

Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка  
Природничо-математичний факультет  
Кафедра математики

**Кваліфікаційна робота**  
освітнього ступеня «магістр»  
на тему  
**Метод проєктів як засіб формування дослідницької компетентності  
учнів наукових ліцеїв під час навчання курсу “Геометрія. Профільний  
рівень”**

Виконала:

студентка 2 курсу, групи 61

спеціальності

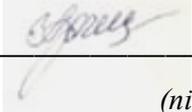
014 Середня освіта (Математика)

Нечитайло Юлія Анатоліївна

Науковий керівник:

к.п.н., доцент Філон Л.Г.

Роботу подано до розгляду « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ року.

Студентка \_\_\_\_\_  Нечитайло Ю.А.  
(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник \_\_\_\_\_ Філон Л. Г.  
(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент \_\_\_\_\_  
(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики.

Протокол № \_\_\_\_\_ від « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ року.

Студентка допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ Філон Л.Г.  
(підпис) (прізвище та ініціали)

## АНОТАЦІЯ

**Нечитайло Ю.А. Метод проєктів як засіб формування дослідницької компетентності учнів наукових ліцеїв під час навчання курсу “Геометрія. Профільний рівень”. Кваліфікаційна робота освітнього ступеня «магістр». На правах рукопису.**

**Спеціальність – 014 Середня освіта (Математика). – Чернігів, 2025.**

У кваліфікаційній роботі розглянуто проблему формування дослідницької компетентності (ДК) учнів наукових ліцеїв у курсі «Геометрія. Профільний рівень». Обґрунтовано, що метод проєктів є одним із механізмів реалізації компетентнісного підходу. Проведено аналіз навчальної програми та підручників, виділено тематичні блоки, перспективні для дослідницької діяльності: вектори, координати, тіла обертання та об’єми. Розроблено методичні рекомендації щодо організації практичних занять з акцентом на математичному моделюванні та алгоритмі дослідницького методу. Сформовано систему короткотривалих міні-проєктів (МП), які реалізуються із застосуванням технологій GeoGebra та CAS.

Результатом проведеного дослідження стало: розробка системи МП та методичних рекомендацій, спрямованих на системне формування ДК учнів.

**Ключові слова:** дослідницька компетентність, метод проєктів, GeoGebra, CAS, профільне навчання, геометрія, міні-проєкт, математичне моделювання.

## SUMMARY

**Nechytailo Yu.A.. The project method as a means of forming research competence of students of scientific lyceums during the course “Geometry. Profile level”. Qualification work of the educational degree «master». On the rights of the manuscript. Specialty – 014 Secondary Education (Mathematics). – Chernihiv, 2025.**

In the qualification paper, the problem of forming research competence (RC) among students of scientific lyceums during the study of the "Geometry. Profile Level" course is considered. It is substantiated that the project method is the main mechanism for implementing the competence approach. The analysis of the curriculum and textbooks was conducted, and thematic blocks promising for research activity were identified: vectors, coordinates, solids of revolution, and volumes. Methodological recommendations for organizing practical lessons were developed, emphasizing mathematical modeling and the research method algorithm. A system of short-term mini-projects (MPs) was created, which are implemented using GeoGebra and CAS technologies. The result of the conducted research is: the development of an MP system and methodological recommendations aimed at the systematic formation of student RC.

**Key words:** research competence, project method, GeoGebra, CAS, profile education, geometry, mini-project, mathematical modeling.

## ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ	9
1.1. Особливості навчання в наукових ліцеях	9
1.2. Компетентнісний підхід у навчанні математики, дослідницька компетентність	12
1.3. Методи навчання, їх сутність, класифікація	14
1.4. Метод проєктів як форма активних технологій навчальної діяльності (історія виникнення, суть)	17
1.5. Переваги та недоліки методу проєктів, відмінності від традиційного навчання	20
1.6. Технології та інструменти організації проєктної діяльності	24
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕХНОЛОГІЙ ПРОЄКТНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ КУРСУ «ГЕОМЕТРІЯ. ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ»	29
2.1. Аналіз навчальної програми з геометрії (профільний рівень) для 10-11 класів на предмет дослідження	29
2.2. Аналіз підручників геометрії профільного рівня та виділення тем для короткотривалих проєктів	36
2.3. Методичні рекомендації до вивчення теоретичного матеріалу, що стосується підготовки учнів до проєктно-дослідницької діяльності	40
2.4. Планування та проведення практичних занять	43
2.5. Організація самостійної проєктно-дослідницької роботи учнів під час вивчення курсу «Геометрія. Профільний рівень»	46
ВИСНОВКИ	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	55
ДОДАТКИ	61

## ВСТУП

**Актуальність дослідження.** Перехід до нової освітньої парадигми, що забезпечує учням пізнавальну активність та самостійне мислення, є одним із стратегічних напрямів модернізації освіти. Для розв'язання цих завдань потрібні відповідні методи, які здатні трансформувати пасивне засвоєння інформації у цілеспрямовану дослідницьку діяльність. Дедалі більшого поширення в освіті набуває метод проєктів. Він вимагає від учнівства вирішення актуальної та цікавої для нього проблеми внаслідок власної ініціативи та подання отриманих результатів. Його суть полягає в організації самостійної навчальної діяльності щодо вирішення реальних проблем, які цікавлять учнівство, та обов'язкової презентації здобутих результатів.

Особливої актуальності метод проєктів набуває в умовах функціонування наукових ліцеїв. Ці заклади мають стратегічне завдання – не просто дати поглиблені знання, а й сформувати майбутню наукову еліту, здатну до інноваційної та дослідницької діяльності. Методу проєктів, як інструменту формування дослідницької компетентності, відводиться ключова роль, оскільки він імітує реальну наукову діяльність. Проєктна робота максимально наближує учнів до повного циклу дослідження – від постановки гіпотези до захисту результатів. Цей метод ефективно формує навички Problem Solving (вирішення проблем), критичне мислення, командну роботу та самоорганізацію, що є критично важливим для майбутніх науковців та висококваліфікованих кадрів. Метод проєктів відповідає компетентнісному підходу, він є ідеальною реалізацією вимог щодо формування ключових компетентностей, необхідність чого підтверджується, зокрема, результатами дослідження PISA. Це прямо корелює з цілями Національної економічної стратегії на період до 2030 року, що вимагає підготовки кадрів, здатних до інновацій [24].

У науковій літературі метод проєктів розглядається як ефективний інструмент формування дослідницької компетентності учнів, що відповідає сучасним вимогам компетентнісного підходу в освіті. Проєктна технологія

зобов'язана своїм виникненням «методу проєктів» який був розроблений американським філософом Дж. Дьюї (1859 – 1952) та його послідовником В. Кілпатріком (1871 – 1965), хоча сучасні дослідження віднаходять джерела навчання через проєкти ще у «проєктній методиці» архітектурних шкіл Європи XVII ст. Авторами методу було запропоновано будувати навчальний процес на активній основі, спираючись на цілеспрямовану діяльність учнів, з урахуванням їх потреб, інтересів та здібностей. [15, с.35]. Історичні аспекти розвитку цього методу та його місце серед інших методів навчання, як продуктивного та дослідницького, висвітлено у фундаментальних працях з педагогіки та методики, зокрема у дослідженнях З. І. Слєпкань [35]. Український дослідник І. Г. Єрмаков [12] акцентує увагу на адаптації методу до національної системи освіти, зокрема в контексті природничо-математичних дисциплін. Дослідження О. І. Пометун та Л. В. Пироженко [29], а також Л. В. Пироженко [27] вказують на переваги методу проєктів у формуванні вмінь учнів аналізувати, синтезувати інформацію та застосовувати знання в нестандартних ситуаціях. Методичний аналіз змісту профільного курсу геометрії, представленого у підручниках [3, 4] та [5, 6], підтверджує необхідність дослідницької діяльності для якісного засвоєння матеріалу. Водночас, у роботах М.О. Грищенка [10] та І. В. Єгорової [30] зазначаються виклики, пов'язані з організацією проєктної діяльності, зокрема необхідність ретельного планування та врахування рівня підготовки учнів. Аналіз сучасних джерел, таких як праці О. В. Косович [19] і С. А. Ракова [33], демонструє, що використання методу проєктів у вивченні геометрії сприяє розвитку дослідницької компетентності через інтеграцію теоретичних знань із практичними задачами, що є особливо актуальним для профільних класів наукових ліцеїв.

Популярність методу проєктів зумовлена тим, що його дидактична сутність дозволяє вирішувати завдання, які розвивають творчі здібності учнівства, його вміння самостійно конструювати та застосовувати знання

для розв'язання пізнавальних та практичних завдань, здатність здобувати та аналізувати необхідну інформацію.

**Об'єкт дослідження** – процес навчання геометрії учнів профільних класів наукових ліцеїв.

**Предмет дослідження** – методика використання проєктної діяльності під час формування дослідницької компетентності учнів наукових ліцеїв у курсі “Геометрія. Профільний рівень”.

**Мета роботи** – дослідження використання прийомів проєктної діяльності для формування дослідницької компетентності учнів наукових ліцеїв під час навчання курсу “Геометрія. Профільний рівень”.

Відповідно до мети дослідження сформульовано такі **завдання** дослідження:

1. Визначити особливості навчання в наукових ліцеях
2. Розглянути класифікацію і сутність методів навчання.
3. Проаналізувати метод проєктів як форму активних технологій навчальної діяльності.
4. Виокремити переваги та недоліки методу проєктів, відмінності від традиційного навчання.
5. Описати технології та інструменти організації проєктної діяльності
6. Розробити методичні рекомендації стосовно впровадження проєктних технологій у курс “Геометрія. Профільний рівень” з метою формування дослідницької компетентності учнівства.

**Методи дослідження:** опрацювання навчально-методичної літератури, аналіз змісту програм і підручників геометрії профільного рівня, порівняльний аналіз, систематизація та узагальнення.

**Теоретичне значення дослідження** – визначені методичні особливості формування дослідницької компетентності учнівства з використанням технологій проєктної діяльності під час навчання курсу “Геометрія. Профільний рівень”.

**Практичне значення дослідження** – розроблено систему геометричних задач за темами, що вивчають у профільних класах наукового ліцею; створено методичні рекомендації щодо реалізації цієї системи із застосуванням методу проєктів.

**Апробація результатів дослідження.** Основні положення дослідження доповідалися на Всеукраїнській науково-практичній конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів, і молодих учених “Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання” (грудень, 2023 р., м. Чернігів). Тези доповіді опубліковані у збірнику матеріалів конференції [25, с. 113]

**Структура роботи.** Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

## РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

### 1.1. Особливості навчання в наукових ліцєях

Науковий ліцей є спеціалізованим закладом освіти, що функціонує відповідно до Закону України «Про повну загальну середню освіту» [13] та Положення про науковий ліцей [28], забезпечуючи здобуття профільної середньої освіти та допрофесійну підготовку. Установчі документи визначають науковий ліцей як освітню установу, яка формує освітнє середовище, орієнтоване на підтримку та розвиток академічно обдарованих дітей. Його сутність полягає у систематичній роботі з обдарованою учнівською молоддю – дітьми, які виявляють стійкі здібності до навчально-дослідницької, дослідницько-експериментальної, наукової, конструкторської та винахідницької діяльності [28]. Навчання у таких закладах не є тотожним традиційному, оскільки воно цілеспрямовано адаптується під потреби майбутньої наукової та інженерної еліти. Особливості організації освітнього процесу в наукових ліцєях вимагають застосування інноваційних методів та технологій профільного навчання [37].

Особливості навчання в науковому ліцеї диктуються двома ключовими факторами: специфічним, вмотивованим контингентом учнів, відібраних за їхніми здібностями до математики, і програмними цілями, викладеними в Положенні про науковий ліцей. Саме ці чинники зумовлюють критичну необхідність розвитку дослідницької компетентності (ДК), що виходить далеко за межі традиційного засвоєння предметних знань. ДК у науковому ліцеї перестає бути додатковим елементом і стає основною метою навчання, оскільки вона є фундаментом для підготовки майбутнього вченого [28]. Це вимагає відмови від репродуктивних методів на користь продуктивних і творчих, здатних формувати вміння аналізувати та синтезувати інформацію. «Водночас недооцінка репродуктивної діяльності учнів призводить до того, що в них не формується фонд дійових знань, який є необхідною умовою для

можливостей організації самостійної пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення і продуктивної діяльності» [35, с. 55].

Головні завдання наукового ліцею, визначені пунктом 8 Положення [28], прямо вказують на методологічну базу, необхідну для викладання профільної геометрії та активного використання методу проєктів. Ці завдання деталізують, яким чином має відбуватися освітня діяльність:

- підготовка майбутнього вченого, особистості, здатної до інноваційної діяльності, прийняття системних рішень, у тому числі в критичних ситуаціях; це вимагає від викладання математики відмови від репродуктивних завдань на користь відкритих проблем, що стимулюють творче застосування знань, зокрема для моделювання складних реальних процесів та нестандартних ситуацій, що є основою дослідницької діяльності;

- провадження освітньої діяльності на основі підходів дослідно-орієнтованого навчання, спрямованої на залучення та підготовку учнівської молоді до наукової і науково-технічної діяльності; дослідно-орієнтований підхід означає, що учень не просто отримує готову інформацію про теореми та формули (як у традиційній школі), а має можливість дослідити залежність геометричних величин (наприклад, об'єму тіла обертання) від параметрів функцій, що його генерують, трансформуючи таким чином учня з пасивного споживача інформації на активного конструктора знань;

- забезпечення здобуття учнями освіти відповідно до Державного стандарту загальної середньої освіти та стандарту спеціалізованої освіти наукового спрямування, у тому числі завдяки системній роботі з використання завдань та досліджень високого рівня складності (олімпіадних, турнірних, проєктно-конкурсних тощо); саме такі комплексні та прикладні завдання, які вимагають інтеграції знань з різних розділів (геометрія, аналіз, фізика), неможливо розв'язати в рамках традиційного уроку, що створює пряму необхідність упровадження методу проєктів, який дозволяє учням працювати над такими високоскладними завданнями

протягом тривалого часу, використовуючи, наприклад, цифрові інструменти GeoGebra для моделювання просторових об'єктів;

– забезпечення поглибленого вивчення профільних предметів та набуття компетентностей, необхідних для подальшої наукової і науково-технічної діяльності; курс геометрії профільного рівня [4, 6] є ідеальною платформою для реалізації цього завдання, оскільки поглиблене вивчення векторів і координат, а також тіл обертання, дозволяє учням перейти від абстрактного мислення до моделювання реальних фізичних та інженерних процесів, що значно підвищує практичну спрямованість навчання та актуальність дослідницьких завдань;

– пошук і відбір для навчання обдарованих дітей, які виявляють здібності до навчально-дослідницької, дослідницько-експериментальної, наукової, конструкторської, винахідницької, пошукової діяльності; це підтверджує, що контингент ліцею є вмотивованим до самостійного пошуку, і вчитель має виступати не як транслятор знань, а як фасилітатор та науковий керівник, який ставить відкриті, а не закриті запитання, спрямовуючи діяльність учнів у дослідницьке русло;

– налагодження співпраці із закладами вищої освіти та науковими установами та залучення діячів науки, працівників підприємств, установ, організацій, представників професійних асоціацій відповідно до профілю наукового ліцею до освітнього процесу, керівництва проектними групами учнів; проектна діяльність виступає природною формою цієї співпраці, оскільки міні-проекти можуть розроблятися під керівництвом фахівців, забезпечуючи учням досвід реальної наукової комунікації, планування та звітності, що формує їхню соціальну та комунікативну компетентності.

Уся специфіка освітньої діяльності наукового ліцею – від відбору учнів до фінальних цілей – дає підставу стверджувати, що метод проектів є не просто бажаним, а методично необхідним інструментом. Він дає можливість реалізувати дослідницьку компетентність у навчанні геометрії, трансформуючи абстрактні знання у практичні навички дослідження,

моделювання та інженерного мислення, що є основою для підготовки конкурентоспроможного фахівця.

## **1.2. Компетентнісний підхід у навчанні математики, дослідницька компетентність**

Сучасна українська школа, відповідно до Закону України «Про освіту» [12] та Концепції «Нова українська школа» [26, 31], переходить до компетентнісної парадигми, у центрі якої – здатність учня застосовувати знання у реальних життєвих ситуаціях. Компетентнісний підхід, як наголошує Г. Ф. Зверєва [14], полягає не лише у засвоєнні фактів, а й у формуванні здатності учнів використовувати набуті знання та вміння як засіб для розв'язання реальних або змодельованих життєвих проблем. Теоретичне підґрунтя цього переходу детально розкрито у фундаментальних працях з педагогіки та методики навчання, зокрема у дослідженнях, присвячених впровадженню компетентнісного підходу, як-от роботи І. Г. Єрмакова [9] та інших авторів, які вивчали ефективність активних методів навчання. «Компетентнісний підхід покликаний подолати прірву між освітою і вимогами життя» [9, с. 25]. Європейська рамка рекомендацій, що лягла в основу національних стратегічних документів, визначає ключові компетентності, серед яких особливе місце посідає «математична компетентність та компетентність у природничих науках, техніці і технологіях», а також «ініціативність і підприємливість», що включає дослідницькі вміння [31].

Математична компетентність, за М. С. Голованем [7], є інтегративною якістю особистості, яка охоплює:

- знання математичних фактів, методів і мови;
- вміння розв'язувати задачі різного типу;
- здатність моделювати реальні процеси;
- критичне мислення та здатність оцінювати результати.

С. А. Раков детально розкриває структуру математичної компетентності профільного рівня через чотири складові:

- змістово-процедурну;
- інструментально-технологічну (включаючи ІКТ);
- комунікативно-презентаційну;
- дослідницьку [33, с. 15–27].

Саме дослідницька складова стає провідною у наукових ліцеях, де учні мають бути готовими до самостійного наукового пошуку. Дослідницька компетентність у контексті математики трактується як здатність учня:

- формулювати гіпотези;
- планувати дослідження;
- добирати та обробляти інформацію;
- виконувати експеримент (у т.ч. комп'ютерний);
- аналізувати результати;
- робити обґрунтовані висновки та презентувати їх.

В. В. Вдовенко підкреслює, що формування дослідницької компетентності на уроках математики можливе лише за умови переходу від репродуктивної до пошукової та творчої діяльності [2].

Проектна діяльність є одним із найефективніших засобів такого переходу. За даними систематичного огляду В. Condliffe та співавторів, проектно-орієнтоване навчання (Project-Based Learning) сприяє значному зростанню глибини розуміння математичних понять, розвитку критичного мислення та дослідницьких навичок [38]. Аналогічні висновки підтверджені іспансько-португальським scoring review 2022 року, де проектна методика визнана найперспективнішою для формування математичної компетентності у старшій школі [39].

В українському контексті І. Г. Єрмаков визначає компетентнісний потенціал проектної діяльності через чотири виміри: пізнавальний, діяльнісний, ціннісно-смісловий, рефлексивний [9].

Саме геометрія профільного рівня (10–11 класи наукових ліцеїв) створює ідеальні умови для реалізації цього потенціалу, оскільки теми «Прямокутна декартова система координат у просторі», «Вектори у

просторі», «Многогранники», «Тіла обертання» вимагають просторової уяви, моделювання реальних об'єктів та міждисциплінарного підходу (архітектура, інженерія, мистецтво).

Компетентнісний підхід у навчанні геометрії профільного рівня передбачає перехід від знаннєвої до діяльнісної моделі, де провідним механізмом формування дослідницької компетентності виступає метод проєктів. Це повністю відповідає європейським та національним стратегічним документам [12, 26, 31] і створює теоретичне підґрунтя для практичної частини дослідження.

### **1.3. Методи навчання, їх сутність, класифікація**

Методи навчання є ключовим елементом освітнього процесу, адже саме вони визначають способи організації спільної діяльності вчителя та учнів для досягнення навчальних цілей. У контексті профільного навчання геометрії їхня основна функція полягає у формуванні математичної та дослідницької компетентностей, розвитку критичного мислення й уміння самостійно здобувати знання. Сутність методів навчання полягає в цілеспрямованій взаємодії, яка забезпечує не лише засвоєння системи знань, а й розвиток умінь застосовувати їх у нових ситуаціях, що особливо важливо для профільного рівня [10, 35].

Традиційно в педагогічній літературі методи навчання класифікували за джерелом знань на словесні, наочні та практичні [10, 35]. Ця класифікація, що сформувалася ще в середині ХХ століття, залишається зрозумілою й досі використовується в багатьох підручниках, проте в умовах компетентнісного підходу вона визнається обмеженою, оскільки не відображає сучасних вимог до рівня самостійності та пізнавальної активності учнів. Сьогодні значно продуктивнішою є класифікація, яка враховує саме ступінь самостійності учнів і глибину їхньої пізнавальної діяльності. За цією ознакою виділяють три основні групи методів [29, 32]:

– репродуктивні методи, спрямовані на засвоєння готових знань і відпрацювання стандартних алгоритмів;

- частково-пошукові (евристичні) методи, за яких учень самостійно виконує окремі кроки розв'язання проблеми під керівництвом учителя;
- дослідницькі методи, що передбачають максимально можливу самостійність учнів у постановці проблеми, пошуку шляхів її розв'язання та оформленні результатів.

Саме до дослідницьких методів належить метод проєктів, який характеризується тривалою самостійною або груповою діяльністю учнів, спрямованою на розв'язання реальної чи умовно-реальної проблеми з обов'язковим створенням конкретного продукту та його публічним захистом [1, 27, 29, 32].

У навчанні геометрії профільного рівня дослідницькі методи, і насамперед метод проєктів, набувають особливого значення. Вони дають змогу учням не лише засвоювати теоретичні відомості, а й застосовувати їх під час створення комп'ютерних 3D-моделей, аналізу просторових конструкцій, оптимізації геометричних параметрів реальних об'єктів (наприклад, інженерних споруд чи сонячних установок). Така діяльність сприяє формуванню всіх складових дослідницької компетентності: від вміння формулювати гіпотези й планувати дослідження до здатності аналізувати отримані результати та презентувати їх перед аудиторією [19, 33].

Інтерактивні методи є сучасним доповненням до традиційної класифікації й включають методи, що стимулюють активну взаємодію між учнями та вчителем. До них належать групові дискусії, кейс-методи, мозковий штурм і метод проєктів. У профільному навчанні геометрії інтерактивні методи створюють умови для групової роботи учнів над складними задачами, наприклад, моделювання інженерних конструкцій, оптимізація розміщення об'єктів у просторі чи аналіз геометричних властивостей реальних технічних споруд. «Інтерактивні технології навчання сприяють розвитку критичного мислення, комунікативних навичок і вміння працювати в команді» [32].

Особливе місце в системі сучасних методів посідають дослідницькі методи. За означенням О. І. Пометун та Л. В. Пироженко, дослідницькі методи – це «методи навчання, за яких учні самостійно і в повному обсязі проходять усі етапи дослідницької діяльності: від постановки проблеми до презентації результатів, а вчитель виконує лише функції консультанта й координатора» [29, с. 28]. Ті ж авторки, разом з І. В. Єгоровою, відносять до дослідницьких методів такі основні різновиди [29, с. 29–31; 32, с. 47–52]:

- метод проєктів (тривала самостійна або групова робота над розв’язанням реальної проблеми з обов’язковим продуктом і публічним захистом);

- дослідницька (науково-дослідницька) робота учнів;

- експериментально-дослідницька діяльність (у тому числі комп’ютерний експеримент);

- проблемно-дослідницькі завдання підвищеної складності.

У курсі геометрії профільного рівня саме ці методи реалізуються через створення тривимірних моделей у GeoGebra, дослідження геометричних місць точок у просторі, аналіз параметрів многогранників і тіл обертання, моделювання оптимальних конструкцій [1; 33]. Провідним серед дослідницьких методів є метод проєктів, який охоплює всі етапи дослідження і найкраще відповідає цілям формування дослідницької компетентності учнів наукових ліцеїв [31; 37].

Методи навчання у профільному викладанні геометрії є багатогранними та спрямованими на формування математичної й дослідницької компетентностей. Поєднання репродуктивних, частково-пошукових та дослідницьких методів створює динамічний освітній процес, що готує учнів до застосування геометричних знань у реальних ситуаціях і сприяє їхньому всебічному розвитку [29; 32; 33].

Метод проєктів забезпечує проходження учнями всіх етапів дослідницької діяльності – від постановки проблеми до захисту кінцевого продукту – і є найефективнішим засобом формування дослідницької

компетентності та творчого потенціалу старшокласників наукових ліцеїв [1; 27; 29; 32; 33].

#### **1.4. Метод проєктів як форма активних технологій навчальної діяльності (історія виникнення, суть)**

Метод проєктів є одним із ключових інноваційних методів навчання, який відповідає принципам компетентнісного підходу та сприяє формуванню дослідницької компетентності учнів у профільному навчанні геометрії. Сутність методу проєктів полягає в «організації навчального процесу, спрямованої на самостійне виконання учнями практичних або дослідницьких завдань, що передбачають постановку проблеми, пошук шляхів її вирішення та презентацію результатів» [27]. У контексті курсу «Геометрія. Профільний рівень» метод проєктів дозволяє учням не лише засвоювати теоретичні знання, а й застосовувати їх у реальних або моделюючих ситуаціях, що сприяє розвитку критичного мислення, творчості та навичок самостійного дослідження.

Метод проєктів має тривалу історію. Його витоки, пов'язані з прагматичною педагогікою та ідеєю активного навчання, докладно висвітлені у вітчизняних посібниках з історії педагогіки [16]. Педагогічні засади методу, що наголошували на активному залученні учнів до навчання через вирішення практичних завдань, знайшли своє відображення і в українській школі 1920-х років [21]. У сучасній освіті цей метод набув особливого значення завдяки реформам, спрямованим на компетентнісний підхід, зокрема в рамках концепції «Нова українська школа», яка підкреслює необхідність формування в учнів навичок самостійного пошуку знань і командної роботи [26]. У профільному навчанні геометрії метод проєктів реалізується через завдання, що вимагають від учнів застосування математичних знань для розв'язання міждисциплінарних проблем. Наприклад, учні можуть розробити проєкт із моделювання тривимірних геометричних фігур у GeoGebra, створювати моделі мостів чи ферм із розрахунком стійкості, досліджувати оптимальне розміщення сонячних

панелей або обчислювати траєкторії руху в навігаційних задачах [1, 33]. Такі проєкти не лише поглиблюють знання з геометрії, а й розвивають уміння працювати з інформаційними технологіями.

Основною перевагою методу проєктів є його здатність інтегрувати різні аспекти навчання, у тому числі теоретичні знання, практичні навички та дослідницьку діяльність. «Метод проєктів дозволяє учням самостійно визначати проблему, планувати дослідження та презентувати результати, що сприяє розвитку творчих здібностей і дослідницьких навичок» [29]. У класах, де геометрію вивчають на профільному рівні, проєкти можуть бути орієнтовані на дослідження реальних об'єктів і процесів, наприклад:

- аналіз геометричних пропорцій та об'ємів у сучасних інженерних конструкціях,
- моделювання оптимального розташування об'єктів у просторі (Wi-Fi-роутери, зупинки транспорту, сонячні панелі),
- створення 3D-моделей деталей для робототехніки чи 3D-друку з розрахунком параметрів тіл обертання [15; 33].

Такі завдання сприяють формуванню дослідницької компетентності, оскільки учні самостійно формулюють гіпотези, проводять обчислення та аналізують результати [2]. Крім того, проєктна діяльність заохочує учнів до співпраці, що розвиває комунікативні навички та вміння працювати в команді [32].

Метод проєктів у навчанні геометрії може бути реалізований через різні типи проєктів [29, 32]:

- дослідницькі;
- прикладні;
- творчі;
- інформаційні.

Дослідницькі проєкти передбачають самостійне вивчення учнями певної проблеми, наприклад, властивостей тіл обертання при зміні параметрів. Прикладні проєкти зосереджені на розв'язанні практичних

задач, таких як оптимізація розташування сонячних панелей з використанням тригонометричних обчислень і просторової геометрії чи проєктування каркасу моста. Творчі проєкти можуть включати створення оригінальних 3D-моделей технічних об'єктів. Інформаційні проєкти передбачають збір і аналіз даних, наприклад, порівняння геометричних характеристик різних інженерних конструкцій.

«Дослідницька компетентність формується через самостійне виконання учнями завдань, що вимагають аналізу, синтезу та оцінки, що є ключовим для підготовки до наукової діяльності» [2]. Такі проєкти не лише мотивують учнів, а й дозволяють їм застосовувати знання в реальних ситуаціях, що відповідає сучасним освітнім стандартам [26]. Крім того, метод проєктів сприяє інтеграції інформаційних технологій у навчання, що є актуальним для підготовки учнів до сучасного світу [15].

Реалізація методу проєктів у навчанні геометрії потребує ретельного планування та організації. Вчитель виступає як фасилітатор, допомагаючи учням визначити тему, сформулювати мету та спланувати етапи роботи. Наприклад, проєкт із моделювання інженерної конструкції може включати етапи дослідження геометричних форм, обчислення параметрів та презентацію результатів у вигляді моделі чи звіту [35]. Такі проєкти сприяють розвитку не лише математичних, а й міждисциплінарних компетентностей. Дослідження показують, що метод проєктів підвищує мотивацію учнів і сприяє глибшому розумінню предмета, оскільки вони бачать практичну цінність своїх знань [22, 27].

Метод проєктів у навчанні геометрії профільного рівня є ефективним інструментом формування математичної та дослідницької компетентностей. Він дозволяє інтегрувати теоретичні знання з практичними навичками, сприяє розвитку творчого мислення, командної роботи та навичок самостійного дослідження.

### **1.5. Переваги та недоліки методу проєктів, відмінності від традиційного навчання**

Метод проєктів є одним із провідних інноваційних методів навчання, який широко застосовується в профільному навчанні геометрії для формування математичної та дослідницької компетентностей. Його особливість полягає в організації навчального процесу через самостійну діяльність учнів, спрямовану на розв'язання практичних або дослідницьких завдань, що сприяє розвитку критичного мислення, творчості та навичок самостійного пошуку знань [27, 30]. У порівнянні з традиційним навчанням, яке зосереджене на репродуктивному засвоєнні знань, метод проєктів акцентує увагу на активній участі учнів у процесі навчання, що робить його особливо ефективним для профільних класів наукових ліцеїв. Однак, як і будь-який метод, він має свої переваги та недоліки, які необхідно враховувати при його впровадженні в освітній процес [27, 30].

Метод проєктів має численні переваги, які роблять його ефективним інструментом у навчанні геометрії профільного рівня. По-перше, він сприяє формуванню дослідницької компетентності, дозволяючи учням самостійно формулювати проблему, планувати дослідження та презентувати результати. «Метод проєктів дозволяє учням розвивати навички аналізу, синтезу та оцінки, що є ключовими для підготовки до наукової діяльності» [2]. Наприклад, учні можуть працювати над проєктом із розрахунку стійкості ферменної конструкції моста, застосовуючи векторну геометрію, координатний метод у просторі та обчислення кутів нахилу елементів, що розвиває міждисциплінарне мислення та вміння працювати з реальними інженерними задачами [33].

По-друге, метод проєктів значно підвищує мотивацію учнів до навчання, оскільки вони бачать практичну цінність своїх знань. Дослідження показують, що «проектна діяльність сприяє глибшому розумінню предмета, оскільки учні активно застосовують знання в реальних або моделюючих ситуаціях» [25, 27]. Наприклад, проєкт із визначення оптимального кута

нахилу та взаємного розташування сонячних панелей на даху з урахуванням тіней від сусідніх об'єктів дозволяє поєднати тригонометрію, просторову геометрію та елементи енергетики, що робить навчання особистісно значущим.

По-третє, метод проєктів сприяє розвитку комунікативних навичок і вміння працювати в команді. У профільному навчанні геометрії учні часто працюють у групах над складними проєктами, що вимагають співпраці, розподілу ролей і спільного аналізу результатів [32]. Наприклад, груповий проєкт із проєктування каркаса легкої споруди (наприклад, теплиці чи павільйону) з використанням 3D-друку передбачає розподіл завдань: одні учні моделюють у GeoGebra, інші розраховують об'єми й площі поверхонь, треті готують презентацію та економічне обґрунтування. Така діяльність розвиває навички командної роботи й публічного захисту результатів.

Незважаючи на численні переваги, метод проєктів має певні недоліки, які можуть ускладнювати його впровадження. По-перше, він вимагає значних часових ресурсів як від учнів, так і від вчителя. Організація повномасштабної проєктної діяльності (що включає планування, виконання та оцінювання) дійсно є трудомістким процесом. Однак, у межах наукових ліцеїв та профільного рівня ця складність мінімізується завдяки використанню короткотривалих міні-проєктів (МП) (20–30 хвилин). Така форма дозволяє систематично включати дослідницький цикл до структури практичного заняття, що відповідає очікуванням до учнів, які мають вищу мотивацію та рівень підготовки [30]. Наприклад, проєкт із моделювання та розрахунку стійкості ферменної конструкції потребує часу на збір даних, виконання обчислень, створення фізичної чи цифрової моделі та підготовку звіту, що іноді виходить за рамки уроків геометрії.

По-друге, метод проєктів вимагає високого рівня підготовки вчителя, який виступає як фасилітатор, а не лише як джерело знань. Вчитель має вміти спрямовувати учнів, допомагати формулювати цілі проєкту та об'єктивно оцінювати результати, що вимагає глибокого знання

інноваційних методик [32]. У профільних класах наукових ліцеїв, попри високий загальний рівень учнів, вчителю необхідно диференціювати завдання та надавати індивідуальну підтримку, оскільки учні можуть мати різний темп пізнавальної діяльності та різні стилі обдарованості, що вимагає адаптації складності та глибини дослідницьких завдань.

По-третє, метод проєктів може бути менш ефективним для учнів із низьким рівнем мотивації чи недостатньою базовою підготовкою. Дослідження зазначають, що проєктна діяльність вимагає від учнів високого рівня самостійності та відповідальності, що може бути викликом для деяких з них [19]. У навчанні геометрії це може проявлятися в труднощах із розумінням просторових співвідношень чи роботою з GeoGebra під час виконання складних 3D-моделей, що потребує додаткових зусиль для залучення всіх учнів до роботи.

Традиційне навчання, яке переважно базується на репродуктивних методах (лекції, пояснення, виконання вправ тощо), суттєво відрізняється від методу проєктів за своєю організацією та цілями. Традиційне навчання зосереджене на передачі готових знань від вчителя до учня, де учень відіграє переважно пасивну роль, засвоюючи теоретичний матеріал через запам'ятовування та відтворення. Наприклад, у традиційному навчанні геометрії учні зазвичай вивчають теореми та розв'язують стандартні задачі, які рідко виходять за межі підручника [30]. Натомість метод проєктів передбачає активну участь учнів у процесі навчання, де вони самостійно досліджують проблему, застосовують знання та презентують результати. Наприклад, замість розв'язання типових задач із обчислення об'ємів тіл обертання учні можуть виконувати проєкт із проєктування каркаса легкої споруди (теплиці, павільйону чи навісу), що вимагає розрахунку стійкості, об'ємів матеріалів і побудови 3D-моделі в GeoGebra.

Ще одна ключова відмінність полягає в акценті на компетентнісному підході. Традиційне навчання зосереджене на формуванні знань і вмінь, тоді як метод проєктів спрямований на розвиток повноцінних компетентностей –

критичного мислення, дослідницьких навичок, вміння працювати в команді тощо [31]. У профільному навчанні геометрії це проявляється через проекти, які інтегрують математичні знання з інженерією, енергетикою чи міським плануванням, наприклад, розрахунок оптимального розміщення Wi-Fi-роутерів у школі з урахуванням зон покриття сфер і кіл. Крім того, традиційне навчання часто є індивідуальним процесом, тоді як метод проектів заохочує групову роботу, що сприяє розвитку комунікативних навичок [32]. Наприклад, груповий проєкт із моделювання ферменної конструкції моста дозволяє учням розподіляти ролі: одні відповідають за векторні розрахунки, інші – за координатний метод у просторі, треті готують презентацію й економічне обґрунтування [33].

Метод проектів також відрізняється від традиційного навчання своєю гнучкістю та орієнтацією на практичне застосування знань. У традиційному навчанні учні працюють із готовими задачами, тоді як у проєктній діяльності вони самі визначають проблему та шляхи її вирішення [9]. Наприклад, у проєкті з оптимізації розташування сонячних панелей на даху шкільного корпусу учні самостійно проводять вимірювання, обчислення кутів падіння променів, аналіз тіней від сусідніх об'єктів і пропонують найбільш ефективне рішення.

Однак, повна заміна традиційного навчання методом проектів недоцільна й неможлива. Традиційне навчання залишається необхідним для систематичного викладення теоретичного матеріалу, формування базових алгоритмів і забезпечення однакового рівня знань для всіх учнів. Метод проектів є потужним доповненням, а не заміною: він найефективніше працює тоді, коли учні вже мають міцну теоретичну базу, яку отримали саме завдяки традиційним методам. Оптимальним є комбінований підхід: систематичне традиційне вивчення основ геометрії поєднується з регулярним застосуванням проєктної діяльності на етапах узагальнення, поглиблення та практичного використання знань.

На основі аналізу переваг і недоліків можна зробити висновок, що метод проєктів у навчанні геометрії профільного рівня має значні переваги, зокрема формування дослідницької компетентності, підвищення мотивації та розвиток комунікативних навичок. Однак його впровадження потребує подолання таких недоліків, як значні часові ресурси, необхідність високої кваліфікації вчителя та залучення всіх учнів. У порівнянні з традиційним навчанням метод проєктів є більш динамічним і орієнтованим на компетентності, що робить його незамінним інструментом сучасної освіти, але лише за умови розумного поєднання з традиційними методами [27; 31; 33].

### **1.6. Технології та інструменти організації проєктної діяльності**

Проєктна діяльність у профільному навчанні геометрії є ефективним інструментом формування математичної та дослідницької компетентностей лише тоді, коли вона підкріплена сучасними технологіями динамічної геометрії та 3D-моделювання. Ці технології забезпечують перехід від статичного споглядання геометричних об'єктів до їхнього активного дослідження, експериментування та практичного застосування. «Проєктна діяльність, підкріплена сучасними технологіями динамічної геометрії, дозволяє учням самостійно досліджувати складні проблеми, застосовуючи математичні методи в реальних або моделюючих ситуаціях» [27]. Загальні засади використання технологій проєктування для розвитку обдарованих дітей викладені у відповідних методичних посібниках, що підтверджує системний характер їх застосування [36].

Роль вчителя у проєктній діяльності кардинально змінюється порівняно з традиційним навчанням. замість бути єдиним джерелом знань (транслятором), вчитель перетворюється на фасилітатора (від англ. facilitator – той, що полегшує, допомагає).

Фасилітатор – це особа, яка спрямовує роботу учнів, створює сприятливі умови для самостійного пошуку, полегшує процес комунікації та

групової взаємодії, але не дає готових відповідей. основними функціями вчителя-фасилітатора є:

- організаційна: допомога у виборі теми, формулюванні мети, розподілі ролей та плануванні етапів проєкту;
- консультативна – надання індивідуальних порад щодо методів та інструментів (наприклад, використання GeoGebra або CAS);
- координуюча – контроль за дотриманням термінів та якістю проміжних результатів, забезпечення об'єктивного оцінювання.

Ця зміна ролі є критичною для формування дослідницької компетентності, оскільки саме вона забезпечує учням високий рівень самостійності та відповідальності за результати власної пізнавальної діяльності.

Найпоширенішою та найефективнішою технологією, спеціально створеною для навчання геометрії профільного рівня, є середовище динамічної геометрії GeoGebra (модулі Geometry, 3D Graphing Calculator та CAS). Воно дає змогу учням: будувати точні тривимірні моделі многогранників і тіл обертання, досліджувати геометричні місця точок у просторі, змінювати параметри в реальному часі й одразу бачити наслідки (наприклад, як змінюється об'єм конуса при зміні кута чи радіуса), виконувати аналітичні обчислення одночасно з графічною ілюстрацією, експортувати моделі для 3D-друку або інтеграції в презентації [15; 33].

CAS (Computer Algebra Systems) – системи комп'ютерної алгебри. У контексті навчання математики на профільному рівні CAS є важливим інструментом, оскільки:

- вона дає змогу аналітично розв'язувати системи рівнянь, що виникають під час моделювання реальних об'єктів;
- ці системи (як вбудовані в GeoGebra або Wolfram Alpha) дозволяють учням не зосереджуватись на рутинній техніці обчислень, а приділяти увагу дослідницькому етапу – зміні параметрів і аналізу наслідків;

– використання CAS сприяє інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу.

Наприклад, у проєкті з оптимізації форми та стійкості ферменної конструкції моста учні створюють параметричну модель у GeoGebra 3D, досліджують залежність напружень від кутів нахилу елементів і обґрунтовують вибір оптимальної конфігурації. У проєкті з енергозбереження – розраховують кут нахилу сонячних панелей і тіні від сусідніх об'єктів, використовуючи інструменти перетину площин і кутів між прямими в просторі.

Другою важливою технологією є програмне забезпечення для 3D-моделювання та підготовки до 3D-друку (Tinkercad, FreeCAD, Blender – у спрощеному режимі). Ці програми дозволяють учням перейти від віртуальної моделі в GeoGebra до фізичного об'єкта: розрахувати об'єм матеріалу, площу поверхні, перевірити стійкість конструкції. Такі проєкти (наприклад, «Розробка корпусу робота з мінімальною витратою пластику за заданих геометричних обмежень») поєднують геометрію профільного рівня з реальним виробництвом і економічним обґрунтуванням [15].

Третьою технологією, що активно використовується в наукових ліцеях, є системи комп'ютерної алгебри (CAS) – вбудовані в GeoGebra або Wolfram Alpha, які дають змогу аналітично розв'язувати системи рівнянь, що виникають під час моделювання реальних об'єктів (наприклад, знайти координати точки перетину діагоналей у просторі або рівняння площини, що проходить через три задані точки) [33].

Усі перелічені технології мають спільну рису: вони слугують саме математиці, а не інформатиці. Учень працює не з «програмами заради програм», а з потужними математичними інструментами, які дозволяють глибше зрозуміти й творчо застосувати геометричні поняття профільного рівня. Саме тому в наукових ліцеях України GeoGebra та подібні системи ІКТ (наприклад, системи комп'ютерної алгебри – CAS) методично доцільно та широко використовуються як ключовий інструмент проєктної діяльності з

геометрії. Це дозволяє учням швидко моделювати просторові об'єкти та зосереджуватися на дослідницькому аналізі, а не на рутинних обчисленнях.

Сучасні технології динамічної геометрії та 3D-моделювання є не просто допоміжними засобами, а невід'ємною складовою методу проєктів у профільному курсі геометрії. Вони забезпечують реалізацію всіх етапів дослідницької діяльності – від гіпотези й комп'ютерного експерименту до створення реального продукту, що робить процес формування дослідницької компетентності повноцінним і відповідним вимогам сьогодення [27; 31; 33].

Організація проєктної діяльності в профільному курсі геометрії потребує чіткої структуризації процесу, належного методичного забезпечення та активної координуючої ролі вчителя. Успіх проєкту значною мірою залежить від того, наскільки ретельно сплановані етапи роботи, сформульовані критерії оцінювання та забезпечена підтримка учнів на кожному кроці [27; 29].

Ключовим елементом організації є розроблені вчителем методичні матеріали: шаблони плану проєкту, чек-листи етапів виконання, рубрики оцінювання кінцевого продукту й процесу роботи. Наприклад, для проєкту «Оптимізація ферменної конструкції малої архітектурної форми» вчитель заздалегідь готує пакет документів: технічне завдання, перелік обов'язкових геометричних характеристик (кути, довжини, об'єми), вимоги до 3D-моделі та звіту [33]. Такі матеріали допомагають учням не розгубитися на старті й чітко бачити очікуваний результат.

Вчитель у проєктній діяльності виступає не як єдине джерело знань, а як організатор і консультант. Він допомагає учням обрати тему в межах програми профільного рівня, сформулювати проблему й мету, розбити роботу на етапи, підказує необхідні математичні методи та інструменти, контролює терміни й якість проміжних результатів [27; 29]. Саме вчитель формує групи з урахуванням рівня підготовки учнів, розподіляє ролі (моделювальник, аналітик, презентатор, критик) і забезпечує диференціацію завдань, щоб кожен учень був залучений відповідно до своїх можливостей.

Важливою складовою організації є чітке визначення критеріїв оцінювання. Зазвичай використовується три блоки:

- 1) математична правильність і глибина дослідження (точність побудов, обґрунтованість обчислень, використання методів профільного рівня);
- 2) якість кінцевого продукту (модель, звіт, презентація);
- 3) процес роботи (самостійність, співпраця, дотримання термінів) [29; 33].

Такий підхід дозволяє об'єктивно оцінити внесок кожного учня й водночас врахувати командний результат.

Попри труднощі, правильно організована проєктна діяльність забезпечує формування дослідницької компетентності саме через:

- самостійний вибір і формулювання проблеми в межах профільної програми;
- застосування векторного й координатного методів, стереометричних перетворень, рівнянь площин і прямих у просторі;
- комп'ютерний експеримент і перевірку гіпотез;
- публічний захист і рефлексію результатів [19; 33].

Таким чином, організація проєктної діяльності в навчанні геометрії профільного рівня – це складний, але надзвичайно ефективний процес, успіх якого залежить насамперед від системного планування, чітких методичних матеріалів і професійної координуючої ролі вчителя. За таких умов проєктна діяльність стає не епізодичним заходом, а повноцінним механізмом реалізації компетентнісного підходу в наукових ліцях [27; 31; 33].

## РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕХНОЛОГІЙ ПРОЄКТНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ КУРСУ «ГЕОМЕТРІЯ. ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ»

### 2.1. Аналіз навчальної програми з геометрії (профільний рівень) для 10-11 класів на предмет дослідження

Навчальна програма з математики (профільний рівень) для 10–11 класів загальноосвітніх шкіл, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України № 1407 від 23 жовтня 2017 року [23], є чинним основним документом, що визначає зміст, обсяг і очікувані результати вивчення предмета на профільному рівні. Ця програма базується на Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти та Законах України «Про освіту» [12] і «Про повну загальну середню освіту» [13] з урахуванням особливостей відповідних профілів навчання. Вона також відповідає концепції «Нова українська школа» [26; 31], яка акцентує на компетентнісному підході, й формуванні ключових таких компетентностей:

- ключові компетентності;
- спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами;
- спілкування іноземними мовами;
- математична компетентність;
- основні компетентності у природничих науках і технологіях;
- інформаційно-цифрова компетентність;
- уміння вчитися впродовж життя;
- ініціативність і підприємливість;
- соціальна та громадянська компетентності;
- обізнаність та самовираження у сфері культури;
- екологічна грамотність і здорове життя.

Аналіз цього переліку підтверджує, що навчальна програма має пряму орієнтацію на формування саме дослідницької компетентності, яка є інтегрованою складовою таких ключових компетентностей, як математична

компетентність (через уміння «оперувати числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі; встановлювати просторові відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту; будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях» [23, с.4]), уміння вчитися впродовж життя (через уміння «визначати мету навчальної діяльності, відбирати й застосовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення цієї мети; організовувати та планувати свою навчальну діяльність; моделювати власну освітню траєкторію, аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати своєї навчальної діяльності; доводити правильність власного судження або визнавати помилковість» [23, с.4]) та ініціативність і підприємливість (через уміння «генерувати нові ідеї, вирішувати життєві проблеми, аналізувати, ухвалювати оптимальні рішення; використовувати критерії практичності, ефективності та точності, щоб обрати найкраще рішення; аргументувати та захищати свою позицію, дискутувати; використовувати різні стратегії, шукаючи оптимальних способів розв'язання життєвого завдання» [23, с.5])

Програма виділяє чотири наскрізні лінії ключових компетентностей, покликаних сформувати в учнів здатність до застосування в реальному житті здобутих знань і вмінь: "Громадянська відповідальність", "Здоров'я і безпека", "Екологічна безпека та сталий розвиток", "Підприємливість та фінансова грамотність".

Наскрізна лінія «Громадянська відповідальність» добре засвоюється в шляхом колективної діяльності (роботи в групі, дослідницькі роботи, проєкти тощо), яка поєднує математику з іншими навчальними предметами, а також сприяє розвитку готовності до співпраці й толерантному ставленню до різноманітних способів діяльності і думок.

Дослідження ефективності методики формування дослідницької компетентності неможливе без ґрунтовного аналізу змістового наповнення курсу. Згідно з пояснювальною запискою програми, навчання має бути націлене на забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, які потрібні для вивчення інших дисциплін та продовження навчання. Це вимагає відмови від репродуктивних методів на користь продуктивних і творчих.

Навчання математики повинно сприяти розвитку в учнів позитивних емоцій, а зміст предмета – орієнтуватися на формування таких якостей, як порядність, старанність, систематичність, послідовність, уважність та чесність. Приклад учителя має відігравати ключову роль у вихованні толерантного ставлення до однокласників, незважаючи на рівень їхніх навчальних досягнень.

Для визначення потенціалу проєктної діяльності слід детально проаналізувати зміст курсу геометрії та очікувані результати навчання, визначені програмою [23]. Чинна програма профільного рівня відрізняється від рівня стандарту вищим рівнем узагальнення, теоретизацією матеріалу та, що критично важливо для даного дослідження, дослідно-орієнтованим характером очікуваних результатів.

Програма регламентує структуру. На вивчення геометрії відводиться третина навчального часу (210 годин проти 420 годин, відведених на вивчення алгебри та початків аналізу). Рекомендовано розподіл змісту і навчального часу, на основі якого учитель залежно від прийнятої методичної концепції здійснює розподіл годин на вивчення тем і конкретизує обсяг навчального матеріалу в розробці календарно-тематичного плану.

Програма містить резерв навчальних годин, якими вчитель може гнучко розпоряджатися. Цей час дозволяється використати на повторення матеріалу, опанованого в попередніх класах, на додаткове опрацювання тем, що викликають труднощі в учнів, або ж на проведення інтегрованих уроків із профільними чи іншими предметами тощо.

Змістова частина курсу геометрії у 10 класі розрахована на 105 годин (3 години на тиждень, резерв 18 годин) і поділена на чотири основні змістові лінії:

- вступ до стереометрії;
- паралельність прямих і площин у просторі;
- перпендикулярність прямих і площин у просторі;
- координати, вектори, геометричні перетворення у просторі.

В 11 класі обсяг годин аналогічний, резерв становить вже 28 годин, змістовних тем також чотири:

- многогранники;
- тіла обертання;
- об'єми многогранників;
- об'єми та площі поверхонь тіла обертання.

Для проєктної діяльності перспективні теми «Координати, вектори, перетворення у просторі» (Вектори та їх застосування. Застосування векторного методу та координатного методу для розв'язування задач), «Многогранники», «Тіла обертання» (Тіла обертання. Площі поверхонь та об'єми тіл. Комбінації геометричних тіл).

Найбільш значущими для формування дослідницької компетентності є вимоги, закладені в колонці «Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності». Аналіз цих вимог чітко засвідчує, що від учнів профільного рівня вимагається не лише репродуктивне відтворення знань, а й активна дослідницька діяльність.

Основні індикатори дослідницької діяльності в програмі наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Основні індикатори дослідницької діяльності в програмі

Діяльність (дієслово)	Приклад вимоги (Очікувані результати) [23]
Обґрунтовує / Доводить	<p>«<b>обґрунтовує</b> перпендикулярність прямих, прямої і площини, площин»,</p> <p>«<b>обґрунтовує</b> перпендикулярність, колінеарність та компланарність векторів простору; скалярний добуток векторів;»,</p> <p>«<b>обґрунтовує</b> розміщення основи висоти піраміди; позначення кута між апофемою і площиною основи, між бічною гранню і площиною основи, плоского кута при вершині піраміди, утвореного площиною перерізу; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування прямокутного трикутника»</p> <p>«<b>обґрунтовує</b> властивості тіл обертання; позначення відповідних лінійних і плоских кутів; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування прямокутних трикутників; радіусів вписаного і описаного кола»,</p> <p>«<b>обґрунтовує</b> розміщення основи висоти піраміди, призми, паралелепіпеда; покрокові висновки під час розв'язування задач, застосовуючи відомі теореми та інші твердження»,</p> <p>«<b>обґрунтовує</b> розміщення основи висоти циліндра, конуса, зрізаного конуса; центр кулі; покрокові висновки під час розв'язування задач, застосовуючи відомі теореми та інші твердження»</p>
Досліджує / Аналізує	« <b>аналізує та досліджує</b> перпендикулярність деякої прямої до похилої чи її проекції за теоремою про три перпендикуляри»,

	<p>«аналізує та досліджує координатному просторі: координати точок; відстань між двома точками; координати середини відрізка; координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні; перетворення паралельного перенесення»,</p> <p>«аналізує та досліджує кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю призми та площиною основи, між апофемою піраміди та площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи, кут між бічною гранню та площиною основи); розміщення проекції вершини піраміди в площині основи (відома рівність усіх бічних ребер, рівність усіх кутів, утворених бічними ребрами/гранями та площиною основи)»,</p> <p>«аналізує та досліджує кут між похилою та її проекцією (між діагоналлю твірною конуса і площиною основи, між діагоналлю перерізу циліндра і площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи); перетин кулі площиною; дотичну площину до сфери; комбінацію просторових фігур»,</p> <p>«аналізує та досліджує лінійні виміри та величини для обчислення об'єму»,</p> <p>«аналізує та досліджує лінійні виміри та величини для обчислення об'єму»</p>
<p>Характеризує / Моделює</p>	<p>«характеризує форму просторової геометричної фігури; сліди площини перерізу; розміщення двох точок двох площин, якими визначається лінія їх перетину»,</p> <p>«характеризує властивості паралельних площин та паралельного проєкціювання»,</p> <p>«характеризує властивості перпендикулярних прямих</p>

	<p>простору на прикладах; прямокутні трикутники, кути яких утворені трьома попарно перпендикулярними прямими (площинами); форму ортогональної проекції многокутника; кут між многокутником та його проекцією»,</p> <p>«<b>характеризує</b> покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу многогранника та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання»,</p> <p>«<b>характеризує</b> покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу многогранника та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання»,</p> <p>«<b>характеризує</b> покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу геометричного тіла обертання та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання; елементи комбінації просторових фігур»</p>
Застосовує	<p>«<b>застосовує</b> формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора, довжини вектора, скалярного добутку двох векторів, загального вигляду рівняння площини/сфери, паралельного перенесення до розв'язування задач»</p>

Ці формулювання доводять, що чинна програма з геометрії профільного рівня передбачає системне використання методів, які виходять за рамки традиційного навчання, оскільки розв'язування прикладних задач, моделювання та обґрунтування потребують самостійного планування,

висунення гіпотез і перевірки результатів, що є сутністю дослідницької діяльності.

Програма містить теми, які є ідеальною основою для реалізації методу проєктів, особливо з використанням технологій динамічної геометрії та 3D-моделювання (GeoGebra).

Тема «Координати, вектори, перетворення у просторі» (10 клас) – ідеальна основа для моделювання інженерних конструкцій (ферми, мости, каркаси). Проєкти можуть бути спрямовані на розрахунок кутів, площ та об'ємів методом координат і векторів, що є класичним прикладом дослідницької діяльності в інженерній математиці.

Тема «Тіла обертання та об'єми» (11 клас) найкраще підходить для прикладних і дослідницьких проєктів, пов'язаних із задачами оптимізації. Наприклад, проєкт може стосуватися розрахунку найменшої площі поверхні циліндричної банки при заданому об'ємі (задача оптимізації) або моделювання форми, що вимагає розрахунку об'єму та площі поверхні (наприклад, проєктування басейну, резервуара чи корпусу робота) [33].

Оцінювання результатів навчальної діяльності учнів включає різні форми контролю: поточне, тематичне, семестрове та річне оцінювання, а також державну підсумкову атестацію. Регламентовано форми, терміни й критерії оцінювання.

Аналіз навчальної програми з геометрії профільного рівня [23] свідчить, що вона містить чіткі вимоги до формування дослідницької компетентності учнів, які виражені через необхідність обґрунтування, дослідження, моделювання та застосування знань для розв'язання прикладних задач. Змістове наповнення курсу (вектори, координати, об'єми тіл) є високорелевантним для використання методу проєктів, що дозволяє поєднати теоретичні знання з їхнім практичним, міждисциплінарним застосуванням. Таким чином, програма виступає основою для розробки методики проєктної діяльності.

## 2.2. Аналіз підручників геометрії профільного рівня та виділення тем для короткотривалих проєктів

Для ефективного впровадження методу проєктів у навчальний процес наукового ліцею необхідний ретельний аналіз чинних підручників геометрії профільного рівня. Це дасть змогу виявити теми, які мають найбільший потенціал для короткотривалої проєктної діяльності (МП, 20–30 хвилин), спрямованої на формування дослідницької компетентності. Для аналізу обрано підручники Є. П. Неліна [3, 4] та групи авторів А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір [5, 6] (профільний рівень).

Порівняльний аналіз підручників на предмет прикладних задач наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Порівняльний аналіз підручників на предмет прикладних задач

Блок тем (клас) [3, 4]	Блок тем (клас) [5, 6]	Очікувані результати (ДК) – Програма	Теми, перспективні для короткотривалого МП (20–30 хв)
1. Вступ до стереометрії (10)	1. Вступ до стереометрії (10)	Розв’язує вправи, що передбачають: доведення та дослідження висновків задач, виконання найпростіших побудов перерізів у пірамідах та призмах.	Моделювання найпростіших перерізів (Прямокутний паралелепіпед) методом слідів у GeoGebra (ДК: дослідження).
2. Паралельність прямих і	2. Паралельність у просторі	Розв’язує вправи, що передбачають: застосування ознак паралельності... у	Проектування каркаса (розрахунок паралельності опор) та побудова перерізів многогранників

Блок тем (клас) [3, 4]	Блок тем (клас) [5, 6]	Очікувані результати (ДК) – Програма	Теми, перспективні для короткотривалого МП (20–30 хв)
площин у просторі (10)	(10)	доведеннях практичних задач; моделювання життєвих ситуацій паралельності та проєкціювання.	(ДК: моделювання, застосування).
3. Перпендикулярність прямих і площин у просторі (10)	3. Перпендикулярність у просторі (10)10	Розв’язує вправи, що передбачають: моделювання життєвих ситуацій застосування перпендикулярності прямих і площин; ортогонального проєкціювання в задачах навчально-практичного та прикладного змісту.	Аналіз стійкості конструкції (визначення кута нахилу/відстаней) із застосуванням теореми про три перпендикуляри (ДК: обґрунтування, моделювання).
4. Координати, вектори, геометричні перетворення в просторі (10)	4. Координати та вектори у просторі (10)	Застосовує формули довжини відрізка, координат середини відрізка, координат вектора... до розв’язування задач; моделювання задач природничих дисциплін навчально-практичного та прикладного змісту.	Проєкт: Кут між векторами (визначення кутів у конструкціях, скалярний добуток) та знаходження геометричних місць точок у GeoGebra (ДК: дослідження, обчислення).

Блок тем (клас) [3, 4]	Блок тем (клас) [5, 6]	Очікувані результати (ДК) – Програма	Теми, перспективні для короткотривалого МП (20–30 хв)
1. Многогранники (11)	1. Многогранники (11)	Розв'язує вправи, що передбачають: обчислення площ бічної та повної поверхні; виконання побудов перерізів, доведення та дослідження їх виду.	МП на оптимізацію матеріалу (мінімізація площі поверхні) або дослідження перерізів складних призм/пірамід (ДК: обчислення, аналіз).
2. Тіла обертання (11)	2. Тіла обертання (11)	Розв'язує вправи, що передбачають: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту.	Моделювання тіл обертання (конус, циліндр) та їх комбінацій для визначення невідомих елементів (ДК: моделювання, застосування).
3. Об'єми й площі поверхонь геометричних тіл (11)	3. Об'єми тіл. Площа сфери (11)	Розв'язує вправи, що передбачають: обчислення об'єму та площ поверхонь... у т.ч. прикладного та практичного змісту.	МП: Розрахунок матеріалу для складних об'єктів (цистерн, будівель) або задачі на оптимізацію об'єму/площі (ДК: обчислення, моделювання).

Аналіз змісту підручників для профільного рівня (зокрема, Є. П. Неліна [3, 4] й А. Г. Мерзляка [5, 6]) показує, що вони відповідають

навчальній програмі [23] та акцентують увагу на поглибленому вивченні стереометрії (зокрема, використання координатного та векторного методів), а також на розв'язанні просторових задач підвищеної складності.

Аналіз змісту підручників та навчальної програми профільного рівня засвідчив, що курс геометрії містить достатній потенціал для регулярного впровадження короткотривалої проєктної діяльності (МП). Найбільш перспективними для реалізації МП (20–30 хвилин) є теми, що передбачають застосування аналітичних методів та моделювання, зокрема: «Координати, вектори, перетворення у просторі» (10 клас), де учні застосовують векторний та координатний методи для обчислення кутів та відстаней у конструкціях; а також теми «Тіла обертання» та «Об'єми й площі поверхонь геометричних тіл» (11 клас), які дозволяють ставити та розв'язувати прикладні задачі на оптимізацію матеріалу або розрахунок геометричних параметрів реальних об'єктів.

Регулярне включення короткотривалих проєктів до навчального процесу дозволяє трансформувати задачі, що традиційно мають репродуктивний характер, у дослідницькі завдання. Це забезпечує системне формування дослідницької компетентності, оскільки учні постійно залучені до моделювання, обґрунтування, пошуку оптимальних рішень та використання ІКТ, що повністю відповідає потребам підготовки учнів наукових ліцеїв.

### **2.3. Методичні рекомендації до вивчення теоретичного матеріалу, що стосується підготовки учнів до проєктно-дослідницької діяльності**

Успішна реалізація методу проєктів у навчанні геометрії профільного рівня залежить від якості попередньої теоретичної підготовки учнів. На відміну від традиційного підходу, де теоретичні знання слугують лише для розв'язування типових вправ, у науковому ліцеї теоретичний матеріал має подаватися таким чином, щоб стати інструментальною базою для дослідницької діяльності та моделювання.

Навчальна програма з геометрії (профільний рівень) передбачає збереження високого рівня теоретичної математичної підготовки як основи професійної підготовки, вироблення здатності успішно працювати в галузях природничих дисциплін, самостійно здобувати знання. Для досягнення цієї мети рекомендується дотримуватися ключових методичних принципів.

Ключові принципи вивчення теоретичного матеріалу:

- акцент на математичному моделюванні;
- проблемне введення поняття (мотиваційний етап);
- демонстрація функціональних та графічних зв'язків;
- реалізація міжпредметних зв'язків.

При вивченні будь-якої нової теми (вектори, тіла обертання, рівняння площини) необхідно з'ясувати роль математики у сферах її застосувань, важливо робити акцент на математичному моделюванні. Учням слід показати, що процес розв'язування будь-яких прикладних задач розподіляється на три етапи: формалізація (перехід до математичної моделі), розв'язування задачі у межах моделі та інтерпретація одержаного розв'язку. Саме ці етапи формують основу для проектування.

Не можна ігнорувати мотиваційний етап навчального процесу (проблемне введення поняття). Одним зі способів мотивації є створення проблемної ситуації, яка вимагає серйозних знань та зусиль. Наприклад, до поняття похідної приводять багато задач природознавства, математики, техніки, і його доцільно вводити як узагальнення результатів розв'язання прикладних задач, що одразу виділяє головний прикладний зміст поняття. Це спонукає учнів до дослідницького пошуку.

Демонстрація функціональних та графічних зв'язків допомагає зрозуміти, що притаманні явищу властивості (наприклад, зменшення чи збільшення маси) пов'язуються із властивостями функцій (спадання, зростання, прямування до нуля). Особливу увагу слід приділяти розвитку графічної культури, яка необхідна для роботи з графіками, діаграмами та 3d-моделями у проектах.

Формуванню математичної та ключових компетентностей сприяє систематичне встановлення та реалізація міжпредметних зв'язків. Необхідно на уроках геометрії розглядати прикладні задачі зі сфери техніки, енергетики, екології, економіки, що безпосередньо слугує основою для міждисциплінарних проєктів. це також реалізує вимоги наскрізних ліній програми: «екологічна безпека та сталий розвиток», «громадянська відповідальність», «підприємливість та фінансова грамотність».

Для забезпечення ефективності теоретичної підготовки рекомендується поряд з традиційною системою уроків ширше використовувати нетрадиційні форми навчання. Методичні рекомендації до організації теоретичної підготовки зведені в табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Методичні рекомендації до організації теоретичної підготовки

<b>Форма роботи</b>	<b>Мета підготовки до проєктної діяльності</b>	<b>Рекомендовані елементи (Програма)</b>
<b>Шкільна лекція/ семінар</b>	Передача цілісної системи знань, необхідної для формалізації проблеми та поглиблення теоретичної бази.	Систематичне викладення аксіом стереометрії та наслідків з них, теорем про об'єми та площі поверхонь.
<b>Практичні заняття</b>	Набуття досвіду застосування знань на практиці.	Застосування похідної до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.
<b>Інтегровані уроки</b>	Демонстрація міжпредметних зв'язків та формування наукового світогляду.	Поєднання вивчення геометрії з обробкою (у тому числі комп'ютерною) даних, одержаних під час проведення лабораторних і

Форма роботи	Мета підготовки до проєктної діяльності	Рекомендовані елементи (Програма)
		практичних робіт на уроках фізики, астрономії.
<b>Нестандартні форми</b>	Активізація пізнавальної діяльності, стимулювання творчості.	Використання шкільної лекції, дидактичних ігор, уроків «однієї задачі», «однієї ідеї», звітних доповідей за результатами «пошукової» роботи.

Методична підготовка вчителя повинна бути спрямована на забезпечення цілісного психолого-методичного проєктування навчального процесу в умовах профільної диференціації, де знання, вміння та навички розглядаються як засіб розвитку пізнавальних і особистісних якостей учня.

#### **2.4. Планування та проведення практичних занять**

Практичні заняття з геометрії профільного рівня є ключовим етапом, де теоретичні знання трансформуються в практичні навички дослідження, моделювання та розв'язування задач прикладного змісту. Саме на цих заняттях найбільш ефективно реалізується метод короткотривалих проєктів (МП) (20–30 хвилин), що забезпечує системне формування дослідницької компетентності (ДК).

Планування практичного заняття, орієнтованого на ДК, вимагає від вчителя виходу за рамки стандартної схеми «пояснення – закріплення – контроль». Заняття повинне бути побудоване відповідно до логіки наукового пошуку, де учні самостійно проходять дослідницький цикл.

Для успішного впровадження МП на практичних заняттях необхідно дотримуватися чіткої структури, що імітує науково-дослідний цикл. Цей алгоритм, адаптований для профільного навчання геометрії, слугує покроковою інструкцією для учня та фасилітаційною основою для вчителя.

Алгоритм дослідницького методу навчання математики можна узагальнити наступним чином.

1. Постановка та формулювання проблеми (5 хв).

*Мета:* визначення невідомого елемента або суперечливої ситуації, що вимагає математичного розв'язання.

*Діяльність учня:* переведення прикладної задачі (наприклад, з оптимізації чи інженерії) на мову геометрії, формулювання її як математичної моделі.

*Інструмент:* опорні знання, надані на теоретичних уроках.

2. Аналіз проблеми та висунення гіпотези (5 хв):

*Мета:* обґрунтування можливого шляху розв'язання та припущення щодо очікуваного результату.

*Діяльність учня:* вибір необхідного математичного методу (координати, вектори, похідна), висунення гіпотези, яка перевірятиметься на наступному етапі.

*Інструмент:* підручник, допоміжні таблиці формул.

3. Реалізація дослідження та моделювання (10–15 хв):

*Мета:* практичне виконання обчислень, експериментів та побудов для перевірки гіпотези.

*Діяльність учня:* використання технологій динамічної геометрії та 3D-моделювання (GeoGebra, CAS) для побудови просторової моделі, здійснення складних обчислень, розв'язування задачі в межах моделі.

*Інструмент:* GeoGebra 3D calculator, CAS.

4. Аналіз результатів та формулювання висновків (5 хв):

*Мета:* перевірка, рефлексія та інтерпретація отриманого розв'язку.

*Діяльність учня:* порівняння отриманого результату з початковою гіпотезою, обґрунтування правильності застосованих методів, формулювання висновку з точки зору вихідної прикладної задачі.

*Інструмент:* критичне мислення, навички самоконтролю.

При впровадженні короткотривалих проєктів на уроках геометрії (20–30 хвилин) учень фактично проходить увесь дослідницький цикл, але у стислому, концентрованому вигляді. Цей підхід забезпечує інтеграцію дослідницьких навичок у поточний навчальний процес.

Елементи дослідницької діяльності при застосуванні методу проєктів на традиційному уроці наведено в табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – Елементи дослідницької діяльності при застосуванні методу проєктів на традиційному уроці

<b>Елемент дослідницької діяльності</b>	<b>Відповідність етапам МП на уроці</b>
<b>Ідея (Постановка проблеми)</b>	Учитель ставить прикладну або відкриту задачу, яка має чіткий зв'язок із темою уроку. Учень має швидко сформулювати її математичну модель.
<b>Гіпотеза</b>	Учні пропонують припущення щодо методу розв'язання або очікуваного результату, що вимагає попереднього аналізу.
<b>Реалізація</b>	Учні використовують GeoGebra 3D або CAS, виконують побудови, розрахунки та моделювання. Цей етап включає планування та виконання.
<b>Результат</b>	Числове або графічне рішення, 3D-модель, або виведена формула. Результат інтерпретується у термінах вихідної прикладної задачі.
<b>Висновки (Обґрунтування та Рефлексія)</b>	Обґрунтування застосованих методів, порівняння отриманого результату з гіпотезою, формування висновку про ефективність рішення. Включає міні-

Елемент дослідницької діяльності	Відповідність етапам МП на уроці
	захист та обговорення.

При проведенні практичних занять, на яких реалізуються МП, вчитель повинен виступати в ролі фасилітатора. Методичні рекомендації щодо організації МП:

- диференціація завдань – пропонувати учням різні рівні складності МП: від репродуктивних із елементами дослідження до повністю відкритих проблем, які передбачають пошук власних параметрів;

- використання ІКТ – застосування інструментів (наприклад, GeoGebra, CAS) дозволяють учням не витратити час на рутинні обчислення, а зосередитися на дослідницькому етапі – зміні параметрів і аналізі наслідків;

- групова робота – короткотривалі проекти ефективні в малих групах (2–3 особи), де відбувається розподіл ролей (моделювальник, аналітик, презентатор) сприяє формуванню соціальної та комунікативної компетентностей;

- оцінювання ДК має включати не лише правильність кінцевого результату, а й процес роботи (обґрунтування вибору методу, якість моделі, логічність висновків тощо), що безпосередньо формує дослідницьку компетентність.

Такий підхід забезпечує неперервність дослідницької діяльності, перетворюючи практичні заняття на повноцінний механізм формування ДК учнів наукових ліцеїв.

## **2.5. Організація самостійної проєктно-дослідницької роботи учнів під час вивчення курсу «Геометрія. Профільний рівень»**

Організація самостійної проєктно-дослідницької роботи є наріжним каменем у формуванні дослідницької компетентності (ДК) учнів наукових

ліцеїв. Оскільки учні профільного рівня потребують системного залучення до активної пізнавальної діяльності, найбільш ефективною формою є короткотривалий міні-проект (МП), який інтегрується безпосередньо в структуру практичного заняття (20–30 хвилин).

Мета самостійної проектно-дослідницької роботи полягає у забезпеченні свідомого застосування математичних знань для вирішення прикладних проблем, що відповідає вимогам навчальної програми. Ця робота реалізується з обов'язковим дотриманням алгоритму дослідницького методу та використанням сучасних ІКТ.

Для забезпечення неперервності розвитку ДК необхідне наскрізне впровадження МП у кожен ключовий розділ курсу геометрії 10–11 класів. Наведемо опис семи МП, які охоплюють усі змістовні лінії профільної програми.

### **Система короткотривалих міні-проектів за тематичними блоками.**

#### ***1. Моделювання перерізів архітектурних форм (10 клас. Вступ до стереометрії)***

*Тематична прив'язка:* аксіоми стереометрії, побудова перерізів многогранників.

*Суть проекту:* учням пропонується модель прямокутного паралелепіпеда (імітація будівлі) у GeoGebra. Завдання полягає у побудові перерізу заданою площиною (методом слідів) та дослідженні його форми (тип многокутника) при незначній зміні початкових точок.

*Формування ДК:* учні висувають гіпотезу про форму перерізу, обґрунтовують обраний метод побудови (наприклад, метод слідів) та аналізують залежність форми від вхідних параметрів.

*Приклад реалізації:* Учні будують модель куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  у GeoGebra 3D. Задано точки  $M, N, K$  на ребрах  $AA_1, BB_1$  та  $CC_1$  відповідно. Необхідно побудувати переріз  $MNK$  (який є трапецією) та дослідити, як зміниться його площа та форма, якщо  $K$  перемістити на  $DD_1$ .

## **2. Розрахунок площі покрівлі (10 клас. Паралельність у просторі)**

*Тематична прив'язка:* ознаки та властивості паралельності прямих і площин.

*Суть проєкту:* на прикладі моделі даху будинку (призма або піраміда) учні, використовуючи властивості паралельності та проєкціювання, мають розрахувати площу покрівельного матеріалу, необхідного для бічної поверхні.

*Формування ДК:* моделювання життєвої ситуації, застосування теорем паралельності для обґрунтування площин, обчислення та інтерпретація результату.

*Приклад реалізації:* Учні отримують модель прямої призми, що імітує частину даху, з параметрами основи  $a$ ,  $b$  та бічного ребра  $H$ . Завдання – обґрунтувати, чому площини бічних граней паралельні між собою, та обчислити загальну площу бічної поверхні, якщо  $a=4$  м,  $b=6$  м,  $H=2$  м.

## **3. Аналіз стійкості телевізійної вежі (10 клас. Перпендикулярність у просторі)**

*Тематична прив'язка:* теорема про три перпендикуляри, кут між прямою і площиною.

*Суть проєкту:* учні отримують модель вежі (вертикальний відрізок) та її розтяжки. Завдання: використовуючи GeoGebra, довести перпендикулярність елементів, знайти фактичний кут нахилу розтяжки до землі та обґрунтувати, як цей кут впливає на стійкість конструкції.

*Формування ДК:* обґрунтування застосування ключової теореми, моделювання перпендикулярності, аналіз впливу геометричних параметрів на фізичні властивості.

*Приклад реалізації:* Учні моделюють точку  $A$  на землі, основу вежі  $O$ , та точку кріплення розтяжки  $K$  на висоті  $h=10$  м. Розтяжка  $AK$  проєктується на площину землі у вигляді  $AO$ , де  $AO=6$  м. Дослідити кут нахилу розтяжки

АК до землі та обґрунтувати, чи може цей кут бути меншим за  $45^\circ$  для забезпечення належної стійкості.

#### **4. Розрахунок траєкторії дрона (10 клас. Координати та вектори в просторі)**

*Тематична прив'язка:* векторний та координатний методи, скалярний добуток.

*Суть проекту:* задано координати трьох точок у просторі (пункт відправлення, перешкода, пункт призначення). Учні мають знайти вектор-напрямок, обчислити кут між траєкторією та горизонтом, а також дослідити, чи є два задані вектори швидкості перпендикулярними (перевірка колізії).

*Формування ДК:* застосування аналітичного апарату, дослідження кутів, обчислення параметрів руху та моделювання ситуації за допомогою векторів.

*Приклад реалізації:* Дано вектори-напрямки руху двох дронів  $v_1 = (2; -1; 5)$  та  $v_2 = (3; 4; -1)$ . Учні обчислюють скалярний добуток і роблять висновок про кут між траєкторіями, а потім моделюють ці вектори в GeoGebra, щоб візуалізувати їхнє взаємне розташування.

#### **5. Оптимізація форми купола (11 клас. Многогранники)**

*Тематична прив'язка:* площі поверхонь многогранників.

*Суть проекту:* учням пропонується порівняти площу повної поверхні двох типів пірамід (квадратна та шестикутна основи) при однаковій висоті та фіксованій довжині основи, яка дорівнює периметру. Завдання: з'ясувати, яка форма купола (імітація піраміди) вимагає мінімальної витрати матеріалу.

*Формування ДК:* порівняльний аналіз, обґрунтування вибору геометричних тіл для моделювання, формулювання висновку на основі числових розрахунків.

*Приклад реалізації:* Піраміда 1 має в основі квадрат зі стороною  $a=10$  м. Піраміда 2 має в основі правильний трикутник із такою ж висотою  $H$  і

периметром основи  $P=40$  м. Учні обчислюють площі їхніх бічних поверхонь та досліджують, яка форма ефективніша з точки зору мінімізації витрат матеріалу.

### **6. Розрахунок об'єму води у водонапірній вежі (11 клас. Тіла обертання)**

*Тематична прив'язка:* об'єми тіл обертання (циліндр, конус, куля).

*Суть проєкту:* учням пропонується модель резервуара водонапірної вежі, яка є комбінацією циліндра та півсфери чи зрізаного конуса. Завдання: розрахувати загальний об'єм резервуара та визначити, на якій висоті рівень води досягне половини повного об'єму.

*Формування ДК:* моделювання комбінованого тіла, застосування формул об'ємів, дослідження залежності об'єму від рівня наповнення.

*Приклад реалізації:* Резервуар складається з циліндра висотою  $H=5$  м та радіусом  $R=2$  м. Зверху розташована півсфера того ж радіуса. Учні розраховують загальний об'єм ( $V_{\text{циліндра}} + V_{\text{півсфери}}$ ) та досліджують, якою буде висота  $h$  рівня води, якщо заповнено рівно половину об'єму.

### **7. Мінімізація вартості виробництва тари (11 клас. Об'єми й площі поверхонь геометричних тіл)**

*Тематична прив'язка:* задачі на оптимізацію з використанням функціональної залежності.

*Суть проєкту:* необхідно визначити співвідношення між радіусом  $r$  та висотою  $h$  для циліндричної ємності (без кришки) заданого об'єму  $V=1000$  см<sup>3</sup>, щоб площа її поверхні була мінімальною.

*Формування ДК:* висунення гіпотези щодо оптимального співвідношення, реалізація аналітичного розв'язку (використання похідної, якщо пройдено, або CAS для розв'язання рівняння), обґрунтування вибору параметрів.

*Приклад реалізації:* Учні виводять функцію площі поверхні  $S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h$ , де  $h = V/(\pi r^2)$ . Далі застосовують похідну для знаходження екстремуму  $S(r)$ , роблять висновок, що мінімум досягається при  $h=r$ , та інтерпретують це співвідношення для реального виробництва.

Така система МП забезпечує не лише поглиблене засвоєння тем, а й регулярне тренування дослідницьких навичок, що є необхідною умовою для формування ДК у науковому ліцеї.

## ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі магістра теоретично обґрунтовано й практично розроблено систему формування дослідницької компетентності учнів наукових ліцеїв засобами проєктної діяльності під час вивчення курсу «Геометрія. Профільний рівень» (10–11 класи).

1. Розглянуто класифікацію і сутність методів навчання та проаналізовано метод проєктів як форму активних технологій навчальної діяльності. Установлено, що сучасна освітня парадигма вимагає переходу від репродуктивних методів навчання до дослідницьких та продуктивних. Метод проєктів належить саме до дослідницьких методів, що передбачають самостійне проходження учнями повного циклу наукового пошуку: від постановки проблеми до публічного захисту результату. Його витoki, пов'язані з прагматичною педагогікою та ідеєю активного навчання, висвітлені у вітчизняних посібниках з історії педагогіки. Сутність методу полягає в організації навчального процесу, спрямованій на самостійне виконання учнями практичних або дослідницьких завдань.

2. Виокремлено переваги та недоліки методу проєктів, а також його відмінності від традиційного навчання. Метод проєктів має значні переваги для профільного навчання, зокрема:

- сприяє формуванню дослідницької компетентності, дозволяючи учням самостійно формулювати проблему та планувати дослідження;

- значно підвищує мотивацію, оскільки учні бачать практичну цінність своїх знань;

- розвиває комунікативні навички та вміння працювати в команді.

Ключова відмінність від традиційного навчання полягає в акценті на компетентнісному підході: якщо традиційне навчання передає готові знання, то метод проєктів розвиває здатність застосовувати їх у реальних, часто міждисциплінарних, ситуаціях. Однак, метод вимагає значних часових ресурсів та високої кваліфікації вчителя-фасилітатора. Оптимальним є

комбінований підхід, де метод проєктів є доповненням до систематичного вивчення теоретичної бази.

3. Описано технології та інструменти організації проєктної діяльності. Обґрунтовано, що ефективна проєктна діяльність у геометрії неможлива без застосування сучасних ІКТ. Провідними інструментами є середовище динамічної геометрії GeoGebra та системи комп'ютерної алгебри CAS. Ці технології дозволяють учням інтенсифікувати дослідницький процес, не витрачаючи час на рутинні обчислення, а зосереджуючись на математичному моделюванні, проведенні комп'ютерного експерименту та аналізі складних просторових конструкцій. Такий підхід забезпечує системне формування дослідницької компетентності, що відповідає вимогам до підготовки висококваліфікованих фахівців, визначених Національною економічною стратегією [24]. Загальні засади використання технологій проєктування для розвитку обдарованих дітей викладені у відповідних методичних посібниках.

4. Визначено методичні особливості навчання учнів наукових ліцеїв та розроблено методичні рекомендації, спрямовані на підготовку до проєктно-дослідницької діяльності. Проаналізовано навчальну програму з математики (профільний рівень) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл [23] та підручники з геометрії профільного рівня груп авторів Є. П. Нелін, О. Є. Долгова і А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. [3, 4, 5, 6]. Встановлено, що програма містить чіткі вимоги до формування ДК, виражені через необхідність обґрунтування, дослідження та моделювання прикладних задач. Розроблено такі методичні рекомендації:

Теоретична підготовка (п. 2.3) має бути орієнтована на математичне моделювання та проблемне введення понять, де знання виступають як інструмент для вирішення прикладних задач.

Практичні заняття (п. 2.4) повинні проводитись за чітким алгоритмом дослідницького методу (постановка проблеми, гіпотеза, реалізація, аналіз, висновки), що забезпечує проходження учнями всіх етапів наукового циклу в стислому вигляді.

5. Розроблено систему короткотривалих міні-проектів (МП) за основними тематичними блоками курсу геометрії. Сформовано сім деталізованих міні-проектів (МП, 20–30 хвилин) для системного впровадження дослідницької діяльності у 10–11 класах:

– для 10 класу (вектори, координати, перпендикулярність) розроблено МП, спрямовані на моделювання інженерних конструкцій та розрахунок траєкторій (наприклад, «Розрахунок траєкторії дрона»).

– для 11 класу (многогранники, тіла обертання, об'єми) розроблено МП, що фокусуються на задачах оптимізації та комбінованому моделюванні (наприклад, «Мінімізація вартості виробництва тари» з використанням похідної та CAS).

У підсумку, використання методу проектів у поєднанні із сучасними ІКТ (GeoGebra, CAS) є необхідною умовою для формування дослідницької компетентності учнів наукових ліцеїв у курсі геометрії профільного рівня. Це забезпечує їхню підготовку до подальшої наукової та інженерної діяльності, що відповідає як цілям Нової української школи, так і вимогам сучасного ринку праці.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Буйницька О. П. Інформаційні технології та технічні засоби навчання: навч. посіб. / О. П. Буйницька. – Київ: Центр учбової літератури, 2012. – 240 с. URL: [https://pidru4niki.com/11570718/informatika/metod\\_proektiv\\_tehnologiya\\_navchannya](https://pidru4niki.com/11570718/informatika/metod_proektiv_tehnologiya_navchannya) (дата звернення: 21.11.2022).
2. Вдовенко В. В. Формування дослідницької компетентності учнів на уроках математики [Текст] / В.В. Вдовенко // Математика в школах України: Науково-методичний журнал. – Харків: Основа, 2013. – № 34-36. – С. 2-8. URL: <https://dspace.cusu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/c58010fa-6ecd-4323-ab2e-6f2add6ac88c/content> (дата звернення: 10.09.2025).
3. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. – Харків: Вид-во «Ранок», 2018. – 240 с. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/413-geometriya-neln-10-klas.html> (дата звернення: 07.12.2025)
4. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Харків: Вид-во «Ранок», 2019. – 208 с. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/3067-geometriia-11-klas-nelin.html> (дата звернення: 07.12.2025)
5. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 10 кл. Закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 240 с.: іл. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1140-geometriya-10-klas-merzlyak-prof.html> (дата звернення: 07.12.2025)
6. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х.: Гімназія, 2019. – 204 с.: іл. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1247-geometriya-11-klas-merzlyak.html> (дата звернення: 07.12.2025)
7. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура / Микола Степанович Головань. // Науковий вісник Східноєвропейського

національного університету. – 2014. – №1. – С. 35–39. URL: [https://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream-download/123456789/53034/6/Holovan\\_Matematychna\\_kompetentnist.pdf;jsessionid=02B4E8E86B74F7B52EE096FACA4A43BB](https://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream-download/123456789/53034/6/Holovan_Matematychna_kompetentnist.pdf;jsessionid=02B4E8E86B74F7B52EE096FACA4A43BB) (дата звернення: 26.09.2025).

8. Грищенко М. О. Організація проєктної діяльності на уроках математики в старшій школі / М. О. Грищенко // Вісник післядипломної освіти. – 2019. – Вип. 10. – С. 78–85. URL: [https://npu.edu.ua/images/file/Vidannia/VPO/10\\_2019/10\\_78-85.pdf](https://npu.edu.ua/images/file/Vidannia/VPO/10_2019/10_78-85.pdf) (дата звернення: 15.09.2025).

9. Метод проєктів у контексті життєвих результатів діяльності у системі соціальної та життєвої практики учнів. Частина I [Електронний ресурс] / І. Г. Єрмаков // Постметодика. – 2016. – № 2. – С. 24-34. – Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Postmetodyka\\_2016\\_2\\_6](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Postmetodyka_2016_2_6) (дата звернення: 10.04.2023).

10. Зайченко І. В. Педагогіка: підручник / І. В. Зайченко. – 3-тє вид., переробл. та допов. – Київ: Видавництво Ліра-К, 2016. 608 с. URL: [https://pidru4niki.com/16390104/pedagogika/zagalni\\_metodi\\_navchannya](https://pidru4niki.com/16390104/pedagogika/zagalni_metodi_navchannya) (дата звернення: 08.04.2023).

11. Закон України «Про наукову і науково-технічну діяльність»: Закон України від 26.11.2015 № 848-VIII (зі змінами) // Відомості Верховної Ради України. – 2016. – № 3. – Ст. 25. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/848-19> (дата звернення: 02.04.2023).

12. Закон України «Про освіту»: Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII (зі змінами) // Відомості Верховної Ради України. – 2017. – № 38–39. – Ст. 380. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19> (дата звернення: 25.09.2025).

13. Закон України «Про повну загальну середню освіту»: Закон України від 16.01.2020 № 463-IX // Відомості Верховної Ради України. – 2020. – № 31. – Ст. 226. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20> (дата звернення: 25.09.2025).

14. Зверева Г.Ф. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики. Методичний посібник для вчителів. Харків: РМК Московського РУО, 2008. 81 с. URL: <http://www.kharkivosvita.net.ua/files/Zvereva-56.pdf> (дата звернення: 26.09.2025).

15. Інноваційні технології навчання: Навч. посібн. для студ. вищих технічних навчальних закладів / [Кол. авторів; відп. ред. Бахтіярова Х.Ш.; наук. ред. Арістова А.В.; упорядн. словника Волобуєва С.В.]. – К.: НТУ, 2017. – 172 с. URL: <https://ukreligieznavstvo.wordpress.com/2019/01/18/itn/> (дата звернення: 02.04.2023).

16. Історія педагогіки. Кн. 1. Історія зарубіжної педагогіки: навч. посіб. / за ред. О. В. Сухомлинської. – Київ: Видавничий Дім «Слово», 2010. 624 с.

17. Кахута Н. Д. Компетентнісний підхід на уроках математики [Електронний ресурс] / Н.Д. Кахута // Theory and methods of educational management. – 2017. – Вип. 2 (20)/ URL: [https://library.krok.edu.ua/media/library/category/statti/kakhuta\\_0016.pdf](https://library.krok.edu.ua/media/library/category/statti/kakhuta_0016.pdf) (дата звернення: 26.09.2025).

18. Філон Л.Г., Лук'янова С.М., Дремова І.А. Наукові ліцеї: особливості організації науково-дослідницької діяльності учнів з математики // Матеріали V Всеукраїнської науково-практичної конференції "Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи", м. Полтава, 19-20 листопада 2019 р. Полтава: Астроя, 2019. С.79-80.

19. Косович О. В. Проектна діяльність як одна з форм інноваційних методичних технологій навчання / О. В. Косович // Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Педагогіка, соціальна робота. – 2010. – Вип. 22. – С. 76–78. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/5d030122-fab9-402a-be3f-d4a1ecb1901d/content> (дата звернення: 02.04.2023).

20. Лисакова А. А. Застосування методу проєктів на уроках математики / А. А. Лисакова // Всеосвіта. – 2023. URL: <https://naurok.com.ua/vikoristannya->

[metodu-proektiv-na-urokah-matematiki-383425.html](https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/718957/1/Metod%2520proektiv-na-urokah-matematiki-383425.html) (дата звернення: 15.09.2025).

21. Метод проєктів в українській школі 1920–1930-х років / Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України. – Київ, 2020. 16 с. URL: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/718957/1/Metod%2520proektiv.pdf> (дата звернення: 10.04. 2023).

22. Метод проєктів на уроках математики як засіб розвитку творчих здібностей обдарованих учнів / Урок.ОСВІТА.УА. – 2023. URL: [https://urok.osvita.ua/materials/edu\\_technology/dosvid-roboti-z-obdarovanimi-zdobuvacami-osviti-metod-proektiv-na-urokah-matematiki-ak-zasib-rozvitku-tvorcih-zdibnostej-obdarovanih-ucniv/](https://urok.osvita.ua/materials/edu_technology/dosvid-roboti-z-obdarovanimi-zdobuvacami-osviti-metod-proektiv-na-urokah-matematiki-ak-zasib-rozvitku-tvorcih-zdibnostej-obdarovanih-ucniv/) (дата звернення: 15.09.2025).

23. Навчальна програма з математики (профільний рівень) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, затверджена Наказом Міністерства освіти і науки № 1407 від 23 жовтня 2017 року / Міністерство освіти і науки України. – Київ, 2017. URL: [https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58879/#google\\_vignette](https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58879/#google_vignette) (дата звернення: 25.11. 2025).

24. Національна економічна стратегія на період до 2030 року: Постанова Кабінету Міністрів України від 03.03.2021 № 179. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/179-2021-п> (дата звернення: 10.04.2023).

25. Нечитайло Ю. А., Філон Л. Г. Етапи реалізації методу проєктів у навчанні геометрії / Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених (7 грудня 2023 р., м. Чернігів). Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2023. С. 113.

26. Нова українська школа: концептуальні засади реформування середньої школи / [упоряд. Гриневич Л., Елькін О., Калашнікова С., Коберник І., Ковтунець В., Макаренко О., Малахова О., Нанаєва Т., Усатенко Г., Хобзей П., Шиян Р.; за заг. ред. Грищенка М.]. – [Б. м., 2016]. – 40 с..

URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf> (дата звернення: 25.09.2025).

27. Пироженко Л. В. Метод проєктів у формуванні дослідницьких компетентностей учнів / Л. В. Пироженко // Педагогічна освіта: теорія і практика. – 2016. – Вип. 21. – С. 56–62. URL: <https://surl.li/utswoy> (дата звернення: 08.04. 2023).

28. Положення про науковий ліцей. Затв. Кабінетом Міністрів України від 22 трав. 2019 р. № 438. Офіційний вісник України. 2019. № 44. Ст. 1500. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/438-2019-п#Text> (дата звернення: 07.12.2025)

29. Пометун О. І. Сучасний урок: інтерактивні технології навчання / О. І. Пометун, Л. В. Пироженко. – Київ: А.С.К., 2004. 192 с. URL: [https://lib.iitta.gov.ua/707112/1/Suchasnyj\\_urok.pdf](https://lib.iitta.gov.ua/707112/1/Suchasnyj_urok.pdf) (дата звернення: 02.04. 2023).

30. Практика реалізації педагогічних проєктів: навч.-метод. посіб. / авт.-упоряд. І. В. Єгорова. – Івано-Франківськ, 2021. 112 с. URL: <https://lib-repo.pnu.edu.ua/bitstream/123456789/9862/1/Посібник.pdf> (дата звернення: 15.09.2025).

31. Про схвалення Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року: Розпорядження Кабінету Міністрів України від 14.12.2016 № 988-р. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/988-2016-р> (дата звернення: 05.09.2025).

32. Профільне навчання: досвід упровадження, інноваційні технології. Упор. Л.Ф. Пашко, О.П. Коваленко, Л.І. Симоненко – Полтава: ПОШПО, 2008. – 196 с. URL: <https://pano.pl.ua/file/book/profil%20navchan.pdf>

33. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія. Харків: Факт, 2005. 360 с.

34. Результати дослідження PISA (2018). URL: <http://testportal.gov.ua/2019/12/03/rezultaty-pisa-svoyeridnyj-dorogovkaz-dlya-pidvyshhennya-yakosti-natsionalnoyi-osvity/> (дата звернення: 10.04.2023).
35. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-е вид. – К.: 2006. – 582 с. URL: [https://method.ucoz.ua/load/istorija\\_matematiki/metodika\\_prepodavanija\\_matematiki/slepkan\\_z\\_i\\_quot\\_metodika\\_navchannja\\_matematiki\\_quot\\_2006r/10-1-0-39](https://method.ucoz.ua/load/istorija_matematiki/metodika_prepodavanija_matematiki/slepkan_z_i_quot_metodika_navchannja_matematiki_quot_2006r/10-1-0-39) (дата звернення: 08.04.2023)
36. Технології проектування в практиці роботи загальноосвітнього навчального закладу: теоретико-практичний аспект: посіб. / за ред. О. В. Сухомлинської. – Київ: Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2014. 336 с. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/32309414.pdf> (дата звернення: 08.04.2023).
37. Технології профільного навчання: кол. монографія / [авт. кол.: Г. О. Васьківська, С. В. Косянчук, В. І. Кизенко, О. В. Барановська, Л. В. Шелестова, О. П. Кравчук]; за наук. ред. д-ра пед. наук, проф. Г. О. Васьківської]. Київ: Педагогічна думка, 2020. 304 с. URL: [https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/722194/1/MonogrDid\\_2020.pdf](https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/722194/1/MonogrDid_2020.pdf) (дата звернення: 07.12.2025)
38. Condliffe B. Project-Based Learning: A Literature Review / B. Condliffe, J. Quint, M. G. Visher [et al.]. – New York: MDRC, 2017. 82 p. URL: [https://www.mdrc.org/sites/default/files/Project-Based\\_Learning-LitRev\\_Final.pdf](https://www.mdrc.org/sites/default/files/Project-Based_Learning-LitRev_Final.pdf) (дата звернення: 25.09.2025). – (англ.).
39. Cruz S. Project-Based Learning Methodology as a Promoter of Learning Math Concepts: A Scoping Review / S. Cruz, F. Viseu, J. A. Lencastre // Frontiers in Education. – 2022. – Vol. 7. – Article 953390. – DOI: 10.3389/feduc.2022.953390. URL: <https://www.frontiersin.org/journals/education/articles/10.3389/feduc.2022.953390/full> (дата звернення: 25.09.2025). – (англ.).

## ДОДАТКИ

### Реалізація міні-проєкту № 1

Загальна інформація про проєкт

Параметр	Опис
Назва проєкту	Моделювання перерізів архітектурних форм
Клас / Тема	10 клас. Вступ до стереометрії (Аксиоми стереометрії, побудова перерізів многогранників)
Формат	Короткотривалий міні-проєкт (МП)
Тривалість	20–30 хвилин уроку
Інструмент	Середовище динамічної геометрії <b>GeoGebra 3D</b>
Обґрунтування ДК	Учні використовують візуалізацію для висунення гіпотези про форму перерізу, обґрунтовують обраний метод (наприклад, метод слідів), проводять комп'ютерний експеримент і аналізують залежність форми перерізу від вхідних параметрів.

Алгоритм дослідницького методу (для учнів)

Цей проєкт реалізується за чітким дослідницьким циклом.

Етап	Дія учня	Очікуваний результат
<b>1. Постановка проблеми</b>	Ознайомлення з умовою: задано модель будівлі (куб) і три точки на її ребрах, які задають січну площину.	Усвідомлення необхідності знайти переріз.
<b>2. Висування</b>	Спрогнозувати форму перерізу,	Гіпотеза: «Форма

Етап	Дія учня	Очікуваний результат
гіпотези	виходячи з розташування точок та аксіом стереометрії.	перерізу – трапеція / трикутник / шестикутник».
<b>3. Планування реалізації</b>	Визначення кроків побудови (ручна побудова або використання ІКТ). <b>Вибір методу:</b> метод слідів / GeoGebra.	Створення покрокового плану дій у GeoGebra.
<b>4. Реалізація (GeoGebra)</b>	Виконання покрокового алгоритму (див. п. 3).	Отримання динамічної моделі перерізу.
<b>5. Аналіз та висновки</b>	Перевірка гіпотези, аналіз динамічної зміни форми та площі перерізу.	Обґрунтування залежності форми перерізу від розташування точок.

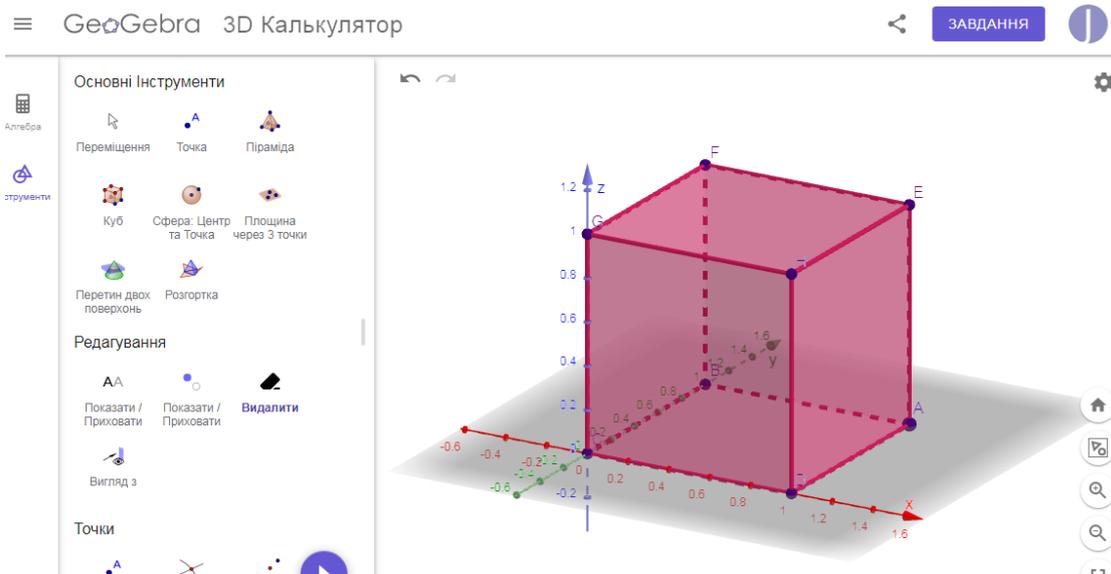
Покрокова реалізація в GeoGebra 3D

Умова для реалізації. **Побудувати переріз куба ABCDEFGH площиною, заданою точками M, N, K на трьох різних бічних ребрах куба: M – на ребрі AE, N – на ребрі BF, K – на ребрі CG.**

*Крок 1. Побудова основи (Куба)*

**Відкрити додаток GeoGebra 3D Калькулятор.**

**Побудувати** куб ABCDEFGH за допомогою команди у полі введення (наприклад, Куб((0,0,0), (1,0,0))).



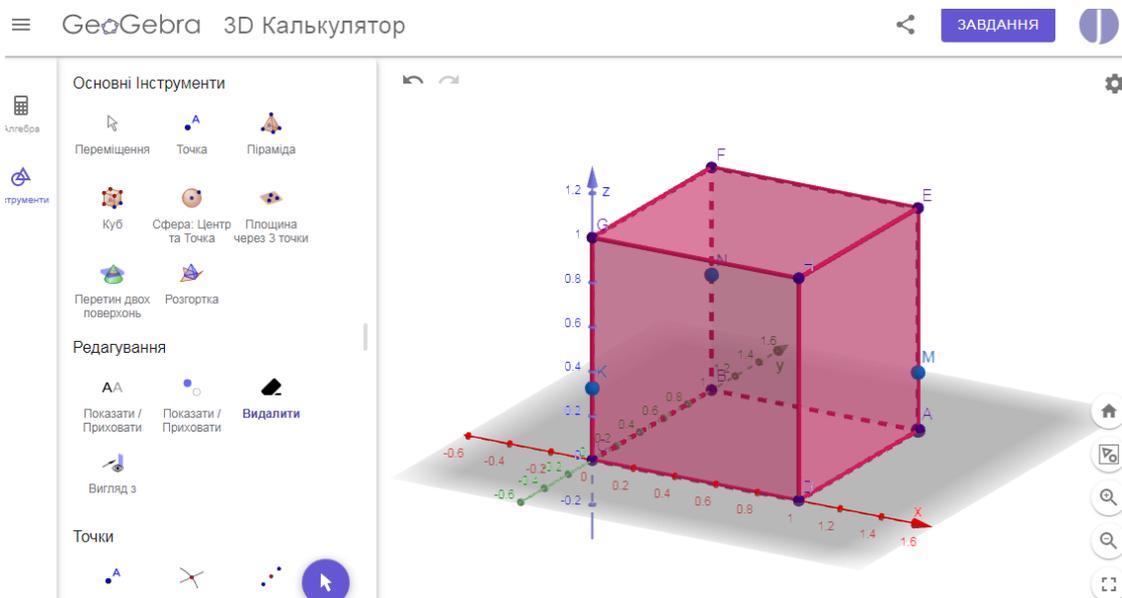
*Крок 2.* Задання січної площини

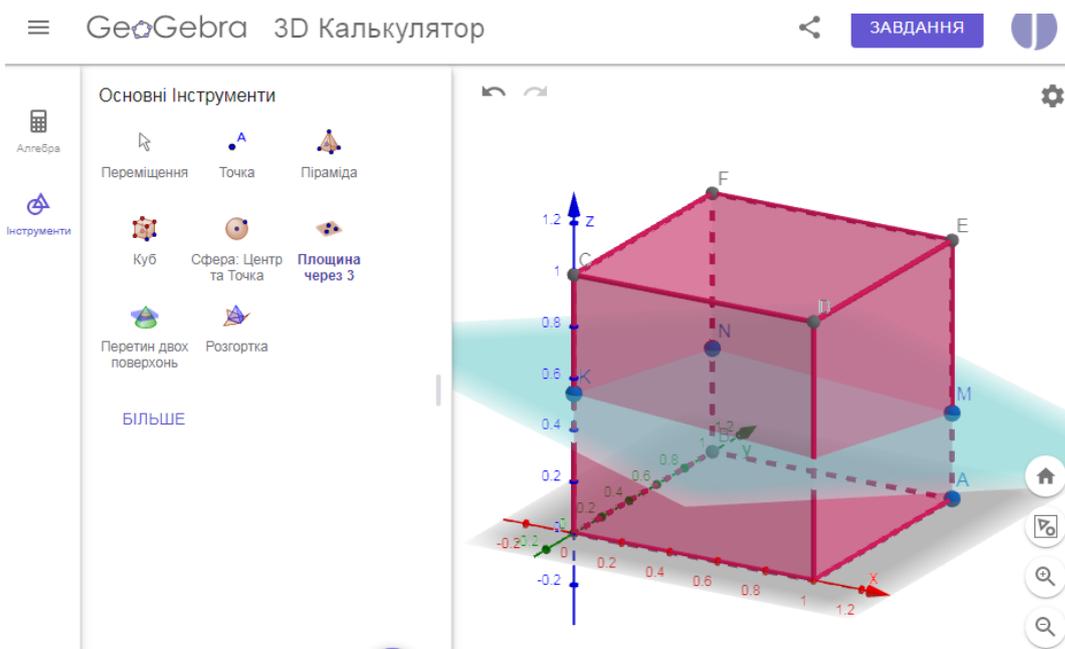
**Вибрати** інструмент «Точка на об'єкті» (Point on Object).

**Розмістити** три точки (M, N, K) на трьох різних бічних ребрах куба: M – на ребрі AE, N – на ребрі BF, K – на ребрі CG.

**Вибрати** інструмент «Площина через 3 точки» (Plane through 3 points).

**Створити** січну площину, послідовно клацнувши на точках **M, N, K**.





*Крок 3.* Побудова перерізу

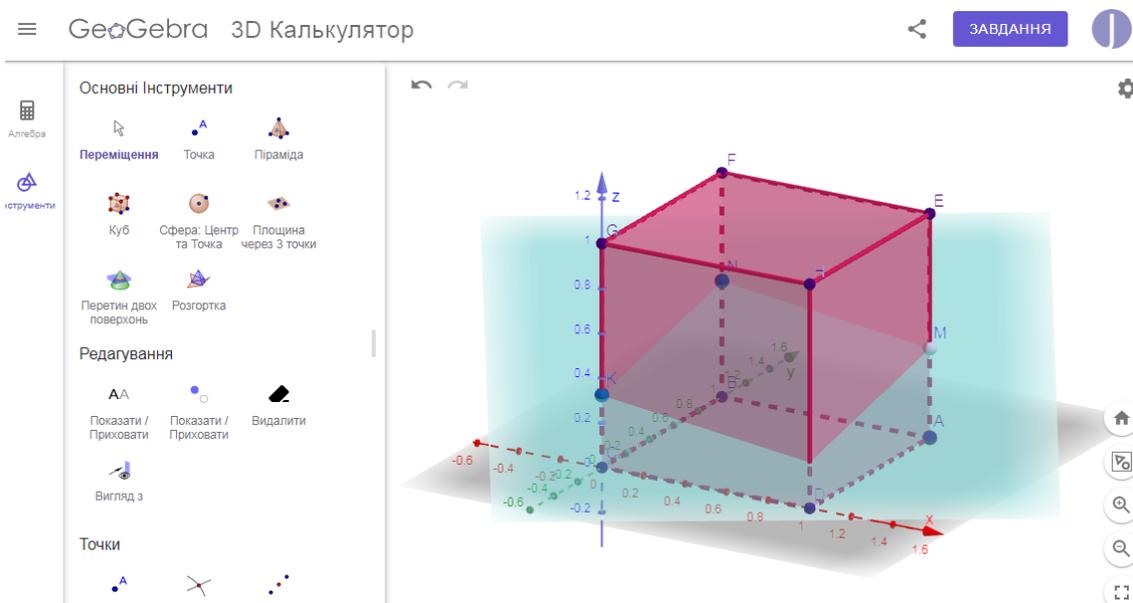
**Вибрати інструмент «Переріз двох поверхонь/об'єктів» (Intersect Two Surfaces).**

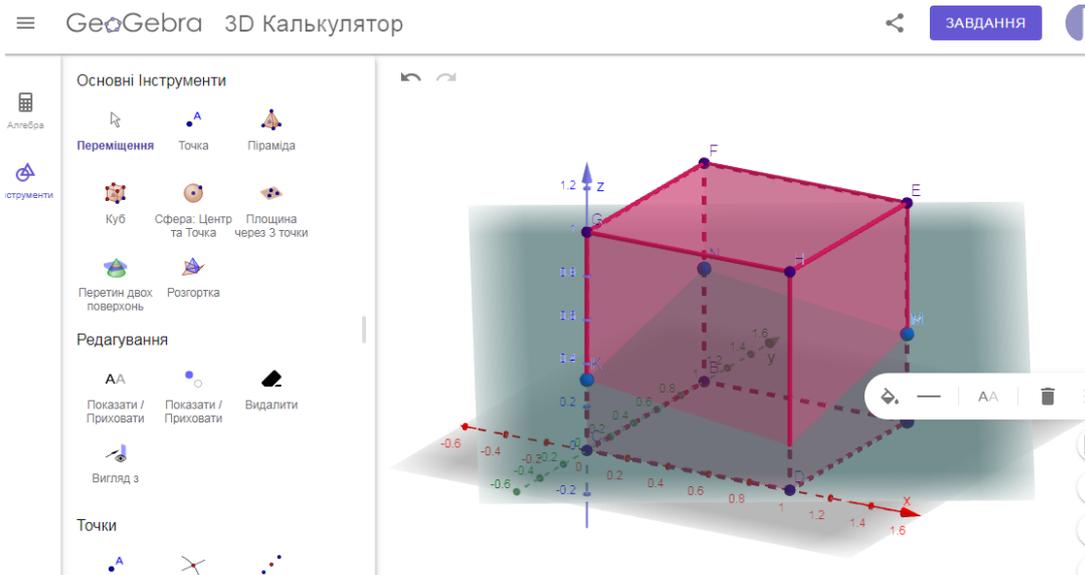
**Клацнути спочатку на Кубі (базовому многограннику).**

**Клацнути потім на Січній Площині.**

**Переконатися, що GeoGebra автоматично побудувала багатокутник перерізу (наприклад, полігон1).**

**Приховати січну площину для кращої візуалізації перерізу (правий клік на площині → Налаштування → Показати об'єкт).**





*Крок 4. Дослідження та аналіз (Формування ДК)*

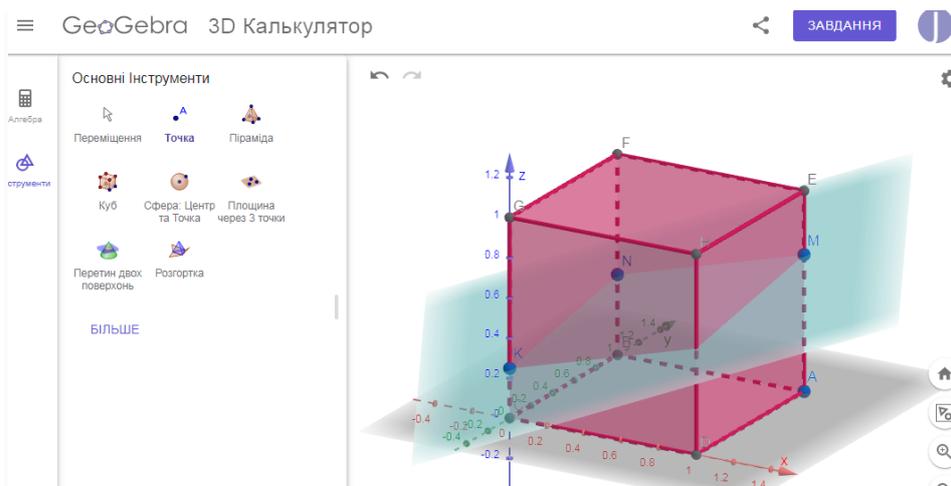
**Визначити** форму отриманого багатокутника перерізу.

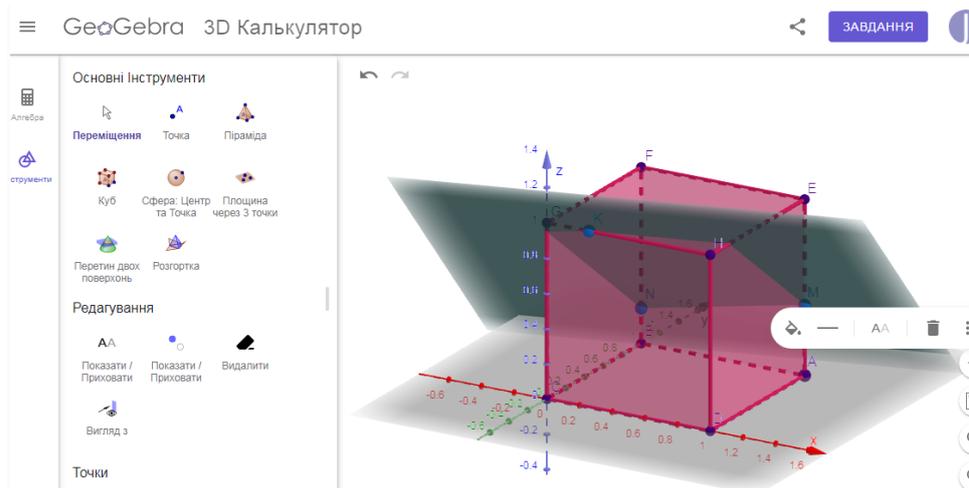
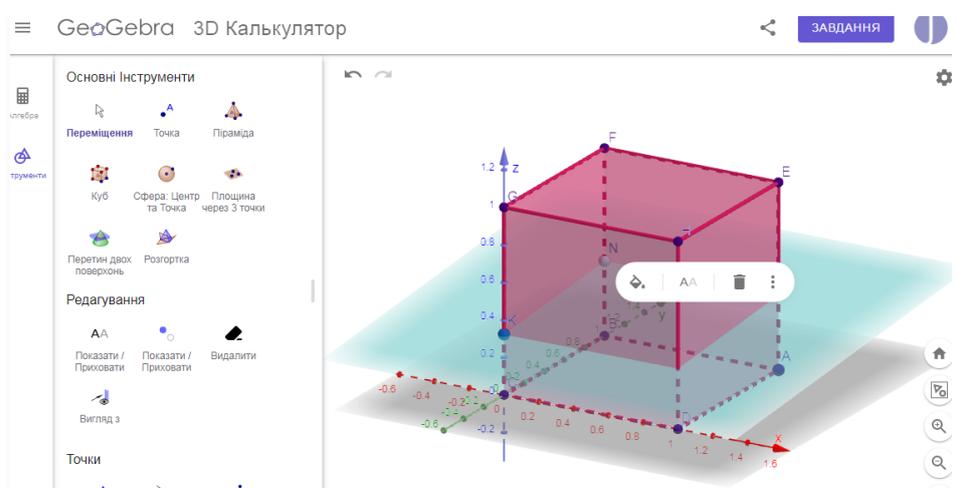
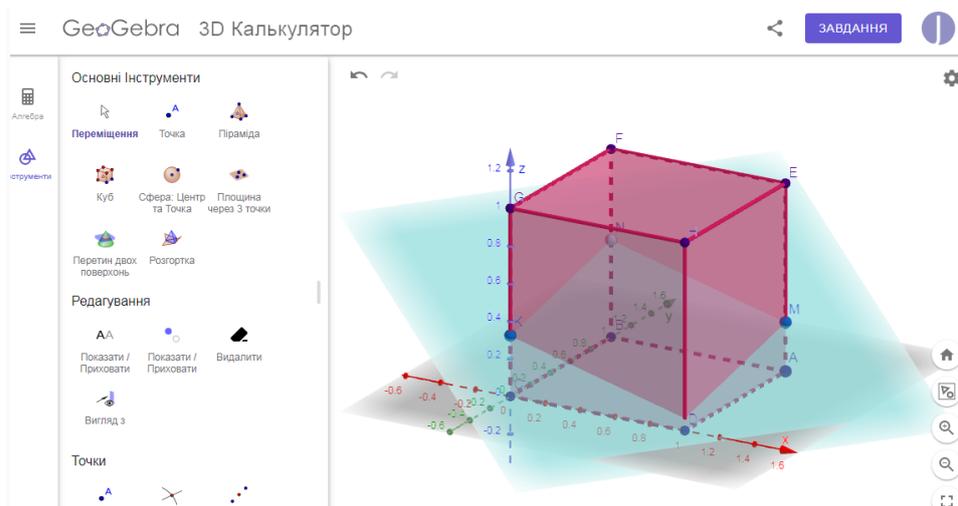
**Викликати** значення площі перерізу (команда Площа(полігон1)).

**Провести** комп'ютерний експеримент: **перетягувати** одну з точок (наприклад, **К**) по її ребру.

**Спостерігати**, як змінюється форма (тип багатокутника) та числове значення площі.

**Сформулювати** висновок, **обґрунтовуючи** залежність форми перерізу від положення січної площини.





### *Висновок за результатами Міні-проєкту №1*

За результатами проведеного комп'ютерного експерименту із застосуванням GeoGebra 3D гіпотеза про форму перерізу **підтвердилася/спростувалася** (вказати відповідно до початкової гіпотези).

**Форма перерізу.** У випадку, коли січна площина визначається трьома точками на трьох сусідніх бічних ребрах куба ( $M \in AE$ ,  $N \in BF$ ,  $K \in CG$ ), фігура перерізу завжди є **трапецією** (або іншим відповідним багатокутником, залежно від розташування точок), оскільки площини, які містять паралельні ребра  $AE$  і  $BF$ , перетинаються січною площиною по паралельних прямих.

**Залежність.** Дослідження динамічної моделі підтвердило, що **форма** перерізу (тип багатокутника) залежить не від точного положення точок  $M$ ,  $N$ ,  $K$  на ребрах, а від **набору ребер**, на яких ці точки розташовані (наприклад, переміщення  $K$  на протилежне ребро  $GH$  змінює тип багатокутника на шестикутник або інший чотирикутник).

**Кількісний аналіз.** Встановлено, що **площа** перерізу є **змінною величиною**, яка безпосередньо залежить від відстані січної площини до основи многогранника: чим ближче точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  до однієї з основ, тим меншою є площа перерізу.

Таким чином, комп'ютерний експеримент у GeoGebra дозволив візуалізувати й аналітично підтвердити аксіоми стереометрії та їхні наслідки, забезпечуючи формування навичок висування гіпотез, проведення дослідження та обґрунтування висновків, що є ключовим для дослідницької компетентності.

## Реалізація міні-проєкту № 2

### Загальна інформація про проєкт

Параметр	Опис
Назва проєкту	Моделювання та розрахунок бічної поверхні прямої призми
Клас / Тема	10–11 клас. Тема «Призми». Паралельність у просторі, обчислення площі бічної поверхні.
Формат	Короткотривалий міні-проєкт (МП)
Тривалість	20–30 хвилин уроку
Інструмент	Середовище динамічної геометрії <b>GeoGebra 3D</b>
Обґрунтування ДК	Учні <b>обґрунтовують</b> геометричні властивості (паралельність площин), <b>проводять</b> обчислення (формула) та <b>перевіряють</b> результат через моделювання та <b>аналітичний</b> розрахунок у GeoGebra.

### Алгоритм дослідницького методу (для учнів)

Етап	Дія учня	Формування ДК
<b>1. Постановка проблеми</b>	Ознайомлення з умовою: створити модель призми (дах), обґрунтувати паралельність площин протилежних бічних граней та обчислити площу бічної поверхні.	Усвідомлення необхідності зв'язку теорії (паралельність) та практики (розрахунок).
<b>2. Висування гіпотези</b>	Сформулювати гіпотезу про те, які грані мають бути паралельними, та записати формулу для обчислення площі.	Гіпотеза: «Площа бічної поверхні $S = P_{осн} \cdot H$ ».

Етап	Дія учня	Формування ДК
<b>3. Планування реалізації</b>	Визначення кроків побудови моделі призми та використання GeoGebra для обчислення та візуального обґрунтування паралельності.	Створення покрокового плану дій у GeoGebra.
<b>4. Реалізація (GeoGebra)</b>	Виконання покрокового алгоритму (див. п. 3).	Отримання динамічної моделі призми та числового результату площі.
<b>5. Аналіз та висновки</b>	Обґрунтування теоретичного факту (паралельності) та порівняння розрахункового результату з результатом, отриманим у GeoGebra.	Підтвердження гіпотези, обґрунтування висновків щодо властивостей призми.

Покроковий опис реалізації у GeoGebra 3D (Інструкція для учнів)

Умова для реалізації. **Створити модель прямої призми з прямокутною основою  $a=4$ ,  $b=6$  та висотою  $H=2$ .**

Крок 1. Побудова основи призми

**Відкрити** додаток **GeoGebra 3D Калькулятор** (<https://www.geogebra.org/3d>).

У полі введення **Задати** вершини прямокутної основи ABCD (розміри  $a=4$  і  $b=6$ ):

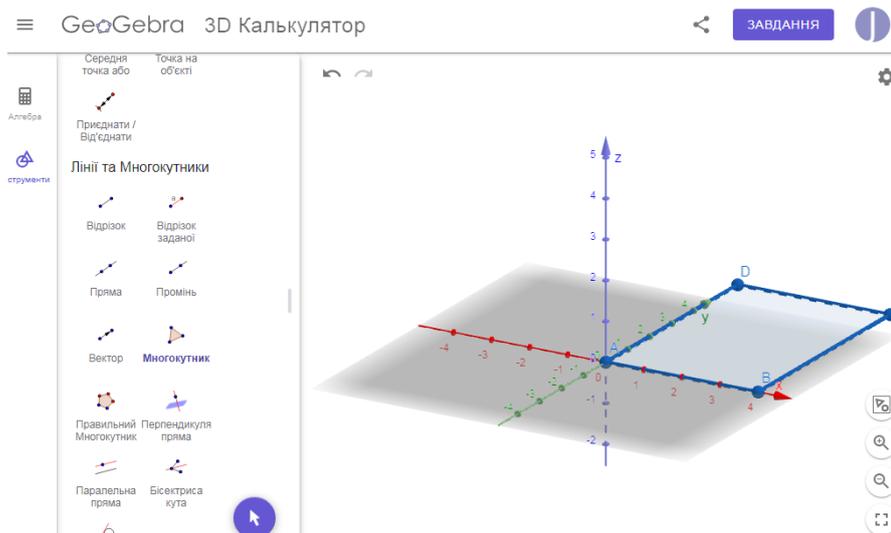
$$A=(0, 0, 0)$$

$$B=(4, 0, 0)$$

$$C=(4, 6, 0)$$

$$D=(0, 6, 0)$$

**Побудувати** многокутник основи (нижній дах). Многокутник(A, B, C, D).



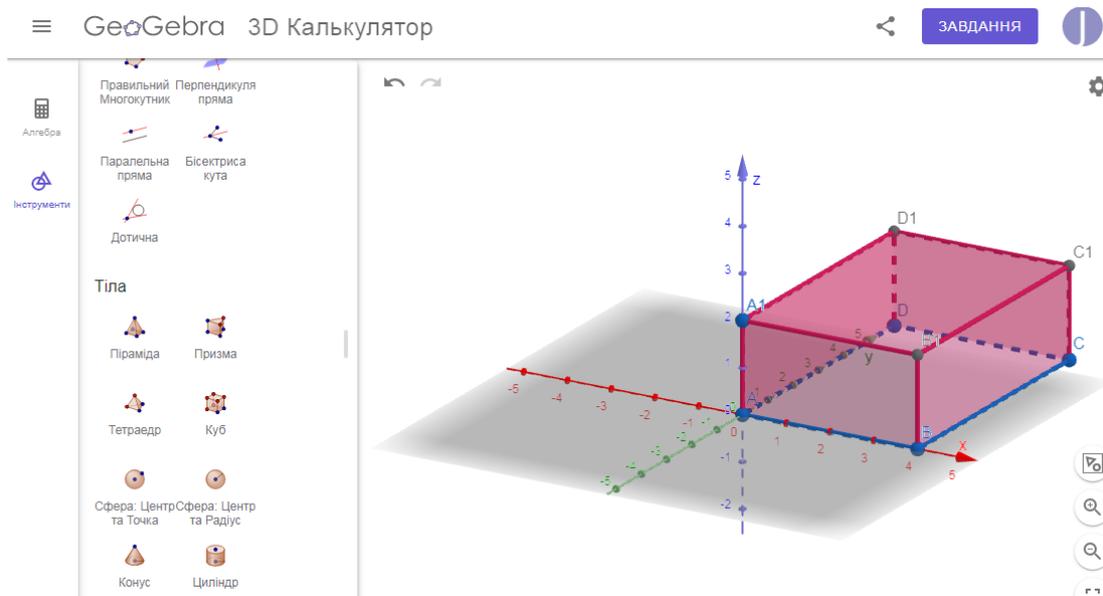
Крок 2. Побудова прямої призми

**Вибрати** інструмент «Призма» (Prism/Extrude to Prism or Cylinder).

**Клацнути** на многокутнику основи.

**Ввести** висоту призми  $H=2$  (якщо GeoGebra вимагає значення).

**Результат.** GeoGebra побудує пряму призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

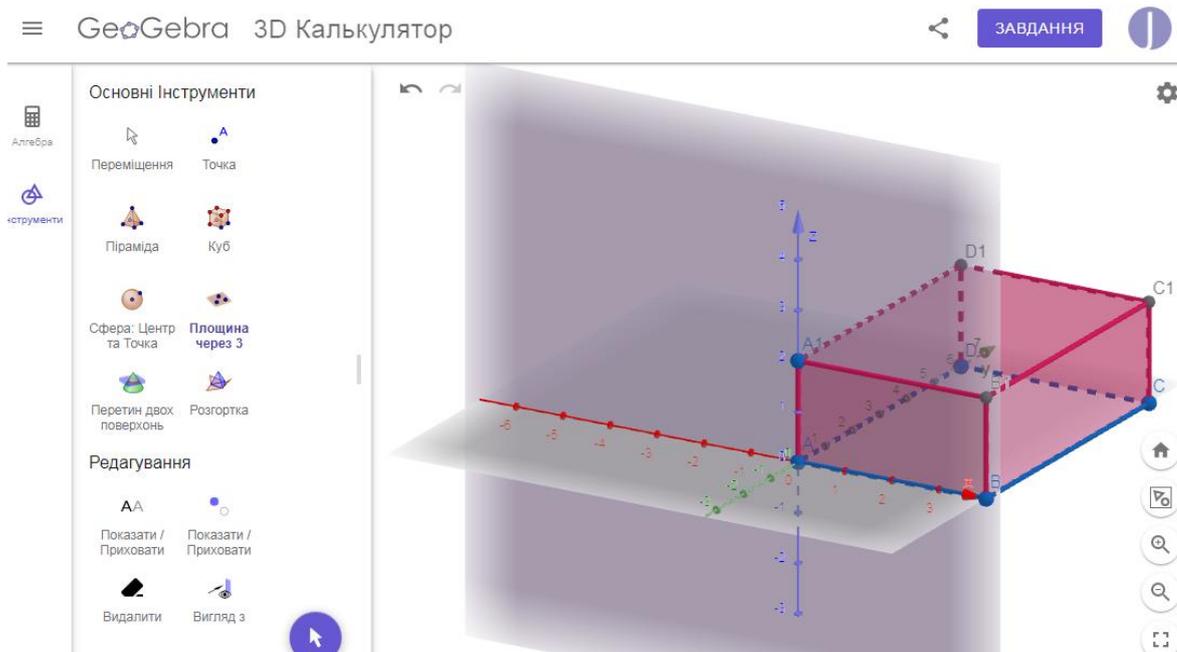


Крок 3. Обґрунтування паралельності площин (ДК)

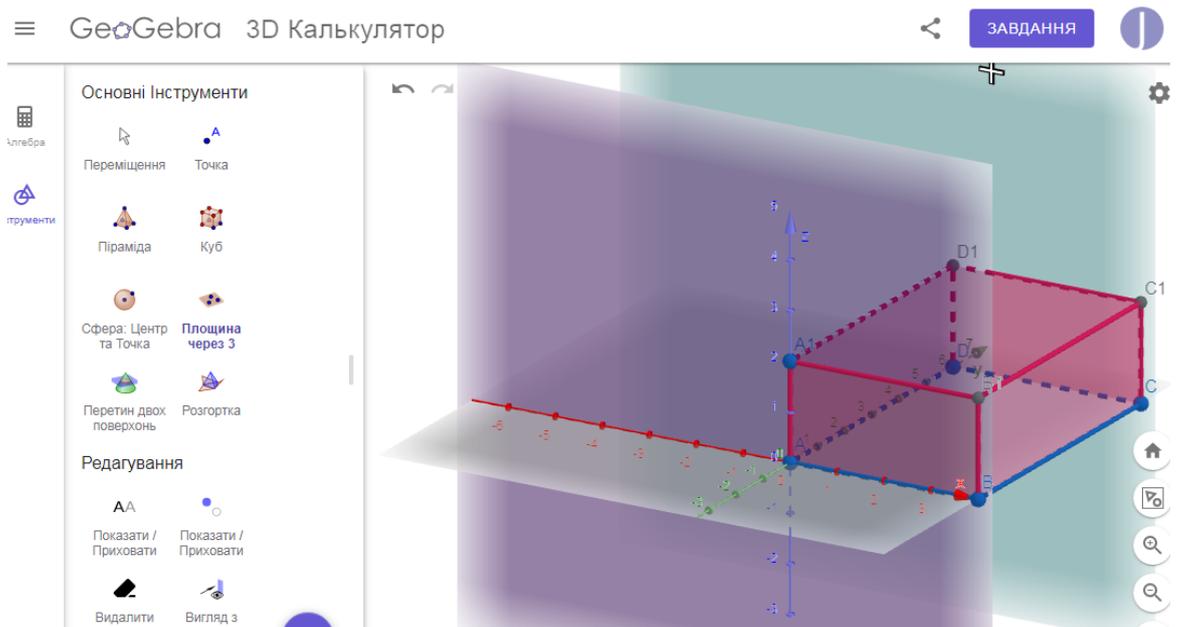
**Завдання.** Обґрунтувати, чому площини протилежних бічних граней паралельні.

**Вибрати** інструмент «Площина через 3 точки» (Plane through 3 points).

**Створити** площину однієї бічної грані (наприклад,  $\beta$ , що проходить через  $A, B, B_1$ ). **Команда.** Площина( $A, B, B_1$ ).



**Створити** площину протилежної бічної грані (наприклад,  $\delta$ , що проходить через  $D, C, C_1$ ). **Команда.** Площина( $D, C, C_1$ ).



**Дослідити** паралельність.

**Вибрати** інструмент «Відношення» (Relation) або «Кут» (Angle).

**Перевірити** кут між нормальними векторами площин  $\beta$  і  $\delta$ .

**Обґрунтування.** Учням слід проаналізувати модель і зробити висновок: оскільки  $AB$  паралельно  $DC$  (протилежні сторони основи) і  $AA_1$  паралельно  $DD_1$  (бічні ребра прямої призми), то за ознакою паралельності площин

протилежні бічні грані  $\beta$  і  $\delta$  є паралельними. GeoGebra допомагає це візуалізувати.

Крок 4. Обчислення площі бічної поверхні (ДК)

**Обчислити** периметр основи (P) і площу бічної поверхні  $S_{\text{бічн}}$  **вручну** за формулою:  $S_{\text{бічн}} = P \cdot H$ .

$$P = 2 \cdot (4 + 6) = 20 \text{ м.}$$

$$S_{\text{бічн}} = 20 \cdot 2 = 40 \text{ м}^2.$$

**Перевірити** розрахунок за допомогою GeoGebra (комп'ютерний експеримент).

**Побудувати** (або викликати) площу кожної з чотирьох бічних граней:

$$S_{AB} = 4 \cdot 2 = 8$$

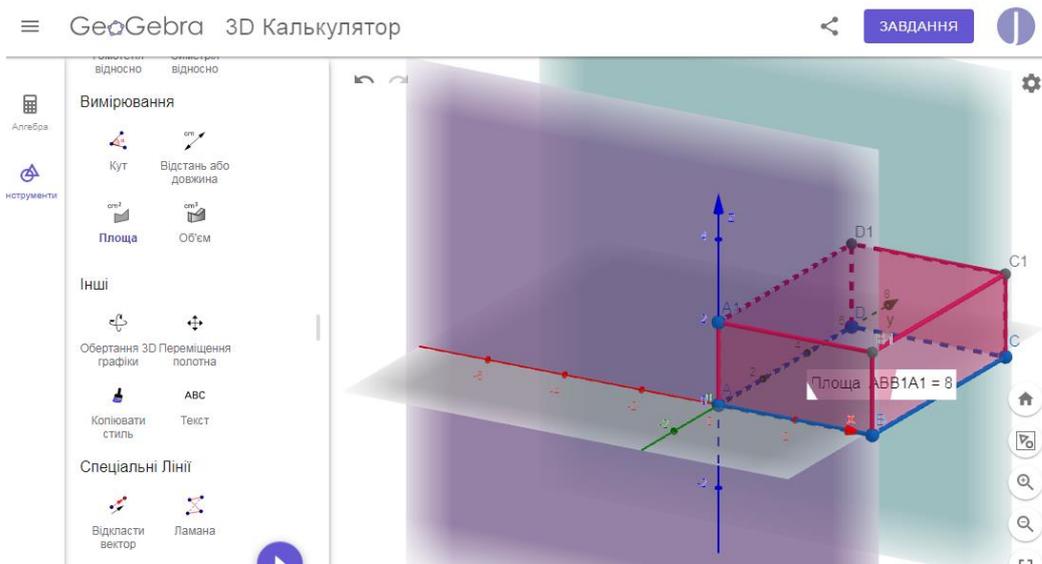
$$S_{BC} = 6 \cdot 2 = 12$$

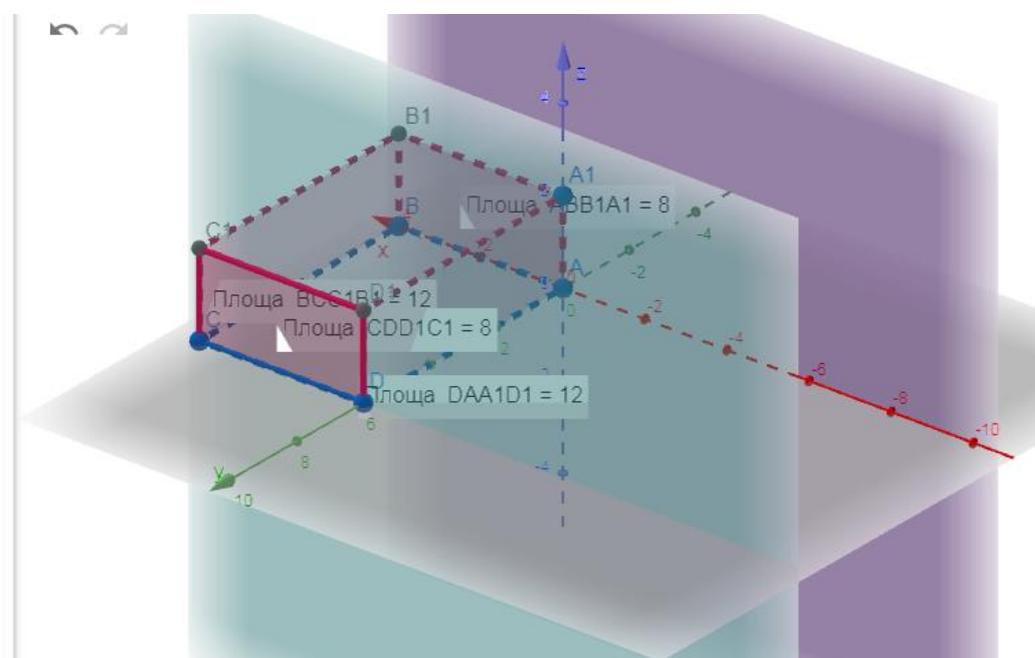
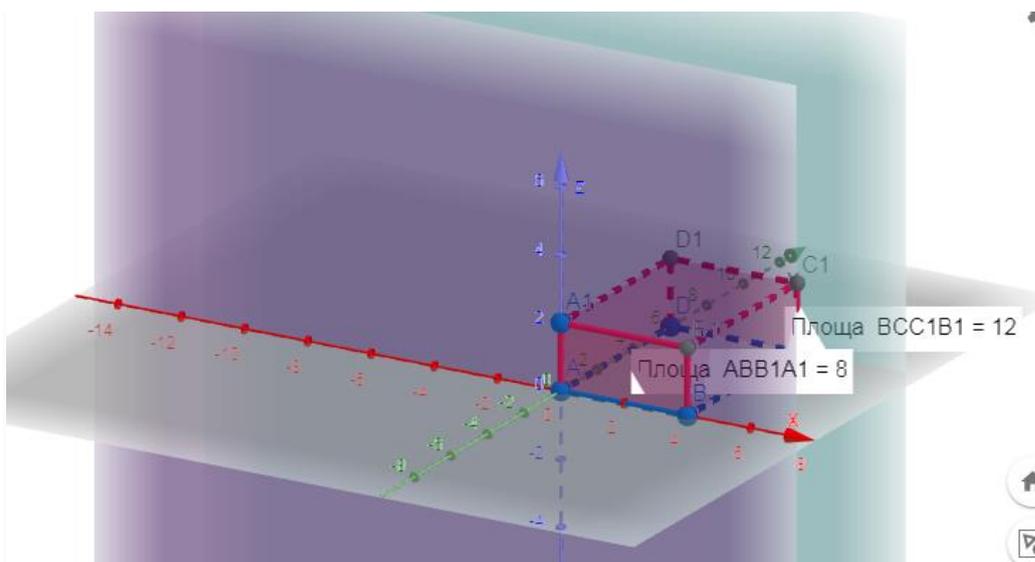
$$S_{CD} = 4 \cdot 2 = 8$$

$$S_{DA} = 6 \cdot 2 = 12$$

У полі введення **Виконати** команду для суми:  $8 + 12 + 8 + 12$ .

**Сформулювати висновок:** Порівняти результат ручного розрахунку ( $40 \text{ м}^2$ ) з результатом, отриманим додаванням площ у GeoGebra.





### Висновок за результатами Міні-проєкту №2

За результатами моделювання прямої призми у GeoGebra 3D було **комплексно підтверджено** теоретичні властивості цього многогранника та проведено необхідні розрахунки.

**Геометричне обґрунтування (Паралельність).** Візуалізація у GeoGebra підтвердила, що площини протилежних бічних граней прямої призми є **паралельними**. Це обґрунтовано тим, що бічні ребра призми, що лежать у цих площинах, є паралельними і рівними, а самі грані обмежені паралельними прямими, що відповідає ознаці паралельності площин у просторі.

**Обчислення та аналіз.** Проведений аналітичний розрахунок площі бічної поверхні  $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot H$ ) дав результат **40 м<sup>2</sup>** (при  $a=4$ ,  $b=6$ ,  $H=2$ ). Цей результат **повністю збігається** з контрольною перевіркою, виконаною через покрокове додавання площ окремих бічних граней у GeoGebra.

Таким чином, міні-проєкт забезпечив формування дослідницької компетентності, дозволивши учням не лише застосувати стандартну формулу для обчислення площі, а й візуалізувати, обґрунтувати та експериментально перевірити фундаментальні геометричні властивості прямої призми.

### Реалізація міні-проєкту № 3

#### Загальна інформація про проєкт

Параметр	Опис
Назва проєкту	Аналіз стійкості телевізійної вежі (застосування Теорема про три перпендикуляри)
Клас / Тема	10 клас. Перпендикулярність у просторі (Теорема про три перпендикуляри, кут між прямою і площиною)
Формат	Короткотривалий міні-проєкт (МП)
Тривалість	25–35 хвилин уроку
Інструмент	Середовище динамічної геометрії <b>GeoGebra 3D</b>
Обґрунтування ДК	Учні <b>моделюють</b> просторову ситуацію, <b>обґрунтовують</b> застосування ключової теореми (ТЗП), <b>проводять</b> обчислення кута нахилу та <b>аналізують</b> вплив геометричних параметрів на фізичні властивості (стійкість).

#### Алгоритм дослідницького методу (для учнів)

Етап	Дія учня	Формування ДК
<b>1. Постановка проблеми</b>	Створити модель вежі та розтяжки, визначити кут нахилу розтяжки до площини землі та оцінити його вплив на стійкість.	Визначення зв'язку між геометрією (кут) і фізикою (стійкість).
<b>2. Висування гіпотези</b>	Спрогнозувати, який має бути мінімальний кут нахилу розтяжки до землі для забезпечення належної стійкості (наприклад,	Формулювання обґрунтованого припущення.

Етап	Дія учня	Формування ДК
	$\alpha \geq 45^\circ$ ).	
<b>3. Планування реалізації</b>	Визначення кроків моделювання у GeoGebra для створення прямокутного трикутника, який містить шуканий кут.	Складання покрокового плану дій із застосуванням ІКТ.
<b>4. Реалізація (GeoGebra)</b>	Виконання покрокового алгоритму (див. п. 3).	Отримання динамічної 3D-моделі та числового значення кута.
<b>5. Аналіз та висновки</b>	Обґрунтування застосування ТЗП, порівняння отриманого кута з гіпотетичним значенням, висновок про стійкість.	Обґрунтування висновків щодо впливу параметрів.

Покроковий опис реалізації у GeoGebra 3D (Інструкція для учнів)

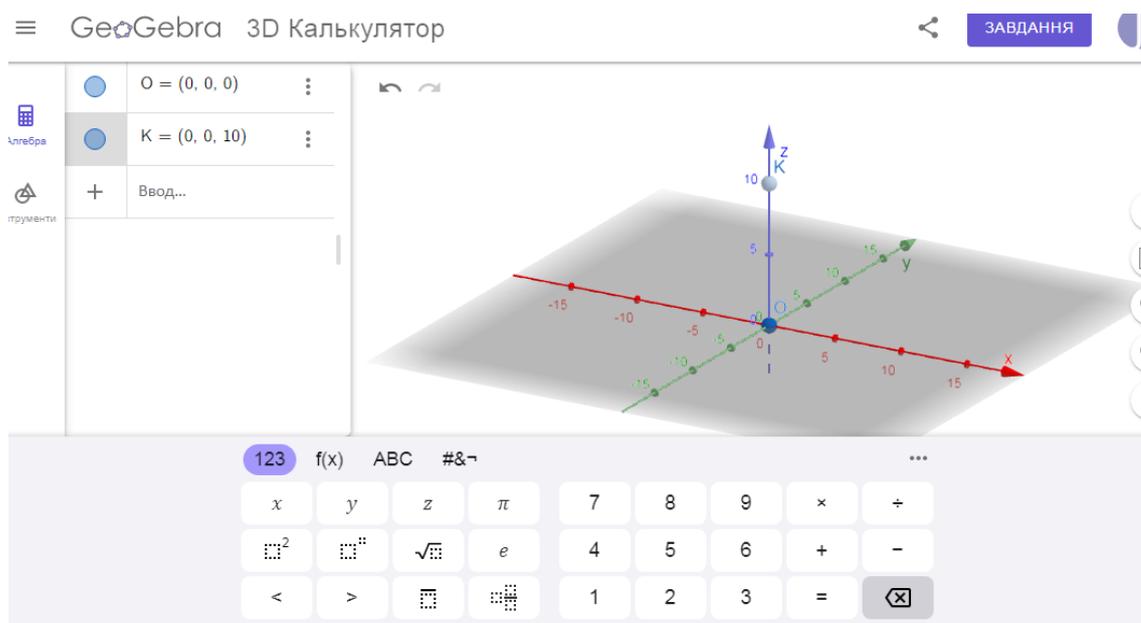
Умова для реалізації. **Моделюємо вежу з точкою кріплення К на висоті  $h=10$  м. Проекція розтяжки на площину землі АО має довжину 6 м.**

*Крок 1. Задання площини та основи вежі*

**Відкрити додаток GeoGebra 3D Калькулятор.**

**Задати точку О** – основа вежі (початок координат):  $O = (0, 0, 0)$ .

**Задати точку К** – кріплення розтяжки на вежі (висота  $h=10$  м, вежа вертикальна):  $K = (0, 0, 10)$ .



*Крок 2. Моделювання розтяжки та її проєкції*

**Задати** точку **A** – точка кріплення розтяжки на землі. Проєкція  $AO = 6$  м.

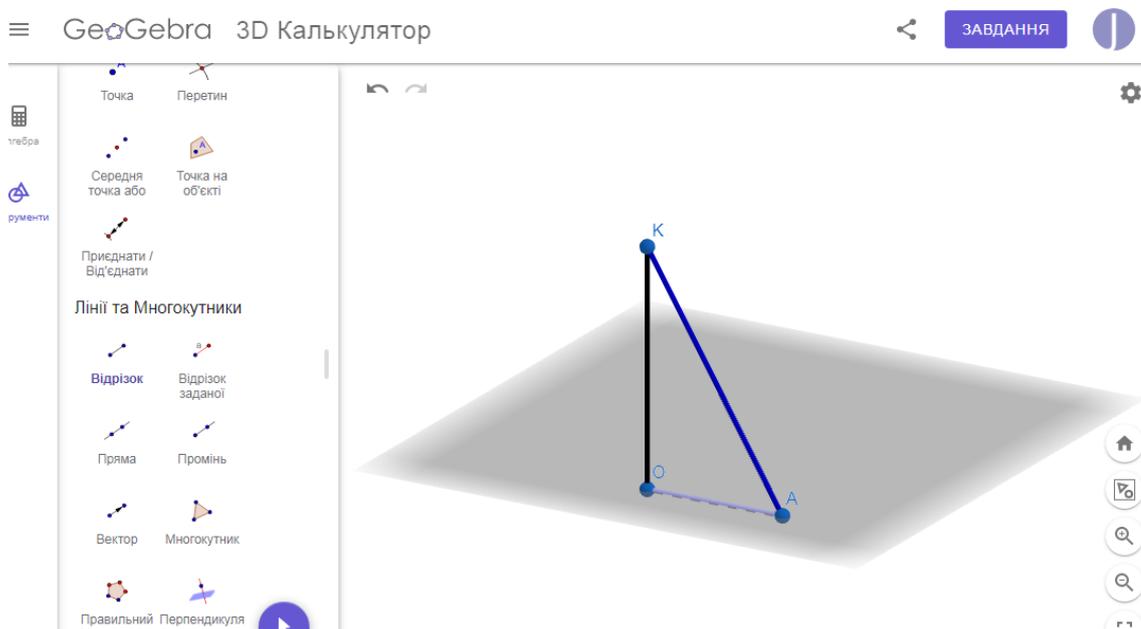
**Команда:**  $A = (6, 0, 0)$ . (Точка A лежить на площині  $xy$ ).

**Побудувати** відрізок **OK** (частина вежі). Вежа = Відрізок(O, K).

**Побудувати** відрізок **AK** (розтяжка). Розтяжка = Відрізок(A, K).

**Побудувати** відрізок **AO** (проєкція розтяжки на землю). Проєкція = Відрізок(A, O).

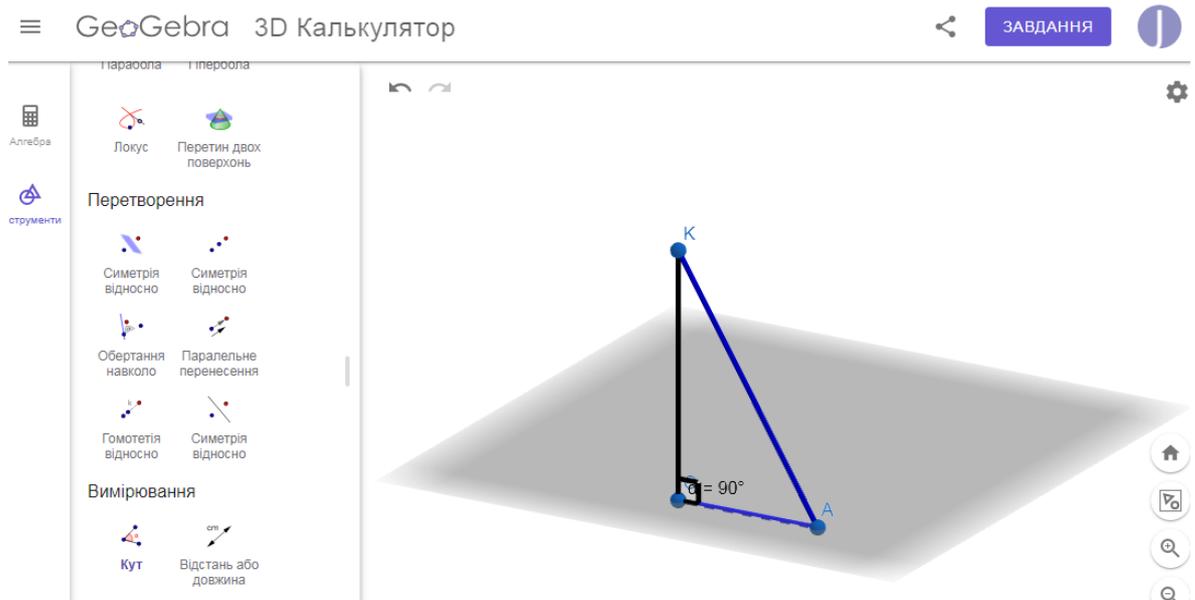
**Побудувати** прямокутний трикутник **АОК**. Трикутник = Многокутник(A, O, K).



### Крок 3. Обґрунтування перпендикулярності (ТЗП)

**Обґрунтувати**, що вежа ОК перпендикулярна до площини землі (площини  $xy$ ), оскільки  $O$  і  $K$  мають нульові координати  $x$  та  $y$ .

**Зробити висновок.** Прямий кут  $\angle AOK = 90^\circ$ . (Це передумова для застосування ТЗП, хоча у цій задачі потрібен лише  $\angle AOK$ ).



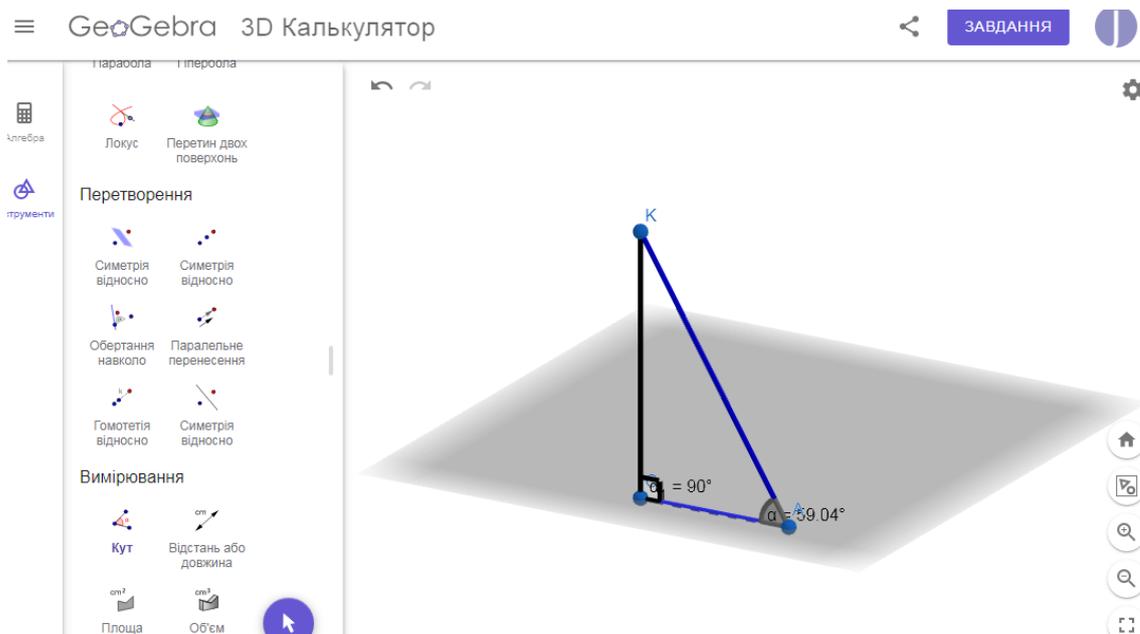
### Крок 4. Знаходження кута нахилу $\alpha$

Кут нахилу розтяжки АК до землі – це кут між АК і його проекцією АО, тобто  $\angle OAK$ .

**Вибрати інструмент «Кут» (Angle).**

**Клацнути** послідовно на точках **К, А, О**. GeoGebra автоматично обчислить внутрішній кут  $\angle KAO$  (або  $\alpha$ ).

**Результат.** GeoGebra покаже значення кута  $\alpha$ .



*Крок 5. Аналіз та висновки (ДК)*

**Аналітична перевірка (використання тригонометрії).** Учні мають перевірити результат  $\alpha$ , використовуючи тангенс у прямокутному трикутнику АОК:

$$\operatorname{tg} \alpha = OK/AO = 10/6 \approx 1.6667.$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(1.6667) \approx 59.04^\circ.$$

**Порівняти** це значення з результатом GeoGebra.

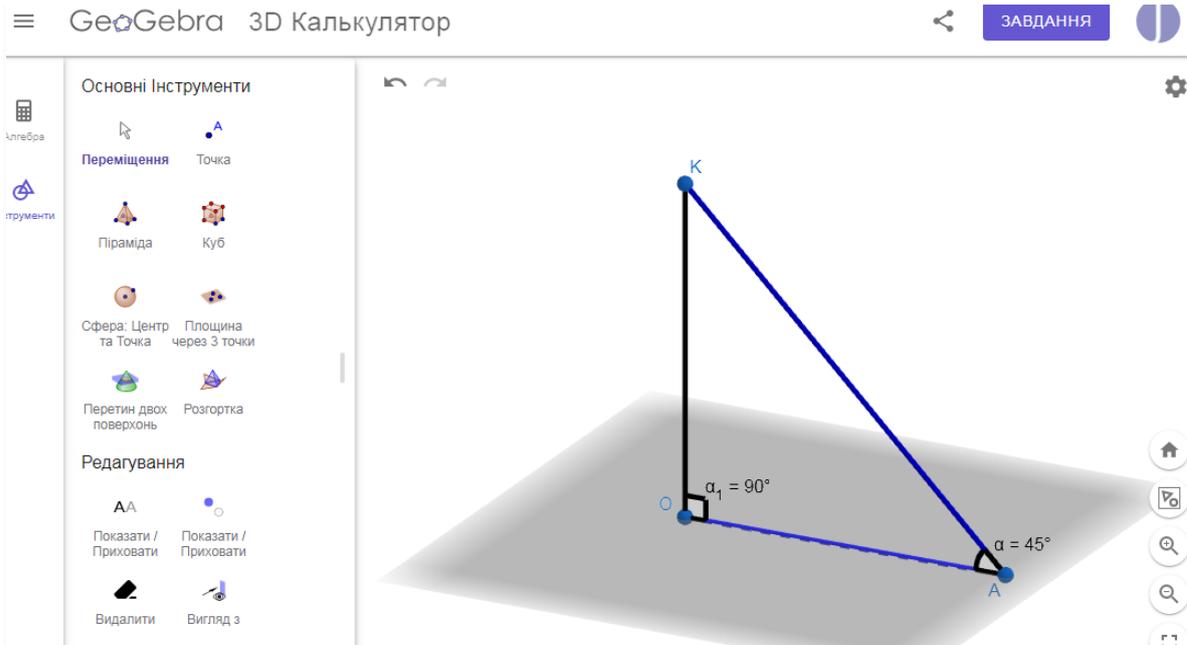
**Дослідницьке завдання (Стійкість).**

**Перемістити** точку А по осі х (змінюючи довжину АО).

**Спостерігати**, як змінюється кут  $\alpha$ .

**Обґрунтувати**, чи може кут бути меншим за  $45^\circ$ ? Якщо АО стане 10 м, то  $\alpha = 45^\circ$  (бо  $\operatorname{tg}(45^\circ) = 1$ ). Якщо  $AO > 10$  м, то  $\alpha < 45^\circ$ .

**Висновок про стійкість.** Обґрунтувати, що менший кут нахилу ( $< 45^\circ$ ) означає більшу горизонтальну складову сили натягу розтяжки, що **зменшує стійкість** вежі до вертикальних навантажень і вимагає більшої довжини розтяжки. У цьому випадку  $59.04^\circ > 45^\circ$ , що свідчить про **належну стійкість** при заданих параметрах.



### Висновок за результатами Міні-проєкту №3

За результатами моделювання просторової ситуації (телевізійна вежа та розтяжка) у GeoGebra 3D було отримано такі висновки:

**Геометричне обґрунтування.** Моделювання підтвердило, що конструкція утворює **прямокутний трикутник АОК**, де ОК – вежа (висота  $h=10$  м), АО – проєкція розтяжки на землю (6 м), а АК – сама розтяжка. Оскільки вежа ОК перпендикулярна до площини землі, це є **наочним застосуванням теореми про три перпендикуляри** для визначення ключових елементів конструкції.

**Обчислення кута нахилу.** Фактичний кут нахилу розтяжки до землі ( $\angle OAK$ ) був визначений аналітично та підтверджений вимірюванням у GeoGebra. При заданих параметрах  $h=10$  м та  $AO=6$  м кут становить  $\alpha \approx 59.04^\circ$ .

**Аналіз стійкості.** Дослідницький експеримент показав, що для забезпечення належної стійкості кут нахилу  $\alpha$  **не повинен бути меншим за  $45^\circ$** . Отримане значення  $\alpha \approx 59.04^\circ$  є значно більшим, ніж критичне значення  $45^\circ$  (яке виникає при  $AO=h$ ), що свідчить про **високий запас стійкості** конструкції. Зменшення кута  $\alpha$  (збільшення АО) знижує вертикальну ефективність розтяжки.

Таким чином, міні-проект забезпечив формування дослідницької компетентності через моделювання просторової ситуації, застосування фундаментальних геометричних теорем (перпендикулярність у просторі) та аналіз впливу геометричних параметрів на інженерну стійкість об'єкта.

### Реалізація міні-проєкту № 4

#### Загальна інформація про проєкт

<b>Параметр</b>	<b>Опис</b>
<b>Назва проєкту</b>	Розрахунок траєкторії дрона (Колізійний аналіз)
<b>Клас / Тема</b>	10 клас. Координати та вектори в просторі (Векторний та координатний методи, скалярний добуток, кут між векторами).
<b>Формат</b>	Короткотривалий міні-проєкт (МП)
<b>Тривалість</b>	25–35 хвилин уроку
<b>Інструмент</b>	Середовище динамічної геометрії <b>GeoGebra 3D</b>
<b>Обґрунтування ДК</b>	Учні застосовують аналітичний апарат (скалярний добуток) для дослідження перпендикулярності траєкторій, обчислюють параметри руху (кут) та візуально моделюють ситуацію колізії.

#### Алгоритм дослідницького методу (для учнів)

Етап	Дія учня	Формування ДК
<b>1. Постановка проблеми</b>	Дано вектори-напрямки руху двох дронів. Необхідно проаналізувати їхнє взаємне розташування та обчислити кут між ними.	Усвідомлення необхідності використання векторів для аналізу руху в 3D.
<b>2. Висування гіпотези</b>	Спрогнозувати, чи є вектори перпендикулярними, на основі їхніх координат.	Гіпотеза: «Траєкторії перпендикулярні, якщо скалярний добуток дорівнює нулю».

Етап	Дія учня	Формування ДК
<b>3. Планування реалізації</b>	Визначення кроків для аналітичного розрахунку та моделювання векторів у GeoGebra.	Складання плану використання формул та ІКТ.
<b>4. Реалізація (GeoGebra)</b>	Виконання покрокового алгоритму (див. п. 3).	Отримання числових значень скалярного добутку та кута; візуалізація векторів.
<b>5. Аналіз та висновки</b>	Порівняння аналітичного результату з візуалізацією та висновок щодо ризику колізії (перпендикулярності).	Обґрунтування висновків щодо взаємного розташування об'єктів у просторі.

Покроковий опис реалізації у GeoGebra 3D (Інструкція для учнів)

Умова для реалізації: **Дано вектори-напрямки руху двох дронів:**

$$\mathbf{v}_1 = (2; -1; 5) \text{ та } \mathbf{v}_2 = (3; 4; -1).$$

*Крок 1: Аналітичний розрахунок (вручну або в GeoGebra)*

*Цей крок необхідний для підтвердження гіпотези.*

**Обчислити** скалярний добуток  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (2) \cdot (3) + (-1) \cdot (4) + (5) \cdot (-1) = 6 - 4 - 5 = -3.$$

**Зробити висновок:** Оскільки скалярний добуток **не дорівнює нулю** (а дорівнює -3), то **вектори не є перпендикулярними**, і траєкторії не перетинаються під прямим кутом (ризик колізії під  $90^\circ$  відсутній).

**Обчислити** довжини векторів:

$$|\mathbf{v}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}.$$

$$|\mathbf{v}_2| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}.$$

**Обчислити** косинус кута  $\varphi$ :

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|} = -\frac{3}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{26}} = -\frac{3}{\sqrt{780}} \approx -0.1074.$$

$$\varphi = \arccos(-0.1074) \approx 96.16^\circ. \text{ (Кут тупий).}$$

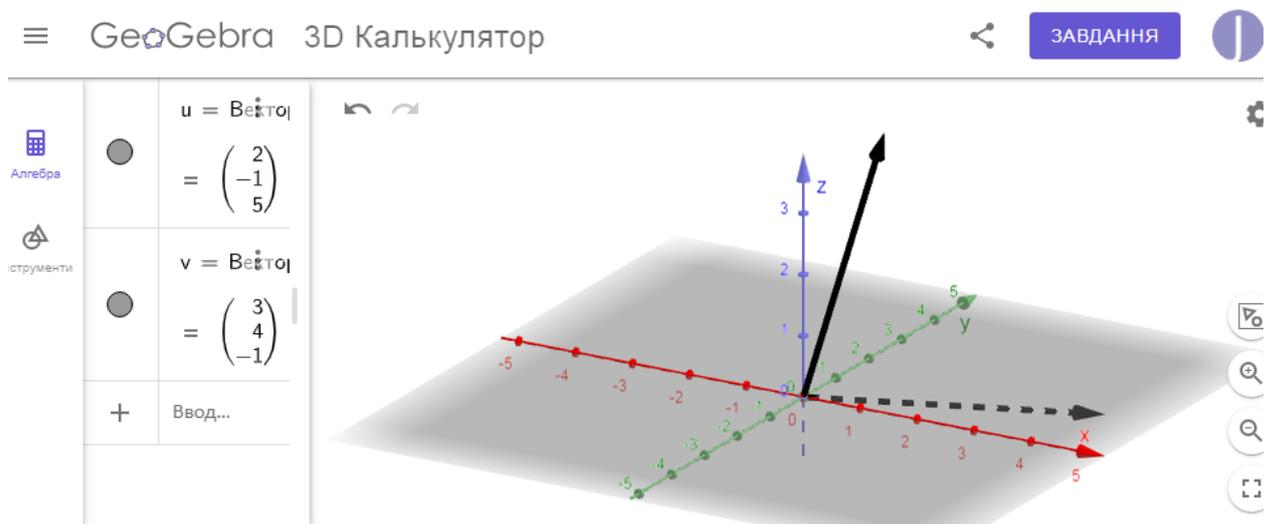
*Крок 2: Моделювання векторів у GeoGebra 3D*

**Відкрити** додаток **GeoGebra 3D Калькулятор**.

**Задати** перший вектор  $\mathbf{v}_1$ :  $\mathbf{v}_1 = \text{Вектор}((2, -1, 5))$ .

**Задати** другий вектор  $\mathbf{v}_2$ :  $\mathbf{v}_2 = \text{Вектор}((3, 4, -1))$ .

*Зауваження: GeoGebra автоматично будує вектори з початком у точці (0, 0, 0).*



*Крок 3: Перевірка скалярного добутку та кута (Комп'ютерний експеримент)*

**Обчислити** скалярний добуток у полі введення GeoGebra:

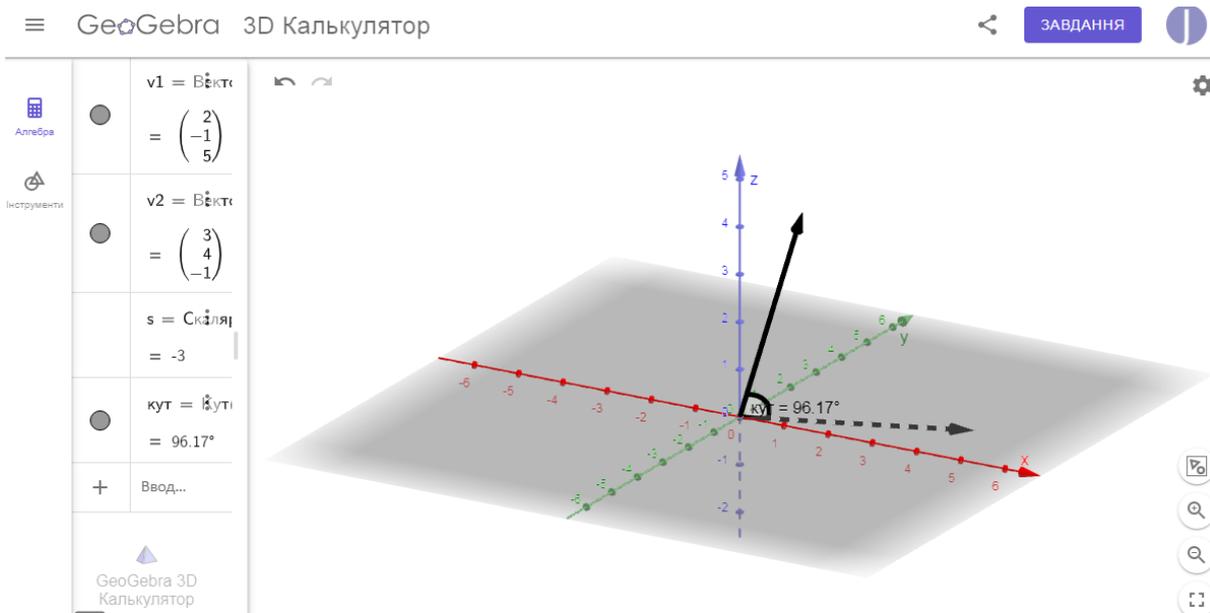
**Команда:**  $s = \text{СкалярнийДобуток}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$

**Результат:**  $s = -3$ . (Підтвердження аналітичного розрахунку).

**Обчислити** кут між векторами:

**Команда:**  $\text{кут} = \text{Кут}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$

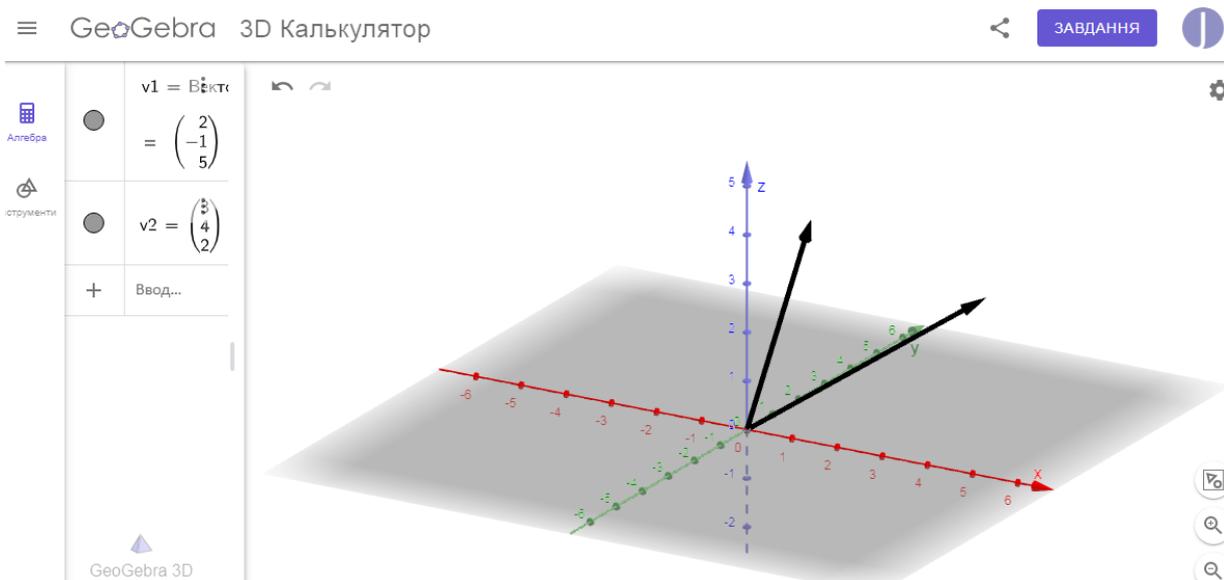
**Результат:**  $\text{кут} \approx 96.16^\circ$ . (GeoGebra автоматично обчислює кут у градусах).

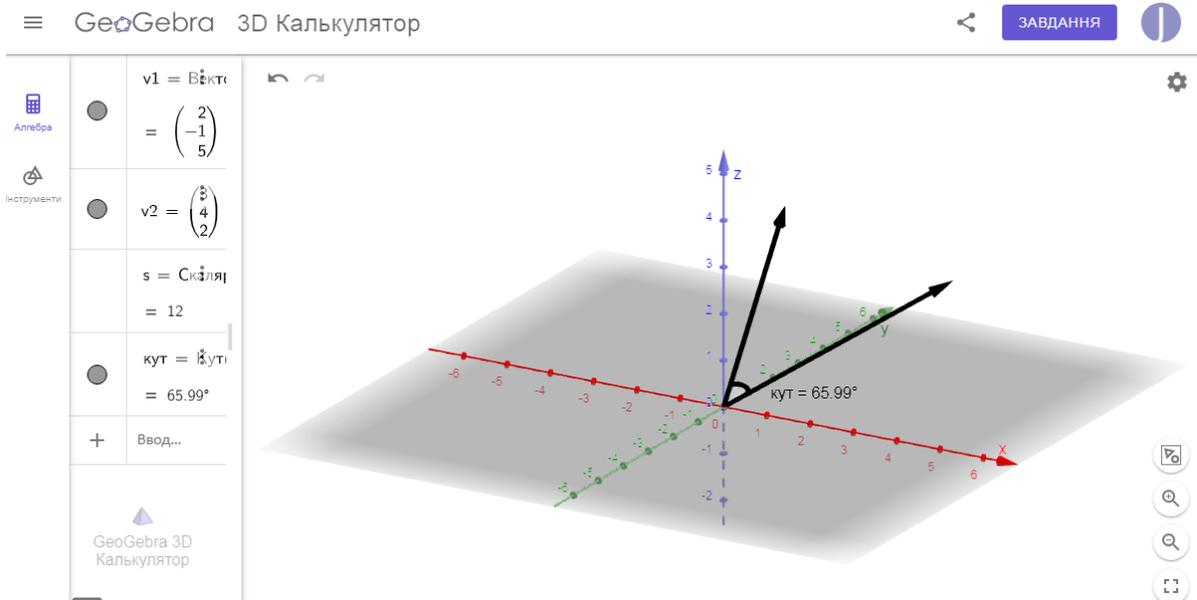


**Дослідницьке завдання (Динамічний аналіз):**

**Змінити** координати вектора  $v_2$  на  $(3; 4; 2)$  ( $v_2 = (3, 4, 2)$ ). **Обчислити** новий скалярний добуток:  $2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 6 - 4 + 10 = 12$ .

**Спостерігати**, як змінюється кут між векторами в 3D просторі.





### Висновок за результатами Міні-проєкту №4

За результатами аналізу траєкторій двох дронів із застосуванням векторного та координатного методів у GeoGebra 3D було отримано такі висновки:

**Аналіз перпендикулярності:** Шляхом обчислення **скалярного добутку** векторів-напрямків  $\mathbf{v}_1 = (2; -1; 5)$  та  $\mathbf{v}_2 = (3; 4; -1)$  було встановлено, що  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -3$ . Оскільки скалярний добуток не дорівнює нулю, **траєкторії дронів не є перпендикулярними**.

**Визначення кута:** Аналітичний розрахунок і вимірювання в GeoGebra підтвердили, що кут між векторами становить  $\varphi \approx 96.16^\circ$ . Це значення дозволяє **точно прогнозувати** взаємне розташування траєкторій у просторі.

**Ефективність моделювання:** Моделювання у GeoGebra дозволило **візуалізувати** просторове розташування векторів, а використання вбудованих функцій для обчислення скалярного добутку та кута **підтвердило** аналітичні розрахунки, мінімізуючи ризик рутинних помилок.

Таким чином, міні-проєкт забезпечив формування дослідницької компетентності, продемонструвавши, що векторний метод є потужним аналітичним інструментом для розв'язання прикладних задач (наприклад, колізійний аналіз у навігації), дозволяючи точно визначати геометричні параметри об'єктів у тривимірному просторі.

## Реалізація міні-проєкту № 5

### Загальна інформація про проєкт

Параметр	Опис
Назва проєкту	Оптимізація форми купола (Мінімізація витрати матеріалу)
Клас / Тема	11 клас. Площі поверхонь многогранників (Піраміда, площа бічної та повної поверхні).
Формат	Міні-проєкт (МП) із порівняльним розрахунком
Тривалість	30–40 хвилин уроку
Інструмент	Середовище динамічної геометрії <b>GeoGebra 3D</b> (для візуалізації) та <b>GeoGebra CAS</b> (для точних розрахунків).
Обґрунтування ДК	Учні <b>обґрунтовують</b> вибір формул, <b>проводять</b> числовий порівняльний <b>аналіз</b> двох моделей та <b>формулюють</b> висновок щодо економічності конструкції.

### Алгоритм дослідницького методу (для учнів)

Етап	Дія учня	Формування ДК
<b>1. Постановка проблеми</b>	Визначити, яка з двох пірамід (квадратна чи трикутна основа) вимагає меншої площі бічної поверхні при фіксованому периметрі основи та висоті.	Визначення критерію оптимізації (мінімум площі).
<b>2. Висування гіпотези</b>	Спрогнозувати, яка піраміда буде ефективнішою (зазвичай, ближча до кола форма).	Гіпотеза: «Трикутна піраміда буде ефективнішою, оскільки її основа ближча до

Етап	Дія учня	Формування ДК
		кола».
<b>3. Планування реалізації</b>	Визначення кроків для обчислення апофеми, бічної площі для кожної піраміди та їхнє порівняння.	Складання плану використання формул та ІКТ.
<b>4. Реалізація (GeoGebra)</b>	Виконання покрокового алгоритму (див. п. 3).	Отримання точних значень бічних площ для обох моделей.
<b>5. Аналіз та висновки</b>	Порівняння результатів та обґрунтування висновку щодо мінімізації витрати матеріалу.	Обґрунтування висновків на основі числових даних.

Покроковий опис реалізації та розрахунків

**Дано:**

**Піраміда 1 (Квадратна):** Сторона основи  $a_1=10$  м. Периметр  $P_1=40$  м.

**Піраміда 2 (Трикутна):** Периметр основи  $P_2=40$  м. Сторона основи  $a_2=\frac{1}{3}40\approx 13.33$  м.

**Висота:**  $H$  – однакова для обох. Прийmemo  $H=10$  м для зручності розрахунків.

*Крок 1: Розрахунок Піраміди 1 (Квадратна основа)*

**Обчислити** радіус вписаного кола основи ( $r_1$ ):

$$r_1 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}10 = 5 \text{ м.}$$

**Обчислити** апофему ( $l_1$ ) за теоремою Піфагора ( $l_1 = \sqrt{H^2 + r_1^2}$ ):

$$l_1 = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11.18 \text{ м.}$$

**Обчислити** площу бічної поверхні ( $S_{\text{бічн1}} = \frac{1}{2}P_1 \cdot l_1$ ):

$$S_{\text{бічн1}} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot \sqrt{125} = 20 \cdot \sqrt{125} \approx 223.61 \text{ м}^2.$$

*Крок 2: Розрахунок Піраміди 2 (Правильна трикутна основа)*

**Обчислити** радіус вписаного кола основи ( $r_2$ ).

$$a_2 = \frac{1}{3} \cdot 40.$$

$$r_2 = a_2 \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{40}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{40\sqrt{3}}{18} \approx 3.85 \text{ м.}$$

**Обчислити** апофему ( $l_2$ ) ( $l_2 = \sqrt{H^2 + r_2^2}$ ):

$$l_2 = \sqrt{10^2 + \left(\frac{40\sqrt{3}}{18}\right)^2} \approx \sqrt{100 + 14.81} \approx \sqrt{114.81} \approx 10.71 \text{ м.}$$

**Обчислити** площу бічної поверхні ( $S_{\text{бічн2}} = \frac{1}{2} P_2 \cdot l_2$ ):

$$S_{\text{бічн2}} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 10.71 \approx 20 \cdot 10.71 \approx 214.2 \text{ м}^2.$$

*Крок 3: Порівняльний аналіз (GeoGebra CAS)*

Учні можуть використати вікно **GeoGebra CAS** для виконання точних обчислень і порівняння.

Опис	Команда GeoGebra CAS	Результат
Квадратна $S_{\text{бічн1}}$	<code>20 * sqrt(125)</code>	$\approx 223.61$
Трикутна $S_{\text{бічн2}}$	<code>20 * sqrt(100 + (40 * sqrt(3) / 18)^2)</code>	$\approx 214.20$

*Крок 4: Візуалізація у GeoGebra 3D*

**Побудувати** обидві піраміди у GeoGebra 3D для візуального порівняння їхньої форми.

**Використовувати** інструмент «Об'єм» (Volume) або «Площа» (Area) для перевірки розрахунків.

**Побудова Піраміди 1 (Квадратна)**

**Відкрити** вікно **GeoGebra 3D Калькулятор**.

**Задати** основу (квадрат  $10 \times 10$ ):

$$A1 = (5, -5, 0)$$

$$B1 = (5, 5, 0)$$

$$C1 = (-5, 5, 0)$$

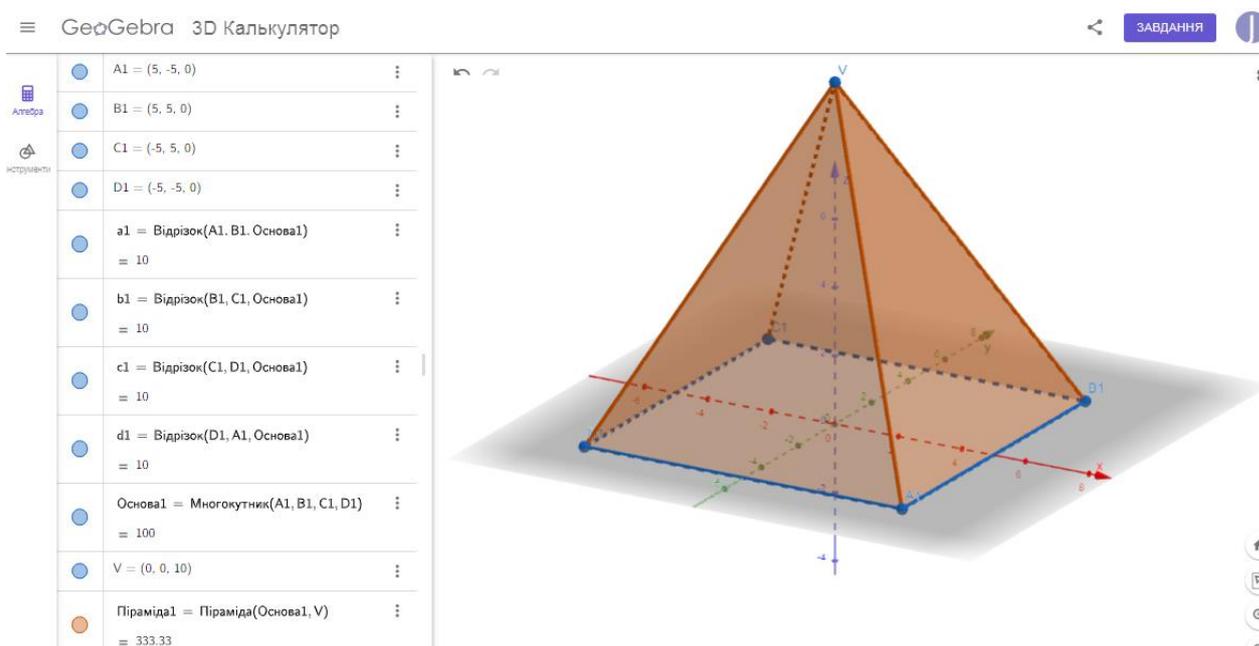
$$D1 = (-5, -5, 0)$$

$$\text{Основа1} = \text{Многокутник}(A1, B1, C1, D1)$$

**Задати** вершину  $V$  на висоті  $H=10$  (над центром  $(0, 0)$ ):

$$V = (0, 0, 10)$$

**Побудувати** піраміду: Піраміда1 = Піраміда(Основа1,  $V$ )



## Побудова Піраміди 2 (Трикутна)

**Задати** основу (правильний трикутник зі стороною  $a_2 \approx 13.33$  і центром  $(0, 0)$ ).

*Спрощення для GeoGebra:* Використовувати команду «**Правильний многокутник**» (Regular Polygon):

**Вибрати** інструмент **Точка** та **задати** дві вершини  $A_2$  і  $B_2$  на площині  $xy$ .

**Вибрати** інструмент «**Правильний многокутник**» та **задати** 3 вершини (з обчисленням координат, щоб периметр був 40).

*Альтернативний метод (через координати)*

Визначення точних параметрів основи

Введіть у полі введення GeoGebra наступні команди, які визначають радіус описаного кола  $R$  та використовують його для обчислення координат вершин  $E, F, G$ .

Задання спільної вершини:

$$V = (0, 0, 10)$$

Обчислення радіуса описаного кола  $R$  (для правильного трикутника):

$$\text{Команда } R = 40 / (3 * \text{sqrt}(3))$$

**Задання вершин основи  $E, F, G$ :**

Вершина на осі  $X$ :

$$E = (R, 0, 0)$$

Дві інші вершини, симетричні відносно осі  $Y$ :

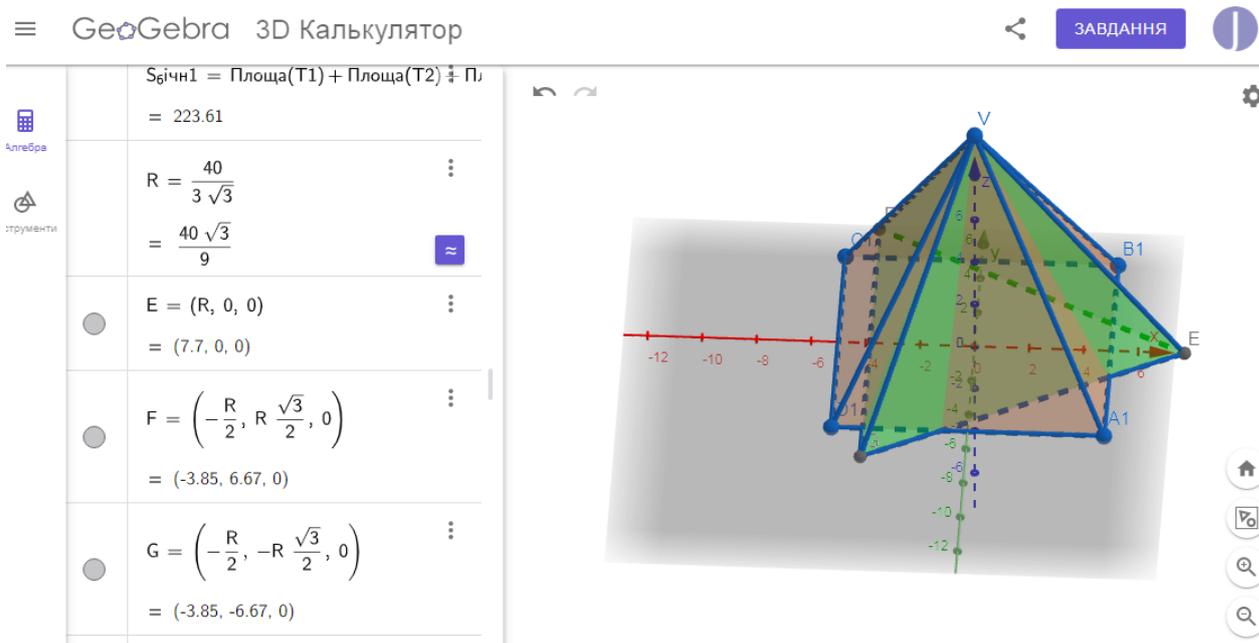
$$F = (-R/2, R*\text{sqrt}(3)/2, 0)$$

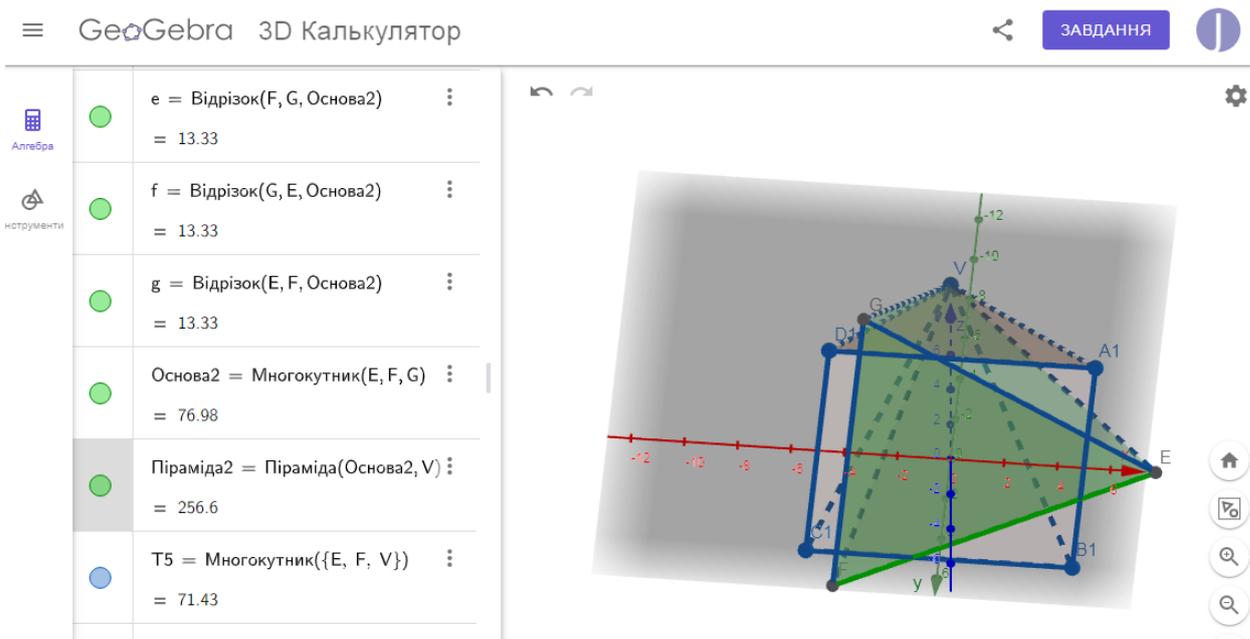
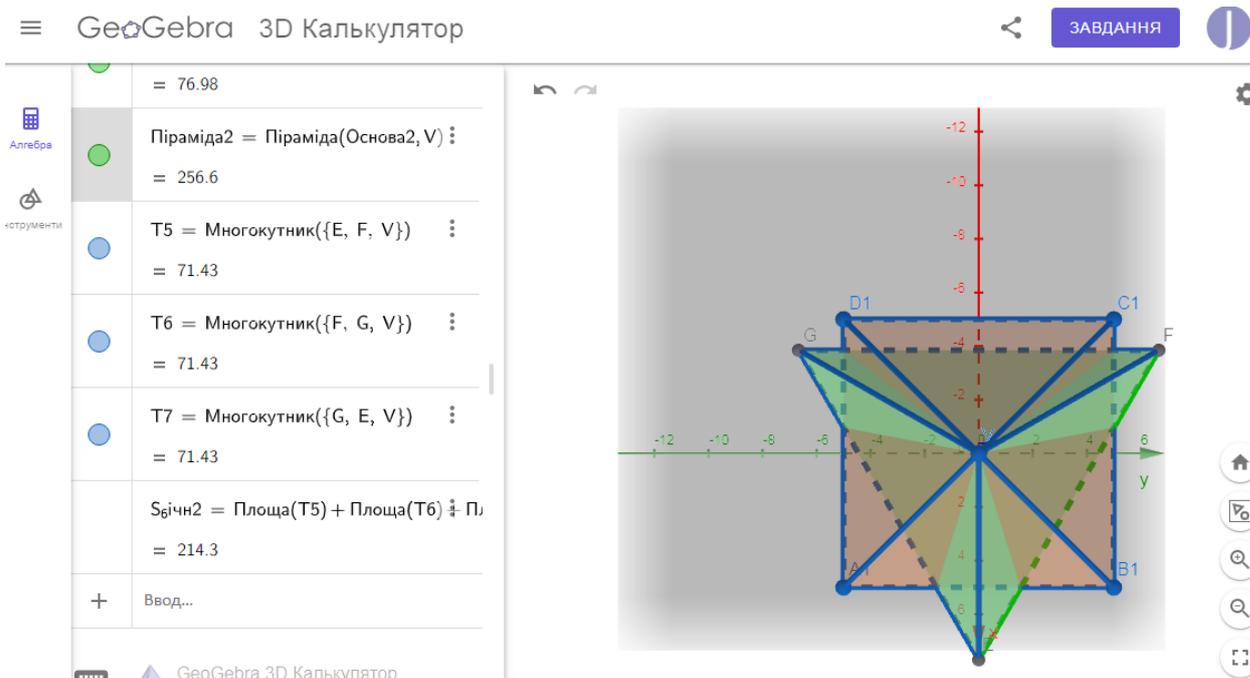
$$G = (-R/2, -R*\text{sqrt}(3)/2, 0)$$

$$\text{Основа2} = \text{Многокутник}(E, F, G)$$

**Використати ту ж саму вершину  $V = (0, 0, 10)$ .**

**Побудувати піраміду:** Піраміда2 = Піраміда(Основа2,  $V$ )

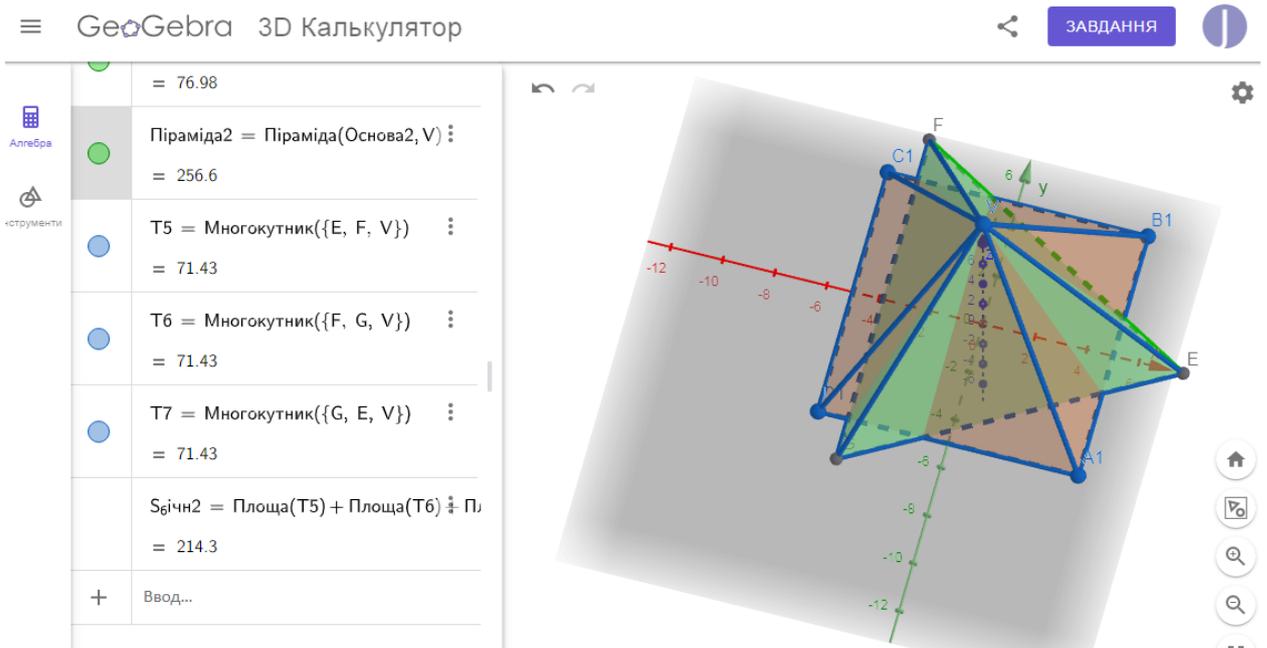
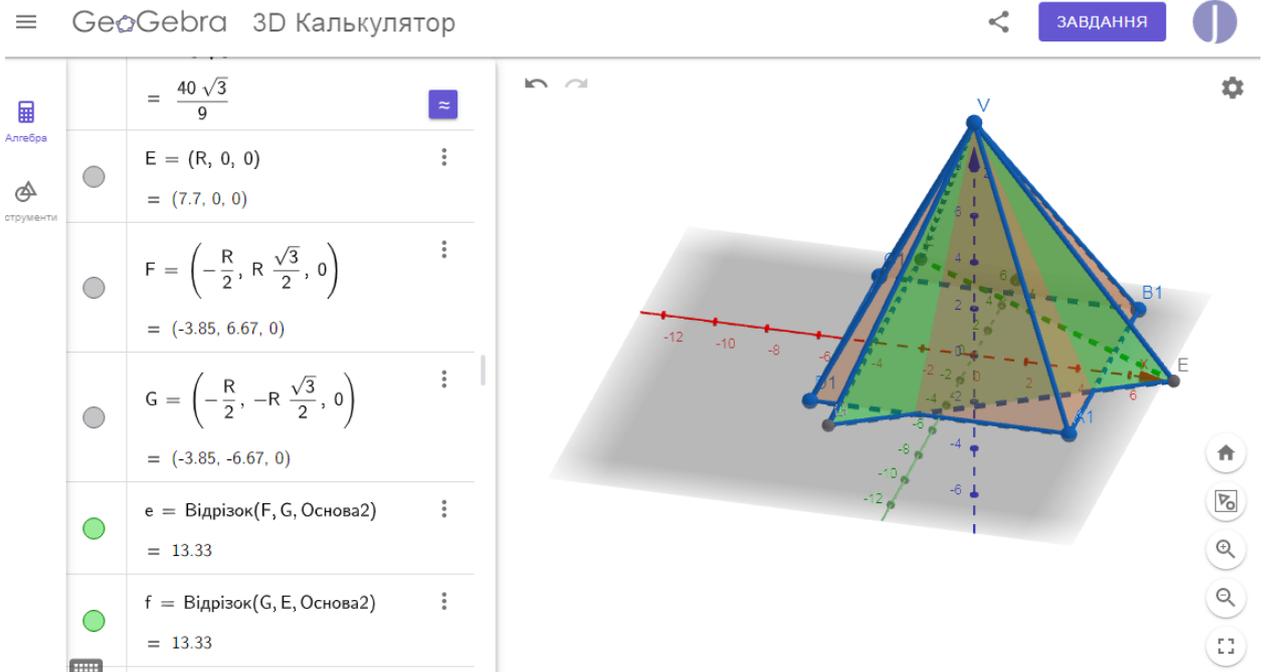




## Порівняння та Висновок

**Перевірити** площі у вікні Алгебра: GeoGebra автоматично обчислить площу бічної поверхні для Піраміда1 та Піраміда2 (порівняти з результатами з CAS).

**Зробити висновок:** На основі числових даних  $S_{\text{бічн2}} < S_{\text{бічн1}}$  та візуалізації **обґрунтувати**, що трикутна форма купола при фіксованому периметрі потребує меншої витрати матеріалу.



### Висновок за результатами Міні-проєкту №5

За результатами порівняльного аналізу площ бічних поверхонь двох пірамід при однаковому периметрі основи  $P=40$  м та однаковій висоті  $H=10$  м було отримано такі висновки:

#### Порівняння бічних поверхонь:

Площа бічної поверхні квадратної піраміди  $S_{\text{бічн1}}$  становить  $\approx 223.61$  м<sup>2</sup>.

Площа бічної поверхні трикутної піраміди  $S_{\text{бічн2}}$  становить  $\approx 214.20$  м<sup>2</sup>.

**Оптимізаційний результат:** Витрата матеріалу на трикутну піраміду ( $214.20 \text{ м}^2$ ) є меншою, ніж на квадратну піраміду ( $223.61 \text{ м}^2$ ). Це підтверджує загальне геометричне правило: при фіксованому периметрі найменша площа бічної поверхні (при однаковій висоті) досягається тоді, коли основа многокутника має більшу кількість сторін (наближається до кола).

**Формування ДК:** Проєкт продемонстрував, як математичне моделювання та аналітичний розрахунок можуть бути використані для розв'язання прикладних економічних завдань (мінімізація витрат). GeoGebra виступила як інструмент для перевірки та візуалізації складних розрахунків. Таким чином, міні-проєкт забезпечив формування дослідницької компетентності через проведення порівняльного аналізу, що дозволило обґрунтувати, що серед правильних пірамід із фіксованим периметром основи та висотою, форма з меншою кількістю сторін (наприклад, трикутна) є більш економічно вигідною з точки зору мінімізації площі бічної поверхні (купола).