія) – це сукупність прийомів виконання діяльності, пов’язаної з виготовленням програмного продукту для різних видів цільових об’єктів із застосуванням методів, засобів і інструментів наукової складової програмної інженерії [8–12]. Основу інженерії складають наступні базові елементи процесу виготовлення програмного продукту (рис. 1.4):

- 1) ядро знань SWEBOOK, як набір теоретичних концепцій і формальних визначень стосовно методів і засобів розроблення та керування програмними проектами, які можуть застосовуватися у інженерії програмування;
- 2) базовий процес ПІ, як стрижень процесній діяльності в організації-розробнику ПП;
- 3) стандарти, як набір регламентованих правил конструювання проміжних артефактів у процесах ЖЦ;
- 4) інфраструктура – умови середовища та методичне забезпечення базового процесу ПІ і підтримка дій його виконавців, що займаються виробленням програмного продукту;
- 5) менеджмент проекту (PMBOOK) – ядро знань з керування промисловими проектами, як набір стандартних процесів, а також принципів і методів планування і контролювання роботами в проекті.

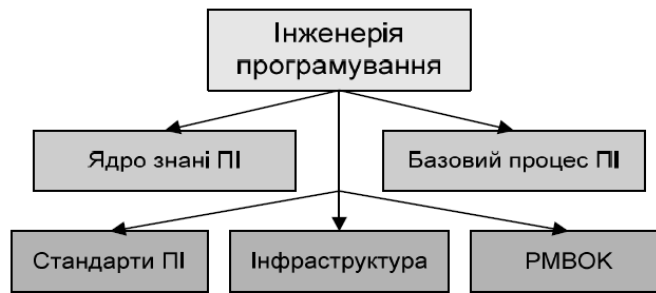


Рис. 1.4. Базові складові інженерної дисципліни

З інженерної точки зору в програмній інженерії вирішуються задачі виготовлення ПП, подані як технологічні процеси формування вимог, проектування і супроводу продукту, а також перевірки операцій базового процесу на правильність виконання різних функціональних задач проекту та вкладання робіт за проектом у заданий замовником строк.

Питання для самоконтролю

1. Що таке емпірична інженерії?
- 2.** Які існують найпоширеніші методи емпіричного дослідження?
3. Опишіть життєвий цикл ПП(програмного продукту).
4. Методи теорії програмної інженерії.
5. Визначення програмної інженерії як наукової дисципліни?
6. Які існують базові складові інженерних дисциплін?
- 7.** Охарактеризуйте сутність інженерної діяльності. Що таке емпірична інженерії?
- 8.** Які існують найпоширеніші методи емпіричного дослідження?
9. Життєвий цикл ПП.
10. Методи теорії програмної інженерії.
11. Визначення програмної інженерії як наукової дисципліни?
12. Базові складові інженерних дисциплін.
13. Сутність інженерної діяльності.

Лекційне заняття №2

Тема: Значення метриків в програмній інженерії

План

1. Поняття метрики.
2. Напрями застосування метриків.
3. Метричні шкали. Критерії метриків.
4. Метрики складності ПП (програмного продукту).
5. Характеристика якості програмного засобу.
6. Класифікація видів складності програмних продуктів.

§1. Поняття метрики

Якість ПЗ - це сукупність властивостей, які визначають корисність виробу (програми) для користувачів відповідно до функціонального призначення і пред'явленими вимогами.

Характеристика якості програми - поняття, що відображає окремі чинники, що впливають на якість програм і піддаються вимірюванню.

Критерій якості - чисельний показник, що характеризує ступінь, в якій програмі притаманне оцінювана властивість.

Критерії якості включають наступні характеристики: економічність, документованість, гнучкість, модульність, надійність, обґрунтованість, тестованого, ясність, точність, модифікованості, ефективність, легкість супроводу і т.д.

Для вимірювання характеристик і критеріїв якості використовують метрики.

Метрика якості програм - система вимірювань якості програм. Ці вимірювання можуть проводитися на рівні критеріїв якості програм чи на рівні окремих характеристик якості.

У дослідженні метрик ПО розрізняють два основних напрямки:

* Пошук метрик, що характеризують найбільш специфічні властивості програм, тобто метрик оцінки самого ПЗ;

* Використання метрик для оцінки технічних характеристик і факторів розробки програм, тобто метрик оцінки умов розробки програм.

По виду інформації, що отримується при оцінці якості ПЗ метрики можна розбити на три групи:

* Метрики, що оцінюють відхилення від норми характеристик вихідних проектних матеріалів. Вони встановлюють повноту заданих технічних характеристик вихідного коду.

* Метрики, що дозволяють прогнозувати якість розроблюваного ПЗ. Вони задані на множині можливих варіантів рішень поставленого завдання і їх реалізації і визначають якість ПЗ, яке буде досягнуто в результаті.

* Метрики, за якими приймається рішення про відповідність кінцевого ПО заданим вимогам. Вони дозволяють оцінити відповідність розробки заданим вимогам.

§2. Основні напрямки застосування метриків

В даний час у світовій практиці використовується кілька сотень метрик програм. Існуючі якісні оцінки програм можна згрупувати за шістьма напрямками:

* Оцінки топологічної та інформаційної складності програм;

* Оцінки надійності програмних систем, що дозволяють прогнозувати ситуації;

* Оцінки продуктивності ПЗ та підвищення його ефективності шляхом виявлення помилок проектування;

* Оцінки рівня мовних засобів та їх застосування;

* Оцінки труднощі сприйняття і розуміння програмних текстів, орієнтовані на психологічні фактори, істотні для супроводу і модифікації програм;

* Оцінки продуктивності праці програмістів для прогнозування термінів розробки програм та планування робіт зі створення програмних комплексів.

§3. Метричні шкали

Залежно від характеристик і особливостей застосовуваних метрик їм ставляться у відповідність різні вимірювальні шкали.

Номінальною шкалою відповідають метрики, що класифікують програми на типи за ознакою наявності або відсутності певної характеристики без урахування градацій.

Порядкової шкалою відповідають метрики, що дозволяють ранжувати деякий характеристики шляхом порівняння з опорними значеннями, тобто вимір за цією шкалою фактично визначає взаємне положення конкретних програм.

Інтервальною шкалою відповідають метрики, які показують не тільки відносне становище програм, але і те, як далеко вони відстоять один від одного.

Відносної шкалою відповідають метрики, що дозволяють не тільки розташувати програми певним чином і оцінити їх положення відносно один одного, але і визначити, як далеко оцінки відстоять від кордону, починаючи з якої характеристика може бути виміряна.

§ 4. Метрики складності ПП (програмних продуктів)

При оцінці складності програм, як правило, виділяють три основні групи метрик:

- * Метрики розміру програм
- * Метрики складності потоку керування програм
- * І метрики складності потоку даних програм

Метрики розміри програм:

Оцінки першої групи найбільш прості і, очевидно, тому отримали широке поширення. Традиційною характеристикою розміру програм є кількість рядків вихідного тексту. Під рядком розуміється будь-який оператор програми, оскільки саме оператор, а не окремо взята рядок є тим інтелектуальним "квантом" програми, спираючись на який можна будувати метрики складності її створення.

Метрики Холстеда.

Основу метрики Холстеда складають чотири вимірюваних характеристики програми:

- η_1 - число простых (уникальных) *операторов*, появляющихся в данной реализации(словник операторів); ;
- η_2 - число простых (уникальных) *операндов*, появляющихся в данной реализации;(словник операндів);
- N_1 - общее число всех *операторов*, появляющихся в данной реализации;
- N_2 - общее число всех *операндов*, появляющихся в данной реализации;
- f_{1j} - число вхождений j -го оператора, где $j = 1, 2, 3 \dots \eta_1$;
- f_{2j} - число вхождений j -го операнда, где $j = 1, 2, 3 \dots \eta_2$.

Спираючись на ці характеристики, одержувані безпосередньо при аналізі вихідних текстів програм, М. Холстед вводить такі оцінки:

словник програми

$$n1 = n1 + n2,$$

довжину програми

$$N = N1 + N2, \tag{2.1}$$

обсяг програми

$$V = N * \log_2 (n) \text{ (біт)}. \tag{2.2}$$

Під бітом мається на увазі логічна одиниця інформації - символ, оператор, операнд.

Далі М. Холстед вводить n^* - теоретичний словник програми, тобто словниковий запас, необхідний для написання програми, з урахуванням того, що необхідна функція вже реалізована в даній мові і, отже, програма зводиться до виклику цієї функції. Наприклад, згідно М. Холстеда, можливе здійснення процедури виділення простого числа могло б виглядати так:

CALL SIMPLE (X, Y),

де Y - масив числових значень, що містить шукане число X.

Теоретичний словник в цьому випадку буде складатися з

$n1^* : \{ \text{CALL, SIMPLE (...)} \},$

$n1^* = 2; n2^* : \{ X, Y \},$

$$n_2^* = 2,$$

а його довжина, обумовлена як

$$n^* = n_1^* + n_2^*,$$

буде дорівнювати 4.

Використовуючи n^* , Холстед вводить оцінку V^* :

$$V^* = n^* \log_2 n^*, \quad (2.3)$$

за допомогою якої описується потенційний обсяг програми, відповідний максимально компактному тексту програми, що реалізує даний алгоритм.

Метрики складності потоку управління програм:

Друга найбільш представницька група оцінок складності програм - метрики складності потоку керування програм. Як правило, за допомогою цих оцінок оперують або щільністю керуючих переходів усередині програм, або взаємозв'язками цих переходів.

І в тому і в іншому випадку стало традиційним представлення програм у вигляді керуючого орієнтованого графа $G = (V, E)$, де V - вершини, відповідні операторам, а E - дуги, відповідні переходам.

МЕТРИКА МакКейб.

Вперше графічне представлення програм було запропоновано Маккейб. Основною метрикою складності він пропонує вважати Цикломатичне складність графа програми, або, як її ще називають, Цикломатичне число МакКейб, що характеризує трудомісткість тестування програми.

Для обчислення Цикломатичне числа МакКейб $Z(G)$ застосовується формула

$$Z(G) = e - v + 2p,$$

де e - число дуг орієнтованого графа G ;

v - число вершин;

p - число компонентів зв'язності графа.

МЕТРИКА Майєрс.

Виходячи з цього Г. Майєрс запропонував розширення цієї метрики. Суть підходу Г. Майєрса полягає в представленні метрики складності програм у вигляді інтервалу $[Z(G), Z(G) + h]$. Для простого предиката $h = 0$, а для n -місних предикатів $h = n-1$. Таким чином, першому оператору відповідає інтервал $[2,2]$, а другому - $[2,6]$.

По ідеї така метрика дозволяє розрізнити програми, представлені однаковими графами. На жаль, інформація про результати використання цього методу відсутня, тому нічого не можна сказати про його застосування.

МЕТРИКА ПІДРАХУНКУ точок перетину.

Розглянемо метрику складності програм, що отримала назву "підрахунок точок перетину", авторами якої є М. Вудвард, М. Хенель і Д. Хідлі. Метрика орієнтована на аналіз програм, при створенні яких використовувалося неструктурні кодування на таких мовах, як мова асемблера і Фортран.

У графі програми, де кожному оператору відповідає вершина, тобто не виключені лінійні ділянки, при передачі управління від вершини a до b номер оператора a дорівнює $\min(a, b)$, а номер оператора b - $\max(a, b)$. Точка перетину дуг з'являється, якщо

$$\min(a, b) < \min(p, q) < \max(a, b) \ \& \ \max(p, q) > \max(a, b)$$

$$\min(a, b) < \max(p, q) < \max(a, b) \ \& \ \min(p, q) < \min(a, b).$$

Іншими словами, точка перетину дуг виникає у разі виходу управління за межі пари вершин (a, b) .

Кількість точок перетину дуг графа програми дає характеристику не структурованості програми.

МЕТРИКА ДЖІЛБА.

Однією з найбільш простих, але, як показує практика, досить ефективних оцінок складності програм є метрика Т. Джілба, в якій логічна складність програми визначається як насиченість програми виразами типу IF-THEN-ELSE. При цьому вводяться дві характеристики: CL - абсолютна складність програми, що характеризується кількістю операторів умови; cl - відносна складність

програми, що характеризується насиченістю програми операторами умови, тобто cl визначається як відношення CL до загальної кількості операторів.

Використовуючи метрику Джілба, ми доповнили її ще однієї складової, а саме характеристикою максимального рівня вкладеності оператора CLI , що дозволило не тільки уточнити аналіз по операторам типу IF-THEN-ELSE, а й успішно застосувати метрику Джілба до аналізу циклічних конструкцій.

МЕТРИКА ГРАНИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ

Великий інтерес представляє оцінка складності програм за методом граничних значень.

Введемо декілька додаткових понять, пов'язаних з графом програми.

Нехай $G = (V, E)$ - орієнтований граф програми з єдиною початковою і кінцевою вершинами єдиною. У цьому графі число входять вершин у дуг називається негативною ступенем вершини, а число виходять з вершини дуг - позитивною ступенем вершини. Тоді набір вершин графа можна розбити на дві групи: вершини, у яких позитивна ступінь ≤ 1 ; вершини, у яких позитивна ступінь ≥ 2 .

Вершини першої групи назвемо приймаючими вершинами, а вершини другої групи - вершинами відбору.

Для отримання оцінки за методом граничних значень необхідно розбити граф G на максимальне число підграфів G_i , що задовольняють наступним умовам: вхід в підграф здійснюється тільки через вершину відбору, кожен підграф включає вершину (звану надалі нижньою межею підграфа), в яку можна потрапити з будь іншої вершини підграфа. Наприклад, вершина відбору, поєднана сама з собою дугою-петлею, утворює підграф.

Число вершин, що утворюють такий підграф, так само скоригованої складності вершини відбору. Кожна приймаюча вершина має скориговану складність, рівну 1, крім кінцевої вершини, скоригована складність якої дорівнює 0. Скориговані складності всіх вершин графа G підсумовуються, утворюючи абсолютну граничну складність програми. Після цього визначається відносна гранична складність програми:

$$S_0 = 1 - (v-1) / S_a, \quad (2.4)$$

де S_0 - відносна гранична складність програми; S_a - абсолютна гранична складність програми; v - загальне число вершин графа програми.

Метрики складності потоку даних:

Інша група метрик складності програм - метрики складності потоку даних, тобто використання, конфігурації та розміщення даних в програмах.

МЕТРИКА ЗВЕРНЕННЯ до глобальних змін.

Розглянемо метрику, що зв'язує складність програм із зверненнями до глобальних змінних.

Пара "модуль-глобальна змінна" позначається як (p, r) , де p - модуль, що має доступ до глобальної змінної r . Залежно від наявності в програмі реального звернення до змінної r формуються два типи пар "модуль-глобальна змінна": фактичні та можливі. Можливе звернення до r за допомогою p показує, що область існування r включає в себе p .

Характеристика A_{pr} говорить про те, скільки разів модулі U_p дійсно отримували доступ до глобальних змінних, а число R_{pr} - скільки разів вони могли б отримати доступ.

Відношення числа фактичних звернень до можливих визначається

$$R_{pr} = A_{pr} / R_{pr}.$$

Ця формула показує наближену ймовірність посилання довільного модуля на довільну глобальну змінну.

МЕТРИКА Спен

Визначення Спен ґрунтується на локалізації звернень до даних усередині кожної програмної секції. Спен - це число тверджень, що містять даний ідентифікатор, між його першим і останнім появою в тексті програми. Отже, ідентифікатор, що з'явився n разів, має Спен, рівний $n-1$. При великому Спен ускладнюється тестування і налагодження.

МЕТРИКА ЧЕПІНА.

Суть методу полягає в оцінці інформаційної міцності окремо взятого програмного модуля за допомогою аналізу характеру використання змінних зі списку вводу-виводу.

Всі безліч змінних, складових список вводу-виводу, розбивається на 4 функціональні групи:

1. Р - що вводяться змінні для розрахунків та для забезпечення виводу.

Прикладом може служити використовувана в програмах лексичного аналізатора змінна, що містить рядок вихідного тексту програми, тобто сама змінна не модифікується, а лише містить вихідну інформацію.

2. М - модифікуються, або створювані всередині програми змінні.

3. С - змінні, що беруть участь в управлінні роботою програмного модуля (керуючі змінні).

4. Т - не використовуються в програмі ("паразитні") змінні. Оскільки кожна змінна може виконувати одночасно декілька функцій, необхідно враховувати її в кожній відповідній функціональній групі.

Далі вводиться значення метрики Чепіно:

$$Q = a_1 * P + a_2 * M + a_3 * C + a_4 * T, \quad (2.5)$$

де a_1, a_2, a_3, a_4 - вагові коефіцієнти.

Вагові коефіцієнти у виразі (4) використані для відображення різного впливу на складність програми кожної функціональної групи. На думку автора метрики, найбільшу вагу, рівний трьом, має функціональна група С, так як вона впливає на потік управління програми. Вагові коефіцієнти інших груп розподіляються наступним чином: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 0.5$. Ваговий коефіцієнт групи Т не дорівнює 0, оскільки "паразитні" змінні не збільшують складність потоку даних програми, але іноді ускладнюють її розуміння. З урахуванням вагомих коефіцієнтів вираз (4) приймає вид : $Q = P + 2M + 3C + 0.5T$

МЕТРИКА Стилїстика і зрозумілою програмою

МЕТРИКА РІВНЯ коментування програм.

Найбільш простий метрикою стилїстики та зрозумілості програм є оцінка рівня коментування програм F:

$$F = N_{\text{ком}} / N_{\text{стр}}, \quad (2.6)$$

де $N_{ком}$ - кількість коментарів у програмі; $N_{стр}$ - кількість рядків або операторів вихідного тексту.

§5. Характеристика якості програмного засобу

1. Функціональність програмного засобу (functionality)

Сукупність властивостей ПС, обумовлена наявністю і конкретними особливостями набору функцій, здатних задовольняти задані або припускаються потреби якості поряд з її надійністю як технічної системи.

2. Зручність використання програмного засобу (usability)

Сукупність властивостей ПС, що характеризує зусилля, необхідні для його використання, та оцінку результатів його використання заданим колом користувачів ПС.

3. Ефективність програмного засобу (efficiency)

Сукупність властивостей ПС, що характеризує аспекти його рівня придатності, які пов'язані з характером і часом використання ресурсів, необхідних при заданих умовах функціонування.

Примітка: правильніше цю характеристику називати продуктивністю (**performance**); тоді як ефективність дожна також залежати від витрат на створення та впровадження ПС.

4. Супровід програмного засобу (maintainability)

Сукупність властивостей ПС, що характеризує зусилля, які необхідні для його модифікації. Модифікація, може здійснюватися для усунення дефектів, удосконалення ПС або його адаптації до змін в умовах функціонування, а також у складі і особливостях необхідних функцій.

5. Мобільність програмного засобу (portability)

Сукупність властивостей ПС, що характеризує пристосованість для перенесення з одного середовища функціонування в інші.

6. Надійність програмного засобу (reliability)

Сукупність властивостей, що характеризує здатність програмного засобу зберігати заданий рівень придатності в заданих умовах протягом заданого інтервалу часу.

Крім перерахованих використовуються і інші характеристики якості ПС:

1. **Коректність або правильність** увазі відповідність об'єкта, що перевіряється деякого еталонного об'єкту або сукупності формалізованих еталонних характеристик і правил. Коректність програми найбільш повно визначається ступенем її відповідності висунутим до неї формалізованим вимогам - *програмної специфікації*.

Якщо **надійність** програми - властивість, закладене при її виготовленні і проявляється при експлуатації програми в часі (тому без тривалого спостереження не можна зробити висновки про надійність програми), то **коректність** може бути перевірена в статичі на етапі розробки програми.

2. **Складність програм.** Розглядається в трьох аспектах:

- складність процесу розробки програм;
- складність програми як об'єкта розробки (статична);
- складність виконання програми (динамічна) - враховує ресурси, необхідні для її виконання.

3. **Трудомісткість** - Сукупні витрати праці на створення чи використання програми.

Розрізняють трудомісткість на етапі проектування програм і трудомісткість вивчення і модифікації програм при їх супроводі.

§6. Класифікація видів складності програмних продуктів

Метричні характеристики програм по М.Холстеду

Велике різноманіття способів оцінювання та видів складності програмних продуктів можна розділити на групи, представлені на (рис. 2.1).



Рис. 2.1. Складність програмного продукту

Як видно з малюнка, перш за все можна виділити **статичні складові складності**, характерні для етапів розробки ПП і визначають їх трудомісткість, і **динамічні складові** складності ПП, які проявляються в процесі виконання програми. Трудомісткість розробки ПП може оцінюватися двома способами:

- по інтегральним характеристикам складності, які визначаються за зовнішніми параметрами програми, не враховує її внутрішню структуру (підхід «чорного ящика»);
- по структурним характеристикам складності, враховує внутрішню структуру програми і залежних від складності маршрутів (потоків) управління, складності потоків даних або спеціальних властивостей графа управління (підхід «білого ящика»).

Динамічна (або обчислювальна) складність характеризує процес виконання програми і має три взаємопов'язаних складових:

- тимчасову - визначається часом виконання програми або часом її реакції на запит користувача;
- програмну - визначається складом і способом взаємодії процедур чи модулів, що утворюють програму, а також можливістю їх розміщення в кеш-пам'яті, основної пам'яті або на диску;

- інформаційну - визначається складністю організації даних і доступу до них, а також можливістю їх розміщення в кеш-пам'яті, основної пам'яті або на диску.

Однією з цікавих інтегральних систем оцінювання не тільки складності, але і якості програм у цілому є система метрик, запропонована Холстеда.

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняття метрика.
2. Що таке якість ПЗ?
3. Які існують критерії якості?
4. Що таке метрика якості програм?
5. Що таке метрика оцінки якості ПЗ?
6. Які існують напрямки застосування метриків?
7. Які існують метричні шкали?
8. Групи складності програм?
9. Які метрики входять в „метрика розміру програм”?
10. Суть метрика Холстеда.
11. Характеристика якості ПЗ.
12. Класифікація видів складності ПП.
13. В чому полягає суть динамічної складності програм?
14. Що таке трудомісткість?
15. Що таке надійність програм?
16. Якими способами оцінюється трудомісткість розробки ПП?

Лекційне заняття №3

Тема: Статистичні ряди розподілу.

План

1. Статистичні ряди розподілу.
2. [Атрибутивні ряди розподілу.](#)
3. [Варіативні ряди розподілу.](#)
4. [Розрахунок середніх величин рядів розподілу.](#)

5. Розрахунок моди й медіани.
6. Показники варіації.

§1. Статистичні ряди розподілу

Статистичні ряди розподілу є одним з найбільш важливих елементів статистики. Вони являють собою складову частину методу статистичних зведень і групувань. Проте практично жодне із статистичних досліджень неможливо провести без попереднього представлення результатів зведення й групування матеріалів статистичного спостереження. А подібні результати подаються у вигляді статистичних рядів розподілу.

Після обробки кількісних значень, їх систематизації, ми дістаємо певний цифровий ряд, який називається статистичний ряд. Він має дві форми: ряд розподілу і динамічний ряд.

Ряд розподілу – це впорядкований розподіл сукупності на групи за певною варіюючою ознакою, розташованою в певному порядку (зростання, спадання тощо).

Статистичний ряд розподілу — впорядкований розподіл одиниць досліджуваної сукупності на групи за групувальною (варіативною) ознакою. Вони характеризують склад (структуру) досліджуваного явища, дозволяють судити про однорідність сукупності, межі її зміни, закономірності розвитку досліджуваного об'єкта. Залежно від ознаки статистичні ряди розподілу діляться на:

1. атрибутивні (якісні);
2. варіаційні (кількісні):
 - дискретні;
 - інтервальні.

§2. Атрибутивні ряди розподілу

Атрибутивні ряди утворюються за якісними ознаками, якими можуть виступати посада, професія, стать, освіта тощо.



Освіта робітників	Кількість робітників	
	абсолютне, чол.	відносне, %
вища	20	15,4
неповна вища	25	19,2
середня спеціальна	35	26,9
середня	50	38,5
Разом	130	100

Тут групувальною ознакою виступає освіта працівників підприємства (вища – середня). Дані ряди розподілу є атрибутивними, оскільки варіаційна ознака представлена не кількісними, а якісними показниками.

§3. Варіативні ряди розподілу

Варіаційні ряди будуються на основі кількісної групуючої ознаки. Варіаційні ряди складаються з наступних елементів:

- **варіант** — окремих значень варіаційної ознаки, що їх приймає ця ознака в ряді розподілу. Варіанти можуть бути позитивними й негативними, абсолютними й відносними;
- **частот** — чисельностей окремих варіант або кожної з груп варіаційного ряду.

Частоти, виражені в частках одиниці або у відсотках, називаються **частотями**. Сума частот називається обсягом сукупності й визначає число елементів усієї сукупності (повна сума дорівнює одиниці або 100%). Заміна частот частотами дозволяє зіставляти варіаційні ряди з різним числом спостережень.

Варіаційні ряди залежно від характеру варіації підрозділяються на дискретні й інтервальні.

Дискретні ряди розподілу засновані на дискретних (перервних) ознаках, що мають лише цілі значення (наприклад, тарифний розряд робітників, число дітей у родині тощо);

Інтервальні ряди розподілу базуються на неперервно змінному значенні ознаки, що приймає будь-які (у тому числі й дробові) кількісні вирази, тобто значення ознак таких рядів задається у вигляді інтервалу.

За наявності досить великої кількості варіантів значень ознаки первинний варіаційний ряд стає важкооглядовим, і тому лише безпосередній його розгляд не дає повного уявлення про розподіл одиниць за значенням ознаки в сукупності, що розглядається. У цьому випадку першим кроком в упорядкуванні ряду є його **ранжирування** — розташування всіх варіант у зростаючому (спадаючому) порядку.

Для побудови дискретного ряду з невеликим числом варіант спочатку виписуються всі ці варіанти та значення ознаки, а потім підраховується частота повторення варіант. Ряд розподілу прийнято оформляти у вигляді таблиці, що складається із стовпчиків (або/та рядків), де в одних представлені варіанти, а в інших — частоти. Для побудови ряду розподілу дискретних ознак, представлених у вигляді інтервалів, необхідно встановити оптимальне число груп (інтервалів), на які слід розбити всі одиниці досліджуваної сукупності.

§4. Розрахунок середніх величин рядів розподілу

Середня величина – це узагальнюючі показник, які характеризують рівень варіюючої ознаки в якісно однорідній сукупності.

Сукупність, яку ми збираємося характеризувати середньою величиною повинна бути:

- 1) якісно однорідною, однотипною;
- 2) складатися з багатьох одиниць.

Середні величини можуть бути абсолютними або відносними залежно від вихідної бази.

Середні можуть бути прості і зважені.

Види середніх величин та способи їх обрахування.

Найбільш простим видом середніх величин є **середньоарифметична проста**:

$$\bar{x}_{\text{ф.}} = \frac{\sum x}{n}, \quad (3.1)$$

де n – кількість одиниць сукупності,

x – варіююча ознака.

Вона застосовується в тому випадку, коли у нас варіююча арифметична ознака має різні значення, і є незгруповані дані.

Якщо ж ми маємо згруповані дані, або варіююча ознака зустрічається декілька раз, то застосовується **середня арифметична зважена**.

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}, \quad (3.2)$$

де x – варіююча ознака,

f – абсолютна кількість повторення варіюючої ознаки.

Середня гармонічна (гармонійна).

Фірми	Вихідні дані	Розрахункові дані	
Середня зарплата на 1 робітника, грн.	Фонд заробітної плати, тис. грн.	Середня кількість робітників, чол.	
1	130	273	2100
2	150	330	2200
3	120	288	2400
Разом		891	6700

$$\bar{x}_{\text{х.}} = \frac{\Phi \text{ЗП}}{\bar{T}} = \frac{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \frac{w_3}{x_3}}{\frac{w_1 + w_2 + w_3}{x_1 + x_2 + x_3}} = \frac{\sum \frac{w}{x}}{\sum w} \quad (3.3)$$

де x – середня кількість робітників, w – середня заробітна плата.

Середня гармонійна зважена застосовується тоді, коли ми маємо загальний обсяг і індивідуальні значення, але не маємо кількості індивідуальних значень.

Приклад. Використання середньої гармонічної. Автомобіль проїхав певну відстань (візьмемо її за 1) зі швидкістю 40 км/год. Назад він повертався зі швидкістю 60 км/год. Яка ж його середня швидкість?

Для розрахунку використаємо **середню гармонічну просту**:

$$\bar{x}_{\text{гарм.}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}} = \frac{1+1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = 48 (\text{км/год}) \quad (3.4)$$

Середня гармонічна – це обернена величина до середньої арифметичної, обчислена з обернених величин осереднюваних варіюючих ознак.

$$\bar{x}_{\text{гарм.}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}} \quad (3.5)$$

Середні поділяються на 2 великі класи: структурні і степеневі (сюди належать середня гармонічна, середня геометрична, середня квадратична, середня прогресивна тощо).

$$\bar{x}_{\text{геом.}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_0}} \quad (3.6)$$

Середня геометрична розраховується за формулою:

Приклад. Використання середньої арифметичної для розрахунку недискретного ряду.

Групування робітників за розміром зарплати	Кількість робітників	Фонд заробітної плати
До 100	80	7200
100 – 120	250	27500
120 – 140	320	41600
140 – 160	230	34500
Понад 160	120	20400
Разом	1000	131200

Необхідно знайти середню заробітну плату робітників.

Перш за все ми повинні закрити верхні і нижні границі. Оскільки величина інтервалу в подальших групах дорівнює 20 од., перший інтервал записуємо "80 – 100", останній – "160-180". Потім знайдемо середину інтервалу:

Групування робітників за	Кількість	Середини	Фонд заробітної
--------------------------	-----------	----------	-----------------

розміром зарплати (x)	робітників (f)	інтервалу	плати
До 100	80	90	7200
100 – 120	250	110	27500
120 – 140	320	130	41600
140 – 160	230	150	34500
Понад 160	120	170	20400
Разом	1000		131200

Тоді середня арифметична зважена:

$$\bar{x}_{\text{ар.зв.}} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{90 \cdot 80 + 110 \cdot 250 + 130 \cdot 320 + 150 \cdot 230 + 170 \cdot 120}{80 + 250 + 320 + 230 + 120} = \frac{131200}{1000} = 131,2 \quad (3.7)$$

Властивості середньої (математичні).

1) Алгебраїчна сума відхилень всіх варіант від середньої дорівнює 0:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 \quad (3.8)$$

2) Якщо одну із варіант збільшити або зменшити на певну величину, то і середня зміниться на таку ж величину:

$$\frac{\sum (x \pm k)f}{\sum f} = \bar{x} \pm k \quad (3.9)$$

3) Якщо кожному варіанту розділити чи помножити на довільне число, то і середня збільшиться або зменшиться на те ж саме число.

$$\frac{\sum (x * k)f}{\sum f} = \bar{x} * k \quad (3.10)$$

4) Якщо частоти всіх варіант помножити чи поділити на довільне число, то середня не зміниться.

$$\frac{\sum x(f * k)}{\sum (f * k)} = \bar{x} \quad (3.11)$$

5) Сума квадратів відхилень варіант від середньої менша за будь-яку іншу величину:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow \min \quad (3.12)$$

§5. Розрахунок моди й медіани

Середні структурні.

До середніх структурних відносяться дві величини, які називаються "мода" і "медіана".

Мода (модальна величина) ряду – це така величина, яка найбільш часто зустрічається в даному розподілі.

$$M_o = x_0 + i \frac{(f_2 - f_1)}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} \quad (3.13)$$

x_0 – це нижня межа модального інтервалу.

i – величина інтервалу.

f_2 – частота модального інтервалу,

f_1 – частота передмодального інтервалу (того, що передує модальному)

f_3 – частота позамодального інтервалу (того, що йде після модального інтервалу)

Розрахуймо моду до прикладу №2.

$$M_o = 120 + 20 \frac{(320 - 250)}{(320 - 250) + (320 - 230)} = 120 + 8,8 = 128,8 \quad (3.14)$$

Медіаною називається така величина, що займає серединне положення у варіаційному ряду, в якому варіанти розташовані в зростаючому або спадаючому порядку.

Для дискретного ряду: $Me = \frac{n + 1}{2}$ (3.15)

Для варіаційного ряду (приклад №2): $Me = x_0 + i \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{m-1}}{f_m}$ (3.16)

x_0 – це нижня межа медіального інтервалу.

i – величина інтервалу.

S_{m-1} – сума накопичених частот до медіанного інтервалу.

f_m – частота медіанного інтервалу.

Групування робітників за розміром зарплати (x)	Кількість робітників (f)	Середини інтервалу	Фонд заробітної плати	Наростаючий підсумок частот (накопичені частки)
---	-----------------------------	-----------------------	-----------------------------	---

До 100	80	90	7200	80
100 – 120	250	110	27500	330
120 – 140	320	130	41600	650
140 – 160	230	150	34500	880
Понад 160	120	170	20400	1000
Разом	1000		131200	

(синім позначено медіанний інтервал: серединою кількості робітників є 500, і він належить до накопиченої частки у третьому ряду)

$$Me = 120 + 20 \frac{\frac{1000}{2} - 330}{320} = 120 + 7,5 = 127,5 \quad (3.17)$$

Структурні величини мода і медіана застосовуються для вивчення внутрішньої будови рядів розподілу, тобто їх структури.

Нормований середній бал.

Нормований середній бал застосовується для ознак рангової шкали.

Рангова шкала визначає не тільки подібність елементів, а і послідовність типу "більше-менше", "краще, ніж" тощо.

Для розрахунку нормованого середнього балу необхідно, спочатку, ранжувати значення ознаки в порядку зростання якості. Тоді:

$$\bar{k} = \frac{\bar{x} - \frac{R}{2}}{x'} \quad (3.18)$$

де $\bar{k}$ - нормований середній бал;

$\bar{x}$ - середньозважений ранг;

R – різниця між максимальним і мінімальним значенням рангу.

x' – середина шкали рангів.

Приклад №3. Обстеження показало відношення населення району до медичного обслуговування:

повністю задоволені	15%
частково	50%
не задоволені	35%.

Яке ж в середньому ставлення населення до медичного обслуговування?

Проведемо ранжування: найкраще відношення – 3 бали, частково – 2 бали, не задоволені – 1 бал.

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{3 \cdot 15 + 2 \cdot 50 + 1 \cdot 35}{100} = 1,78 \quad (3.19)$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 3 - 1 = 2 \quad (3.20)$$

$$x' = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad (3.21)$$

$$\bar{k} = \frac{\bar{x} - \frac{R}{2}}{x'} = \frac{1,78 - \frac{2}{2}}{2} = 0,39 \quad (3.22)$$

Отже, 39% населення оцінюють медичне обслуговування як задовільне (оскільки за найвищий ранг ми взяли найкраще обслуговування)[8].

Види рядів розподілу:

- атрибутивні - тобто побудовані за атрибутивною (якісною) ознакою (за статтю, за національністю тощо);
- варіаційні - тобто побудовані за кількісною ознакою (вік, розмір доходу тощо).

Варіаційні ряди розподілу поділяються на: а) *ранжовані* - містять перелік окремих одиниць сукупності у порядку збільшення або зменшення :

Встановлення статистичних закономірностей, що до масових випадкових явищ, ґрунтується на вивченні статистичних даних – відомостей про те, які значення прийняла окрема ознака (випадкова величина X), у наслідок проведення дослідів.

Різні значення ознаки (випадкової величини X) носять назву **варіант** (позначають x).

Розгляд та розуміння даних, що були отримані за результатами вибіркового дослідження (особливо при великій кількості спостережень n) провести досить важко, та за ними практично неможливо уявити характер розподілу ознаки.

Першим кроком до розуміння статистичного матеріалу, що маємо унаслідок проведення деякого дослідження є упорядковування, розташування варіантів за зростанням (зменшенням), тобто **ранжування** ряду. В такому вигляді вивчати дані також не дуже зручно. Це пов'язано з великою кількістю варіантів, тому їх

розбивають на окремі інтервали, тобто проводять **групування**. Кількість інтервалів k треба обрати не дуже великою, бо постає та ж проблема великої кількості варіант, але й не зовсім малим, щоб не втратити особливостей розподілу ознаки.

У деякій літературі кількість інтервалів k визначається як корінь квадратний з об'єму вибірки $k = \sqrt{n}$, проте на практиці майже завжди **використовується формула Стерджеса**, де $k = 1 + 3.322 \lg n$, тоді величина інтервалу l визначається за формулою:

$$(3.23)$$

де $x_{\max} - x_{\min}$ – різниця між найбільшим та найменшим значенням ознаки.

Числа, які показують скільки разів зустрічаються варіанти із даного інтервалу, називають **частотами** (позначають n_i), а їх відношення до загальної кількості спостережень – **частостями**, або відносними частотами, тобто

$$w = \frac{n_i}{n} \quad (3.24)$$

Частоти та відносні частоти називають **вагами**.

Приклад: Розглянемо дискретний ряд оцінок з іспиту 3-го курсу:

2, 3, 3, 5, 4, 3, 4, 4, 5, 2, 5, 4, 3, 3, 5, 4, 3, 3, 3, 3

Ранжуємо його за зростанням:

2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5

Оскільки варіант лише 20, (та вони дискретні) розбивати на інтервали не будемо, а побудуємо одразу ж таблицю 3.1.

Таблиця 3.1.

I	Значення варіант x_i (оцінка)	Частота n_i	Частість $w_i = n_i/n$	Нагромаджена частота	Нагромаджена частість
1	2	2	0,1	2	0,1
2	3	9	0,45	11	0,55
3	4	5	0,25	15	0,8
4	5	4	0,2	20	1
Всього		20	1	-	-

§6. Показники варіації

Головною вадю показників середнього є те, що вони не відображають варіації значень ознак, а вказують лише на деяке середнє, навколо якого групуються інші значення ознаки.

Найпростішим показником варіації є статистичний розмах R , що дорівнює різниці між максимальною та мінімальною варіантами ряду.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Найбільшу цікавість являють міри варіації (розсіювання) спостережень навколо середніх величин.

Дисперсією s^2 статистичного ряду називають середню арифметичну квадратів відхилень варіант від їх середньої арифметичної.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} \quad (3.25)$$

Враховуючи що $w_i = \frac{n_i}{n}$, формулу (1) можна переписати у вигляді

$$s^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 w_i \quad (3.26)$$

Дисперсію s^2 часто називають вибірковою (або емпіричною), на відміну від σ^2 – генеральної дисперсії.

Багато у якості міри варіації мати характеристику, яка була б виражена у тих самих одиницях, що й значення ознаки. Такою характеристикою є **середнє квадратичне відхилення** s – арифметичне значення кореня квадратного з дисперсії.

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}} \quad (3.27)$$

Можна також розглянути характеристику, яка не має розмірності – **коефіцієнт варіації**, який дорівнює відсотковому відношенню середньої квадратичної відхилення до середньої арифметичної.

$$v = \frac{s}{\bar{x}} 100\% \quad (3.28)$$

Якщо значення коефіцієнту варіації досить великі (наприклад, більші 100%), то це свідчить про неоднорідність значень ознаки.

ВЛАСТИВОСТІ ДИСПЕРСІЇ (вони аналогічні до властивостей дисперсії випадкової величини).

1. Дисперсія постійної дорівнює нулю.
2. Якщо всі варіанти збільшити (зменшити) у k разів, то дисперсія збільшиться (зменшиться) у k^2 разів. ($s_{kx}^2 = k^2 s^2$)
3. Якщо всі варіанти збільшити (зменшити) на одне і те саме число, то дисперсія не зміниться.
4. Дисперсія дорівнює різниці між середньою арифметичною квадратів варіантів та квадратом середньої арифметичної.

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (3.29)$$

де

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 n_i}{n} \quad (3.30)$$

5. Якщо ряд складається з декількох груп спостережень, то загальна дисперсія дорівнює сумі середньої арифметичної групових дисперсій та дисперсії між групами.

$$s^2 = s_i^2 + \sigma^2 \quad (3.31)$$

де s^2 – загальна дисперсія (тобто дисперсія всього ряду);

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^l s_{ij}^2 n_{ij}}{n} \quad (3.32)$$

- середня арифметична групових дисперсій

$$s_{ij}^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x}_i)^2 n_j}{n_i}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^l (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i}{n} \quad (3.33)$$

- дисперсія між групами.

Відповідно середнє квадратичне відхилення дорівнює

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,82} \approx 0,9055$$

Коефіцієнт варіації:

$$v = \frac{s}{\bar{x}} 100\% = \frac{0,9055}{3,55} 100\% = 25,5\%$$

Квантилем рівня q (або q -квантилем) називають таке значення x_q випадкової величини, при якому функція її розподілу набуде значення q .

$$F(x_q) = P(X < x_q) = q$$

Визначення середньої арифметичної та дисперсії за формулами (3.34) та (3.35) на практиці інколи призведе до досить громіздких обчислень, тому, враховуючи властивості цих характеристик, можна перейти до наступних формул:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m u_i n_i}{n} \cdot k + c, \quad (3.34)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m u_i^2 n_i}{n} \cdot k - (\bar{x} - c)^2, \quad (3.35)$$

$$\text{де } u_i = \frac{x_i - c}{k}, \quad (3.36)$$

k – величина інтервалу по x , c – середина відповідного інтервалу (частіше за все обирають інтервал, який має найбільшу частоту), тобто перейти до допоміжних варіант (3.36).

Питання для самоконтролю

1. Що таке статистичні ряди розподілу?
2. Які існують ряди розподілу?
3. З яких елементів складаються варіаційні ряди розподілу?
4. Що таке варіанта, частота?

5. На яких ознаках базується інтервальні ряди?
6. Що таке дискретний статистичний розподіл вибірки?
7. Зформулюйте емпіричну функцію.
8. Що таке полігон?
9. Що таке інтервальні ряди?
10. Формула Стержеса.
11. Що таке мода та медіана?
12. Що називають середньою арифметичною?
13. Які властивості середньої арифметичної?
14. Назвіть показники варіації.
15. Формула дисперсії?
16. Які існують властивості дисперсії?
17. Обчислення коефіцієнта варіації.

Лекційне заняття №4

Тема: Статистичні розподіли вибірок та їх числові характеристики.

План

1. Дискретний статистичний розподіл вибірки та її числові характеристики.
2. Інтервальний статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики.

§1. Дискретний статистичний розподіл вибірки та окремі її числові характеристики

Кількісні ознаки елементів генеральної сукупності можуть бути одновимірними і багатовимірними, дискретними і неперервними.

При реалізації вибірки кількісна ознака, наприклад X , набуває конкретних числових значень ($X = x_i$), які називають *варіантами*.

Зростаючий числовий ряд варіант називають *варіаційним рядом*.

Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i раз ($n_i \geq 1$), число n_i називають *частотою варіанти x_i* .

При цьому

$$n = \sum_{i=1}^k n_i, \quad (4.1)$$

де k – кількість варіант, що різняться числовим значенням; n – обсяг вибірки.

Відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n називають її **відносною частотою** і позначають через W_i , тобто

$$W_i = \frac{n_i}{n}. \quad (4.2)$$

Для кожної вибірки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^k W_i = 1. \quad (4.3)$$

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот або відносних частот називають **дискретним статистичним розподілом вибірки**.

У табличній формі він має такий вигляд:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_k
W_i	W_1	W_2	W_3	$\dots$	W_k

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією $F^*(x)$.

Емпірична функція $F^*(x)$ та її властивості. Функція аргументу x , що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}, \quad (4.4)$$

називається **емпіричною функцією**.

Тут n – обсяг вибірки, n_x – кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x ; $F^*(x)$ – називають ще **функцією розподілу відносних частот**.

Властивості $F^*(x)$:

$$1) 0 \leq F^*(x) \leq 1;$$

$$2) F^*(x_{\min}) = 0, \text{ де } x_{\min} \text{ є найменшою варіантою варіаційного ряду;}$$

3) $F^*(x) \Big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

4) $F^*(x)$ є неспадною функцією аргументу x , а саме: $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$.

Полігон частот і відносних частот. Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок $(x_i; n_i)$ або $(x_i; W_i)$.

У першому випадку ламану лінію називають **полігоном частот**, у другому – **полігоном відносних частот**.

Числові характеристики:

1) **вибіркова середня величина** $\bar{x}_B$. Величину, яка визначається формулою

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n}, \quad (4.5)$$

називають **вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу вибірки**.

Тут x_i – варіанта варіаційного ряду вибірки; n_i – частота цієї варіанти; n – обсяг вибірки (4.1);

2) **мода (Мо*)**. **Модой дискретного статистичного розподілу вибірки** називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.

Мод може бути кілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається **одномодальним**, коли має дві моди – **двомодальним** і т. д.;

3) **медіана (Ме*)**. **Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки** називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

4) **розмах (R)**. Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою $x_{\max}$ і найменшою $x_{\min}$ варіантами варіаційного ряду. Ця величина називається **розмахом**

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

§2. Інтервальний статистичний розподіл вибірки та окремі її числові характеристики

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності X , яка є неперервною, то варіант буде багато. У цьому разі варіаційний ряд – це певна кількість рівних або нерівних частинних інтервалів чи груп варіант зі своїми частотами.

Такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють *інтервальний варіаційний ряд*.

На практиці для зручності, як правило, розглядають інтервальні варіаційні ряди з рівними між собою інтервалами.

Перелік часткових інтервалів і відповідних їм частот або відносних частот називають *інтервальним статистичним розподілом вибірки*.

У табличній формі цей розподіл має такий вигляд:

$x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	...	$x_{k-1} - x_k$
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k
W_i	W_1	W_2	W_3	...	W_k

Величина $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ є довжиною часткового i -го інтервалу, k – кількість інтервалів. Як правило, цей інтервал береться однаковим.

Отже, для непевних величин групування вибірових значень проводяться наступним чином: весь діапазон значень, що досліджуються, ділять на інтервали (розряди) та підраховують число значень, які належать кожному з інтервалів.

Позначивши через I_i інтервал, через x_i, x_{i+1} *межі* інтервалів, а через n_i – число значень величини X , що досліджувались в i – тому інтервалі, отримаємо наступний інтервальний варіаційний ряд:

I_i	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_i; x_{i+1})$	...	$[x_k; x_{k+1})$
n_i	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k

Квадратна дужка означає, що тут включається лівий кінець інтервалу і не включається правий (хоча можна домовитись про включення правого і невключення лівого).

Для визначення раціональної величини інтервалу $\Delta x_i = h$ треба використувати формулу Стерджеса:

$$h = (x_{\max} - x_{\min}) / (1 + 3,322 \lg n).$$

Якщо h буде дробовим числом, то його округляють до найближчого цілого або до найближчого нескладного дробу. За x_1 вважають значення, яке дорівнює

$$x_1 = x_{\min} - h/2.$$

Інтервальний статистичний розподіл вибірки можна подати графічно у вигляді гістограми частот або відносних частот, а також, як і для дискретного статистичного розподілу, емпіричною функцією $F^*(x)$.

Гістограма частот та відносних частот. Гістограма частот складається з прямокутників, кожний з яких має основу h і висоту n_i/h .

Гістограма відносних частот є фігурою, що складається з прямокутників, кожний з яких має основу завдовжки h і висоту, що дорівнює W_i/h .

Площа гістограми відносних частот
$$S = \sum_{i=1}^k h \frac{W_i}{h} = \sum_{i=1}^k W_i = 1.$$

Емпірична функція $F^*(x)$. При побудові $F^*(x)$ для інтервального статистичного розподілу вибірки за основу береться припущення, що ознака на кожному частинному інтервалі має рівномірну щільність ймовірностей. Тому $F^*(x)$ матиме вигляд ламаної лінії, яка зростає на кожному частковому інтервалі і наближається до одиниці.

Аналогом емпіричної функції $F^*(x)$ у теорії ймовірностей є інтегральна функція $F(x) = P(X < x)$.

Медіана. Для визначення медіани інтервального статистичного розподілу вибірки необхідно визначити медіанний частковий інтервал. Якщо, наприклад, на i -му інтервалі $[x_i - x_{i+1}]$ $F^*(x_i) < 0,5$ і $F^*(x_{i+1}) > 0,5$, то, беручи до уваги, що досліджувана ознака X є неперервною і при цьому $F^*(x)$ є неспадною функцією, всередині інтервалу $[x_i - x_{i+1}]$ неодмінно існує таке значення $X = Me^*$, де $F^*(Me^*) = 0,5$.

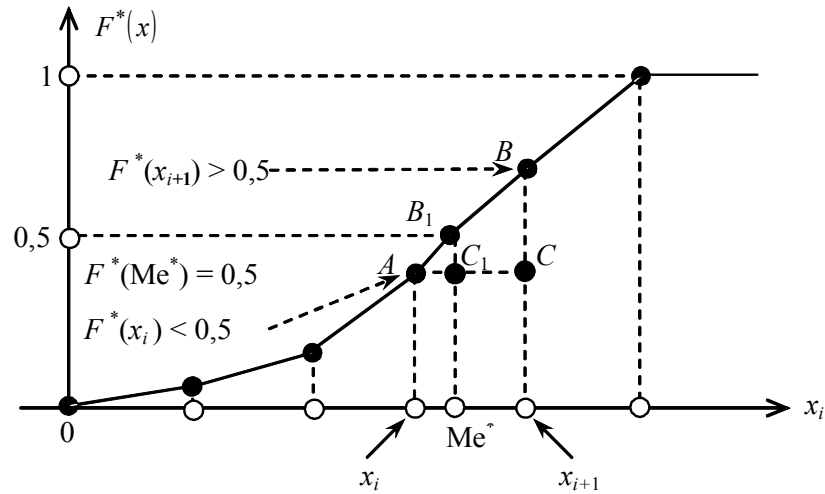


Рис. 4.1

З подібності трикутників $\triangle ABC$ і $\triangle AB_1C_1$, які зображені на рис. 4.1, маємо:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{Me^* - x_i} = \frac{F^*(x_{i+1}) - F^*(x_i)}{0,5 - F^*(x_i)} \rightarrow Me^* = x_i + \frac{0,5 - F^*(x_i)}{F^*(x_{i+1}) - F^*(x_i)} h, \quad (4.6)$$

де $h = x_{i+1} - x_i$ називають **кроком**.

Мода. Для визначення моди інтервального статистичного розподілу необхідно знайти модальний інтервал, тобто такий частинний інтервал, що має найбільшу частоту появи.

Використовуючи лінійну інтерполяцію, моду обчислимо за формулою:

$$Mo^* = x_i + \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{2n_{Mo} - n_{Mo-1} - n_{Mo+1}} h, \quad (4.7)$$

де x_i — початок модального інтервалу; h — довжина, або крок, часткового інтервалу; n_{Mo} — частота модального інтервалу; n_{Mo-1} — частота домодального інтервалу; n_{Mo+1} — частота позамодального інтервалу.

Питання для самоконтролю

Перевірити, чи правильні такі твердження:

1. спостережувані величини обов'язково є випадковими величинами;
2. генеральна сукупність — це множина значень спостережуваної величини;
3. вибірка спостережених значень завжди співпадає з відповідною генеральною сукупністю;

4. вибірка завжди є варіаційним рядом;
5. обсяг вибірки – це кількість спостережених значень;
6. спостережені значення є попарно різними;
7. кількість варіант у вибірці співпадає з її об'ємом;
8. за статистичним рядом розподілу частот даної вибірки можна визначити абсолютну частоту кожної варіанти вибірки;
9. за полігоном частот можна скласти відповідний статистичний ряд розподілу відносних частот;
10. за розмахом вибірки можна визначити її мінімальне та максимальне спостережене значення;
11. кожна вибірка має єдину моду;
12. кожна вибірка має єдину медіану.

Лекційне заняття №5

Тема: Вибіркове спостереження.

План

1. Поняття про вибіркове спостереження та його основні завдання.
2. Основні умови наукової організації вибіркового спостереження.
3. Методи і способи відбору одиниць у вибіркову сукупність.
4. Знаходження середньої і граничної помилок та необхідної чисельності для різних видів вибірок.
5. Способи поширення даних вибіркового спостереження на генеральну сукупність.

§1. Поняття про вибіркове спостереження та його основні завдання

Із всіх видів не суцільного спостереження в практиці статистичних досліджень найбільше визначення і застосування отримало *вибіркове спостереження*.

Вибірковим спостереженням називається такий вид несуцільного спостереження, за характеристикою відібраної частини одиниць якого судять про всю сукупність.

Розрізняють генеральну і вибірку сукупності:

Генеральною сукупністю називається така маса одиниць, з якої проводиться відбір для дослідження.

Вибірковою сукупністю називається частина генеральної сукупності відібрана для обстеження.

Обсяг генеральної сукупності позначають через « N », а вибіркової – через « n ».

Узагальнюючими показниками генеральної сукупності є: середній розмір ознаки « $\bar{x}$ », частка « p », генеральна дисперсія « σ^2_v ».

Узагальнюючими показниками вибіркової сукупності є: середня вибірка « $\tilde{x}$ », вибірка частка « w », дисперсія « σ ».

До вибіркового спостереження статистика вдається у випадках, коли потрібно зекономити сили і засоби при проведенні дослідження, тобто, коли недоцільно або неможливо проводити суцільне спостереження.

Вибіркове спостереження застосовують також у поєднанні із суцільним для поглиблення дослідження, або уточнення і контролю результатів суцільного спостереження.

Вибіркове спостереження складається з таких етапів:

- 1) постановка мети спостереження;
- 2) складання програми спостереження і розробка відповідних даних;
- 3) вирішення організаційних питань проведення спостереження;
- 4) визначення відсотка і способу відбору одиниць;
- 5) проведення відбору;
- 6) реєстрація відповідних ознак у відібраних для дослідження одиниць;
- 7) узагальнення даних спостереження та розрахунок їх вибірових характеристик;
- 8) знаходження помилок вибірки;
- 9) перерахунок характеристик вибіркового спостереження на генеральну сукупність.

Вибіркове спостереження проводиться для вирішення наступних основних завдань:

- 1) визначення середнього розміру досліджуваної ознаки;
- 2) визначення питомої ваги (частки);
- 3) визначення середньої і граничної помилки вибірки;
- 4) знаходження меж для середньої і частки при повторному і без повторному відборі;
- 5) визначення потрібної чисельності вибірки;
- 6) поширення даних вибіркового спостереження на всю сукупність.

§2. Основні умови наукової організації вибіркового спостереження

Науковим обґрунтуванням можливості застосування вибіркового спостереження виступає діалектична єдність одиничного, особливого і загального, згідно якої в кожному одиничному є риси особливого і загального, а загальне володіє рисами одиничного і особливого. Ця єдність дозволяє за одиничним і особливим судити про загальне, за частиною – про ціле, якщо правильно встановлений зв'язок між ними.

Особливістю вибіркового спостереження в порівнянні з іншими видами не суцільного спостереження є те, що при відборі одиниць у вибіркву сукупність забезпечується рівна можливість попадання кожної одиниці у вибірку. Це досягається шляхом неупередженого строгого випадкового відбору за схемою, розробленою математичною статистикою.

Відповідь на питання про те, яка за розміром різниця між генеральними і вибілковими узагальнюючими показниками, з якою ймовірністю можна судити про цю різницю, дає теорія вибіркового методу, на основі закону великих чисел.

За допомогою цього закону розв'язують два взаємозв'язаних завдання:

- 1) розраховують, із заданою ймовірністю, межі можливих відхилень вибіркового від відповідного показника в генеральній сукупності;
- 2) визначають ймовірність того, що розмір можливих відхилень вибіркового показника від генерального не перевищить встановленої межі.

При масовому спостереженні, розподіл емпіричних частот більшості явищ підпорядковується закону нормального розподілу.

Доведено, що за нормальним розподілом більша частина величин зосереджена навколо генеральної середньої. Біля 68,3 % чисельність вибіркової середньої буде знаходитись в межах $\pm\sigma$ генеральної середньої; 95,4 % цієї чисельності знаходиться в межах $\pm 2\sigma$ і 99,7 % – не вийде за межі $\pm 3\sigma$.

Нормальний розподіл показує частоту виникнення помилок даного розміру середньої.

Принцип строгої випадковості, який покладений в основу вибірки, забезпечує його об'єктивність, дозволяє встановити межі можливих помилок і отримати практично достовірні дані для характеристики всієї сукупності явищ.

Така вибірка сукупність називається **представницькою** або **репрезентативною**. В її склад входять представники всіх груп, з яких складається генеральна сукупність.

Точність результатів вибіркового спостереження, в кінцевому підсумку, буде залежати від способу відбору одиниць, ступеня коливання ознаки в сукупності та від числа одиниць, що їх спостерігатимуть.

§3. Методи і способи відбору одиниць у вибірку сукупність

Способом відбору називається система організації відбору одиниць з генеральної сукупності.

Розрізняють два методи відбору одиниць у вибірку сукупність: *повторний і безповторний*.

Повторним називається такий метод відбору, при якому кожна раніше відібрана одиниця повертається в генеральну сукупність і може знову брати участь у вибірці.

Безповторним називається такий метод відбору, при якому кожна раніше відібрана одиниця не повертається в генеральну сукупність і в подальшій вибірці участі не бере.

Оскільки безповторний відбір охоплює постійно нові одиниці сукупності, а повторний – одну і ту ж сукупність, тому безповторний відбір дає більш точні результати.

Повторний і безповторний методи відбору, в залежності від характеру одиниці відбору, застосовується в поєднанні з іншими видами відбору.

В практиці статистичного дослідження використовуються **три види відбору:**

- 1) індивідуальний – відбір окремих одиниць сукупності;
- 2) груповий (серійний) – відбір груп (серій) одиниць;
- 3) комбінований – комбінація індивідуального і групового.

За способом відбору одиниць для обстеження розрізняють такі **види вибіркового спостереження:**

- 1) власне випадкова вибірка;
- 2) механічна вибірка;
- 3) типова (районована) вибірка;
- 4) серійна (гніздова) вибірка;
- 5) комбінована вибірка;
- 6) проступінчаста і багаступінчаста вибірка;
- 7) однофазна і багатофазна вибірка;
- 8) інші види вибірки.

Власне випадковою називається така вибірка, при якій відбір одиниць з генеральної сукупності є випадковим. Часто для цього застосовують жеребкування або таблицю випадкових чисел.

Механічна вибірка – це послідовний відбір одиниць через рівні проміжки в порядку визначеного розташування їх в генеральній сукупності, або в якому-не будь переліку. Інтервали відбору визначаються у відповідності з часткою відбору одиниць (кожна п'ята, десята, сота і т.д.).

При типовому відборі генеральну сукупність поділяють на однорідні групи за певною ознакою, райони, зони. Потім з кожної групи випадковим або механічним способом відбирають певну кількість одиниць, пропорційно частці групи в загальній сукупності.

При серійній (гніздовій) вибірці відбір одиниць проводять цілими групами (серіями, гніздами) сукупності в межах яких обстежують всі одиниці без винятку.

Серії для спостереження відбирають випадково, частіше неповторним способом механічної вибірки.

Комбінованою називається така вибірка, коли комбінують два або кілька видів вибірок. Перш за все, комбінують суцільне і вибіркове спостереження. В даному випадку, за основною програмою обстежується генеральна сукупність, а за додатковою – вибірковою.

Одноступінчастою називається вибірка, коли із досліджуваної сукупності зразу відбираються одиниці або серії одиниць для безпосереднього обстеження.

Багатоступінчаста вибірка передбачає поступове вилучення із генеральної сукупності спочатку укрупнення груп одиниць, потім груп менших за обсягом, і так до тих пір, поки не відберуть відповідні групи або одиниці, які будуть досліджуватись. Вибірка може бути двох-, трьох і більше ступінчастою.

Якщо необхідні дані можна отримати на основі вивчення всіх первинно відібраних одиниць, застосовують **однофазну вибірку**, а якщо тільки на основі деякої її частини, відібраної так, що вона складає підвибірку із початково проведеної вибірки – **багатофазну**.

Багатофазною називається така вибірка, коли одні відомості збираються від всіх одиниць відбору, потім відбираються ще деякі одиниці і обстежуються за більш широкою програмою. При багатофазній вибірці на кожній фазі зберігається одна і та ж одиниця відбору.

Розрахунок помилок репрезентативності багатоступінчастої і багатофазної вибірок проводиться для кожної ступені і фази окремо.

Бувають випадки, коли необхідно застосувати інші види відбору, такі як взаємопроникаючі і квантильні вибірки, направлений відбір, моментні спостереження, або скористатись малою вибіркою.

Взаємопроникаючою називається така вибірка, коли із однієї генеральної сукупності проводять одним і тим же способом декілька незалежних вибірок.

Взаємопроникаючі вибірки завжди проводять різні, незалежні один від одного дослідники, що дозволяє порівнювати підсумки по всіх частинах і

забезпечити взаємну перевірку їх роботи. Взаємопроникаючі вибірки дають незалежні одна від одної оцінки значень досліджуваної сукупності, і, якщо результати різних вибірок близькі між собою, то такі оцінки дуже переконливі.

Помилки взаємопроникаючих вибірок визначаються за формулами типової пропорційної вибірки.

Квантильні вибірки застосовують тоді, коли виникає потреба дослідження даних суцільного спостереження за додатковою програмою.

Для проведення квантильної вибірки рангують потрібну варіаційну ознаку і за її нагромадженими частотами будують огіву. За огіву механічним способом відбирають потрібну частину одиниць для дослідження цієї ж ознаки. Якщо огіва вибіркової сукупності добре відтворює огіву генеральної сукупності, то помилка репрезентативності буде мінімальною.

Направлений відбір використовують тоді, коли за відомим середнім значенням ознаки в генеральній сукупності вибіркова сукупність повинна характеризувати її структуру за іншими ознаками.

Направлений відбір передбачає проведення відбору таким чином, щоб середній розмір відібраних одиниць дорівнював середньому розміру одиниць всієї сукупності. В тому випадку, коли заміна однієї одиниці іншою призводить до наближеної рівності середніх генеральної і вибіркової сукупностей, вибірку вважають врівноваженою і репрезентативною за всіма іншими ознаками сукупності. Таким чином, **направленим відбором** називається врівноваження за однією ознакою для вибіркового дослідження інших ознак.

Помилку вибірки направленої відбору визначають в залежності від способу проведення відбору одиниць до врівноваження.

Моментне спостереження використовується для вивчення використання робочого часу робітниками або часу роботи устаткування. В кожний момент спостереження фіксують, чи знаходився робітник або верстат в роботі, а якщо ні то з яких причин. Вибіркове моментне спостереження вважають через те, що охоплює не весь час роботи цеху, а лише визначені моменти часу.

Малою вибіркою називається вибіркова сукупність, яка складається з порівняно невеликої кількості одиниць (20-30). На практиці іноді доводиться

обмежуватись малою кількістю спостережень (при перевірці якості продукції, зв'язаної із знищенням продукції, яку перевіряють). Математичною статистикою доведено, що і при малих вибірках характеристики вибіркової сукупності можна поширити на генеральну.

При малих вибірках дисперсію обчислюються з врахуванням кількості ступенів вільності варіації.

Англійський вчений Стюдент винайшов закон розподілу відхилень вибірових середніх від генеральної середньої для малих вибірок. Опираючись на цей закон, він склав спеціальні таблиці, в яких наводяться значення критерію «*t*» для малих вибірок.

§4. Знаходження середньої і граничної помилок та необхідної чисельності для різних видів вибірок

Для вибіркового спостереження властиві помилки реєстрації і помилки репрезентативності.

Помилки репрезентативності становлять різницю між середніми і відносними показниками вибіркової сукупності та відповідними показниками генеральної сукупності. Вони поділяються на систематичні та випадкові.

Систематичні помилки репрезентативності зумовлені внаслідок порушення принципів проведення вибіркового спостереження.

Випадкові помилки репрезентативності зумовлені тим, що вибіркова сукупність не відображає точно середні і відносні показники генеральної сукупності.

Визначення величини випадкових помилок репрезентативності є одним з головних завдань теорій вибіркового методу.

Для узагальнюючої характеристики помилки вибірки вираховують середню помилку репрезентативності, яку позначають через грецьку букву «*мю*» (μ) і називають ще стандартом.

Для визначення середньої помилки репрезентативності власне випадкової і механічної вибірки застосовують чотири формули для повторного і без повторного відбору.

Спосіб відбору	При визначенні середньої	При визначенні частки
Повторний	$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$
Безповторний	$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$	$\mu = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$

де μ – середня помилка репрезентативності;

σ^2 – середній квадрат відхилень у вибірці;

n – чисельність вибіркової сукупності;

N – чисельність генеральної сукупності;

$\left(1 - \frac{n}{N}\right)$ – необстежена частка генеральної сукупності;

$\frac{n}{N}$ – частка обстеженої частини вибіркової сукупності;

w – частка даної ознаки у вибірці;

$(1 - w)$ – частка протилежної ознаки у вибірці.

На практиці частіше використовують безповторний відбір, який гарантує більш точні результати.

Для узагальнюючої характеристики помилки вибірки поряд із середньою розраховують ще і граничну помилку вибірки.

При вибіркового спостереженні розмір граничної помилки репрезентативності « Δ » може бути більший, дорівнювати або менший від середньої помилки репрезентативності « μ ». Тому величину граничної помилки репрезентативності обчислюють з певною ймовірністю « p », якій відповідає t -разове значення « μ ». З введенням показника кратності помилки « t », формула

граничної помилки репрезентативності матиме вигляд: $\Delta = t \mu$; $t = \frac{\Delta}{\mu}$,

де μ – середня помилка вибірки;

t – коефіцієнт довір'я, який залежить від ймовірності визначення граничної помилки.

Ймовірність відхилень вибіркової середньої від генеральної середньої при достатньо великому обсязі вибірки і обмеженій дисперсії генеральної сукупності

підпорядковується закону нормального розподілу. Ймовірність цих відхилень при різних значеннях « t » визначається за формулою:

$$F(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (5.1)$$

Значення цього інтеграла при різних значеннях « t » табульовані і приводяться в спеціальних таблицях, наприклад:

для $t=1$ $p(\Delta \leq \mu) = 0,683$; для $t=2$ $p(\Delta \leq \mu) = 0,954$;

для $t=3$ $p(\Delta \leq \mu) = 0,997$; для $t=4$ $p(\Delta \leq \mu) = 0,999$.

Гранична помилка вибірки дає можливість встановити, в яких межах знаходиться величина генеральної середньої або частки.

Із теореми Чебишева знаходять, що:

$$x - \Delta_x \leq x \leq x + \Delta_x$$

Додаючи граничну помилку вибірки до вибіркової частки і віднімаючи її від неї, знаходять межі генеральної частки:

$$p - \Delta p \leq p \leq p + \Delta p$$

На основі формул граничної помилки вибірки розв'язують наступні завдання:

1) визначають довірчі межі генеральної середньої і частки з прийнятою ймовірністю;

2) визначають ймовірність того, що відхилення між вибірковими і генеральними характеристиками не перевищать визначену величину;

3) визначають необхідну чисельність вибірки, яка із заданою ймовірністю забезпечить прийнятну точність вибірових показників.

Розглянемо приклад. При 2% власне випадковому відборі у відібраних для обстеження 100 деталей встановлено, що середня вага однієї деталі 2500 г; дисперсія 900, із 100 деталей 10 виявились бракованими. З ймовірністю 0,954 встановити межі середньої ваги однієї деталі в генеральній сукупності, а з ймовірністю 0,997 – межі частки якісних деталей в генеральній сукупності.

Граничну помилку визначаємо $\Delta x = t\mu$ за формулою безповторного відбору, так як чисельність генеральної сукупності можна знайти:

$$N = \frac{100 \cdot 100}{2} = 5000 \text{ шт.} \quad (5.2)$$

В спеціальній таблиці знаходимо, що для ймовірності 0,954 $t = 2$, а для ймовірності 0,997 $t = 3$.

Таким чином отримаємо:

$$\Delta_x = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2 \sqrt{\frac{900}{100} \left(1 - \frac{100}{5000}\right)} = 2 \sqrt{9 \cdot 0,98} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ г.}$$

Звідси довірчі межі генеральної середньої будуть наступні:

$$\begin{aligned} \tilde{x} - \Delta_x &\leq \bar{x} \leq \tilde{x} + \Delta_x; \\ 2500 - 6 &\leq \bar{x} \leq 2500 + 6; \\ 2494 &\leq \bar{x} \leq 2506. \end{aligned}$$

Тобто, з ймовірністю 0,954 можна стверджувати, що середня вага однієї деталі в генеральній сукупності знаходиться в межах від 2494 г. до 2506 г.

Аналогічно вирішується завдання і при визначенні інтервалів (меж) для генеральної частки. Вибіркова частка якісних деталей:

$$w = \frac{m}{n} = \frac{90}{100} = 0,9,$$

де m – кількість якісних деталей у вибірковій сукупності;

n – кількість відібраних деталей.

$$\Delta_p = t \sqrt{\frac{w - (1 - w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 3 \sqrt{\frac{0,9(1 - 0,9)}{100} \left(1 - \frac{100}{5000}\right)} = 3 \cdot 0,03 = 0,09,$$

$$\begin{aligned} w - \Delta_p &\leq p \leq w + \Delta_p, \\ 0,9 - 0,09 &\leq p \leq 0,9 + 0,09, \\ 0,81 &\leq p \leq 0,99. \end{aligned}$$

Таким чином, з ймовірністю 0,997 можна стверджувати, що частка якісних деталей в генеральній сукупності знаходиться в межах від 81% до 99%.

При розрахунках вибірових характеристик інколи ставиться завдання визначення ймовірності допуску певної помилки, тобто відхилення від

відповідних характеристик генеральної сукупності не більше ніж на певну завдану величину, яку знаходять за формулою граничної помилки.

Використавши розрахунки попередньої задачі знаходимо для середньої:

$$t = \frac{\Delta_x}{\mu} = \frac{6}{3} = 2.$$

Для даного значення ($t = 2$) відповідає ймовірність ($p = 0,954$). Це дає право стверджувати, що при визначенні за вибірковими даними середньої ваги деталей

($\bar{x} = 2500 \text{ г}$) допущена помилка, яка не перевищує 6 г.

Аналогічно розраховують ймовірність допуску помилки для частки:

$$t = \frac{\Delta_p}{\mu} = \frac{0,09}{0,03} = 3.$$

Для цього значення ($t = 3$) відповідає ймовірність ($p = 0,997$). Таким чином, майже достовірно можна стверджувати, що при визначенні за вибірковими даними частки якісних деталей ($w = 0,9$) допущена помилка, яка не перевищує 9%.

При організації проведення вибіркового спостереження важливе значення має правильне визначення необхідної чисельності вибірки, яка з відповідною ймовірністю забезпечить встановлену точність результатів спостереження.

Чисельність вибірки залежить від наступних чинників:

1) від варіації досліджуваної ознаки. Чим більша варіація, тим більшою повинна бути чисельність вибірки, і навпаки;

2) від розміру можливої граничної помилки вибірки. Чим менший розмір можливої помилки, тим більша повинна бути чисельність вибірки. Існує правило, якщо помилку потрібно зменшити в три рази, то чисельність вибірки збільшують в дев'ять раз;

3) від розміру ймовірності, з якою гарантуватимуть результати вибірки. Чим більша ймовірність, тим більша повинна бути чисельність вибірки;

4) від способу відбору одиниць у вибірку сукупність для обстеження.

Основні формули для знаходження необхідної чисельності вибірки для власне випадкової і механічної вибірки.

Способи відбору	Чисельність вибірки	
	при визначенні середньої	при визначенні частки
Повторний	$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\Delta_x^2}$	$n = \frac{t^2 w(1-w)}{\Delta_p^2}$
Безповторний	$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{\Delta_x^2 N + t^2 \sigma^2}$	$n = \frac{t^2 w(1-w)N}{\Delta_p^2 N + t^2 w(1-w)}$

Покажемо застосування цих формул на прикладі. Припустимо, що для району, в якому є 8000 корів, необхідно організувати вибіркове спостереження з метою встановлення річної удійності корів. Якою повинна бути чисельність вибірки?

Якщо орієнтуватись на повторний вибір, то при граничній помилці в 30 кг. з ймовірністю ($p = 0,954$) і при середньому квадратичному відхиленні 300 кг., визначеному за результатами аналогічних обстежень, необхідна чисельність вибірки повинна бути:

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\Delta_x^2} = \frac{2^2 \cdot 300^2}{30^2} = \frac{4 \cdot 90000}{90} = 400 \text{ корів.}$$

При безповторному відборі необхідна чисельність вибірки буде дорівнювати:

$$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{\Delta_x^2 N + t^2 \sigma^2} = \frac{4 \cdot 90000 \cdot 8000}{900 \cdot 8000 + 4 \cdot 90000} = 380 \text{ корів.}$$

Цей розрахунок підтверджує, що при інших рівних умовах, обсяг вибірки при безповторному відборі завжди буде менший, ніж при повторному.

Для визначення частки породних корів з помилкою не більше 5 %, при ймовірності 0,954 і дисперсії альтернативної ознаки 0,25, знаходимо при повторному відборі:

$$n = \frac{t^2 w(1-w)}{\Delta_p^2} = \frac{4 \cdot 0,25}{0,0025} = 400 \text{ корів,}$$

і при безповторному відборі:

$$n = \frac{t^2 w(1-w)N}{\Delta_p^2 N + t^2 w(1-w)} = \frac{8000}{0,0025 \cdot 8000 + 1} = \frac{8000}{21} = 380 \text{ корів.}$$

Таким чином, для забезпечення прийнятої точності при повторному відборі необхідно обстежити 400 корів, а при безповторному відборі – 380.

Розрахунок граничної помилки вибірки при **типовому відборі** проводиться за допомогою формул:

Спосіб відбору	Гранична помилка вибірки	
	для середньої	для частки
Повторний	$\Delta_x = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\Delta_x = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$
Безповторний	$\Delta_x = t \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$	$\Delta_p = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$

де $\overline{\sigma_i^2}$ – середня групова дисперсія;

$\overline{w(1-w)}$ – середня дисперсія альтернативної ознаки для частки.

Необхідна чисельність типової вибірки визначається за формулою:

$$n = \frac{t^2 \overline{\sigma^2} N}{\Delta_x^2 N + t^2 \overline{\sigma^2}}. \quad (5.3)$$

Гранична помилка **серійної вибірки** визначається за формулами:

Спосіб відбору	Гранична помилка вибірки	
	для середньої	для частки
Повторний	$\Delta = t \sqrt{\frac{\delta_x^2}{s}}$	$\Delta = t \sqrt{\frac{\delta_p^2}{s}}$
Безповторний	$\Delta = t \sqrt{\frac{\delta_x^2}{s} \left(1 - \frac{s}{S}\right)}$	$\Delta = t \sqrt{\frac{\delta_p^2}{s} \left(1 - \frac{s}{S}\right)}$

де δ^2 – міжсерійна (міжгрупова) дисперсія середніх;

S – число серій в генеральній сукупності;

s – число відібраних серій.

Необхідна чисельність вибірки при серійному відборі визначається за формулами:

$$s = \frac{t^2 \delta^2}{\Delta_x^2};$$

а) для повторного відбору: (5.4)

$$s = \frac{t^2 \delta^2 S}{\Delta_x^2 S + t^2 \delta^2}.$$

б) для безповторного відбору: (5.5)

В статистичній практиці вибірконе спостереження із великих масивів генеральної сукупності часто проводиться у вигляді **комбінованої, ступінчастої або багатозначної вибірки**.

Загальна помилка при комбінованій вибірці складається із помилок, які можливі на кожній ступені, і визначається як корінь квадратний із квадратів помилок відповідних вибірок. Якщо серійну вибірку скомбінувати з власне випадковою або механічною, то гранична помилка вибірки визначається за формулою:

$$\Delta_x = t \sqrt{\frac{\delta^2}{s} - \left(1 - \frac{s}{S}\right) + \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}. \quad (5.6)$$

При **моментному методі спостереження** гранична помилка частки визначається як при звичайній повторній власне випадковій вибірці.

Для визначення необхідної чисельності моментів спостереження застосовується формула:

$$n = \frac{0,25 t^2}{\Delta^2}. \quad (5.7)$$

При малих вибірках розподіл вибірових середніх і помилок вибірки відрізняється від нормального. Тому для оцінки результатів малої вибірки використовують дещо видозмінені формули. Середня помилка малої вибірки розраховується за формулою:

$$\mu_{м.в.} = \sqrt{\frac{S_{м.в.}^2}{n-1}} = \frac{S_{м.в.}}{\sqrt{n-1}}, \quad (5.8)$$

$$S_{м.в.} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}};$$

де,

$n-1$ – число ступенів вільності варіацій, які вказують на кількість різних можливих значень варіантів і їх середньою арифметичною.

§5.Способи поширення даних вибіркового спостереження на генеральну сукупність

Кінцевою практичною метою всякого вибіркового спостереження є поширення його характеристик генеральну сукупність.

Існують два способи розповсюдження даних вибіркового спостереження:

- 1) спосіб прямого перерахування;
- 2) спосіб коефіцієнтів.

Спосіб прямого перерахування застосовують в тому випадку, коли на основі вибірки розраховують об'ємні показники генеральної сукупності, використовуючи для цього вибіркові середню або частку. В першому випадку середній розмір ознаки, визначений в результаті вибіркового спостереження, множиться на кількість одиниць генеральної сукупності.

Встановивши, наприклад, в результаті вибіркового спостереження продуктивності тваринництва, яке перебуває в особистій власності, що середній річний надій молока на одну корову в області становить 2500 кг., і знаючи, що всього в області в особистій власності є 20000 корів, можемо отримати величину валютного надою молока: $2500 \cdot 20000 = 50000000$ або 50 тис. т. Якщо при цьому відомо, що середня помилка вибірки з певною ймовірністю дорівнює ± 20 кг., а, отже, генеральна середня з тією ж ймовірністю коливається в межах від 2480 до 2520 кг., то загальний валовий надій молока з врахуванням помилки вибірки буде коливатися від 49,6 тис. т. до 50,4 тис. т.

Спосіб поправочних коефіцієнтів застосовується в тих випадках, коли вибіркоче спостереження проводиться з метою перевірки і уточнення результатів суцільного спостереження. В даному випадку, співставляючи дані вибіркового спостереження із суцільним, вираховують поправочний коефіцієнт, який

використовують для внесення поправок в матеріали суцільних спостережень. Так, по закінченні переписів худоби проводять 10%-не контрольне вибіркове обстеження худоби, яка знаходиться в особистій власності населення, і якщо в результаті контрольного обходу виявляється недооблік, тоді дані перепису коригуються на відсоток недообліку.

Припустимо, що в результаті перепису худоби, яка знаходиться в особистій власності населення району є 15000 свиней, в тому числі в населених пунктах, де проводиться 10%-на вибірка – 1200 свиней. В результаті контрольних обходів в цих же населених пунктах було обчислено 1215 свиней. Тобто, при переписі було

недообліковано 15 голів свиней, що складає 1,25 % $\left(\frac{15}{1200} \cdot 100 \right)$.

За допомогою цього поправочного коефіцієнта уточнюють матеріали перепису суцільного спостереження. В даному випадку по району всього

недообліковано 187 голів свиней $\left(\frac{1,25 \cdot 15000}{100} \right)$.

Отже, загальна кількість свиней, які знаходяться в особистій власності населення району з поправкою на недооблік, складає 1387 голів (1200 + 187).

Питання для самоконтролю

1. Що таке вибіркове спостереження?
2. Що називають генеральною сукупністю?
3. Методи відбору одиниць у вибірковій сукупності.
4. Види вибірок?
5. Види вибіркових спостережень?
6. Помилка репрезентативності це?
7. Назвіть випадкові помилки?
8. Назвіть способи розповсюдження даних вибірок спостереження?

Лекційне заняття №6

Тема: Точкові та інтервальні оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності

План

1. Точкові оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності.
2. Основні закони розподілу та вибіркові оцінки параметрів розподілу.
3. Інтервальні оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності.

§ 1. Точкові оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності

На практиці виникає необхідність за даними вибірки зробити оцінки параметрів закону розподілу. Статистичні оцінки можна поділити на точкові та інтервальні.

Точковою називають оцінку, яка визначається одним числом. При малому об'ємі вибірки точкові оцінки можуть мати значне розходження зі значенням параметра, що оцінюється. Це, у свою чергу, може призвести до грубих помилок. Більш точними є інтервальні оцінки.

Незміщеною називають статистичну оцінку, математичне сподівання якої дорівнює параметру, що оцінюється, при будь-якому об'ємі вибірки.

Числові характеристики:

- 1) **Вибіркова середня величина** $\bar{x}_B$. Величину, яка визначається формулою

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{n}, \quad (6.1)$$

називають **вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу вибірки**.

Тут x_i – варіанта варіаційного ряду вибірки; n_i – частота цієї варіанти; n –

обсяг вибірки ($n = \sum_{i=1}^k n_i$).

Вибіркова середня величина $\bar{x}_B$ є незміщеною оцінкою математичного сподівання генеральної сукупності.

2) **Дисперсія.** Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_B$ вибирається дисперсія.

Дисперсія вибірки – це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_B$, яке обчислюється за формулою

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n} \quad (6.2)$$

або

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2. \quad (6.3)$$

Величина D_B є зміщеною оцінкою дисперсії генеральної сукупності.

Незміщеною оцінкою дисперсії генеральної сукупності є **виправлена дисперсія**, яка може бути розрахована за формулою

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B. \quad (6.4)$$

При великих об'ємах n вибіркова і виправлена дисперсії відрізняються мало. На практиці користуються виправленою дисперсією приблизно при $n < 30$.

3) **Середнє квадратичне відхилення вибірки σ_B .** При обчисленні D_B відхилення підноситься до квадрата, отже, змінюється одиниця виміру ознаки X . На основі дисперсії вводиться середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}, \quad (6.5)$$

яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_B$, але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака X .

4) **Коефіцієнт варіації V .** Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями $\bar{x}_B$, які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою:

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} 100\%. \quad (6.6)$$

Для визначення $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B$ перейдемо від інтервального розподілу до дискретного, варіантами якого є середина часткових інтервалів

$x_i^* = x_i + \frac{h}{2} = x_{i+1} - \frac{h}{2}$ і який має такий вигляд:

x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	$\dots$	x_k^*
n_i	n_1	n_2	n_3	$\dots$	n_k

Тоді $\bar{x}_B, D_B, \sigma_B$ обчислюються за формулами:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^* n_i}{h}, \quad (6.7)$$

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i^*)^2 n_i}{h} - (\bar{x}_B)^2; \quad (6.8)$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}. \quad (6.9)$$

§2. Основні закони розподілу та вибіркові оцінки параметрів розподілу

Розглянемо приклади випадкових величин, що найчастіше використовуються у дослідженнях:

1. Неперервна випадкова величина **розподілена нормально**, якщо її

диференціальна функція розподілу має вигляд $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ (6.10)

Числа a, σ називають параметрами розподілу, їхні вибіркові оцінки знаходять за формулами $a = \bar{x}_B, \sigma_B = \sqrt{s^2} = s$. (6.11)

2. Випадкова величина, що має сталу диференціальну функцію $f(x) = \frac{1}{b-a}$, де $a \leq x \leq b$, та $f(x) = 0$, якщо $x < a$ і $x > b$, розподілена **рівномірно** і має

параметри розподілу a, b . Їхні вибіркові оцінки обчислюються за формулами

$$\bar{a} = \bar{x}_B - \sqrt{3} \cdot \sigma_B, \quad \bar{b} = \bar{x}_B + \sqrt{3} \cdot \sigma_B. \quad (6.12)$$

3. Випадкова величина, диференціальна функція якої $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ та $f(x) = 0$, якщо $x < 0$, має *експоненціальний (показниковий) розподіл*.

Параметр розподілу λ має оцінку $\bar{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}_B}$. (6.13)

4. **Біноміальним** є закон розподілу випадкової величини X , ймовірності якої обчислюються за формулами Бернуллі:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad (6.14)$$

де $q = 1 - p$; n, p – параметри.

Параметр розподілу p має оцінку $p^* = \frac{\bar{x}_B}{m}$, (6.15)

де m – максимальне число появи події у випробуванні.

5. У випадку, коли p є дуже малим числом, а число n – достатньо великим, замість формули Бернуллі слід використовувати формулу

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad (\text{розподіл Пуассона}). \quad (6.16)$$

Параметр розподілу $\lambda = np$ має оцінку $\bar{\lambda} = \bar{x}_B$.

§3. Інтервальні оцінки статистичних характеристик та параметрів генеральної сукупності

Більш точними є інтервальні оцінки. *Інтервальною* називають оцінку, яка визначається двома кінцями інтервалу.

Нехай за даними вибірки знайдена статистична оцінка θ^* невідомого параметра θ , яке будемо вважати постійним числом.

Надійність оцінки θ по θ^* називають ймовірність γ , з якою виконується

$$P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma. \text{ Тут число } \delta \text{ називають } \textbf{точністю} \text{ оцінки.}$$

Зазвичай, надійність оцінки задають наперед і в якості значень γ беруть число, близьке до 1, наприклад, 0,95; 0,99; 0,999.

Побудова довірчого інтервалу для $\bar{X}_\Gamma$ при відомому значенні σ_Γ із заданою надійністю γ .

Нехай ознака X генеральної сукупності має нормальний закон розподілу. Побудуємо довірчий інтервал для середнього значення генеральної сукупності $\bar{X}_\Gamma$, знаючи числове значення середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності σ_Γ , із заданою надійністю γ . Оскільки $\bar{x}_B$ як точкова незміщена статистична оцінка для $\bar{X}_\Gamma = M(x)$ має нормальний закон розподілу з числовими

характеристиками $M(\bar{x}_B) = \bar{X}_\Gamma = a$, $\sigma(\bar{x}_B) = \frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$, дістанемо

$$P(|\bar{x}_B - a| < \delta) = \gamma. \quad (6.17)$$

Отже, довірчий інтервал дорівнюватиме:

$$\bar{x}_B - \frac{x \cdot \sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{x \cdot \sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}, \quad (6.18)$$

Аргумент x знаходимо за значеннями функції Лапласа (додаток 1).

Величина $\frac{x \cdot \sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$ називається *точністю оцінки, або похибкою вибірки*.

Побудова довірчого інтервалу для $\bar{X}_\Gamma$ при невідомому значенні σ_Γ із заданою надійністю γ .

У випадку малих вибірок для оцінювання $\bar{X}_\Gamma = a$ при невідомому значенні σ_Γ неможливо скористатися нормальним законом розподілу. Обчисливши за даним статистичним розподілом $\bar{x}_B$, s і визначивши за таблицею розподілу Стюдента значення t_γ , будуємо довірчий інтервал

$$\bar{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}. \quad (6.19)$$

Тут $t_\gamma(\gamma, k = n - 1)$ обчислюємо за заданою надійністю γ і числом ступенів вільності $k = n - 1$ за таблицею (додаток).

Побудова довірчих інтервалів із заданою надійністю γ для D_{Γ} , σ_{Γ} .

У разі, коли ознака X має нормальний закон розподілу, для побудови довірчого інтервалу із заданою надійністю γ для D_{Γ} , σ_{Γ} застосовуємо випадкову величину

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_{\Gamma}^2} s^2, \quad (6.20)$$

що має розподіл χ^2 із $k = n - 1$ ступенями вільності.

Для нормального розподілу справедлива формула для границь довірчого інтервалу для дисперсії при довірчій ймовірності (надійності) γ :

$$\frac{n \cdot s^2}{\chi_2^2} < D_{\Gamma} < \frac{n \cdot s^2}{\chi_1^2}, \quad (6.21)$$

де χ_1^2 – значення випадкової величини, що має розподіл χ^2 (хі – квадрат

Пірсона) з числом ступенів вільності $f_1 = n - 1$ при рівні значущості $\alpha_1 = 1 - \frac{\alpha}{2}$, де

$\alpha = 1 - \gamma$; χ_2^2 – значення випадкової величини, що має розподіл χ^2 з числом

ступенів вільності $f_2 = n - 1$ при рівні значущості $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$.

Тоді довірчий інтервал для σ_{Γ} впливає із (2.14) і буде таким:

$$\frac{s\sqrt{n-1}}{\chi_2} < \sigma_{\Gamma} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\chi_1}. \quad (6.22)$$

Значення χ_1^2 , χ_2^2 знаходимо за таблицею (додаток 3) згідно з рівностями:

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}; \quad (6.23)$$

$$P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2}, \quad (6.24)$$

де $\alpha = 1 - \gamma$.

Питання для самоконтролю

1. Точковою оцінкою називають...?
2. Незміщена оцінка?

3. Які існують числові характеристики?
4. Формула вибіркової середньої величини?
5. Формула дисперсії вибірки.
6. Формула середнього квадратичного відхилення?
7. Назвіть випадкові величини, які найчастіше використовуються у дослідженнях?
8. Що називають надійністю оцінки?

Лекційне заняття №7

Тема: Графічні методи зображення статистичних даних

План

1. Поняття про статистичні графіки і правила їх побудови.
2. Види графіків.
3. Основні елементи статистичних графіків.
4. Графічне зображення статистичних даних рядів розподілу.

§ 1. Поняття про статистичні графіки і правила їх побудови

Статистичні дані можна зобразити різними способами. Найбільш **наочне** зображення дає застосування **графіків**.

Графіком у статистиці називають наочне зображення статистичних величин за допомогою геометричних фігур.

Графічний засіб зображення статистичних даних доповнює статистичні таблиці, а іноді й замінює їх. За допомогою графіків статистичний матеріал стає більш зрозумілим, краще усвідомлюється і запам'ятовується. Графіки мають велике значення у справі оперативного керівництва, тому при наведенні даних про стан злочинності органами внутрішніх справ обов'язково використовуються графіки.

До статистичних графіків ставляться такі основні вимоги :

- 1) графіки повинні абсолютно точно відображати вихідні дані;
- 2) бути наочними і зрозумілими;
- 3) повинні бути художньо оформленими.

Графічний метод – це метод умовних зображень статистичних даних за допомогою фігур, ліній, крапок і різноманітних символічних образів.

Правильно побудовані графіки є наглядними, приваблюють до себе увагу, є виразними і запам'ятовуються. Вони широко використовуються в пропагандистській і агітаційній роботі.

Для побудови графіка необхідно знати, з якою метою будується графік, вивчити матеріал і володіти методикою складання графіка.

Основними елементами графіка є: поле графіка, геометричні знаки, масштабні орієнтири і експлікація графіка.

Поле графіка – це простір, на якому розміщені ті геометричні фігури, які утворюють графік.

Розмір графіків залежить від їх використання, призначення (для лекційного залу, цеху).

Геометричні знаки чи образи – це багатообразні знаки за допомогою яких зображують статистичні величини (крапки, прямі лінії, квадрати, прямокутники, рисунки, ескізи і т.д.). знаки становлять основу графіка, це його мова. Вибір знака залежить від того, що необхідно показати.

Масштабні орієнтири – це масштаб, масштабні шкали і масштабні знаки.

Масштаб – це умовна міра переведення числової величини в графіку і навпаки. Масштаб повинен бути таким, щоб необхідні дані помістились на графіку. На вертикальній шкалі повинна бути нульова точка, але коли мінімальне значення набагато вище нуля, то необхідно робити розриви вертикальної шкали, бо поле буде заповнено нерівномірно.

Масштабна шкала – це лінія, що розділена на відрізки крапками і відрізки між двома з'єднаними крапками (графічні інтервали) строго пропорційні розмірам і періодам часу зображеним на графіку даних.

Масштабні знаки – це еталони величини, що зображуються на графіку у вигляді графічних знаків: квадратів, кіл, рисунків і т.д. Ними користуються для порівняння графічних знаків із знаком-еталоном.

Експлікація графіка – це пояснення, які розкривають суть графіка: заголовок графіка, одиниці виміру, умовні пояснення. Вони можуть бути

розміщені на полі графіка, або в формі умовних позначень за межами поля графіка. Заголовок має бути коротким (що? де? коли?).

§ 2. Види графіків

а) **Лінійні графіки** дуже поширені для характеристики зміни явищ в часі.

При побудові лінійного графіка на осі абсцис відкладають періоди часу, а на осі ординат – рівні динамічного ряду.

Лінійні графіки будують і в тих випадках, коли необхідно порівняти динаміку різних показників, або однакових показників різних країн, підприємств. В цих випадках абсолютні величини змінюють базисними темпами росту, тобто привести їх до однієї основи.

б) **стовпчикові діаграми** – це графічні зображення статистичних даних у вигляді стовпчиків – прямокутників. Їх використовують для наглядного зображення об'ємних явищ що вивчаються в часі і просторі і для зображення структури сукупності.

Якщо основи стовпчиків розмістилися по осі ординат, а значення рівнів показника по осі абсцис, то одержимо стрічкові (полосові) діаграми.

в) **секторні діаграми** представляють коло, розділене на сектори. Використовуються в основному для зображення структури сукупності. Площа всього кола приймається за 100%, площа кожного сектора характеризує частину цілого і відповідає питомій вазі цієї частини в цілому.

Секторні діаграми виразні в тому випадку, коли сукупність ділиться на більше, ніж на 4-5 частин і видні структурні зрушення, в іншому випадку використовують стрічкову діаграму.

г) **Графічний метод широко** використовується для поточного контролю за ходом виконання плану. Форми графічного зображення для порівняння планових і фактичних показників – різні.

Контрольно-плановий графік має вигляд таблиці, в лівій частині якої записуються об'єкти (цехи, відділи, підприємства), а в правій періоди часу (дні, декади, місяці, роки). На графіку поле кожного періоду складає 100% і ділиться на 5 рівних вертикальних полос, ширина кожної полоси складає 20% планового

завдання на цей період. Виконання плану підкреслюються горизонтальною лінією вертикальних полос.

На графіку є 2 лінії, одна показує виконання плану за кожну декаду, а подвійна лінія – виконання плану наростаючим підсумком з початку місяця.

Подвійною лінією показано виконання плану наростаючим підсумком і штришком відображено вигляд кожної декади. Виконання річних, п'ятирічних планів підприємствами індивідуальних зобов'язань окремих робітників можна зобразити у такому вигляді.

д) В фігурних діаграмах в якості графічного образу використовують зображення самих предметів або різної кількості одного розміру або різного розміру але однієї кількості.

е) Знаки Варзара запропоновані російським статистиком Варзаром. Використовують їх тут коли необхідно порівняти величини, що представляють собою добуток двох співмножників і щоб показати роль кожного із них в формуванні цієї величини.

є) картограми і картодіаграми використовують для зображення розподілу тих чи інших явищ по території.

Картограма представляє собою схематичну географічну карту, на якій розподіл зображуваних явищ по території дається шляхом різної заштриховки, або іншого кольору. Згущення заштриховки або кольору свідчить про збільшення розміру показника. Картограми використовуються для зображення відносних величин інтенсивності і середніх величин. Але вони дають лише загальне поняття про кількісні відмінності показників по території, не показуючи їх абсолютних значень.

На картодіаграмах розподіл показників по території дається на схематичній карті в формі стовпчиків, трикутників і т.д.

Види графіків за типом розв'язання задач

Вид графіка	Характеристика
Графіки порівняння	Використовуються для графічного порівняння величин показника, які характеризують його зміну в просторі. Діаграми порівняння показують співвідношення різних об'єктів за якимось одним показником. Види: • стовпчикові. Для її побудови використовується система координат: на

	осі абсцис розміщують однакового розміру основу стовпчиків для всіх об'єктів. Висота кожного стовпчика повинна бути пропорційна до величини показника, якій наноситься у відповідному масштабі на вісь ординат. • стрічкові діаграми розміщуються по горизонталі: основа полос на осі ординат, а показник – на осі абсцис
Структурні графіки	Призначені для подання складу показників і частки їх у загальній величині. Види: • стовпчикові; • стрічкові; • секторні – показник подають у вигляді розбитих на сектори геометричних фігур (квадрати, кола), площу яких приймають за одиницю або 100 %. Площа конкретного сектора дорівнює частці у загальній величині показника.
Графіки динаміки	Дають можливість проілюструвати зміну явищ за відповідні проміжки часу. Види: • стовпчикові; • стрічкові; • кругові; • квадратні; • фігурні; • лінійні.
Графіки зв'язку	Застосовуються для визначення залежності між показниками. На осі абсцис відкладаються значення показника (x), який є причиною зміни іншого, а на осі ординат – значення результативного показника (y) у відповідному масштабі
Графіки контролю	Дають наочне уявлення про хід виконання плану. В цьому випадку на графіку зображаються дві лінії: плановий і фактичний рівні показників за певний звітний період.

§ 3. Основні елементи статистичних графіків

Статистичний графік – це рисунок (креслення), який описує статистичні сукупності (її обсяг, структуру, зміну в часі, розподіл в просторі) умовною мовою геометричних знаків.

Він повинен містити такі основні елементи: 1) поле графіку, 2) графічний образ, 3) орієнтири простору; 4) масштабні орієнтири; 5) легенду (експлікацію) графіку.

Поле графіку характеризує його формат, тобто розмір і пропорції сторін. Розмір графіку залежить від його призначення. Вважається, що найбільш оптимальним для глядача є графік з співвідношенням сторін від 1:1,3 до 1:1,5. У багатьох випадках зручною є квадратна форма графіку. Інакше кажучи – це частина площини, тобто простір розміщення знаків. Залежно від мети і задач графіка воно може бути або чистим, або заштрихованим. Заштриховане найчастіше застосовується при підготовці графіка за допомогою електронно-обчислювальної техніки, що дозволяє більш рельєфно відокремити ті чи інші графічні образи.

Графічний образ – це сукупність знаків, за допомогою яких зображуються статистичні дані. Це основа графіку. Знаки можуть бути різними: лінії, точки, площинні геометричні фігури (прямокутники, квадрати, круги), об'ємні геометричні фігури, а також іноді й негеометричні фігури у вигляді силуетів або рисунків предметів. Статистичні дані можна зобразити за допомогою різних графічних образів, тому вони мають відповідати меті графіку і бути найбільш виразним для зображення даних.

Залежно від того, які використовуються геометричні знаки, усі графіки поділяють на точечні, лінійні, стовпчикові, стрічкові, кругові тощо. Графічні комп'ютерні програми мають великий набір цих знаків (одинарних і подвійних, суцільних та перервних ліній різної товщини та кольору, інших позначень та символів) що дає змогу зображати графічні фігури таким чином, щоб вони істотно відрізнялися одна від іншої.

Масштабні орієнтири за допомогою системи масштабних шкал надають графічному образу кількісне значення. Масштабною шкалою називають лінію, окремі точки якої можуть бути прочитані як певні числа відповідно до прийнятого масштабу. Масштаб графіку – це умовна міра переведення числової величину в графічну. Масштабні шкали можуть бути прямолінійними і криволінійними (круговими), рівномірними і нерівномірними. В статистичних графіках частіше за

все застосовуються прямолінійні шкали, а криволінійні – у секторних діаграмах. Шкала є рівномірною, коли рівним числовим інтервалам відповідають рівні графічні інтервали, якщо числа збільшуються удвічі, то й відрізки збільшуються удвічі. Масштаб рівномірної шкали – це лінійна міра, кількість міліметрів у відрізок, який прийнято за одиницю числового значення статистичного показника. Чим довше відрізок, який прийнято за числову одиницю, тим крупніше масштаб. Масштаб обчислюють шляхом ділення довжини масштабної шкали на максимальний розмір відображуваного показника.

Легенда (експлікація) графіку – це словесне пояснення розміщених на графіку геометричних фігур та способів зображення, розкриття його змісту. Легенда графіку включає: назву графіку (загальний заголовок); словесні пояснення умовних позначень окремих елементів графічного образу; назву одиниць виміру параметрів; надписи вздовж масштабних шкал тощо. Загальний заголовок графіку повинен в стислій формі розкривати основний зміст зображених даних. Легенда графіку – це другий основний елемент графіку після графічного образу, тому що без нього графік не можна прочитати і зрозуміти.

Сучасна електронна техніка дозволяє розташувати легенду графіку в будь-якому завгодно місці. З точки зору статистики краще її розташовувати під графіком.

§4. Графічне зображення статистичних даних рядів розподілу

Ряди розподілу зручно вивчати за допомогою графічного методу. Статистичний графік — це креслення, на якому статистичні сукупності, що характеризуються певними показниками, описуються за допомогою умовних геометричних образів або знаків. Представлення даних таблиць у вигляді графіка справляє більш сильне враження, ніж цифри, дозволяє краще осмислити результати статистичного спостереження, правильно їх витлумачувати, значно полегшує розуміння статистичного матеріалу, робить його наочним і доступним. Це, однак, зовсім не означає, що графіки мають лише ілюстративне значення. Вони дають нове знання про предмет дослідження, будучи методом узагальнення вихідної інформації.

Значення графічного методу в аналізі й узагальненні даних велике. Графічне зображення дозволяє здійснити контроль вірогідності статистичних показників, оскільки останні, будучи представлені на графіку, яскравіше виражають наявні неточності, пов'язані або з наявністю неточностей/помилوک спостереження, або із сутністю досліджуваного явища. З допомогою графічного зображення можливі вивчення закономірностей розвитку явища, установлення існуючих взаємозв'язків.

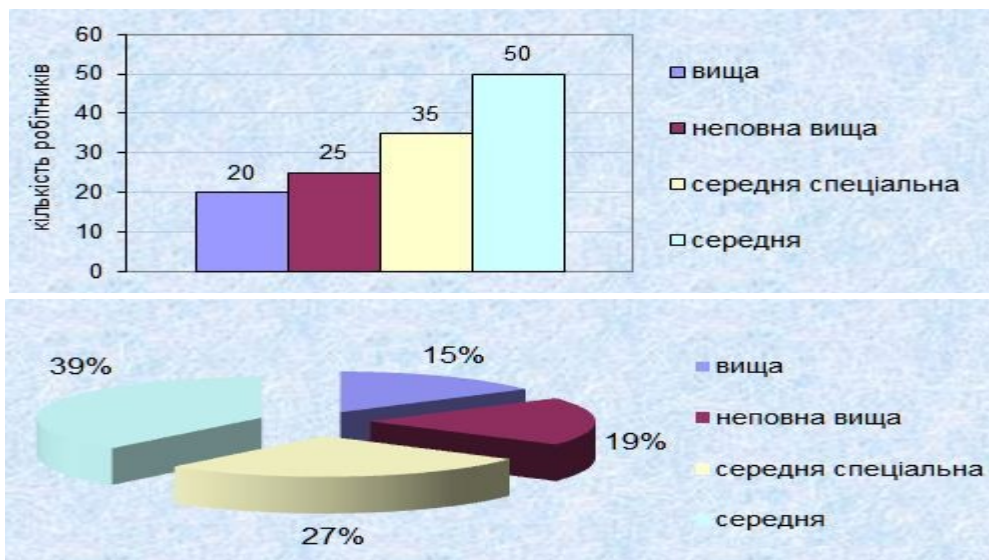
Основне призначення структурних діаграм полягає в графічному представленні складу статистичних сукупностей, що характеризуються як співвідношення різних частин кожної із сукупностей. Склад статистичної сукупності графічно може бути представлений за допомогою абсолютних та відносних показників.

У першому випадку не тільки розмір окремих частин, але й розміри графіка в цілому визначаються статистичними величинами й вимірюються відповідно до змін останніх; у разі представлення відносними показниками розміри графіка не змінюються (оскільки сума всіх частин будь-якої сукупності становить 100%), а змінюються лише розміри окремих його частин.

Графічне зображення складу сукупності за абсолютними й відносними показниками сприяє проведенню більш глибокого аналізу й дозволяє проводити зіставлення й порівняння, наприклад, міжнародних соціально-економічних явищ.

Зобразити графічно ряд розподілу з прикладу 1 можна наступним чином:

Приклад 1: Діаграми



Питання для самоконтролю

1. Що таке графік?
2. Назвіть основні вимоги до складання графіків?
3. Що таке графічний метод?
4. Що таке поле графіка?
5. Що називають масштабним орієнтиром?
6. Що таке експлікація графіка?
7. Які існують види графіків.

Лекційне заняття №8

Тема: Моделювання рядів розподілу.

План

1. Фактичний та теоретичний розподіл.
2. Крива нормального розподілу.
3. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл.
4. Критерії згоди: Пірсона, Романовського, Колмогорова.
5. Практичне значення моделювання рядів розподілу.

§ 1. Фактичний і теоретичний розподіл

Одна з найважливіших цілей вивчення рядів розподілу полягає в тому, щоб виявити закономірність розподілу і визначити її характер. Закономірності розподілу найбільш виразно проявляються тільки при великій кількості спостережень.

Фактичний розподіл може бути зображено графічно за допомогою кривої розподілу - графічно зображується у вигляді безперервної лінії зміни частот у варіаційному ряду функціонально пов'язаного зі зміною варіанта.

Під **теоретичної кривої розподілу** розуміється крива даного типу розподілу в загальному вигляді виключає вплив випадкових для закономірності чинників.

Теоретичне розподіл може бути виражене аналітичної формулою яка називається аналітичної формулою. Найбільш поширеним є нормальне поширення.

§ 2. Крива нормального розподілу

Закон нормального розподілу:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad (8.1)$$

y - ордината нормального розподілу

t - нормоване відхилення.

$$t = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}; \quad e = 2,7218; \quad (8.2)$$

x_i - варіанти варіаційного ряду

$\bar{x}$ - Середнє;

Властивості:

Функція нормального розподілу - парна, тобто $f(t) = f(-t)$, $\bar{x} = Mo = Me$

Функція нормального розподілу повністю визначається $\bar{x}$ і СКО.

§ 3. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл

Причиною частого звернення до закону розподілу є те, що залежність виникає в результаті дії безлічі випадкових причин жодна з яких не є переважаючою. Якщо у варіаційному ряду розраховали $Mo = Me$, то це може вказувати на близькість до нормального розподілу. Найбільш точна перевірка відповідності нормальному закону проводиться за допомогою спеціальних критеріїв.

§ 4. Критерії згоди: Пірсона, Романовського, Колмогорова

Критерій Пірсона.

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_s - f_r)^2}{f_r} \quad (8.3)$$

f_r - Теоретична частота

$f_{\text{э}}$ - Емпірична частота

Методика розрахунку теоретичних частот.

1. Визначається середнє арифметичне і σ
2. По інтервального варіаційного ряду, вважається t по кожному інтервалу.
3. Знаходимо значення щільності ймовірності для нормованого закону

розподілу $f(t) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$. (8.4)

4. Знаходимо теоретичну частоту $f_T = \frac{l \sum f_i}{\sigma} f(t)$. (8.5)

l - довжина інтервалу

$\sum f_i$ - Сума емпіричних частот

$f(t)$ - Щільність ймовірності округлити значення до цілих

Розрахунок коефіцієнта Пірсона

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_{\text{э}} - f_T)^2}{f_T} \quad (8.6)$$

f_T - Теоретична частота

$f_{\text{э}}$ - Емпірична частота

Методика розрахунку теоретичних частот.

1. Визначається середнє арифметичне і σ згідно інтервальному варіаційному ряду, вважається t по кожному інтервалу.

2. Знаходимо значення щільності ймовірності для нормованого закону

розподілу. $f(t) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$ (8.7)

3. Знаходимо теоретичну частоту. $f_T = \frac{l \sum f_i}{\sigma} f(t)$

(8.8)

l - довжина інтервалу

$\sum f_i$ - сума емпіричних частот

$f(t)$ - щільність ймовірності

округлити значення до цілих

4. Розрахунок коефіцієнта Персона $\chi^2_{\text{расчет}}$

5. Табличне значення χ^2

d.f. - Кількість інтервалів – 3

d.f. - Кількість ступенів свободи.

Якщо $\chi^2_{\text{расчет}} > \chi^2_{\text{табл}}$ то розподіл не є нормальним, тобто гіпотеза про нормальному розподілі скасовується. Якщо $\chi^2_{\text{расчет}} < \chi^2_{\text{табл}}$, то розподіл є нормальним.

Критерій Романовського.

$$C = \frac{\chi^2_{\text{расчет}} - \gamma}{\sqrt{2\gamma}} \quad (8.10)$$

$\chi^2_{\text{расчет}}$ - Критерій Пірсона розрахунковий;

- Число ступенів.

Якщо $C < 3$, то розподіл близько до нормального.

Критерій Колмогорова

$$\lambda = \frac{D}{\sqrt{\sum f_i}} \quad (8.11)$$

D - максимальне значення між накопиченими емпіричними і теоретичними частотами. Необхідна умова для використання Колмогорова: Число спостережень більше 100. За спеціальною таблицею ймовірностей $P(\lambda)$ з якою можна стверджувати, що дане розподіл є нормальним.

§ 5. Практичне значення моделювання рядів розподілу

1. можливість застосувати до емпіричного розподілу законів нормального розподілу.
2. можливість використання правила $3 \times$ сигм.
3. Можливість уникнути додаткових трудомістких і витратних розрахунків, з дослідження сукупності знаючи, що розподіл нормальний.

Питання для самоконтролю

1. Що таке фактичний розподіл?
2. Що таке теоретичний розподіл?
3. Що називають кривою нормального розподілу?
4. Як здійснюється перевірка гіпотези про нормальний розподіл?
5. Критерії згоди: Пірсона.
6. Критерії згоди: Романовського.
7. Критерії згоди: Колмогорова.
5. Сутність практичного значення моделювання рядів розподілу.

Змістовий модуль II. Застосування принципів дискретної ймовірності в ІТ.

Лекційне заняття №9

Тема: Перевірка статистичних гіпотез.

План

1. Принцип практичної впевненості.
2. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох дисперсій.

§1. Принцип практичної впевненості

Правильність вибору закону розподілу чи оцінки його параметрів для генеральної сукупності перевіряється за допомогою статистичних методів перевірки статистичних гіпотез.

Під *статистичною гіпотезою* будемо розуміти припущення відносно закону розподілу генеральної сукупності чи оцінки його параметрів. Можливі

інші гіпотези: про рівність параметрів двох чи декількох розподілів, про незалежність вибірок тощо.

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу або про параметри невідомих розподілів. Наприклад, статистичними є гіпотези:

- 1) генеральна сукупність, розподілена за нормальним законом;
- 2) дисперсії двох нормальних розподілів, рівні між собою.

Нульовою (основною) називають запропоновану гіпотезу, яку ми будемо позначати через H_0 .

Альтернативною (конкуруючою) називають гіпотезу H_a , яка суперечить основній.

Розрізняють також гіпотези за кількістю припущень.

Простою називають гіпотезу, яка має одне припущення, інакше гіпотеза є складною.

Наприклад: 1. У законі Пуассона $\lambda = 3$ – проста гіпотеза;

2. Якщо $\lambda > 3$, то це складна гіпотеза.

Висунута гіпотеза може бути **правильною або неправильною**, тому виникає необхідність її перевірки. Оскільки перевірка проводиться статистичними методами, то її називають статистичною.

При прийнятті рішень за допомогою гіпотез можуть статися помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна гіпотеза, тобто гіпотеза H_0 є правильною, але її відхиляють на основі її перевірки.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза, тобто гіпотеза H_0 приймається, але в дійсності вірна конкуруюча гіпотеза H_a .

Ймовірність здійснити помилку першого роду позначимо через α і будемо називаємо її **рівнем значущості**.

Число α задають малим і найчастіше використовують значення α , що дорівнюють 0,05; 0,01 і т. д. Якщо, наприклад, $\alpha = 0,01$, то це означає, що в

одному випадку із 100 є ризик допустити помилку першого роду (відкинути гіпотезу H_0).

Для перевірки гіпотез використовуємо спеціально підібрану величину, точне чи наближене значення якої відоме.

Статистичним критерієм називають випадкову величину K , яка є основою для перевірки нульової гіпотези.

Найбільш розповсюдженим критерієм перевірки вірогідності H_0 про закон розподілу ознаки генеральної сукупності є критерій узгодженості χ^2 , який

$$\text{визначається за формулою } \chi^2 = \sum_{i=1}^m (n_i - n'_i)^2 / n'_i. \quad (9.1)$$

Тут m – число інтервалів (часткових), на які поділяється статистичний розподіл вибірки; n_i – частота ознаки в i -у інтервалі; n'_i – теоретичні частоти, підраховані за відповідними формулами закону розподілу ймовірностей, який припускається для ознаки генеральної сукупності.

$$\text{Теоретичні частоти знаходяться за формулою } n'_i = n \cdot p_i, \quad (9.2)$$

де n – об'єм вибірки; p_i – для дискретної випадкової величини є ймовірність події $X = x_i$, для неперервної випадкової величини p_i є ймовірність того, що ознака X попаде в i -ий інтервал.

Наприклад, для гіпотези H_0 , яка припускає, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу, ймовірність p_i може бути обчислена за формулою

$$p_i = \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i), \quad (9.3)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Для перевірки правильності гіпотез, як уже згадувалося, вибирається статистичний критерій, який умовно позначається через K , де K – випадкова величина, закон розподілу якої відомий. Для різних гіпотез ці критерії є різними.

Множину R значень статистичного критерію K можна розбити на дві підмножини, що не перетинаються, A і $\bar{A}$.

Значення статистичного критерію підмножини $A \subset \Omega$, при яких нульова гіпотеза приймається, *називається областю прийняття гіпотези*, а значення, при яких гіпотеза H_0 відхиляється, критичною областю.

За характером критичні області поділяються на односторонні та двосторонні.

Області A і $\bar{A}$ (прийняття гіпотез і критичні) між собою розділяються точками, які ми будемо називати критичними і позначати k_{kp} .

Правосторонньою критичною областю називається така область, для якої виконується нерівність $K > k_{kp}$ (рис. 9.1а).

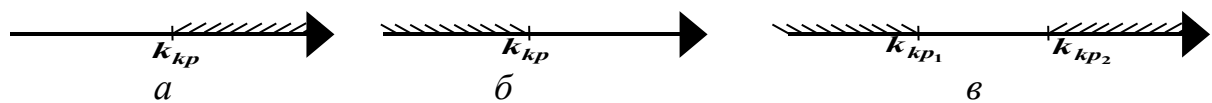


Рис. 9.1

Відповідно критична область буде лівосторонньою, якщо виконується нерівність $K < k_{kp}$ (рис. 9.1б).

Двосторонньою будемо називати критичну область, яка задовольняє нерівності $K < k_{kp1}$ і $K > k_{kp2}$ (рис. 9.1в).

У більшості випадків для двосторонньої критичної області точки k_{kp1} і k_{kp2} розташовані симетрично по відношенню до нуля, тобто $k_{kp1} = -k_{kp2}$.

Перевірка статистичних гіпотез будь-якої природи може бути описана за допомогою такої загальної схеми.

1. Формулюється статистична гіпотеза H_0 і альтернативна H_a .
2. Вибирається статистичний критерій відповідно до сформульованої нульової гіпотези H_0 .
3. Залежно від змісту нульової H_0 і альтернативної H_a гіпотез вибирається одностороння або двостороння критична область.
4. Для побудови критичної області необхідно знайти значення критичних точок.

В основі побудови критичної області покладено принцип практичної неможливості здійснитися малоймовірній випадковій події при одній спробі. За вибраним статистичним критерієм K та рівнем значущості α з допомогою спеціальних таблиць визначається критична точка k_{kp} . Згідно знайденого k_{kp} відповідно будується лівостороння, правостороння або двостороння критична область.

5. За результатами вибірки обчислюється спостережене значення критерію $K^* (K_{спост})$.

6. Приймається рішення прийняти чи відхилити нульову гіпотезу H_0 на підставі таких міркувань: якщо гіпотеза H_0 правильна, то $P(K^* \in \bar{A}) = \alpha$, тобто ймовірність того, що статистичний критерій потрапляє в критичну область $\bar{A}$, дорівнює малій ймовірності α . Якщо K^* потрапляє в критичну область ($K^* \in \bar{A}$), а ця подія малоймовірна і все ж відбулася, то в цьому разі H_0 відхилити.

7. Це твердження має наступний вигляд для різних типів областей: для лівосторонньої критичної області: $P(K^* < k_{kp}) = \alpha$, для правосторонньої $P(K^* > k_{kp}) = \alpha$, для двосторонньої області $P(K^* < k_{kp_1}) + P(K^* > k_{kp_2}) = \alpha$.

8. Враховуючи ту обставину, що критичні точки k_{kp_1} і k_{kp_2} розташовані симетрично відносно нуля, двосторонню критичну область будують також симетричною, отже $P(K^* < k_{kp_1}) = P(K^* > k_{kp_2}) = \alpha / 2$.

9. Якщо K^* не потрапляє у критичну область, то нульова гіпотеза H_0 приймається.

§2. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох дисперсій

Одним із важливих завдань математичної статистики є порівняння двох або кількох вибірових дисперсій. Таке порівняння дає можливість визначити, чи можна вважати вибірові дисперсії статистичними оцінками однієї і тієї самої дисперсії генеральної сукупності. Воно застосовується передусім при обчисленні дисперсій за результатами технологічних вимірювань.

Порівняння дисперсій D_x, D_y здійснюється зіставленням виправлених дисперсій s_x^2, s_y^2 , які відповідно мають закон розподілу χ^2 із $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ ступенями вільності, де n_1 і n_2 є обсяги першої і другої вибірок.

Нехай перша вибірка здійснена з генеральної сукупності з ознакою Y , дисперсія якої дорівнює D_y , друга — з генеральної сукупності з ознакою X , дисперсія якої дорівнює D_x . Необхідно перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : D_x = D_y$.

За статистичний критерій береться випадкова величина $K = s_\delta^2 / s_m^2$, яка має розподіл Фішера – Снедекора із k_1 і k_2 ступенями вільності, де s_δ^2 є більшою з виправлених дисперсій, одержаною внаслідок обробки результатів вибірок, s_m^2 є меншою з виправлених дисперсій.

Щільність ймовірностей розподілу Фішера – Снедекора

$$f(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{2}} (F)^{\frac{k_2}{2}-1} \left(1 + \frac{k_2}{k_1} F\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}, F \geq 0 \quad (9.4)$$

визначена лише на додатній півосі, тобто $0 \leq F < \infty$.

Спостережуване значення критерію

$$K^* = \frac{s_\delta^2}{s_m^2}. \quad (9.5)$$

Питання для самоперевірки

1. Що таке статистична гіпотеза?
2. Що називають нульовою та простою гіпотезою?
3. Альтернативною гіпотезою називають ...?
4. Назвіть можливості помилки гіпотез.
5. Що таке статистичні критерії?

6. Що називають правосторонньою областю?
7. Що називають двухсторонньою областю?
8. Схема перевірки статистичних гіпотез.

Лекційне заняття №10

Тема: Елементи дисперсійного аналізу.

План

1. Дисперсійний аналіз.
2. Однофакторний аналіз.
3. Поняття про двофакторний дисперсійний аналіз.

§1. Дисперсійний аналіз

Дисперсійний аналіз є сукупністю статистичних методів, призначених для перевірки гіпотез про зв'язок між певною ознакою та досліджуваними факторами, які не мають кількісного опису, а також для встановлення ступеня впливу факторів та їх взаємодії. У спеціальній літературі дисперсійний аналіз часто називають ANOVA (від англomовної назви Analysis of Variations). Вперше цей метод було розроблено Р. Фішером в 1925 р.

Факторами називають контрольовані чинники, що впливають на кінцевий результат. **Рівнем фактора**, або **способом обробки**, називають значення, що характеризують конкретний прояв цього фактора. Ці значення зазвичай подають у номінальній або порядковій шкалі вимірювань. Значення вимірюваної ознаки називають **відгуком**.

Часто вихідні значення факторів вимірюють у кількісних або порядкових шкалах. Тоді постає проблема групування вихідних даних у ряди спостережень, що відповідають приблизно однаковим значенням фактора. Якщо кількість груп взяти надмірно великою, то кількість спостережень у них може виявитися недостатньою для отримання надійних результатів. Якщо її взяти надмірно малою, це може призвести до втрати істотних особливостей впливу досліджуваного фактора на систему. Загальну методологію групування описано в розділі 1.

Вибір конкретного способу групування даних залежить від їх обсягу і характеру варіювання значень фактора.

Кількість і розміри інтервалів при однофакторному аналізі найчастіше визначають за принципом рівних інтервалів або за принципом рівних частот.

При багатофакторному аналізі застосовують три типи групування:

- групи з рівною кількістю спостережень;
- групи з різною кількістю спостережень;
- групи, кількості спостережень у яких відповідають певній пропорції.

При цьому існують певні особливості обробки даних, залежно від типу групування, які не розглядаються у даному посібнику.

§2. Однофакторний аналіз

Основною метою однофакторного аналізу зазвичай є оцінка величини впливу конкретного фактора на досліджуваний відгук. Іншою метою може бути порівняння двох або декількох факторів один з одним з метою визначення різниці їх впливу на відгук, яку часто називають **контрастом факторів**. Попереднім етапом є перевірка нульової гіпотези про відсутність будь-якого впливу досліджуваного фактора (факторів), тобто гіпотези про те, що зміни значень ознаки в порівнюваних вибірках є випадковими, і всі дані належать до однієї генеральної сукупності.

Якщо нульову гіпотезу відкидають, то наступним етапом є кількісне оцінювання впливу досліджуваного фактора і побудова довірчих інтервалів для отриманих характеристик. У випадку, коли нульова гіпотеза не може бути відкинута, зазвичай її приймають і роблять висновок про відсутність впливу.

Але, якщо є підстави вважати, що такий вплив має бути присутнім (наприклад, це може впливати з теоретичних уявлень про об'єкт дослідження), то необхідно перевірити наявність інших факторів, що можуть його маскувати.

При **однофакторному дисперсійному аналізі** вихідні дані подають у вигляді таблиць, у яких кількість стовпчиків дорівнює кількості рівнів фактора, а кількість значень у кожному стовпчику – кількості спостережень при відповідному рівні фактора (табл. 10.1). Для різних рівнів фактора кількість

спостережень може бути різною. При цьому виходять з припущення, що результати спостережень для різних рівнів є вибірками з нормально розподілених сукупностей, середні значення та дисперсії яких є однаковими і не залежать від рівнів.

Завданням аналізу є перевірка нульової гіпотези про рівність середніх значень сукупностей, що розглядаються.

Метод базується на основній тотожності дисперсійного аналізу, згідно з якою сума квадратів відхилень спостережень від загального середнього (**загальна варіація**) дорівнює:

Таблиця 10.1

Форма таблиці спостережень при проведенні одно факторного дисперсійного аналізу

Результати вимірювань	Рівні фактора			
	1	2	...	k
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}
...	...	...	...	...
n_i	$x_{n_i 1}$	$x_{n_i 2}$	...	$x_{n_i k}$

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k n_j (\langle x_j \rangle - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \langle x_j \rangle)^2, \quad (10.1)$$

де $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$ - загальне середнє
чисельність; $\langle x_j \rangle = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$ $j=1, \dots, k$; $N = \sum_{j=1}^k n_j$ - загальна

k - кількість вибірок;

n_j ($j = 1, 2, \dots, k$) - кількість елементів у j -й вибірці;

$\langle x_j \rangle$ - середнє значення j -ї вибірки.

У правій частині (10.1) перший доданок (**факторна, або міжгрупова варіація**) є зваженою сумою квадратів відхилень групових середніх від загального середнього. Він характеризує коливання значень, зумовлені фактором,

на основі якого здійснено групування даних. Другий доданок (**залишкова, або внутрішньогрупова варіація**) є сумою квадратів відхилень спостережень від відповідних групових середніх. Він характеризує коливання значень досліджуваної ознаки, зумовлені неврахованими факторами або випадковими чинниками.

Сутність методу полягає в тому, що за умови правильності нульової гіпотези величини

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N - k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \langle x_j \rangle)^2 \quad (10.2)$$

та

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{k - 1} \sum_{j=1}^k n_j (\langle x_j \rangle - \bar{x})^2 \quad (10.3)$$

є незміщеними оцінками дисперсії похибок спостережень σ^2 і мають бути приблизно рівними одна одній. Перша з них є мірою варіації всередині вибірок і не пов'язана з припущенням про рівність середніх значень, тому $\sigma^2 \approx \sigma_1^2$ незалежно від справедливості нульової гіпотези. Друга оцінка характеризує варіацію між вибірками. При справедливості нульової гіпотези $\sigma_2^2 \approx \sigma^2$, а при її порушенні неї величина σ_2^2 є тим більшою, чим більше відхилення від неї.

Значення критерію розраховують за формулою:

$$F = \frac{(N - k) \sum_{j=1}^k n_j (\langle x_j \rangle - \bar{x})^2}{(k - 1) \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \langle x_j \rangle)^2} \quad (10.4)$$

Ця величина має F-розподіл Фішера з

параметрами $k - 1$ та $N - k$. Нульову гіпотезу відхиляють, якщо ймовірність $P(F \leq F^*)$, де F^* – значення, розраховане за емпіричними даними за формулою (10.3) є достатньо малою.

Непараметричним аналогом однофакторного дисперсійного аналізу є **ранговий однофакторний аналіз Краскела – Уолліса**. Він розроблений американськими математиком Вільямом Краскелом та економістом Вільсоном Уоллісом в 1952 р.

Цей критерій призначено для перевірки нульової гіпотези про рівність ефектів впливу на досліджувані вибірки з невідомими, але рівними середніми. При цьому кількість вибірок має бути більшою ніж дві. Нульова гіпотеза полягає в тому, що k вибірок обсягами $1, 2, \dots, k, n_1, n_2, \dots, n_k$ отримані з однієї і тієї самої генеральної сукупності. Критерій Краскела – Уолліса є узагальненням U -критерію Манна – Уїтні на випадок, коли кількість вибірок $k > 2$.

Рангові методи, у тому числі й метод Краскела – Уолліса, не передбачають нормальності розподілу результатів спостережень і можуть застосовуватися як для кількісних даних з невідомим законом розподілу, так і для порядкових ознак.

У табл. 10.1 замість спостережень заносять їх ранги g_{ij} , отримані шляхом порядкування за зростанням усієї сукупності спостережень x_{ij} . При цьому одержують табл. 10.2.

Таблиця 10.2

Загальний вигляд вихідної таблиці рангового однофакторного аналізу

№ результату	№ вибірки			
	1	2	...	k
1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1k}
2	r_{21}	x_{22}	...	r_{2k}
...	...	...	...	...
n_i	$r_{n_i 1}$	$r_{n_i 2}$	...	$r_{n_i k}$

Для кожного рівня фактора, тобто для кожного стовпця, розраховують

суму рангів $R_j = \sum_{i=1}^{n_j} r_{ij}$ або відповідні середні ранги $\langle R_j \rangle = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} r_{ij}.$

Для контролю можна використовувати тотожність:

$$\sum_{i=1}^k R_i = \frac{N(N+1)}{2}, \quad (9.5)$$

де $N = \sum_{i=1}^k n_i$ – загальна чисельність.

Якщо між стовпцями немає систематичної різниці, то останні будуть близькими до середнього рангу, розрахованого за усією сукупністю, який дорівнює

$(N+1)/2$. Тому величини $\langle R_j \rangle - (N+1)/2$ мають бути відносно малими, якщо нульова гіпотеза є правильною.

Обчислення критерію здійснюють за формулами:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1),$$

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k n_j \left(\langle R_j \rangle - \frac{N+1}{2} \right)^2.$$

(
1
0
.
6
)

(10.7)

За $n_i \geq 5$ й $k \geq 4$ статистика критерію асимптотично наближається до χ^2 -розподілу з кількістю степенів вільності $k - 1$. У цьому випадку нульову гіпотезу відхиляють на рівні значущості α , якщо $H > \chi^2_{1-\alpha}$, де $\chi^2_{1-\alpha}$ – квантиль рівня $1 - \alpha$ розподілу χ^2 з $k - 1$ степенем вільності.

При $k = 2$ статистика Краскела – Уолліса стає еквівалентною статистиці W Уїлкоксона.

Якщо серед спостережень є рівні значення, описану вище схему аналізу можна застосовувати як наближену. Надійність її висновків буде тим нижчою, чим більшою є кількість збігів. Для підвищення надійності можна використовувати середні ранги, при цьому у випадку, коли вони не є цілими числами, їх не округляють. Якщо кількість збігів велика, використовують модифіковану форму статистики Краскела – Уолліса:

$$H' = \frac{H}{1 - \left(\sum_{j=1}^g \frac{T_j}{N^3 - N} \right)}, \quad (10.8)$$

де g – кількість груп спостережень, що збігаються; $T_j = (t_j^3 - t_j)$;
 t_j – кількість спостережень, що збігаються в j -ї групі.

§3. Поняття про двофакторний дисперсійний аналіз

Двофакторний дисперсійний аналіз застосовують для пов'язаних нормально розподілених вибірок. Дані подають у вигляді табл. 10.3, у стовпчиках якої наводять дані, що відповідають певному рівню першого фактора, а в рядках – дані, що відповідають рівням другого. Таблиця даних має розмірність $n \times k$, де n і k – кількість рівнів першого та другого факторів, відповідно.

Таблиця 10.3

Таблиця даних двофакторного дисперсійного аналізу

	Рівні фактора А			
Рівні фактора В	1	2	...	k
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}
...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}

Основною відмінністю від таблиці однофакторного дисперсійного аналізу є можлива неоднорідність даних у стовпцях, якщо вплив другого фактора є істотним. На практиці часто використовують і складніші таблиці двофакторного дисперсійного аналізу, зокрема такі, у яких кожна комірка містить набір даних (повторні вимірювання), що відповідають фіксованим значенням рівнів обох факторів.

Для опису даних табл. 10.3 часто можна застосовувати адитивну модель, яка передбачає, що значення відгуку є сумою внесків окремо кожного із факторів b_i і t_j , а також незалежної від факторів випадкової компоненти ε_{ij} :

$$x_{ij} = b_i + t_j + \varepsilon_{ij} . \quad (10.9)$$

На практиці модель часто подають в еквівалентному вигляді:

$$x_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} , \quad (10.10)$$

де $\mu = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^k x_{ij}$ – загальне середнє за всіма спостереженнями;

β_i і τ_j – відхилення від середнього, зумовлені факторами А і В, відповідно.

У випадку, коли випадкова компонента ε_{ij} підпорядковується нормальному розподілу з нульовим середнім і рівними для всіх i, j дисперсіями σ^2 застосовують двофакторний дисперсійний аналіз (дисперсійний аналіз за двома ознаками).

Нульова гіпотеза може полягати в рівності ефектів стовпчиків між собою

$H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = 0$, або рівності ефектів рядків між собою

$H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, тобто в першому випадку припускають відсутність впливу фактора А, а у другому – фактора В.

Як і у випадку однофакторного дисперсійного аналізу в цьому разі розраховують дві оцінки дисперсії. При перевірці гіпотези H_{01} першу з них розраховують за формулою:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{(n-1)(k-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \langle x_i \rangle - \langle x_j \rangle + \langle x \rangle)^2 \quad (10.11)$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k x_{ij}$$

де – загальне середнє за всіма спостереженнями;

$$\langle x_i \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{ij}$$

– середнє за і-м рядком;

$$\langle x_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$$

– середнє за j-м стовпчиком.

Оцінка дисперсії σ_1^2 є незміщеною і не залежить від справедливості нульової гіпотези.

Другу оцінку розраховують за формулою:

$$\sigma_2^2 = \frac{n}{k-1} \sum_{j=1}^k (\langle x_j \rangle - \langle x \rangle)^2. \quad (10.12)$$

Вона є незміщеною лише за умови справедливості нульової гіпотези. Що більшою є різниця між результатами дії фактора А, то більшим є значення, розраховане за формулою (3.28).

Для перевірки справедливості гіпотези H_{01} необхідно розрахувати відношення дисперсій:

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{n(n-1)(k-1) \sum_{j=1}^k (\langle x_j \rangle - \langle x \rangle)^2}{(k-1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \langle x_i \rangle - \langle x_j \rangle + \langle x \rangle)^2}. \quad (10.13)$$

Воно має F-розподіл Фішера з кількостями степенів вільності $(k-1)$ $(n-1)$ $(k-1)$. Нульову гіпотезу приймають на рівні значущості α , якщо $F < F_{1-\alpha}$, де $F_{1-\alpha}$ квантиль F-розподілу з відповідними кількостями степенів вільності.

Для перевірки нульової гіпотези H_{02} можна використовувати формулу (3.28), в якій необхідно попарно поміняти місцями величини n і k , а також i та j .

Якщо припущення, необхідні для застосування двофакторного дисперсійного аналізу, не виконуються, то використовують непараметричний **ранговий критерій Фридмана (Фридмана, Кендалла та Сміта)**, розроблений американським економістом Мілтоном Фридманом наприкінці 1930-х р. Цей критерій не залежить від типу розподілу. Передбачається лише, що розподіл величин ε_{ij} є однаковим і неперервним, а самі вони незалежні одна від одної. При

перевірці нульової гіпотези $H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = 0$ вихідні дані подають у формі прямокутної матриці, у якій n рядків відповідають рівням фактора В, а k стовпців – рівням фактора А. Кожна комірка таблиці (блок) може бути результатом вимірювань параметрів на одному об'єкті або на групі об'єктів при сталих значеннях рівнів обох факторів. У цьому випадку відповідні дані подають як середні значення певного параметра за всіма вимірюваннями або об'єктами досліджуваної вибірки. Для застосування критерію в таблиці вихідних даних необхідно перейти від безпосередніх результатів вимірювань до їх рангів. Ранжирування здійснюють за кожним рядком окремо, тобто величини x_{ij} впорядковують для кожного фіксованого значення i , отримуючи при цьому k значень відповідних рангів r_{ij} . Це дає можливість усунути вплив фактора В, значення якого для кожного рядка є однаковим.

Обчислення критерію здійснюють за формулою:

$$S = \left[\frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n r_{ij} \right)^2 \right] - 3n(k+1). \quad (10.14)$$

Якщо необхідно перевірити нульову гіпотезу $H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, то вихідні дані необхідно ранжирувати за стовпчиками і повторити описану вище процедуру із заміною n на k і навпаки.

При справедливості нульової гіпотези і $n \rightarrow \infty$ S -статистика Фридмана асимптотично наближається до статистики χ^2 з $k - 1$ степенем вільності, тому нульову гіпотезу можна прийняти на рівні значущості α , якщо $S < \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$

Критерій Пейджа (L-критерій), запропонований американським статистиком Є.Б. Пейджем в 1963 р., призначений для перевірки нульової гіпотези $H_{01} : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = 0$ або $H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, проти альтернатив

$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k$ або, відповідно, $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$, у яких принаймні одна із нерівностей є строгою. Для впорядкованих альтернатив він є потужнішим за критерій Фридмана. Значення критерію обчислюють за формулами:

$$L_1 = \sum_{j=1}^k j r_j; \quad L_2 = \sum_{i=1}^n i r_i, \quad (10.15)$$

$$r_j = \sum_{i=1}^n r_{ij}, \quad r_i = \sum_{j=1}^k r_{ij}.$$

де

Для великих вибірок застосовують апроксимацію статистики Пейджа:

$$L_1^* = \frac{L - nk(k+1)^2/4}{\sqrt{n(k^3 - k)^2/144(k-1)}}; \quad L_2^* = \frac{L - nk(n+1)^2/4}{\sqrt{k(n^3 - n)^2/144(n-1)}}, \quad (10.16)$$

які за умови справедливості відповідних нульових гіпотез підпорядковуються стандартному нормальному розподілу.

У разі, коли в рядках вихідної таблиці є однакові значення, необхідно використовувати середні ранги. При цьому точність висновків буде тим гіршою, чим більшою є кількість таких збігів.

Q-критерій Кокрена запропонований В. Кочреном в 1937 р. Його використовують у випадках, коли групи однорідних суб'єктів піддаються впливам, кількість яких перевищує два, і для яких можливі два варіанти відгуків – умовно-негативний (0) та умовно-позитивний (1). Нульова гіпотеза полягає в рівності ефектів впливу. Значення критерію розраховують за формулою:

$$Q = \frac{(c-1) \left(c \sum_{j=1}^c T_j^2 - \left(\sum_{j=1}^c T_j \right)^2 \right)}{c \sum_{i=1}^r T_i - \sum_{i=1}^r T_i^2}, \quad (10.17)$$

$$T_j = \sum_{i=1}^r x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, c)$$

де - суми стовпців

$$T_i = \sum_{j=1}^c x_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

- суми рядків

c – кількість стовпців (вибірок);

r – кількість рядків (параметрів).

Довірчий рівень визначається функцією розподілу χ^2 з кількістю степенів вільності, яка дорівнює c – 1.

Двофакторний дисперсійний аналіз дає можливість визначити існування ефектів обробки, проте не дає змоги встановити, для яких саме стовпців існує цей ефект. При вирішенні цієї проблеми застосовують метод множинних порівнянь Шеффе для пов'язаних вибірок. Значення критерію розраховують за формулою:

$$t = \frac{\left(\sum_{i=1}^r c_i \bar{x}_i \right)^2}{\frac{(r-1)S}{c} \sum_{i=1}^r c_i^2}, \quad (10.18)$$

де c_i ($i=1, 2, \dots, r$) – константи;

$$S = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij}^2 - \frac{T^2}{rc} \quad \text{– залишковий середній квадрат;}$$

$$T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c x_{ij} \quad \text{– загальна сума; } c \text{ – кількість стовпців (вибірок); } r \text{ – кількість рядків (параметрів).}$$

Довірчий рівень визначається функцією розподілу

Фішера з параметрами $(r - 1)$ та $(r - 1)(c - 1)$ при дослідженні ефекту рядків $(c-1)$ та $(r - 1)(c - 1)$ при дослідженні ефекту стовпців.

Питання для самоконтролю

1. Що таке дисперсійний аналіз?
2. Які завдання вирішують за допомогою дисперсійного аналізу?
3. Що називають факторами й відгуками у дисперсійному аналізі? Наведіть приклади.
4. Що називають рівнем фактора? Наведіть приклади.
5. Які типи групування використовують у багатфакторному дисперсійному аналізі?
6. Якими є основні умови застосування однофакторного дисперсійного аналізу?
7. Що являє собою факторна варіація та яку властивість даних вона характеризує?
8. Що являє собою залишкова варіація та яку властивість даних вона характеризує?
9. Які властивості даних характеризують оцінки дисперсії похибок, що використовуються у дисперсійному аналізі?
10. Які завдання вирішують за допомогою рангового однофакторного аналізу Краскала – Уолліса?
11. Які завдання вирішують за допомогою двофакторного дисперсійного аналізу? За яких умов можна використовувати цей метод?
12. Які властивості даних перевіряють за допомогою критерію Пейджа?

13. Які властивості даних перевіряють за допомогою Q-критерію Кокрена? За яких умов можна використовувати цей критерій?

Лекційне заняття №11

Тема: Елементи кореляційного аналізу

План

1. Види залежності.
2. Загальні положення кореляційного аналізу.

§1. Види залежностей

Кореляційний метод аналізу є складовим елементом більш загального методу кількісного статистичного аналізу зв'язків - кореляційно - регресійного.

При цьому кореляційно - регресійний аналіз як загальне поняття включає в себе вимір тісноти і напрямку зв'язку (кореляційний аналіз), а також встановлення аналітичного вираження форми зв'язку (регресійний аналіз).

У статистиці прийнято розрізняти такі **види кореляції**.

1. **Парна кореляція** - зв'язок між двома ознаками (результативним і факторним)
2. **Множинна кореляція** - зв'язок між результативним і двома або більше факторними ознаками.
3. **Приватна кореляція** - зв'язок між результативним і одним з факторних ознак при фіксованому значенні інших ознак.

Кількісно оцінити тісноту і напрямок зв'язку між двома ознаками при парній кореляції можна за допомогою розрахунку лінійного коефіцієнта кореляції.

Лінійний коефіцієнт кореляції характеризує тісноту і направлення зв'язку між двома корелюється ознаками у разі наявності між ними лінійної залежності.

Лінійний коефіцієнт кореляції має велике значення при проходженні соціально - економічних явищ і процесів, розподіл яких близько до нормального.

§2. Загальні положення кореляційного аналізу

При сумісній появі двох і більше величин у результаті проведення експерименту дослідник має підстави для встановлення певної залежності між ними, зв'язку.

Строгої функціональної залежності між змінними, у буквальному розумінні цього слова, у реальному світі не існує, бо вони перебувають під впливом випадкових факторів, наслідки якого передбачити практично неможливо. Тому між змінними існує особлива форма зв'язку, яку називають стохастичною і яка в математичній статистиці трансформується, не змінюючи своєї сутності, у статистичну залежність.

Показником, що вимірює стохастичний зв'язок між змінними, є коефіцієнт кореляції, який свідчить з певною мірою ймовірності, наскільки зв'язок між змінними близький до строгої лінійної залежності.

Значно збільшується цінність коефіцієнта кореляції для випадкових змінних, що мають закон розподілу ймовірностей, близький до нормального. Для таких величин відсутність кореляції одночасно означає і відсутність будь-якої залежності між ними.

За наявності кореляційного зв'язку між змінними необхідно виявити його форму функціональної залежності (лінійна чи нелінійна), а саме:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x; \quad y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2; \quad y = \beta_0 + \frac{\beta_1}{x}. \quad (11.1)$$

Наведені можливі залежності між змінними X і Y називають функціями регресії. Форму зв'язку між змінними X і Y можна встановити, застосовуючи кореляційні поля, які зображені на рисунках 11.1–11.3.

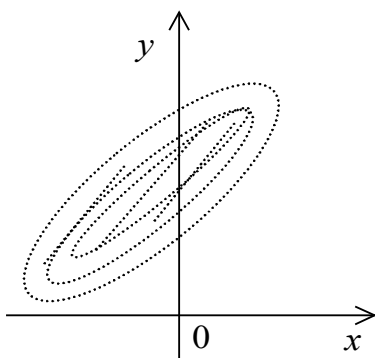


Рис. 11.1

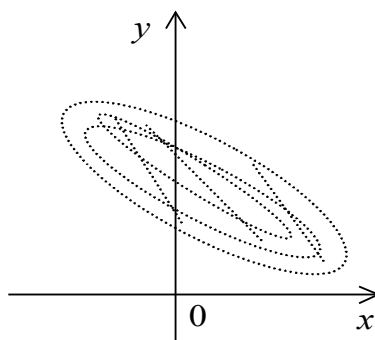


Рис. 11.2

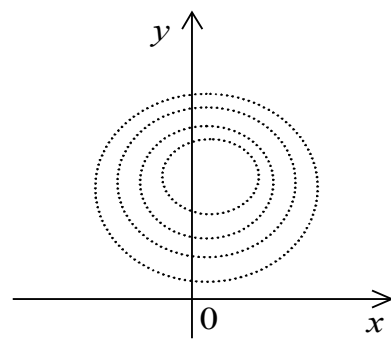


Рис. 11.3

Тут кожній точці з координатами x_i, y_i відповідає певне числове значення ознак X та Y .

Коли зв'язок між ознаками лінійний, використовують **лінійний коефіцієнт кореляції**. Його розраховують за формулою:

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}} = \beta_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \quad (11.2)$$

Він приймає значення від -1 до 1 і характеризує не тільки щільність зв'язку, а і його напрям. Чим ближче $|r|$ до 1 , тим тісніше лінійний кореляційний зв'язок. Додатне значення означає прямий зв'язок між ознаками, а від'ємне – зворотний. Щільність зв'язку приблизно можна оцінити так:

- для $0,1 \leq |r| \leq 0,3$ – слабка,
- для $0,3 \leq |r| \leq 0,7$ – середня,
- для $0,7 \leq |r| \leq 0,99$ – цільна.

На рис. 11.1 більшість точок утворюють множину, що має тенденцію при збільшенні значень X зумовлювати збільшення значень ознаки Y (коефіцієнт кореляції більше 0). На рис. 11.2 множина точок має тенденцію при збільшенні значень X зумовлювати зменшення Y (коефіцієнт кореляції менше 0). На рис. 11.3 точки рівномірно розміщені на координатній площині xOy , що свідчить про відсутність кореляційної залежності між ознаками X і Y .

Отже, на основі розміщення точок дослідник має підстави для гіпотетичного припущення про лінійні чи нелінійні залежності між ознаками X і Y . Для двовимірного статистичного розподілу вибірки ознак (X, Y) поняття статистичної залежності між ознаками X та Y має таке визначення.

Статистичною залежністю X від Y називають таку, за якої при зміні значень ознаки $Y = y_i$ змінюється умовний статистичний розподіл ознаки X , статистичною залежністю ознаки Y від X називають таку, за якої зі зміною значень ознаки $X = x_i$ змінюється умовний статистичний розподіл ознаки Y .

У разі зміни умовних статистичних розподілів змінюватимуться і умовні числові характеристики. Звідси впливає визначення кореляційної залежності між ознаками X і Y .

Кореляційною залежністю ознаки Y від X називається функціональна залежність умовного середнього $\bar{y}_x$ від аргументу x , що можна записати так:

$$\bar{y}_x = \alpha(x).$$

Аналогічно кореляційною залежністю ознаки X від Y називається функціональна залежність умовного середнього $\bar{x}_y$ від аргументу y , що можна записати так:

$$\bar{x}_y = \beta(y).$$

Між ознаками X та Y може існувати статистична залежність і за відсутності кореляційної. Але коли існує кореляційна залежність між ознаками X та Y , то обов'язково між ними існуватиме і статистична залежність.

Кореляційно - регресійний аналіз складається з таких етапів:

- вибір форми регресії;
- визначення параметрів рівняння;
- оцінка тісноти зв'язку;
- перевірка істотності зв'язку.

При виборі функції використовують графіки, аналітичні групування, теоретичне обґрунтування. Можливий перебір функцій, коли обчислюють різні рівняння регресії та обирають найкраще.

Визначення параметрів рівняння регресії проводиться методом найменших квадратів, основою якого є мінімізація суми квадратів відхилень емпіричних значень від теоретичних:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y}_i)^2 \rightarrow \min. \quad (11.3)$$

Найбільш поширена у статистичному аналізі лінійна функція.

Питання для самоконтролю

1. Що таке залежність?
2. Що називають функцією регресії?

3. Що таке статистика залежності?
4. Кореляційною залежністю називають...?

Лекційне заняття №12

Тема: Елементи регресійного аналізу

План

1. Рівняння лінійної парної регресії.
2. Множинна лінійна регресія.
3. Нелінійна регресія.

§1. Рівняння лінійної парної регресії

Нехай між змінними X та Y теоретично існує певна лінійна залежність. Це твердження може ґрунтуватися на тій підставі, наприклад, що кореляційне поле для пар $(x_i; y_i)$ має такий вигляд (рис. 12.1). Як бачимо, насправді між ознаками X і Y спостерігається не такий тісний зв'язок, як це передбачає функціональна залежність.

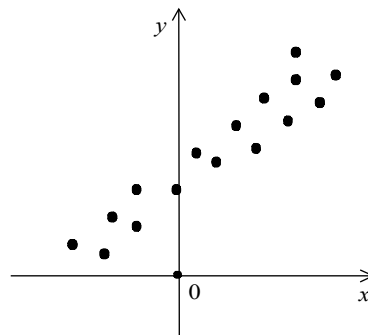


Рис. 12.1

Рівняння лінійної парної регресії набере такого вигляду:

$$y_i = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) + \bar{y} \quad (12.1)$$

або

$$y_i = \rho_{yx} (x - \bar{x}) + \bar{y}, \quad (12.2)$$

де $\rho_{yx} = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ - коефіцієнт регресії, r_{xy} — парний коефіцієнт кореляції між ознаками X і Y .

Показники кореляції часто розраховуються за даними вибірки, тому одержані показники не є точними оцінками показників кореляції в генеральній сукупності. Необхідно визначити точність оцінки показників кореляції та перевірити їх істотність.

При **великому обсязі вибірки** з нормально розподіленої сукупності, якщо величина лінійного коефіцієнта кореляції перевищує величину середньої квадра-

тичної похибки $\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ більш ніж у t_α разів, а нульова гіпотеза H_0 — лінійний коефіцієнт кореляції дорівнює нулю, то вибірковий коефіцієнт кореляції можна вважати істотним (нульова гіпотеза не підтверджується). Тут α - рівень значущості, його найчастіше обирають рівним 0,05 або 0,01; r - значення лінійного коефіцієнта кореляції за даними вибірки; n — обсяг вибірки. Якщо ж

відношення $\frac{|r|}{\sigma_r}$ виявиться меншим за t_α , то з імовірністю $(1-\alpha)$ треба вважати кореляційний зв'язок у генеральній сукупності відсутнім. Значення t_α в цьому випадку для $\gamma = 0,95$ дорівнює 1,96, а для $\gamma = 0,99$ дорівнює 2,58, тобто з імовірністю 0,99 можна стверджувати, що коефіцієнт кореляції генеральної

сукупності знаходиться в інтервалі $\left[r - 2,58 \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}; r + 2,58 \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}} \right]$.

Для **малого обсягу вибірки** розрахункове значення параметра порівнюють з табличним значенням t_α за таблицею закону розподілу Стюдента з $(n-2)$ ступенями вільності. Якщо розрахункове значення $t_{розр}$ перевищує табличне, то з імовірністю $(1-\alpha)$ коефіцієнт кореляції можна вважати істотним, тобто гіпотезу про відсутність кореляційного зв'язку між випадковими величинами (X, Y) слід

відкинути і прийняти альтернативну гіпотезу про наявність залежності між цими випадковими величинами.

Лінійна регресійна модель називається *адекватною*, якщо обчислені за рівнянням регресії значення $\bar{Y}$ погоджуються з результатами спостережень.

Перевірку істотності зв'язку здійснюють за допомогою F – критерію

$$\text{Фішера: } F_r = \frac{r^2}{1 - r^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1}, \quad (12.3)$$

де m – число параметрів рівняння регресії.

За рівнем значущості α , числами $k_1 = m - 1 = 2 - 1 = 1$ та $k_2 = n - m = n - 2$ за таблицями F – розподілу Фішера (додаток) знаходять критичне значення $F_{\text{табл}}(\alpha, k_1, k_2)$ і, якщо $F > F(\alpha, k_1, k_2)$, нульову гіпотезу спростовують, зв'язок вважають істотним, а рівняння – значущим.

Інколи використовують спрощений метод перевірки значущості коефіцієнта кореляції: якщо $|r_{xy}| \cdot \sqrt{n - 1} \geq 3$, то зв'язок між випадковими величинами X та Y досить ймовірний.

§2. Множинна лінійна регресія

У багатьох практичних задачах залежна змінна Y_i пов'язана з впливом не одного, а декількох аргументів. У цьому випадку регресію називають множинною. Якщо аргументи функції регресії мають перший степінь, то множинна регресія називається *лінійною*, у противному разі — *множинною нелінійною регресією*.

Лінійна множинна регресія. Лінійне рівняння регресії для n факторів має такий вигляд:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + \varepsilon, \quad (12.4)$$

де ε – випадкова величина, яка характеризує похибку між даними спостережень і відповідними значеннями, одержаними за допомогою теоретичних розрахунків за формулою (11.7), $a_0, a_1, \dots, a_n$ – параметри, які знаходяться, як і у випадку парної кореляції, методом найменших квадратів.

на інших довільних рівнях. Крім того, на відміну від множинних рівнянь рівняння часткових регресій можна зобразити графіками на площині.

Одночасно з частковою регресією розглядають також часткову кореляцію, яка характеризує зв'язок між результуючою ознакою і деякою факторною змінною x_i при фіксованих (середніх) значеннях інших факторів множинного рівняння регресії.

§3. Нелінійна регресія

Якщо попередній аналіз явищ, зв'язок між якими досліджується, показує, що однаковим змінам середніх значень факторної ознаки відповідають неоднакові зміни середніх значень результативної ознаки, то для вираження загального характеру зв'язку застосовують криволінійні форми кореляційних рівнянь. На практиці найчастіше використовуються такі нелінійні функції залежності: гіперболічна, параболічна другого порядку, напівлогарифмічна та деякі інші.

Статистичний зв'язок між характеристиками виділяють за допомогою такої математичної функції, яка дає найменше відхилення від отриманих зі спостережень значень характеристик. Рівняння таких функцій називаються **рівняннями зв'язків** між результуючими та фактичними характеристиками.

Вид функції, заданої рівнянням зв'язку, визначає і розмежовує зв'язки за видами їх прояву на **лінійні і криволінійні** (параболічні, гіперболічні, ступеневі)

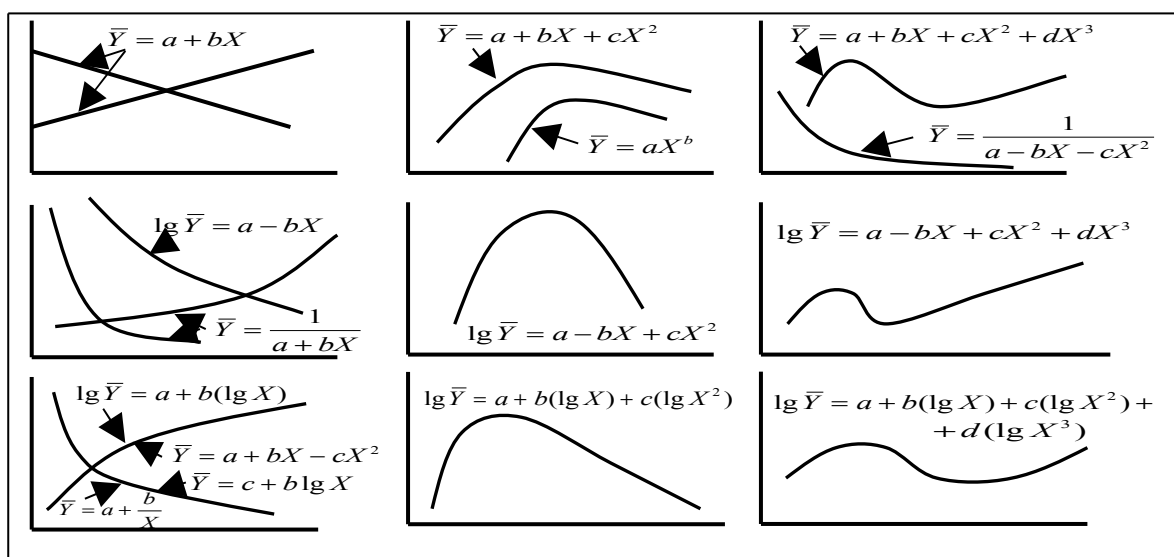


Рис. 12.2

Якщо результативна ознака при збільшенні факторної ознаки спадає, але не нескінченно, а прямує до певного рівня, то для її аналізу застосовується рівняння гіперболи $\bar{Y}_x = a_0 + a_1 \frac{1}{x}$. (12.8)

Для знаходження параметрів цього рівняння методом найменших квадратів складають і розв'язують систему рівнянь з двома невідомими:

$$a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + n a_0 = \sum_{i=1}^n y_i, \quad (12.9)$$

$$a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} + a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} y_i. \quad (12.10)$$

Коефіцієнт кореляції дозволяє достатньо точно оцінити щільність зв'язку у випадку лінійної залежності між ознаками. При наявності криволінійної залежності для оцінки щільності кореляційного зв'язку потрібно використовувати кореляційне відношення:

$$\eta_{x/y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\bar{Y}_x - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (12.11)$$

Величина $\eta_{x/y}$ задовольняє нерівності $0 \leq \eta_{x/y} \leq 1$. Якщо $\eta_{x/y} = 0$, то випадкова величина Y не знаходиться в кореляційній залежності від X . Тоді як по мірі наближення $\eta_{x/y}$ до 1 щільність зв'язку Y з X зростає, і при $\eta_{x/y} = 1$ вона стає функціональною.

Питання для самоконтролю

1. Кореляційно-регресійний аналіз це...?
2. Рівняння лінійної парної регресії?
3. Множинна лінійної регресії називають...?
4. Нелінійна регресія це?

Глосарій

Абсолютний показник – це показник у формі абсолютної величини, яка відображає фізичні властивості, часові та вартісні характеристики соціально-економічних процесів та явищ.

Агрегатний індекс – складний відносний показник, що характеризує середню зміну соціально-економічних явищ, але досліджується з декількох видів одиниць (однорідних або неоднорідних).

Адекватною називається лінійно регресійну модель, якщо обчислені за рівнянням регресії значення $\bar{Y}$ погоджуються з результатами спостережень.

Альтернативною (конкуруючою) називають гіпотезу H_α , яка суперечить основній.

Асимптотично ефективною називається така оцінка, якщо $e \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$

Вимірювання - це процедура визначення числового значення певної величини за допомогою одиниці виміру.

Вагами називають частоти та відносні частоти.

Відносний показник – показник у формі відносної величини; результат порівняння одного абсолютного показника з іншими; характеризує співвідношення між кількісними характеристиками процесів і явищ, що вивчаються, чи міру кількісного співвідношення різнойменних чи однойменних показників.

Групування в статистиці – це розподіл одиниць об'єкта спостереження на однорідні групи за суттєвими для них ознаками.

Графічний метод – це метод умовних зображень статистичних даних за допомогою фігур, ліній, крапок і різноманітних символічних образів.

Граф потоку керування – орієнтований граф, моделюючий потік управління програми.

Геометричні знаки чи образи – це багатообразні знаки за допомогою яких зображують статистичні величини (крапки, прямі лінії, квадрати, прямокутники, рисунки, ескізи і т.д.). знаки становлять основу графіка, це його мова.

Дисперсією s^2 статистичного ряду називають середню арифметичну квадратів відхилень варіант від їх середньої арифметичної.

Дискретним статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот

Дисперсія вибірки – це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_B$.

Дисперсійний аналіз являє собою статистичний метод аналізу результатів, які залежать від якісних ознак.

Емпіричні дослідження як методи використовує реальне спостереження, реальний експеримент, емпіричний опис, складання графіків, таблиць тощо.

Експеримент - апробація знання досліджуваних явищ в контрольованих або штучно створених умовах.

«Експеримент» (від латинського experimentum - спроба, дослід) означає науково поставлений дослід, спостереження досліджуваного явища у певних умовах, що дозволяють багаторазово відтворювати його при повторенні цих умов.

Експлікація графіка – це пояснення, які розкривають суть графіка: заголовок графіка, одиниці виміру, умовні пояснення.

Емпіричною функцією розподілу $F_n(x)$ називається відносна частота (частість) того, що ознака (випадкова величина X) прийме значення, менше ніж заданий x , тобто $F_n(x) = w(X < x) = \frac{w_{\leq x}}{n}$

Інтервальною шкалою відповідають метрики, які показують не тільки відносне становище програм, але і те, як далеко вони відстоять один від одного.

Інтервальний варіаційний ряд утворюють, такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності.

Медіаною Me статистичного ряду називають значення ознаки, що припадає на середину ранжованого ряду спостережень. **Медіана** — варіанта, що перебуває в середині ряду розподілу.

Модою Mo статистичного ряду називають значення ознаки, якій відповідає найбільша частота.

Мода — це величина ознаки (варіанти), яка найбільш часто зустрічається в даній сукупності; **мода** — це варіанта, що має найбільшу частоту.

Масштабні орієнтири – це масштаб, масштабні шкали і масштабні знаки.

Масштаб – це умовна міра переводу числової величини в графіку і навпаки.

Масштабна шкала – це лінія, що розділена на відрізки крапками і відрізки між двома з'єднаними крапками (графічні інтервали) строго пропорційні розмірам і періодам часу зображеним на графіку даних.

Показник варіації – це ті показники, що вивчають міру варіації (коливання) окремих значень ознаки від середньої величини.

Полігон, як правило, використовують для зображення дискретного статистичного ряду, він являє собою ламану, для якої кінці відрізків мають координати (x_i, p_i) .

Поле графіка – це простір, на якому розміщені ті геометричні фігури, які утворюють графік.

Порівняння - це процес зіставлення предметів або явищ дійсності з метою установлення схожості чи відмінності між ними, а також знаходження загального, притаманного, що може бути властивим двом або кільком об'єктам дослідження.

Порядкової шкалою відповідають метрики, що дозволяють ранжувати деякий характеристики шляхом порівняння з опорними значеннями, тобто вимір за цією шкалою фактично визначає взаємне положення конкретних програм.

Потік управління - послідовність виконання різних модулів і операторів програми.

Програмна інженерія (Software Engineering) – це система методів, способів і дисципліни з планування, розробки, експлуатації і супроводження програмного забезпечення (ПЗ), призначених для промислового виробництва ПЗ.

Програмна система (Application) – комплекс інтегрованих програм і засобів, що реалізують набір взаємопов'язаних функцій деякої предметної області в заданому середовищі.

Програмне забезпечення – сукупність програмних засобів, які реалізують функції комп'ютерної системи (або функції технічної апаратно-програмної системи), включаючи загальносистемні засоби (наприклад, ОС, СКБД, вбудовані підсистеми контролю показників технологічних процесів, оброблення сигналів тощо) та прикладні програмні системи.

Програмний проект (program project) – унікальний і інтегрований комплекс взаємозалежних заходів, орієнтованих на досягнення цілей і задач об'єкта розроблення за визначеними вимогами до строків, бюджету та характеристик очікуваних результатів діяльності від нього.

Програмний продукт - сукупність програм і супровідної документації по їх установці, налаштуванню, використанню та доопрацювання.

Простою називають гіпотезу, яка має одне припущення, інакше гіпотеза є складною.

Ряд динаміки – це ряд статистичних показників, що розташовані в хронологічній послідовності і характеризують зміну явища в часі.

Ряд розподілу – це упорядкований розподіл одиниць сукупності на групи за певною варіаційною ознакою.

Середня величина – це узагальнююча характеристика сукупності явищ за ознакою, що варіює, тобто це узагальнюючий показник, який характеризує типовий рівень ознаки, що варіює, в розрахунку на одиницю сукупності.

Спеціально організоване спостереження – це форма спостереження, яка охоплює сфери життя та діяльності, що не відображаються звітністю. до числа таких спостережень належать: переписи, обліки, соціальні обстеження, опитування.

Статистична сукупність – це маса певним чином однорідних елементів, які мають єдину якісну основу, але різняться між собою певними ознаками і підлягають певному закону розподілу.

Статистична таблиця – це форма найбільш раціонального, наочного та систематизованого викладання результатів зведення і групування матеріалів статистичного спостереження.

Статистичне спостереження – це спланована, науково організаційна реєстрація масових даних про будь-які соціально-економічні явища та процеси.

Статистичні показники – це число в сукупності з набором ознак, що характеризують обставини, яких вони стосуються, що, до, коли, і яким чином підлягає вимірюванню.

Використана література

1. Вендров А.М. Проектирование программного обеспечения экономических информационных систем. Учебник. / А.М. Вендров. – М.: «Финансы и статистика». 2000. - 339 с.
2. Вендров А.М. Практикум по проектированию программного обеспечения экономических информационных систем. / А.М. Вендров. – М.: «Финансы и статистика». 2002. - 190 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. / В.Е. Гмурман. - М.: Высшая школа, 1975. - 333 с.
4. Гурский В.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. / Гурский В.И. - М.: Высшая школа, 1976. - 328 с.
5. Кадильникова Т.М. Вища математика в прикладах та задачах. Частина VII: Навч. посібник. / Т.М. Кадильникові, І.В. Пасічник, Л.В. Маринчук, О.А. Мельник. - Дніпропетровськ: НМетАУ, 2011.- 91 с.
6. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика. / В.А. Колемаев, О.В. Староверов и др. - М: Высшая школа, 1991. - 400 с.
7. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. / Н.Ш. Кремер. – М: Юнити-Дана, 2002. – 543 с.
8. Крамер Г. Математические методы статистики. / Г. Крамер - М.: Мир, 1975.-684 с.
9. Смирнов Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1965. – 511с.
10. Сторожук В.П. Курс лекцій з дисципліни «Статистика». Частина 1. Теорія статистики: /В.П. Сторожук, О.В. Кустовська, Є.І. Ткач, І.М. Шост та ін.; За ред. Є.І. Ткача –Тернопіль: Економічна думка, 2006 . – 224 с.

ДОДАТКИ

Значення t-критерія Стюдента при рівні значимості 0,10, 0,05, 0,01

Число степеней свободы <i>d.f.</i>	<i>P</i>			<i>d.f.</i>	<i>P</i>		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	,7171	2,0739	2,8188
6	,9432	2,4469	3,7074	23	,7139	2,0687	2,8073
7	,8946	2,3646	3,4995	24	,7109	2,0639	2,7969
8	,8595	2,3060	3,3554	25	,7081	2,0595	2,7874
9	,8331	2,2622	3,2498	26	,7056	2,0555	2,7787
10	,8125	2,2281	3,1693	27	,7033	2,0518	2,7707
11	,7959	2,2010	3,1058	28	,7011	2,0484	2,7633
12	,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Значення t-критерія Стюдента

при рівні значущості α : 0,10, 0,05, 0,01

Число ступеней вільності	α			Число ступеней вільності	α		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
1	6,314	12,706	63,66	18	1,734	2,101	2,878
2	2,92	4,3027	9,925	19	1,729	2,093	2,861
3	2,353	3,1825	5,841	20	1,725	2,086	2,845
4	2,132	2,7764	4,604	21	1,721	2,08	2,831
5	2,015	2,5706	4,032	22	1,717	2,074	2,819
6	1,943	2,4469	3,707	23	1,714	2,069	2,807
7	1,895	2,3646	3,5	24	1,711	2,064	2,797
8	1,86	2,306	3,355	25	1,708	2,06	2,787
9	1,833	2,2622	3,25	26	1,706	2,056	2,779
10	1,813	2,2281	3,169	27	1,703	2,052	2,771
11	1,796	2,201	3,106	28	1,701	2,048	2,763
12	1,782	2,1788	3,055	29	1,699	2,045	2,756
13	1,771	2,1604	3,012	30	1,697	2,042	2,75
14	1,761	2,1448	2,977	40	1,684	2,021	2,705
15	1,753	2,1315	2,947	60	1,671	2	2,66
16	1,746	2,1199	2,921	120	1,658	1,98	2,617
17	1,74	2,1098	2,898	∞	1,645	1,96	2,576

Значення χ^2 –критерія Пірсона при рівні значимості

0,10, 0,05, 0,01

<i>df.</i>	0,10	0,05	0,01	<i>df.</i>	0,10	0,05	0,01
1	2,71	3,84	6,63	21	29,62	32,67	38,93
2	4,61	5,99	9,21	22	30,81	33,92	40,29
3	6,25	7,81	11,34	23	32,01	35,17	41,64
4	7,78	9,49	13,28	24	33,20	36,42	42,98
5	9,24	11,07	15,09	25	34,38	37,65	44,31
6	10,64	12,59	16,81	26	35,56	38,89	45,64
7	12,02	14,07	18,48	27	36,74	40,11	46,96
8	13,36	15,51	20,09	28	37,92	41,34	48,28
9	14,68	16,92	21,67	29	39,09	42,56	49,59
10	15,99	18,31	23,21	30	40,26	43,77	50,89
11	17,28	19,68	24,72	40	51,80	55,76	63,69
12	18,55	21,03	26,22	50	63,17	67,50	76,15
13	19,81	22,36	27,69	60	74,40	79,08	88,38
14	21,06	23,68	29,14	70	85,53	90,53	100,42
15	22,31	25,00	30,58	80	96,58	101,88	112,33
16	23,54	26,30	32,00	90	107,56	113,14	124,12
17	24,77	27,59	33,41	100	118,50	124,34	135,81
18	25,99	28,87	34,81				
19	27,20	30,14	36,19				
20	28,41	31,41	37,57				

Критичні значення коефіцієнтів кореляції для рівня значимості

0,05; 0,01

<i>df.</i>	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	<i>df.</i>	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
1	0,996917	0,9998766	17	0,4555	0,5751
2	0,995000	0,990000	18	0,4438	0,5614
3	0,8783	0,95873	19	0,4329	0,5487
4	0,8114	0,91720	20	0,4227	0,5368
5	0,7545	0,8745	25	0,3809	0,4869
6	0,7067	0,8343	30	0,3494	0,4487
7	0,6664	0,7977	35	0,3246	0,4182
8	0,6319	0,7646	40	0,3044	0,3932
9	0,6021	0,7348	45	0,2875	0,3721
10	0,5760	0,7079	50	0,2732	0,3541
11	0,5529	0,6835	60	0,2500	0,3248
12	0,5324	0,6614	70	0,2919	0,3017
13	0,5139	0,6411	80	0,2172	0,2830
14	0,4973	0,6226	90	0,2050	0,2673
15	0,4821	0,6055	100	0,1946	0,2540
16	0,4683	0,5897			

Значення F-критерії Фішера при рівні значимості 0,05

df_2	df_1																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	30	∞	
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	250	254	
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41	19,42	19,43	19,44	19,46	19,50	
3	10,13	9,55	9,28	9,19	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74	8,71	8,69	8,66	8,62	8,53	
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91	5,87	5,84	5,80	5,74	5,63	
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68	4,64	4,60	4,56	4,50	4,36	
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,96	3,92	3,87	3,81	3,67	
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57	3,52	3,49	3,44	3,38	3,23	
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28	3,23	3,20	3,15	3,08	2,93	
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07	3,02	2,98	2,93	2,86	2,71	
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91	2,86	2,82	2,77	2,70	2,54	
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79	2,74	2,70	2,65	2,57	2,40	
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69	2,64	2,60	2,54	2,46	2,30	
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60	2,55	2,51	2,46	2,38	2,21	
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53	2,48	2,44	2,39	2,31	2,13	
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48	2,43	2,39	2,33	2,25	2,07	
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42	2,37	2,33	2,28	2,20	2,01	
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38	2,33	2,29	2,23	2,15	1,96	
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,29	2,25	2,19	2,11	1,92	
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,34	2,31	2,26	2,21	2,15	2,07	1,88	
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31	2,28	2,23	2,18	2,12	2,04	1,84	
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,20	2,15	2,09	2,00	1,81	
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,26	2,23	2,18	2,13	2,07	1,98	1,78	
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,24	2,20	2,14	2,10	2,04	1,96	1,76	
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22	2,18	2,13	2,09	2,02	1,94	1,73	
25	4,24	3,88	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,26	2,24	2,20	2,16	2,11	2,06	2,00	1,92	1,71	
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,10	2,05	1,99	1,90	1,69	
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	2,16	2,13	2,08	2,03	1,97	1,88	1,67	
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,06	2,02	1,96	1,87	1,65	
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,05	2,00	1,94	1,85	1,64	
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,04	1,99	1,93	1,84	1,62	
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04	2,00	1,95	1,90	1,84	1,74	1,51	
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98	1,95	1,90	1,85	1,78	1,69	1,44	
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,86	1,81	1,75	1,65	1,39	
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,88	1,85	1,79	1,75	1,68	1,57	1,28	
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,69	1,64	1,57	1,46	1,00	

df_1 - число степеней свободы для колющей дисперсии, df_2 - число степеней свободы для меньшей дисперсии.

df_1 – число степеней свободи для юольшей дисперсин; df_2 – число степеней свободи для меньшей дисперсин.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Матвійчук Л.А. Конспект лекцій для студентів напряму підготовки 6.050103 «Програмна інженерія» денної та заочної форми навчання з дисципліни «Емпіричні методи програмної інженерії»./ Матвійчук Л.А. - Луцьк: ЛПрОЛ Університету «Україна», 2012. - 124 с.

Комп'ютерний набір та верстка:

Л.А. Матвійчук

Підп. до друку _____ 2012.

Формат 60×84/16. Папір офс. Гарн. Таймс.

Ум друк. арк. 7,75 Обл.-вид.арк. 3,5. Тираж прим. Зам. _____

Луцький інститут розвитку людини

Університету «Україна»

43023, м. Луцьк, вул. Карбишева, 2