

**Національний університет «Чернігівський
колегіум» імені Т. Г. Шевченка**

Природничо-математичний факультет
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітнього ступеня «магістр»

на тему:

**«Формування критичного мислення учнів під час навчання
змістової лінії «Рівняння і нерівності» в старшій школі»**

Виконала:

студентка 2 курсу, групи 61 ФМТ,
спеціальності

014 Середня освіта (Математика)

Рибка Ольга Миколаївна

Науковий керівник:

к.п.н., доцент Соколенко Л.О.

Роботу подано до розгляду «_____» _____ 20__ року.

Студент (ка)

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Науковий керівник

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Рецензент

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики.

Протокол № _____ від «__» _____ 20__ року.

Студент(ка) допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри _____

(підпис)

(прізвище та ініціали)

АНОТАЦІЯ

Рибка, О. М. Формування критичного мислення учнів під час навчання змістової лінії «Рівняння і нерівності» в старшій школі. Кваліфікаційна робота освітнього ступеня «магістр». На правах рукопису. Спеціальність – 014 Середня освіта (Математика). Чернігів, 2025.

Кваліфікаційна робота складається з двох розділів, які охоплюють теоретичні та практичні аспекти дослідження. В першому розділі розглядаються теоретичні основи формування критичного мислення: аналізуються філософські та педагогічні витоки, етапи становлення концепції критичного мислення у світовій та українській освітній практиці, визначаються цілі, завдання та очікувані результати використання технології. Окремо досліджується сутність критичного мислення як когнітивного процесу та його основні характеристики, а також умови, які сприяють його розвитку під час вивчення рівнянь і нерівностей.

Другий розділ присвячений практичному застосуванню технології критичного мислення. В ньому описується методична модель пізнавального процесу, аналізуються математичні прийоми, які сприяють розвитку критичного мислення, та пропонуються приклади їх реалізації. Також в розділі наведено конспекти уроків на теми «Показникові рівняння» та «Логарифмічні нерівності», розроблені з урахуванням технології критичного мислення, та результати експериментальної перевірки ефективності запропонованих методичних підходів.

У висновках узагальнено результати дослідження, а список використаної літератури містить джерела, які стали основою для теоретичного та практичного аналізу.

Ключові слова: критичне мислення, математичні прийоми, методика розв'язання рівнянь і нерівностей.

SUMMARY

Rybka, O. M. Formation of critical thinking of students during the study of the content line ‘Equations and Inequalities’ in high school. Qualification work of the educational degree ‘master’. In the form of a manuscript. Speciality - 014 Secondary education (Mathematics). Chernihiv, 2025.

The qualification work consists of two sections covering theoretical and practical aspects of the study. The first section deals with the theoretical foundations of critical thinking: the philosophical and pedagogical origins, stages of formation of the concept of critical thinking in the world and Ukrainian educational practice, goals, objectives and expected results of the use of technology are analyzed. The essence of critical thinking as a cognitive process and its main characteristics, as well as the conditions that contribute to its development in the study of equations and inequalities, are separately investigated.

The second section is devoted to the practical application of critical thinking technology. It describes the methodological model of the cognitive process, analyses mathematical techniques that contribute to the development of critical thinking, and offers examples of their implementation. The section also contains lesson notes on the topics of ‘Indicator equations’ and ‘Logarithmic inequalities’, developed with the technology of critical thinking in mind, and the results of experimental testing of the effectiveness of the proposed methodological approaches. The conclusions summarise the results of the study, and the list of references contains sources that formed the basis for theoretical and practical analysis.

Keywords: critical thinking, mathematical techniques, methodology for solving equations and inequalities.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	10
1.1 Історія виникнення і впровадження в навчальний процес технології розвитку критичного мислення.....	10
1.1.1 Філософські та педагогічні витoki критичного мислення.....	10
1.1.2 Формування концепції критичного мислення у світовій освітній практиці.....	14
1.1.3 Впровадження технології критичного мислення в освітній процес України.....	16
1.2 Цілі та завдання технології розвитку критичного мислення.....	18
1.2.1 Освітня мета впровадження критичного мислення в навчальний процес.....	18
1.2.2 Завдання щодо формування ключових компетентностей учнів.....	19
1.2.3 Очікувані результати використання технології критичного мислення.....	21
1.3 Суть критичного мислення та його основні характеристики.....	23
1.3.1 Сутність критичного мислення як когнітивного процесу.....	23
1.3.2 Основні риси критичного мислення в навчальному процесі.....	27
1.4 Умови, створення яких під час навчання змістової лінії «Рівняння і нерівності» на уроках алгебри і початків аналізу старшої школи спонукає та стимулює учнів до критичного мислення.....	29
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНА МОДЕЛЬ ПІЗНАВАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ В ТЕХНОЛОГІЇ РОЗВИТКУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ ЗМІСОВОЇ ЛІНІЇ «РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ» НА УРОКАХ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ СТАРШОЇ ШКОЛИ.....	34
2.1 Стадії пізнавального процесу та відповідні їм дії учнів.....	34

2.2	Методичні прийоми та їх суть	37
2.3	Приклади реалізації методичних прийомів критичного мислення під час навчання змістової лінії «Рівняння і нерівності» курсу алгебри і початків аналізу	41
2.4	Конспект уроку на тему «Показникові рівняння» у технології критичного мислення	48
2.5.	Конспект уроку на тему «Логарифмічні нерівності» у технології критичного мислення	55
2.6	Експериментальна перевірка окремих результатів дослідження	62
	ВИСНОВКИ	67
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	69
	ДОДАТКИ	73

ВСТУП

В сучасному світі, де інформація стає все більш доступною, а потоки знань стрімко зростають, освіта покликана не лише забезпечувати засвоєння фактів, а й формувати в учнів здатність критично осмислювати отриману інформацію, аналізувати її та приймати обґрунтовані рішення. Формування критичного мислення є однією з ключових компетентностей, визначених сучасними освітніми стандартами, зокрема в Україні, де Нова українська школа акцентує увагу на розвитку особистості, здатної до самостійного мислення та ефективного вирішення проблем. В контексті вивчення математики, зокрема змістової лінії «Рівняння і нерівності» в старшій школі, критичне мислення відіграє особливу роль, оскільки математична освіта сприяє розвитку логічного аналізу, аргументації та здатності до абстрактного мислення. Саме тому дослідження, присвячене формуванню критичного мислення учнів під час навчання алгебри та початків аналізу, є актуальним і має як теоретичне, так і практичне значення.

Актуальність теми дослідження зумовлена кількома чинниками. Сучасні освітні стандарти, до яких входить Концепція Нової української школи представляють критичне мислення однією з фундаментальних компетентностей, які лежать в основі соціалізації та професійної реалізації учнів в майбутньому. Змістова лінія «Рівняння та нерівності», яка проходить через весь шкільний курс математики розвиває аналітичні здібності, логіку та вміння розв'язувати складні задачі. Використання методів навчання, притаманних класичній класно-урочній системі навчання не дає можливості в повній мірі розвивати критичне мислення учнів.

Інтеграція технологій розвитку критичного мислення в навчальний процес дозволяє кардинально по-новому переглянути підходи до викладання математики.

Об'єкт дослідження – процес навчання змістової лінії «Рівняння і нерівності» на уроках алгебри та початків аналізу в старшій школі.

Предмет дослідження – методичні умови та прийоми, що сприяють формуванню критичного мислення учнів під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» в старшій школі.

Мета дослідження – обґрунтувати теоретико-методичні засади формування критичного мислення учнів старшої школи під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» на уроках алгебри та початків аналізу та розробити методичну модель для реалізації технології критичного мислення в освітньому процесі.

Для досягнення поставленої мети потрібно виконати наступні **завдання:**

- розглянути теоретичні основи формування критичного мислення;
- окреслити цілі, завдання та очікувані результати впровадження технології критичного мислення в навчальний процес;
- охарактеризувати сутність критичного мислення як когнітивного процесу та його основні риси в контексті навчання математики;
- виявити умови, які сприяють формуванню критичного мислення учнів під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності»;
- розробити методичну модель пізнавального процесу в технології розвитку критичного мислення та методику її використання на уроках алгебри і початків аналізу;
- запропонувати приклади реалізації методичних прийомів для формування критичного мислення під час вивчення рівнянь та нерівностей.
- розробити конспекти уроків на теми «Показникові рівняння» та «Логарифмічні нерівності» з використанням технології критичного мислення.
- провести експериментальну перевірку ефективності запропонованої методичної моделі.

Робота складається з двох взаємопов'язаних розділів, які охоплюють теоретичні засади розвитку критичного мислення та методичні підходи до

його формування під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» в старшій школі.

В першому розділі подано узагальнення основних наукових підходів до тлумачення критичного мислення, простежено його філософські, психологічні та педагогічні витoki, а також, етапи становлення цієї концепції в світовій та українській освіті. Розкрито цілі та завдання технології розвитку критичного мислення, охарактеризовано його сутність як когнітивного процесу, визначено ключові риси та умови, що сприяють активізації критичного мислення учнів під час опрацювання теми «Рівняння і нерівності». Теоретичний матеріал обґрунтовує необхідність формування цієї компетентності в старшокласників та визначає методологічні засади подальшого дослідження.

Другий розділ присвячено розробці та обґрунтуванню методичної моделі пізнавального процесу в технології розвитку критичного мислення та особливостям її використання на уроках алгебри та початків аналізу. Подано систему математичних прийомів, що сприяють розвитку в учнів умінь аналізувати, порівнювати, робити висновки та аргументувати власні судження. Наведено приклади реалізації даних прийомів в процесі навчання рівнянь і нерівностей, розроблено конспекти уроків на теми «Показникові рівняння» та «Логарифмічні нерівності». В завершальній частині розділу подано результати експериментальної перевірки ефективності запропонованої методичної моделі.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Історія виникнення і впровадження в навчальний процес технології розвитку критичного мислення

1.1.1 Філософські та педагогічні витоки критичного мислення

Поняття «мислення» є фундаментальним в філософських і психологічних концептуальних системах минулого й сучасності. Вперше термін «мислення» було введено філософами Парменідом, Сократом, Гераклітом, Демокритом, Платоном, Аристотелем, Кантом Гегелем. Парменід розглядав мислення як спосіб пізнання, що веде до істини. Сократ надавав великого значення шляху пізнання, що веде до істини, тобто методу пізнання. Сократ став основоположником евристичного методу навчання, суть якого полягає в тому, що учень повинен «пізнати самого себе», а вчитель має лише підводити до пошуку, а саме, не давати готових відповідей, спонукати до пізнавальної активності, самопізнання шляхом постановки запитань, які вимагали б творчої, розумової дії. Головне в розвитку людини – її пізнавальні зусилля, здатність ставити все нові й нові запитання. Варто зазначити, що ще давньогрецькі мислителі виділяли мислення як вищу сходинку пізнання людиною навколишнього світу.

Педагогічний аспект формування мислення полягає у виявленні умов, конструюванні шляхів та засобів розвитку мислення учнів у навчально-виховному процесі.

Питанням розвитку критичного мислення займалися психологи С. Рубінштейн, О. Тихомиров, Я. Чаплак [9] та інші. В своїх працях вони часто опиралися на вітчизняні теорії П. Гальперіна, Д. Ельконіна, Г. Костюка. Кожен з них запропонував власну дефініцію критичного мислення. Так, Я. Чаплак [9] трактував поняття «критичне мислення» як «мислення, що передбачає сформовані вміння оцінювати події (твердження, вчинки, факти тощо); робити свідомий вибір; аргументувати; формулювати доречні запитання; розрізняти факти і думки; шукати нові рішення питань; визначати

критерії для аналізу; знаходити докази на підтримку припущень; будувати логічні зв'язки».

С. Рубінштейн вважав, що люди, які мислять критично, піддають ретельній перевірці власні гіпотези [29]. П. Гальперін вважав, що «критично мислити – це оцінювати результат своїх розумових процесів, визначати хід міркувань, який привів до саме таких висновків або ті важливі чинники, які були враховані при прийнятті рішень (аргументи та доведення)» [2].

С. Максименко, В. Соловієнко доводять, що «критичність мислення виявляється у здатності суб'єкта пізнавальної діяльності не потрапляти під вплив чужих думок, об'єктивно оцінювати позитивні та негативні аспекти явища чи факту, виявляти цінне та помилкове в них. Людина з критичним розумом вимогливо оцінює власні думки, ретельно перевіряє рішення, зважує всі «за» і «проти», виявляючи тим самим самокритичне ставлення до власних дій» [2].

Еволюцію розвитку поняття «критичне мислення» можна представити наступним чином (табл. 1.1):

Таблиця 1.1 – Дефініції науковців з проводу тлумачення поняття «Критичне мислення»

Дослідник	Тлумачення
Річард Пауль	Критичне мислення – це мислення про мислення, коли людина мислить задля вдосконалення свого мислення.
Метью Ліпман	Критичне мислення – процес, коли учні переходять від простих оціночних суджень та елементарної аргументації до опанування відповідного способу мислення – уміння здійснювати багатофактовий аналіз; це мислення, що характеризується постійним самовдосконаленням особистості.
Джон Льюї	Критичне мислення – це той вид мислення, в якому, як у фокусі, концентруються знання, інтелектуальні здібності, внутрішня

	мотивація, цінності, наполегливість та самоконтроль
Девід Клустер	Критичне мислення – це мислення інформативне. Воно розпочинається з постановки запитання, прагне до переконливої аргументації та має соціальний характер.
Дайана Халпери	Критичне мислення – це використання когнітивних технік або стратегій, які збільшують імовірність отримання бажаного кінцевого результату.
Олександр Тягло	Критичне мислення – це активність розуму, спрямованого на виявлення й виправлення своїх помилок, точність тверджень і обґрунтованість міркувань.

Українські педагоги Т. Воропай, К. Костюченко, О.Тягло, Л. Терлецька та ін. розвивають ідеї щодо формування критичного мислення в студентів. Українські науковці Л. Велитченко, Г. Липкіна, С. Максименко, Л. Рибак, Н. Чернега та ін. вивчають шляхи формування в учнів критичності мислення й ознаки такого мислення як психологічного утворення. В працях О. Пометун та Л. Пироженко подано характеристику технології розвитку критичного мислення як однієї з сучасних технологій навчання, що тісно пов'язана з інтерактивним навчанням. Дослідник С. Терно [6], визначаючи критичне мислення як різновид наукового мислення, пропонує шляхи його формування у старшокласників на уроках історії. Деякі елементи теорії та практики розвитку критичного мислення в учнів основної школи знаходимо в працях фахівців з методики навчання, вчителів-практиків.

Слід зазначити, що аналіз науково-методичної літератури, сучасної практики доводять відсутність комплексного дослідження методики формування в учнів основної школи критичного мислення в процесі

навчання. Проблема розвитку навичок критичного мислення розробляється на рівні окремих методичних підходів, прийомів, стратегій та засобів.

На сьогодні завдання полягає в тому, щоб обґрунтувати психолого-педагогічні та науково-методичні засади забезпечення розвитку критичного мислення школярів на рівні навчальних планів та програм, відібрати ефективні підходи, методи та стратегії, а також розробити засоби діагностики цієї компетентності.

Критичне мислення це комплекс мисленнєвих операцій, що характеризується здатністю людини:

- аналізувати, порівнювати, синтезувати, оцінювати інформацію з будь-яких джерел;
- бачити проблеми, ставити запитання;
- висувати гіпотези та оцінювати альтернативи;
- робити свідомий вибір, приймати рішення та обґрунтовувати його.

Цим мисленнєвим операціям можна і необхідно навчати. І саме школа є ідеальним середовищем для цього. Завдання педагога – змінити практику своєї роботи, сприяти активному навчанню учнів та розвитку в них активного мислення, адже в ідеалі ми прагнемо, щоб учні не просто запам'ятовували навчальний матеріал, а запитували, досліджували, творили, вирішували.

Наголошуючи на важливості педагогічних інновацій для шкіл України, Пометун О.І. [3] визначає особливості навчального процесу, побудованого на засадах критичного мислення:

- в навчання включаються завдання, розв'язання яких потребує мислення вищого рівня;
- навчальний процес організований як дослідження учнями певної теми, що виконується шляхом інтерактивної взаємодії між ними;
- результатом навчання є вироблення власних суджень через застосування до інформації певних прийомів мислення;

- викладання передбачає постійне оцінювання результатів із використанням зворотного зв'язку «учні-вчитель» на основі дослідницької активності учнів у класі;
- критичне мислення потребує від учнів достатніх навичок оперування доводами та формулювання умовиводів;
- відповідальність вимагає, щоб учні були вмотивовані до обговорення проблем, а не намагались уникнути їхнього розв'язання [5].

Використання на уроках технології критичного мислення формує в учнів не тільки предметні, а й соціальні компетентності.

1.1.2 Формування концепції критичного мислення у світовій освітній практиці

З часів Сократа та Дьюї в досліджуваних предметах і методах викладання відбулися серйозні зміни. Регулярно оновлюються освітні стандарти, відбувається систематична оцінка кваліфікації викладачів, ведеться моніторинг успішності учнів та отримані результати порівнюються, а потім обговорюються на міжнародному рівні. Саме міжнародні дослідження показали актуальний стан освітніх систем в міжкраїнній порівняльній перспективі [4].

Отримані результати підштовхують країни до перегляду навчальних планів та вимагають кардинальної зміни методів викладання. Країни, які давно взяли курс на розвиток гнучкої, творчої, кооперативної та здатної критично мислити особистості, вже домоглися позитивних результатів. З 2000 по 2012 року увагу громадськості було звернено в бік Фінляндії, так як фінські школярі показали високі результати з міжнародного іспиту PISA, а Фінська система освіти увійшла в топ кращих систем світу [7].

Фіни пояснюють свій успіх такими пріоритетами в освіті:

- менше викладання, більше навчання;

- менше перевірок, більше вчення;
- розробка індивідуальних напрямів навчання;
- скорочення частки навчання, яке відбувається в класі;
- акцент на розвиток навичок міжособистісного спілкування і розв'язування завдань;
- залученість та креативність як індикатори успіху.

В 2015 р. з'явився новий лідер перегонів «PISA» – Шанхай, який пояснює свій прорив тим, що уряду вдалося взяти найкраще зі світового досвіду та адаптувати до китайських реалій [5]. Однак багато хто впевнений в тому, що успіху Шанхайські діти досягли завдяки своїй посидючості та великому навантаженні в школі, так як вони пишуть багато тестів і виконують великий обсяг домашнього завдання, тому шкільна освіта не націлена на розвиток навичок критичного мислення. Однак Андреас Шляйхер, представник Організації економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР), зазначає, що найбільш вражаючі результати Шанхайські школярі показали в завданнях PISA, в яких робився ухил на більш широке і творче застосування навичок, тому невірно пояснювати успіх Шанхаю механічним запам'ятовуванням [5].

Що стосується України, то їй поки не вдалося показати високі результати в PISA. Однак наявний результат призвів до перегляду федеральних державних освітніх стандартів. Остання версія державного стандарту освіти орієнтована на становлення креативної і критично мислячої, особистості, яка здатна до самостійної інформаційно-пізнавальної діяльності, що включає вміння орієнтуватися в різних джерелах інформації, критично оцінювати та інтерпретувати інформацію, що отримується з різних джерел. Це якраз ті компетенції, за якими українські школярі відстають, згідно з результатами PISA [5].

1.1.3 Впровадження технології критичного мислення в освітній процес України

Ідеї стосовно впровадження технології розвитку критичного мислення в освітньому процесі України стали актуальними на початку 1990-их років ХХ століття, коли група американських інструкторів організували семінари з питань розвитку критичного мислення в м. Харків, м. Київ за підтримки міжнародного фонду Сороса. Так, професор з Канади Т. Закидальський презентував курс критичного мислення «Трансформація гуманітарної освіти в Україні» (1995 р., м. Харків, Міжнародний фонд «Відродження» й Харківський міський благодійний Центр освітніх ініціатив). Ця подія мотивувала дослідницьку та педагогічну активність освітян на різних рівнях. Зокрема, голова Харківської асоціації вчителів «Освіта за демократію» Н. Вукіна розробила тренінг «Критичне мислення – модель для навчання й виховання громадян суспільства майбутнього» [2].

З 1998 року для працівників освіти науково-методичним центром «Інтелект» (Міжнародний фонд «Відродження») здійснювався міжнародний проєкт «Читання та письмо для розвитку критичного мислення» (ЧПКМ). Мета проєкту – впроваджувати в шкільну практику технологію розвитку критичного мислення. В рамках проєкту з метою обміну ідеями та досвідом між вчителями та всіма зацікавленими виходив журнал «Уроки мислення», проводилися курси підвищення кваліфікації вчителів (м. Кропивницький, м. Дніпро, м. Івано-Франківськ), семінари (м. Ірпінь, м. Київ), відбулися всеукраїнські та міжнародні конференції в Угорщині, Литві, Хорватії.

2001 року був виданий навчальний посібник «Критичне мислення на основі елементарної логіки» в Харківському національному університеті ім. В. Каразіна.

2005 року професор Ч. Темпл провів семінар «Розвиток критичного мислення засобами читання та письма» в Харківському педагогічному університеті ім. Г. Сковороди [2].

З 2009 року міжнародним українсько-азербайджанським проектом був започаткований курс за вибором «Основи критичного мислення» для профільних класів навчальних закладів гуманітарного напрямку, розрахований на учнів 10-11 класів. В ході проєкту авторським колективом в складі О. Пометун, Л. Пилипчатіна, І. Сущенко, В. Дюкова було розроблено та апробовано в шкільній практиці навчально-методичний комплекс, що складається з навчальної програми «Основи критичного мислення», підручника для школярів та методичного посібника для вчителів.

З 2010 року Міністерство освіти і науки України рекомендувало для викладання в старшій школі предмет «Основи критичного мислення» з метою створення умов для розвитку в учнів старших класів критичного мислення.

2015 року С. Терно запропонував власну методику розвитку критичного мислення учнів на уроках історії. Відповідно до системного підходу в спроектованій ним моделі відображені властивості, склад, функція та генезис критичного мислення. На думку вченого, генезис розвитку критичного мислення включає такі складові:

- цілі навчання (мотивація), тобто створення проблемної ситуації;
- засіб навчання, який містить правила критичного розмірковування;
- зміст навчання, який представлений системою проблемних задач, що поступово ускладнюються;
- метод навчання, який передбачає систематичне створення для учнів ситуації вибору;
- форма навчання, яка забезпечує діалог у процесі розв'язування ситуацій вибору;

- метод контролю, що передбачає письмове розв’язування задач та наступну групову та індивідуальну рефлексію (аналіз і критику, самоаналіз і самокритику);
- стиль навчання, який надає учневі право на помилку, моделює ситуації виправлення помилок [6].

1.2 Цілі та завдання технології розвитку критичного мислення

1.2.1 Освітня мета впровадження критичного мислення в навчальний процес

Активний розвиток суспільства, інтенсивні процеси глобалізації й інформатизації вимагають від сучасного здобувача освіти абсолютно нового типу мислення, який дасть змогу пристосуватися до постійних соціальних змін, генерувати нові ідеї, а також здійснювати комплексний аналіз отриманої інформації та давати їй об’єктивну оцінку. Саме тому в сучасному освітньому просторі важливу роль відіграє критичне мислення, яке є основою навчальної діяльності. Організація навчально-виховного процесу будь-якого навчального закладу повинна бути спрямована передусім на розвиток критично мислення школярів, що допоможе їм оволодіти основними компетентностями, які необхідні для соціалізації особистості та формування її індивідуальності. Сьогодні критичне мислення стає технологічною базою сучасної освіти, його розвиток диктується різноманітними соціальними зрушеннями та безперервним розвитком суспільства.

Сучасна система освіти орієнтується не лише на передачу знань, а й на розвиток в здобувачів освіти здатності до самостійного мислення, аналізу, оцінювання інформації та ухвалення обґрунтованих рішень. В цьому контексті ключовою метою впровадження технології розвитку критичного мислення є формування компетентного, активного й автономного мислителя,

здатного ефективно функціонувати в умовах постійних змін і зростаючого інформаційного потоку [7].

Критичне мислення сприяє формуванню інтелектуальної самостійності, що проявляється у вмінні ставити запитання, аналізувати джерела, відокремлювати факти від суджень, оцінювати логічну послідовність міркувань та робити власні висновки. На відміну від традиційного підходу до навчання, де учень здебільшого відтворює подану інформацію, технологія критичного мислення формує активного суб'єкта пізнання, здатного вести діалог, сумніватися, шукати нові підходи до розв'язання проблем.

До основних аспектів освітньої мети цієї технології належать:

- розвиток мислення вищого порядку: аналіз, синтез, інтерпретація, оцінка, формулювання обґрунтованої думки;
- навчання учнів мислити не лише про те, «що думати», а й «як думати» – тобто розвиток метакогнітивних умінь;
- підготовка до життя в складному світі: уміння працювати з неповною інформацією, критично ставитися до мас-медіа, ухвалювати рішення в умовах невизначеності;
- формування ціннісного ставлення до власних суджень та ідей інших – толерантність до альтернативних поглядів, уміння вести конструктивну дискусію;
- підвищення мотивації до навчання через залучення учнів до активної пізнавальної діяльності.

1.2.2 Завдання щодо формування ключових компетентностей учнів

В зв'язку з реформуванням освіти в Україні кінцевим результатом навчання повинно бути не тільки оволодіння учнями змістом навчальної дисципліни, а й формування їх компетентностей як загальної здатності особистості. Ключові компетентності – це здатність людини здійснювати складні поліфункціональні, поліпредметні, культурно-доцільні види

діяльності, ефективно розв'язувати актуальні, індивідуальні та соціальні проблеми [2].

Основними ознаками ключових компетентностей є [3]:

- поліфункціональність: дають можливість вирішувати різноманітні проблеми в різних царинах особистого й суспільного життя;
- надпредметність і міждисциплінарність: застосування не тільки у школі, а й в інших галузях життєдіяльності;
- багатовимірність: знання, розумові процеси, інтелектуальні, навчальні та практичні вміння, творчі здібності, стратегії, технології, процедури, емоції, оцінки тощо;
- забезпечують широку сферу розвитку особистості – її логічного, творчого та критичного мислення, самопізнання, самовизначення, самооцінки, самовиховання тощо.

Технологія формування основних компетентностей учнів на основі розвитку критичного мислення на уроках складається з трьох стадій: стадії виклику; стадії осмислення; стадії міркування (рефлексії) [4].

1) стадія виклику. Для неї характерні такі функції, як мотиваційна (пробудження інтересу до роботи), інформаційна (актуалізація вже наявних знань) та комунікаційна (безконфліктний обмін думками);

2) стадія осмислення виконує інформаційну (отримання нової інформації) і систематизовану (класифікація та ранжування інформації) функції;

3) стадія рефлексії виконує комунікаційну (обмін думками про нову інформацію), мотиваційну (збудження до подальшого розширення інформаційного поля), інформаційну (набуття нових знань), оціночну (вироблення власної позиції) функції.

Для успішної реалізації кожної стадії, потрібно проводити постійну ротацію методичних прийомів, які допоможуть учням з інтересом опановувати нові знання.

1.2.3 Очікувані результати використання технології критичного мислення

Істотна різниця між традиційною, ідеологічно заангажованою освітньою системою та демократичними засадами новітніх, інтерактивних методів викладання полягає насамперед у тому, що:

– інформація має бути не кінцевим результатом – метою навчання, а її початковим пунктом;

– навчання не зводиться до запам'ятовування інформації, визначеної в посібниках, а полягає в розвитку здібностей учнів самостійно просуватися в інформаційному просторі; вчителів не слід випереджати ствердженням своїх ідей учнівську мисленнєву ініціативу;

– навчання має базуватися на принципі порівняння однієї інформації або точки зору з іншою з метою розбудови уявлення про те, що знання не обмежується сумою відомостей і не є кінцевим, а являє собою процес співвідношення знань;

– сутність навчання полягає в приєднанні нових знань до відомих, для чого ці відомі знання слід попередньо відтворити, і в такий спосіб дізнатися, що ми знаємо про те, що ми насправді знаємо з певної теми.

Серед цих сучасних принципів навчання особливо актуальним став принцип самостійного навчання. «Основне завдання для учнів – навчитися ефективно здобувати знання, наші вихованці мають бути здатними сприймати нову інформацію та ретельно й критично її досліджувати, досліджувати нові ідеї, розглядаючи їх з численних перспектив та породжуючи власні судження стосовно їх достовірності, оцінювати та визначати загальну цінність цих ідей на основі власних потреб і цілей» [8].

Саме на критичному мисленні базуються інтерактивні методи навчання, які активно розробляються і застосовуються в практиці закладів освіти. Дуже популярні сьогодні активні та інтерактивні методи навчання не слід впроваджувати механічно. Від учителя залежить, бути чи не бути

критичному мисленню в його учнів. Кожен учитель має власні універсальні методи роботи. Водночас треба пам'ятати, що новітні освітні технології не відміняють класичних методів навчання. Методи пройшли апробацію багатовіковою історією розвитку європейської педагогічної думки, вони довели свою вагомість та ефективність.

Як ціль при вивченні англійської мови виступає навчання, при якому змістовними будуть не лише практичні знання, навички та вміння, а загальна освіта та розвиток особистості. При цьому важливо сформувати в учнів комплекс наступних медіаосвітніх вмінь [8]:

- знаходити потрібну інформацію з різних джерел;
- критично опрацьовувати інформацію, інтерпретувати її, розуміти суть, адресну спрямованість, ціль інформування;
- систематизувати інформацію по заданих ознаках;
- переводити візуальну інформацію у вербальну знакову систему і навпаки;
- видозмінювати об'єм, форму, знакову систему інформації;
- знаходити помилки в інформації, сприймати альтернативні точки зору та висловлювати обґрунтовані аргументи;
- встановлювати асоціативні та практично доцільні зв'язки між інформаційними повідомленнями;
- вміти довгий час (семестр, навчальний рік або інший відрізок часу) збирати та систематизувати тематичну інформацію;
- вміти вибирати головне в інформаційному повідомленні.

В зв'язку зі сказаним вище важливо звернутися до питань, присвячених практичним аспектам даної теми, що значною мірою відбивають та узагальнюють власний досвід.

1.3 Суть критичного мислення та його основні характеристики

1.3.1 Сутність критичного мислення як когнітивного процесу

Критичне мислення – це вміння активно, творчо, індивідуально сприймати інформацію, оптимально застосовувати потрібний вид розумової діяльності, різносторонньо аналізувати інформацію, мати особисту, незалежну думку та вміти коректно її відстоювати, уміти застосовувати здобуті знання на практиці [7].

Критичне мислення – це процес, який найчастіше починається з постановки проблеми, продовжується пошуком і осмисленням інформації, закінчується прийняттям рішення щодо розв’язання поставленої проблеми.

Критичне мислення неможливо відділити від творчого. Як тільки починається аналіз проблеми, одразу будуються гіпотези, шукаються альтернативні способи розв’язання тощо. А все це є актами творчості.

Розвивається критичне мислення шляхом розв’язування проблемних задач, робота над якими вимагатиме від керівників відповідального ставлення до ухвалення рішень. Необхідно буде не просто заявити про свою позицію щодо окресленої проблеми, а й довести та обґрунтувати її. Зважити всі «за» та «проти», передбачити наслідки ухвалених рішень. Для цього важливо розглянути проблему з різних точок зору, врахувати різні думки.

Критичне мислення має такі характеристики:

1. Самостійність.

Ніхто не може мислити за людину, висловлювати її думки, переконання, ідеї тощо. Мислення стає критичним тільки якщо носить індивідуальний характер.

2. Постановка проблеми.

Критичне мислення досить часто починається з постановки проблеми, бо її розв’язання стимулює людину мислити критично. Початок розв’язання проблеми – це збирання інформації за нею, бо роздумувати «на порожньому місці» фактично неможливо.

3. Прийняття рішення.

Закінчення процесу критичного мислення – це прийняття рішення, яке дозволить оптимально розв'язувати поставлену проблему [8].

4. Чітка аргументованість.

Людина, яка мислить критично, повинна усвідомлювати, що часто одна і та ж проблема може мати декілька розв'язань, тому вона повинна підкріпити прийняте нею рішення вагомими, переконливими, власними аргументами, які б доводили, що її рішення є найкращим, оптимальним.

5. Соціальність.

Людина живе в соціумі. Тому доводити свою позицію людина повинна в спілкуванні. В результаті спілкування, диспуту, дискусії людина поглиблює свою позицію або може щось змінити в ній.

Основними характеристиками критичного мислення є:

1. Мислення, націлене на формування можливих суджень. іншими словами, прикладне або практичне мислення, яке використовує теоретичні знання, щоб досягти рішень, компромісів та інших типів суджень.

2. Мислення, яке керується критеріями. Це робота критиків, судів, присяжних та інших. У вузькому розумінні часто таке мислення визначають, як мислення критиків.

3. Мислення, яке є самокеруючим. Першим кроком у цьому напрямі є визначення для себе чи якоїсь групи можливості помилятися. Другий крок – пошук шляхів виправлення помилок.

4. Мислення, яке залежить від ситуації. Критичне мислення не розглядає низки дій або подій за межами ситуації, і не приписує їм значень, які б відрізнялись від їхніх значень у певній ситуації. Треба враховувати індивідуальність кожної і дозволяти їй відігравати. [7]

Критичне мислення також представлене двома блоками: змістовним та операційним. До змістовного блоку критичного мислення:

1) загальнометодологічні принципи (переконання у необхідності самокорекції методу дослідження, увага до процедури дослідження;

врахування інших точок зору; готовність бути критичним не лише по відношенню до інших, але й до себе);

2) стратегії (розділити проблему на частини; розв'язати більш прості проблеми, що відбивають деякі аспекти основної проблеми; використати смислові та графічні організатор, щоб представити проблему різними способами; розглянути окремі випадки, щоб «відчути» проблему; аналіз засобів та цілей).

Операційний блок складають уміння з контролю розумової діяльності та її самовдосконалення:

- 1) уміння бачити проблему, діалектичний зв'язок між суперечностями;
- 2) доводити – добирати прийнятні, відповідні та несуперечливі аргументи;
- 3) знаходити контраргументи;
- 4) помічати факти, що суперечать власній думці;
- 5) обґрунтовувати;
- 6) оцінювати – вибирати одну з альтернатив, усвідомлювати обмеження, що накладаються на висновок (істинність висновку за певних умов)
- 7) уміння спростовувати (фальсифікація);
- 8) узагальнювати;
- 9) будувати гіпотези;
- 10) робити висновки.

Представимо критичне мислення наочно у вигляді схеми.

Таблиця 1.2 – Особливості критичного мислення

↓ КРИТИЧНЕ МИСЛЕННЯ ↓	
Змістовний блок	Операційний блок
<p>– <i>загальнометодологічні принципи</i> (переконавання у необхідності самокорекції методу дослідження, увага до процедури дослідження; врахування інших точок зору; готовність бути критичним не лише по відношенню до інших, але й до себе);</p> <p>– <i>загальні стратегії</i> (розділити проблему на частини; розв'язати більш прості проблеми, що відбивають деякі аспекти основної проблеми; використати смислові та графічні організатори, щоб представити проблему різними способами; розглянути окремі випадки, щоб "відчути" проблему; аналіз засобів та цілей).</p>	<ul style="list-style-type: none"> – усвідомити проблему, діалектичний зв'язок між суперечностями; – доводити – добирати прийнятні, відповідні та несуперечливі аргументи; – знаходити контраргументи; – помічати факти, що суперечать власній думці; – обґрунтовувати; – оцінювати – вибір однієї з альтернатив, усвідомлення обмежень, що накладаються на висновок (істинність висновку за певних умов) – спростовувати (принцип фальсифікації); – узагальнювати; – будувати гіпотези; – робити висновки.

1.3.2 Основні риси критичного мислення в навчальному процесі

Уроки, які сприяють активності та розвитку критичного мислення учнів, вирізняються низкою характерних рис, що відіграють ключову роль у формуванні аналітичних здібностей. Ці риси створюють основу для розвитку критичного мислення в контексті навчального процесу, зокрема під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» на уроках алгебри та початків аналізу в старшій школі [5].

Вчителі та учні ділять між собою обов'язки щодо створення комфортного психологічного клімату на уроках, разом розробляють правила поведінки, які сприяють відкритості та взаємоповазі. Учні мають можливість вільно обговорювати різні аспекти теми, ділячись не лише власними ідеями, а й детально пояснюючи хід своїх міркувань. Під час розв'язання рівнянь учні можуть обґрунтовувати вибір методу, аналізуючи його переваги та недоліки, що сприяє розвитку навичок аргументації.

Вчителі активно запрошують учнів брати на себе ініціативу, демонструючи власний приклад критичного аналізу. Вони показують, як формулювати обґрунтовані судження, підтримують учнів в процесі мислення, заохочуючи повагу до різних точок зору. Вчитель може ставити під сумнів власні висновки чи знання учнів, пропонуючи альтернативні підходи до розв'язання задач, таких як логарифмічні нерівності. Це спонукає учнів до самостійної критичної роботи, стимулюючи їх до глибшого осмислення матеріалу.

Атмосфера відкритості та пошуку формує готовність до відкритого діалогу, між вчителем та учнями, між учнями в межах класу. На таких уроках панує дух дослідження та готовності до діалогу. Для цього використовуються запитання високого рівня складності, такі як «Чому цей метод працює?», «Що станеться, якщо змінити умову задачі?» або «Які інші шляхи можна спробувати?». Учні застосовують різноманітні типи мислення: висувають гіпотези щодо розв'язання показникових рівнянь, збирають та

систематизують інформацію, а потім перевіряють свої висновки. Вчителі виступають у ролі наставників, демонструючи приклад виконання завдань та надаючи поради, які допомагають скоригувати процес, а не лише оцінити результат.

Вчителі уважно стежать за тим, як учні засвоюють знання, аналізують свої думки та взаємодіють під час занять. Створюється безпечне навчальне середовище, де учні відчувають свободу для експериментів і не бояться робити помилки. Наприклад, навіть невдалі спроби розв'язати складне рівняння можуть стати цінним досвідом, якщо вчитель підтримує учнів, допомагаючи їм дійти до правильного розв'язку через аналіз помилок.

Навчальний простір організовується так, щоб полегшити комунікацію та спільну роботу. Вчитель стає не лише наставником, а й партнером, залучаючи всіх до активного пізнання, створення схем розв'язання задач чи творчих проєктів. Клас перетворюється на спільноту, де кожен учень може навчати інших, обмінюючись ідеями. Це сприяє ефективній інтеграції нових математичних понять з попередніми знаннями, формуючи навички командної роботи.

Учні, освоюючи не лише зміст, а й процес навчання, стають здатними до постійного саморозвитку. Вони вчаться відкривати нові ідеї, адаптувати їх до практичних завдань та перетворювати на корисні вміння. Наприклад, розв'язуючи нерівності, учні розвивають уміння аналізувати умови та знаходити нестандартні рішення, що стає основою для їх інтелектуального зростання впродовж всього життя.

Учні потребують достатнього часу для збирання даних, їх аналізу та вибору оптимального способу представлення розв'язання. Робота над критичним мисленням може відбуватися не лише під час уроку, а й в підготовчий період чи після занять. Це передбачає постійне інтелектуальне напруження, наприклад, коли учні самостійно досліджують властивості рівнянь перед класом.

Учні мають усвідомлювати, що від них чекають висловлення власних ідей в будь-якому форматі – від простих до оригінальних. В навчальному процесі варто включати завдання, які стимулюють генерування гіпотез, наприклад, створення власних прикладів рівнянь, і заохочувати учнів до їх розвитку.

Учні повинні мати простір для обміну думками, що допомагає їм відчувати свою значущість в спільній роботі. Наприклад, обговорення стратегій розв'язання нерівностей в групах дозволяє бачити різноманітність підходів і вносити власний вклад [5].

Учні вчаться слухати та цінувати погляди однокласників, розуміючи, що врахування всіх ідей сприяє знаходженню найкращого рішення. Це особливо важливо при колективному аналізі складних математичних завдань, де «колективна мудрість» допомагає сформуванню виваженої позиції.

Учні мають відчувати свободу висловлювати будь-які ідеї, уникаючи стереотипів. Учитель створює атмосферу, де відсутні глузування, і кожен може додати щось цінне до спільного результату, наприклад, запропонувавши нестандартний метод розв'язання.

Учні заохочуються до активної ролі в навчанні, що приносить радість від освоєння нового. Це мотивує їх братися за складніші задачі, такі як розв'язання систем рівнянь, і розвивати критичний погляд на матеріал.

1.4 Умови, створення яких під час навчання змістової лінії «Рівняння і нерівності» на уроках алгебри і початків аналізу старшої школи спонукає та стимулює учнів до критичного мислення

Формування критичного мислення учнів 10-11 класів під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» на уроках алгебри та початків аналізу є важливим завданням сучасної освіти, яке сприяє розвитку аналітичних, рефлексивних і творчих здібностей. Відповідно до чинних програм з математики для 10-11 класів (профільний рівень), ця змістова лінія охоплює

іраціональні, тригонометричні, показникові, логарифмічні, рівняння та нерівності, а також рівняння та нерівності з модулем. Аналіз цих програм в контексті розвитку критичного мислення дозволяє окреслити їх еволюцію, ключові особливості, позитивні сторони, недоліки та конкретний потенціал для формування аналітичних навичок саме через тему «Рівняння та нерівності».

Програма рівня стандарту (2017 р., чинна з уточненнями 2023 р.) орієнтована на базове засвоєння матеріалу з акцентом на практичні навички розв'язання типових задач, з загальним обсягом 35 годин на тему «Рівняння і нерівності» (з них 12 годин в 10 класі на показникові та логарифмічні рівняння, 23 години в 11 класі на тригонометричні рівняння та нерівності, а також рівняння та нерівності з модулем). В контексті критичного мислення програма акцентує увагу на алгоритмічних методах, перевірці результатів та обґрунтуванні рішень, що сприяє формуванню базових елементів критичності: аналізу помилок, порівнянню методів та простої рефлексії. В оновлених програмах додано прикладний зв'язок з повсякденним життям, елементи національно-патріотичного виховання (застосування нерівностей в задачах на ресурси чи логістику) та рекомендації щодо цифрових інструментів для візуалізації (наприклад, графіків функцій для перевірки логарифмічних нерівностей). Позитивними аспектами в розвитку критичного мислення є доступність для всіх учнів, поступовий перехід від обчислень до простого аналізу (наприклад, обговорення області визначення в нерівності виду $\log_2(x-1) > 2$), що знижує страх помилок та мотивує до базової рефлексії; гнучкість для адаптації в умовах дистанційного навчання чи воєнного стану (2023-2025 рр.), де критичне мислення допомагає в самостійній перевірці. Основним недоліком є те, що обмежена кількість годин не дозволяє провести глибокий аналіз альтернативних методів чи гіпотез (наприклад, контрприкладів в тригонометричних нерівностях), фокус на алгоритмах може робити процес механічним, без достатньої стимуляції творчості чи аргументації.

Програма профільного рівня (2017-2018 рр., з поглибленнями 2023 р.) передбачає розширений обсяг 70 годин на тему «Рівняння і нерівності» (з них 25 годин в 10 класі на показникові, логарифмічні та тригонометричні рівняння, 45 годин в 11 класі на нерівності, системи рівнянь та нерівностей з модулем, з елементами доведення та нестандартних задач). В контексті критичного мислення, в програмі прямо прописано розвиток логічного мислення через аналіз, індукцію, дедукцію, узагальнення, систематизацію, аналогію та евристики (наприклад, висунути гіпотезу про розв'язок рівняння $3^{2x-1} = 27$ та перевірити контрприкладом). В оновленнях 2023-2024 рр. додано STEM-інтеграцію, використання програмного забезпечення (GeoGebra для моделювання систем рівнянь) та підготовку до НМТ з елементами критичного аналізу (порівняння алгебраїчного та графічного методів). Високий потенціал для критичного мислення через нестандартні задачі, стимулює обмін ідеями, аргументацію та рефлексію. Дана програма формує підготовку до дослідницької діяльності, де учні класифікують методи та прогнозують результати. Цифровізація навчального процесу посилює візуальний аналіз, розвиваючи інтуїтивне критичне сприйняття. Серед недоліків варто відзначити, що перевантаження може призводити до поверхневого засвоєння матеріалу без глибокої рефлексії.

Обидві програми доповнюють одна одну, створюючи гнучку систему для максимізації інтелектуального зростання через тему «Рівняння та нерівності».

Стимулювання учнів до використання різних методів розв'язання задач є важливим для розвитку критичного мислення. Наприклад, під час вивчення показникових рівнянь в 10 класі (профільний рівень), таких як $3^{2x-1} = 27$, вчитель може запропонувати не лише метод логарифмування обох частин, а й спосіб зведення до однієї основи чи графічний аналіз. Рівняння $3^{2x-1} = 27$ можна переписати як $3^{2x-1} = 3^3$, звідки $2x - 1 = 3$, а отже, $x = 2$. Обговорення впливу зміни основи на розв'язок допомагає учням усвідомити властивості експоненціальних функцій та формує здатність до критичної оцінки,

сприяючи глибшому розумінню матеріалу, як передбачено програмою на профільному рівні з акцентом на евристики. Аналогічно, при вивченні тригонометричних рівнянь в 10 класі (рівень стандарту), таких як $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, учні можуть розв'язати задачу аналітично, визначивши розв'язки $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$, а також перевірити їх графічно, аналізуючи графік функції $y = \sin x$, що відповідає базовим вимогам програми на перевірку результатів. Формування навчального середовища, в якому помилки розглядаються як можливості для навчання, відіграє ключову роль. Наприклад, при розв'язанні логарифмічних нерівностей в 11 класі (профільний рівень), таких як $\log_2(x-1) > 2$, учні можуть зіткнутися з труднощами через необхідність врахування області визначення ($x > 1$). Вчитель може навмисно припуститися помилки, проігнорувавши цю умову, і попросити учнів виявити та пояснити її. Учні доходять до висновку, що розв'язок нерівності $x > 5$, і можуть підтвердити це графічно, аналізуючи функцію $y = \log_2(x-1)$. Такий підхід знижує страх перед помилками, сприяючи розвитку рефлексивних навичок та глибшого розуміння логарифмічних властивостей, як акцентовано в профільній програмі 2024 р. з елементами контрприкладів. Групова робота стимулює обмін ідеями та порівняння підходів, що є важливим для розвитку критичного мислення.

Творчі завдання підвищують мотивацію учнів та сприяють розвитку критичного мислення. Після вивчення тригонометричних нерівностей в 10 класі (профільний рівень), таких як $\cos x > 0$, учням можна запропонувати створити власну задачу, визначивши область розв'язків $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$ та додавши умову, наприклад, обмеження на інтервал $[0, 2\pi]$. Учні обґрунтовують, як ця умова впливає на результат, що сприяє осмисленню періодичності тригонометричних функцій та підвищує зацікавленість.

Заохочення учнів до рефлексії над власним процесом мислення також є важливим. Після розв'язання логарифмічного рівняння в 11 класі (профільний рівень), наприклад, $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$, вчитель може попросити учнів описати свої кроки, оцінити, що допомогло чи завадило знайти правильну відповідь, та запропонувати альтернативний підхід, наприклад, графічний. Така рефлексія допомагає учням усвідомити власні стратегії мислення та вдосконалювати їх, як передбачено в програмі для розвитку метапізнавальних умінь. Проектна діяльність дозволяє застосовувати знання в практичних та творчих контекстах. Учні 11 класу (профільний рівень) можуть розробити набір задач на тему логарифмічних або тригонометричних нерівностей, таких як $\log_3(x+2) \leq 2$ чи $\sin x < \frac{1}{2}$, створити графіки для ілюстрації розв'язків та презентувати свої напрацювання класу, що посилює аналітичні здібності та відповідає рекомендаціям програми щодо проектних методів з дослідницьким компонентом. Елементи гри підвищують мотивацію та сприяють розвитку критичного мислення. Наприклад, вчитель може організувати змагання в 10 класі (рівень стандарту), де команди розв'язують нерівності з модулем, і пояснюють свої кроки. Перемагає команда, яка не лише правильно розв'яже задачу, а й надасть найпереконливіше обґрунтування вибору методу, що розвиває навички аргументації та узгоджується з ігровими елементами.

Описані умови – заохочення до альтернативних методів, толерантність до помилок, групова робота, творчі завдання, поступове ускладнення, саморефлексія, проектна діяльність та ігрові технології – створюють цілісну систему, що сприяє формуванню критичного мислення учнів 10-11 класів. Ці умови адаптовані до чинних програм з математики, зокрема до тем показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь та нерівностей, а також рівнянь та нерівностей із модулем, де аналіз програм підкреслює необхідність балансу між обчисленнями та аналітичним мисленням з урахуванням нових викликів. Вчитель виступає фасилітатором, спрямовуючи

учнів до самостійного аналізу, рефлексії та творчого пошуку. Такий підхід не лише поглиблює розуміння математичного матеріалу, а й готує учнів до розв'язання складних задач в реальному житті, розвиваючи їх аналітичні та критичні здібності.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНА МОДЕЛЬ ПІЗНАВАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ В ТЕХНОЛОГІЇ РОЗВИТКУ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ ТА МЕТОДИКА ЇЇ ВИКОРИСТАННЯ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ» НА УРОКАХ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ СТАРШОЇ ШКОЛИ

2.1 Стадії пізнавального процесу та відповідні їм дії учнів

Розвиток пізнавальних процесів в старшокласників визначається загальними особливостями їх інтелектуальної активності. Темпи розумового зростання сповільнюються, проте якісно воно стає значно складнішим, сприяючи становленню світогляду як цілісної системи уявлень про світ. Старшокласник опановує складні розумові операції, відбувається істотне розширення понять, розмежування інтересів та здібностей. Виникає індивідуальний підхід до розумової праці.

Збільшуються можливості уваги, які повністю реалізуються лише за наявності сильного пізнавального інтересу до предмета вивчення. Отже, показники уваги тісно пов'язані з мотивами пізнавальної діяльності, не є постійними. Юнаки нерідко виявляють розсіяність щодо навчального матеріалу, оскільки занурені в особисті питання, інтенсивно переживають проблеми в стосунках з оточенням тощо. Можна стверджувати, що головні труднощі старшокласник переживає при необхідності перемикати увагу, одночасно відриваючись від своїх глибоких емоційних станів [23].

Пам'ять удосконалюється під впливом розвитку волі та мислення. Довільна пам'ять помітно перевершує мимовільну. Ефективність запам'ятовування залежить від вольових якостей старшокласника, а також від уміння застосовувати методи розумової обробки інформації та від інтересів, пов'язаних з вибором професії. Старшокласник володіє повною системою технік довільного запам'ятовування. Завдяки цьому в учня підвищується ефективність пам'яті на абстрактний матеріал.

Мислення старшокласника формується в умовах складної навчальної роботи, що забезпечує засвоєння наукових знань, які становлять основу світогляду особистості. Старшокласник здатний до самостійного навчання, досягаючи результатів на рівні, подібному до організованого навчання. Мислення працює зі знаннями, якими володіє старшокласник. Зростає значення логічних суджень та формулювання правильних висновків.

Характеристиками мислення старшокласника є такі риси:

- системність, коли учень свідомо шукає взаємозв'язки між своїми знаннями, причини певних фактів, подій, намагається зрозуміти їх закономірності;

- рефлексивність (свідоме застосування мислення для розв'язування задач, гнучке використання інструментів мислення, його варіативність, гіпотетичність);

- світоглядна спрямованість, теоретичне мислення, створення абстрактних концепцій, зацікавленість філософськими ідеями;

- орієнтація на дослідження, мислення має продуктивний, творчий характер [24].

Учень прагне незалежно розкрити сутність цікавих йому питань, надати власне тлумачення. Приймає роль дослідника, відтворює процес наукового пошуку, наприклад, при доведенні теореми, виведенні формули. Володіє базовою формою інтелектуального експерименту;

– обмеженість мислення пов'язана з відсутністю системності та методики. Це особливо проявляється при помилках в мисленні, при одержанні неправильних результатів, які старшокласник не може виправити.

Мовлення ускладнюється за змістом та структурою завдяки прогресу мислення та опануванню всіма системами (насамперед, лексичною та синтаксичною) рідної та іноземних мов. Старшокласник на високому рівні володіє всіма формами мовлення (діалогічним і монологічним, усним і писемним, зовнішнім і внутрішнім). Це дозволяє йому точно виражати свої ідеї та емоції. Відбувається перехід від розгорнутого до стислого внутрішнього мовлення, яке стає способом існування мисленнєвих дій.

Уява старшокласника характеризується довільністю, що проявляється в умінні планувати свою діяльність та майбутнє життя. Удосконалюється репродуктивна уява. За допомогою творчої уяви старшокласник здатний створювати складні проекти творчих робіт (малюнків, конструкцій, літературних текстів) та реалізовувати їх [32].

В планах на майбутнє значне місце займають мрії, які набувають конкретності та практичності [32].

Справедливі наступні висновки про розвиток пізнавальних процесів старшокласників:

- розумовий розвиток особи в період ранньої юності уповільнюється за швидкістю, значно ускладнюється і сприяє становленню світогляду;
- пізнавальні процеси набувають стабільної довільності, інтелектуальної складності, диференційованості та інтегрованості;
- юнакам важко спрямовувати пізнавальну активність на навчальний матеріал, оскільки вони занурені в особисті проблеми;
- старшокласник володіє складною системою методів довільного запам'ятовування;
- мислення старшокласника забезпечує опанування науковими знаннями;

– старшокласник здатний до самоосвіти, досягаючи результатів на рівні, подібному до навчання в школі.

2.2 Методичні прийоми та їх суть

При вивченні рівнянь та нерівностей, застосування прийомів розвитку критичного мислення дозволяє формувати в учнів здатність критично аналізувати математичні об'єкти, оцінювати доцільність різних способів розв'язування, контролювати логіку перетворень та приймати обґрунтовані рішення. Технологія розвитку критичного мислення структурується за трьома послідовними стадіями, а саме, «виклик», «осмислення» та «рефлексія», кожна з яких виконує окрему дидактичну функцію та передбачає використання специфічних методичних прийомів.

Стадія «виклик»

На стадії «виклик» відбувається актуалізація попереднього досвіду учнів, формування первинних гіпотез та виявлення можливих прогалин в знаннях.

Одним з провідних прийомів цієї стадії є парна або групова мозкова атака. Її значення полягає в активізації попередніх знань, висловленні припущень, формуванні інтелектуальної напруги та створенні ситуації, в якій учні самостійно виявляють суперечності в своїх уявленнях. При вивченні логарифмічних рівнянь, наприклад, $\log_{x-1}(2x+3)=2$, учні висловлюють припущення щодо області визначення функції логарифма, умов додатності основи, монотонності логарифмічної функції та можливості переходу до степеневій формі. Частина висловлених тверджень виявляється помилковою, що створює когнітивний конфлікт та мотивує до глибшого аналізу властивостей логарифмічних функцій [4].

Іншим важливим прийомом є робота з ключовими термінами, яка формує концептуальну базу для подальшого осмислення теми. Учні

пояснюють зміст понять «область визначення», «еквівалентні перетворення», «сторонній корінь» на прикладі рівняння $\sqrt{5-3x} = x+1$.

Учень осмислює теоретичний зміст математичних понять в конкретному контексті, де пояснює, чому піднесення до квадрату не завжди є еквівалентним кроком, які обмеження накладає область визначення, та яким чином можуть виникати сторонні корені.

Розбиття на кластери сприяє структуруванню знань та встановленню логічних зв'язків між окремими аспектами теми. Учні складають кластер «Показникові рівняння», де фіксують властивості степеневі функції, правила зведення до спільної основи та типові помилки. Під час роботи з рівнянням $3^{2x+1} = 27^{x-2}$, кластер допомагає учням застосувати знання про те, що $27 = 3^3$, та зрозуміти, як грамотно виконати перетворення показників.

Приєм «Знаємо – бажаємо дізнатися – дізналися» дозволяє учням усвідомити власні очікування щодо теми та сформулювати конкретні запитання. Наприклад, при аналізі тригонометричного рівняння $\sin 2x = \cos x$, учні визначають, що знають про подвоєний аргумент, та ставлять запитання про допустимість ділення обох частин рівняння на $\cos x$ та про можливість втрати частини розв'язків. Після опрацювання матеріалу відбувається змістовне коригування попередніх уявлень, що сприяє усвідомленню засвоєного [4].

Взаємоопитування допомагає перевірити та поглибити первинні знання. В темі параметричних рівнянь, наприклад розглядаючи $x^2 - (a+1)x + a = 0$, учні в парах аналізують поведінку дискримінанта залежно від параметра a , визначають кількість коренів та формують аргументовані математичні пояснення. Це формує навички логічного аналізу й аргументації, які є складовою критичного мислення.

Стадія «Осмислення»

Стадія «Осмислення» є ключовою, тому що передбачає активну роботу з інформацією, її аналіз, перетворення, інтерпретацію та застосування в нових аспектах. Методичні прийоми цього етапу спрямовані на формування

усвідомленого розуміння математичних закономірностей та логічної структури рівнянь та нерівностей [4].

Одним з найефективніших прийомів є ведення подвійних щоденників. Він дозволяє розмежувати формальний (алгоритмічний) та концептуальний (пояснювальний) рівні діяльності. Наприклад, працюючи з нерівністю $\log_3(x-2) > 2$, учень записує в лівій колонці формальні перетворення, перехід до степеневі форми $x-2 > 9$, а в правій, пояснення – логарифмічна функція зі зростаючою основою зберігає знак нерівності, область визначення вимагає $x-2$, перевірка результату є обов'язковою. Представлений прийом формує метакогнітивне мислення, навчає аналізувати й контролювати власні міркування.

Маркування тексту, як прийом осмислення, спрямоване на глибоке опрацювання теоретичного матеріалу. Учень активно взаємодіє з текстом, позначаючи важливі твердження, суперечності, незрозумілі моменти. Працюючи з теоретичним матеріалом про властивості показникової функції й розглядаючи рівняння $5^{x+1} = 25^{2x-3}$, учень звертає увагу на положення про додатність основи, про можливість зведення до спільної основи, про властивості степеневих функцій. В рамках даного прийому, учень розвиває навички критичного читання математичних текстів та забезпечує усвідомлене застосування теоретичного матеріалу в розв'язуванні задач [4].

Кожен з представлених прийомів сприяє формуванню глибокої математичної компетентності. Під час розв'язування тригонометричного рівняння $2\sin x \cos x = \cos x$, учні за допомогою подвійних щоденників виявляють необхідність врахувати випадок $\cos x = 0$ перед діленням, а маркування теоретичного матеріалу дозволяє виділити ключові властивості тригонометричних функцій, що впливають на хід розв'язування.

Розв'язуючи ірраціональні рівняння типу $\sqrt{x^2-9} = x-3$, подвійні щоденники дають можливість учневі зафіксувати причини виникнення стороннього кореня після піднесення до квадрату та підсилюють розуміння

важливості перевірки отриманого результату. Осмислення стає не лише етапом засвоєння інформації, а й процесом формування критичного ставлення до власної математичної діяльності.

Стадія «рефлексія»

Учень формує цілісне уявлення про тему, аналізує правильність власних способів розв'язування та співвідносить їх з альтернативними методами. Стадія рефлексії забезпечує формування метапізнавальних умінь, необхідних для успішного освоєння математичних дисциплін профільного рівня.

Парна мозкова атака як інструмент рефлексії допомагає учням узагальнити різні підходи та оцінити їх ефективність. Наприклад, при аналізі розв'язування рівняння $\cos 3x = \sin x$, учні обговорюють переваги графічного методу, тотожних перетворень чи зведення функцій до одного виду [6].

Звернення до ключових слів сприяє перевірці глибини засвоєння базових математичних понять. Працюючи з рівнянням $\sqrt{x^2 - 9} = x - 3$, учні пояснюють зміст понять «сторонній корінь», «еквівалентні перетворення» та демонструють розуміння причин появи некоректних розв'язків.

Повернення до кластерів, дозволяє учням порівняти початкові та підсумкові знання. В темі логарифмічних рівнянь учні доповнюють кластер новими елементами, умовами зміни основи логарифма, вимогами до області визначення, правилами перевірки коренів.

Маркувальна таблиця створює умови для систематизації матеріалу й порівняння різних типів рівнянь. Працюючи з параметричним рівнянням $x^2 - ax + 1 = 0$, учні визначають кількість коренів залежно від значення параметра та фіксують закономірності зміни дискримінанта.

Дискусія завершує стадію рефлексії та сприяє формуванню здатності аргументувати вибір методу розв'язування. В темі «Показникові рівняння», розглядаючи $2^{x+3} = 8 \cdot 4^x$ учні порівнюють методи логарифмування та

зведення до спільної основи, оцінюють їх ефективність та роблять висновки про оптимальність обраної стратегії [8].

2.3 Приклади реалізації методичних прийомів критичного мислення під час навчання змістової лінії «Рівняння і нерівності» курсу алгебри і початків аналізу

Приклади реалізації на стадії виклику

Стадія виклику спрямована на актуалізацію попередніх знань, пробудження інтересу до теми, формування мотивації та постановку гіпотез. На цій стадії учні усвідомлюють власний рівень підготовки, виявляють прогалини в знаннях і формулюють цілі для уроку, що є основою для подальшого критичного аналізу.

Парна або групова мозкова атака

Задача: Розв'язати логарифмічне рівняння $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = 2$ (11 клас).

Учні поділяються на групи по 4-5 осіб і протягом 4 хвилин записують ідеї на аркушах або в цифровій дошці (наприклад, Jamboard). Наприклад, одна група пропонує: «застосувати властивість суми логарифмів», «перевірити область визначення», «перейти до експоненціальної форми», «використати графік для перевірки» [9].

Учні в групі обговорюють ідеї: «Якщо додати логарифми, отримаємо $\log_3(x+2)(x-2)$, але треба перевірити, чи $x > 2$ для визначеності». Після цього групи презентують ідеї класу. Вчитель групує їх на дошці: «алгебраїчні методи» (властивість логарифмів, експоненціальна форма), «аналітичні методи» (перевірка області визначення), «графічні методи». Учні обирають властивість суми логарифмів: $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3(x+2)(x-2)$. Область визначення: $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$ та $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$.

Рівняння стає:

$$\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3(x+2)(x-2) = \log_3(x^2 - 4) = 2$$

$$\log_3(x^2 - 4) = \log_3 9$$

$$x^2 - 4 = 9$$

$$x^2 = 13$$

$$x = \pm\sqrt{13}$$

Учні перевіряють: $x = \sqrt{13} > 2$, підходить; $x = -\sqrt{13} < 2$, не підходить.

Отже, $x = \sqrt{13}$.

Для перевірки підставляють $x = \sqrt{13}$:

$$\begin{aligned} \log_3(\sqrt{13} + 2) + \log_3(\sqrt{13} - 2) &= \log_3(\sqrt{13} + 2)(\sqrt{13} - 2) = \log_3(13 - 4) = \\ &= \log_3 9 = 2 \end{aligned}$$

що підтверджує розв'язок.

Учні обговорюють, чому перевірка області визначення є ключовою, і чому відкинули $x = -\sqrt{13}$, що дозволяє глибше осмислити помилки, які можуть виникнути без аналізу умов логарифма. Групи порівнюють, чи могли б графічні методи (наприклад, побудова в GeoGebra) підтвердити результат швидше, і доходять висновку, що алгебраїчний підхід тут ефективніший для точності.

Робота з ключовими термінами

Задача. Розв'язати тригонометричну нерівність $\cos x \leq -0,5$ (10 клас).

Вчитель записує на дошці нерівність « $\cos x \leq -0,5$ ». Учні в групах по 3-4 особи протягом 5 хвилин створюють асоціативний куш, додаючи гілки: «період 2π », «критичні точки $\cos x = -0,5$ », «метод інтервалів», «графік косинусоїди», «питання: як знайти всі розв'язки на \mathbb{R} ?» [18].

Одна група пропонує метод інтервалів: учні розв'язують $\cos x = -0,5$, отримуючи $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. Вони ділять числову пряму на інтервали:

$$\left(-\infty; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right], \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \infty\right).$$
 Перевіряють знаки:

для $x = 0$, $\cos 0 = 1 > -0,5$, не підходить; для $x = \pi$, $\cos \pi = -1 < -0,5$, підходить.

Розв'язок: $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right]$. Інша група використовує GeoGebra, будучи графіки $y = \cos x$ та $y = -0,5$, і підтверджує, що $\cos x \leq -0,5$ на вказаних інтервалах.

Групи презентують кущі, порівнюючи, які гілки (наприклад, метод інтервалів чи графічний) були найефективнішими. Учні додають гілку «перевірка знаків»: для $x = \frac{4\pi}{3}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -0,5$, межа інтервалу, і пояснюють, чому знак \leq включає корені, а також обговорюють, як періодичність впливає на кількість розв'язків, що дозволяє повніше уявити множину розв'язків як об'єднання інтервалів. Учні в групах дискутують: «Якщо ігнорувати періодичність, розв'язок буде неповним, тому гілка «період 2π » є критичною».

Таблиця ЗХД (Знаю – Хочу дізнатися – Дізнався)

Задача. Розв'язати ірраціональну нерівність $\sqrt{2x-1} \geq x-1$ (11 клас).

Учні отримують таблицю ЗХД в зошитах. В колонці «Знаю» записують: « \sqrt{x} визначена для $x \geq 0$ », «піднесення до квадрата може дати сторонні корені». В «Хочу дізнатися»: «як розв'язати $\sqrt{2x-1} \geq x-1$?», «як перевірити розв'язки?». Учні визначають область визначення: $2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0,5$. Для $x \geq 1$ підносять до квадрата [21]:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x-1})^2 &\geq (x-1)^2 \\ 2x-1 &= x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 4x + 2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Розв'язують: $D = 16 - 8 = 8, x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}, x \in [2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$.

Перевіряють область: $2 - \sqrt{2} \approx 0,586 \geq 0,5$, підходить. Для $0,5 \leq x < 1$: $\sqrt{2x-1} \geq 0, x-1 < 0$, нерівність виконується. Учні перевіряють точку $x = 0,75$: $\sqrt{(2 \cdot 0,75 - 1)} = \sqrt{0,5} \approx 0,707; 0,75 - 1 = -0,25; 0,707 \geq -0,25$, виконується.

Розв'язок: $x \in [0,5; 2 + \sqrt{2}]$. В колонці «Дізнався»: «перевірка для $x < 1$ спрощує розв'язок», «піднесення до квадрата потребує перевірки». Учні діляться таблицями в парах, обговорюючи, як розділення на випадки ($x \geq 1$ і $x < 1$) уникнуло помилок, і чому перевірка точок (наприклад, $x = 1$: $\sqrt{2} \cdot 1 - 1 = 1,1 - 1 = 0,1 \geq 0$) підтверджує межі інтервалу, що дозволяє повніше зрозуміти поведінку функцій. Учні додають: «Розділення на випадки за $x = 1$ є критичним, бо для $x < 1$ права частина від'ємна, а ліва додатна» [28].

Приклади реалізації на стадії осмислення

Стадія осмислення передбачає активну роботу з новою інформацією, її аналіз, синтез і зіставлення з попередніми знаннями. На цій стадії учні глибоко занурюються в розв'язання задач, застосовуючи різні методи та перевіряючи гіпотези.

Маркування тексту

Задача: Розв'язати логарифмічну нерівність $\log_3(x^2 + 2x) < 1$ (11 клас).

Учням пропонується текст про логарифмічні нерівності. Учні маркують: «V» – « $\log_a x$ визначена для $x > 0$ », «+» – «для $a > 1$, $\log_a x < b$ еквівалентна $0 < x < a^b$ », «?» – «як врахувати складний аргумент $x^2 + 2x$?». Учні застосовують позначки: область визначення $x^2 + 2x > 0$, тобто $x(x + 2) > 0$, $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. Оскільки основа $3 > 1$, нерівність $\log_3(x^2 + 2x) < 1$ еквівалентна $0 < x^2 + 2x < 3^1 = 3$. Розв'язують: $x^2 + 2x > 0$ і $x^2 + 2x < 3$, тобто $x^2 + 2x - 3 < 0$, $(x + 3)(x - 1) < 0$, $x \in (-3; 1)$. Комбінують: $x \in (-3; -2) \cup (0; 1)$.

Перевіряють
точку

 $x = -2,5: x^2 + 2x = 6,25 - 5 = 1,25, \log_3 1,25 \approx 0,315 < 1$, виконується. Для «?» учні будують в GeoGebra графіки $y = \log_3(x^2 + 2x)$, $y = 1$, підтверджуючи $x \in (-3; -2) \cup (0; 1)$. Учні в парах обговорюють позначки, пояснюючи, чому аргумент $x^2 + 2x$ вимагає розв'язання нерівності $x(x + 2) > 0$ для виключення $x \in [-2; 0]$, і як перевірка меж ($x = -3: \log_3 3 = 1$ $x = -3$, не < 1) уточнює інтервал, що дозволяє глибше осмислити комбінацію умов. Учні додають:

«Для $x = 0,5: x^2 + 2x = 0,25 + 1 = 1,25$, $\log_3(1,25) \approx 0,315 < 1$, виконується, але для $x = -1: x^2 + 2x = 1 - 2 = -1 < 0$, не визначено» [29].

Подвійні щоденники

Задача. Розв'язати тригонометричне рівняння $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ (10 клас).

Вчитель пропонує помилковий розв'язок: заміна $t = \cos x, 2t^2 + t - 1 = 0$,
 $t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}, t = 0,5; t = -1, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; x = \pi + 2\pi k$, без перевірки всіх розв'язків. Учні аналізують: розв'язують $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, заміна $t = \cos x$ дає $2t^2 + t - 1 = 0, t = 0,5; t = -1$. Для $t = 0,5: \cos x = 0,5, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Для $t = -1: \cos x = -1, x = \pi + 2\pi k$. Помилка: пропущено $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Учні

перевіряють: для $x = -\frac{\pi}{3}, \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$,

виконується. Остаточний розв'язок: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ або $x = \pi + 2\pi k$. Учні

записують коректний розв'язок і пояснення: «пропущено розв'язки через неповний аналіз $\cos x = 0,5$ ». Учні обговорюють, чому $\cos x = 0,5$ має два розв'язки в періоді $2\pi\left(\pm \frac{\pi}{3}\right)$, і як перевірка для

$x = \frac{5\pi}{3}, \cos \frac{5\pi}{3} = 0,5; 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$, підтверджує повноту, що

дозволяє уникнути неповного множини розв'язків. Учні додають: «Для $x = \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3} = -0,5$, але не розв'язок рівняння, перевірка виключає

помилкові значення, що підкреслює важливість підстановки» [30].

Приклади реалізації на стадії рефлексії

Стадія рефлексії передбачає узагальнення знань, оцінку власної діяльності та інтеграцію досвіду. На цій стадії учні аналізують свій прогрес, виявляють сильні та слабкі сторони, що сприяє метакогнітивному розвитку.

Маркувальна таблиця

Задача. Розв'язати ірраціональне рівняння $x - \sqrt{(x-1)} = 2$ (11 клас).

Учні розв'язують: область визначення $x-1 \geq 0, x \geq 1$. Заміна $t = \sqrt{x-1}, t \geq 0, x = t^2 + 1$, рівняння: $t^2 + 1 - t = 2, t^2 - t - 1 = 0, D = 5, t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Оскільки $t \geq 0$, $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Перевіряють:

$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,618; \sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1,618; x - \sqrt{x-1} = 2,618 - 1,618 = 1$, не

виконується. Учні знаходять помилку: перевіряють $t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, не

підходить. Перевіряють $x = 1; 1 - \sqrt{1-1} = 1 \neq 2$. Рівняння немає розв'язків.

Складають таблицю з колонками [30]:

1. Рівняння,
2. Ірраціональне, складне,
3. Перетворює, перевіряє, аналізує,
4. Перевірка виключає розв'язки,
5. Задача.

Учні презентують таблиці в групах, обговорюючи, чому заміна $t = \sqrt{x-1}$ спростила рівняння, але перевірка показала відсутність розв'язків, і як це ілюструє важливість тестування коренів, що дозволяє узагальнити досвід. Учні додають: «Якщо не перевірити підстановку, отримаємо хибний

розв'язок $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, бо $1 \neq 2$ ».

ПМЦ (Плюс – Мінус – Цікаво)

Задача. Розв'язати нерівність з параметром $ax^2 + x + 1 \geq 0$ (11 клас).

Учні аналізують: для $a \neq 0, D = 1 - 4a$. Якщо $a > 0, D < 0$ ($a < 0,25$), нерівність виконується для всіх x . Якщо $a < 0, D > 0$ ($a < 0,25$), корені

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}, \quad \text{нерівність:} \quad x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{1-4a}}{2a}; \frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2a} \right). \quad \text{Якщо}$$

$$a = 0, x + 1 \geq 0, x \geq -1. \quad \text{Перевіряють:} \quad \text{для} \quad a = -1, x^2 - x - 1 = 0, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{нерівність:} \quad x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{-2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{-2} \right). \quad \text{Учні заповнюють ПМЦ: «Плюс» –}$$

«дискримінант визначає випадки», «Мінус» – «аналіз $a < 0$ складний», «Цікаво» – «модельовання графіків в GeoGebra». Учні діляться таблицями, записуючи пропозицію: «використовувати GeoGebra для аналізу при різних a ». Обговорюють, як для $a = 0,1$ ($D < 0$, парабола вгору, завжди ≥ 0), перевірка точки $x = 0: 0,1 \cdot 0 + 0 + 1 = 1 \geq 0$ підтверджує, а для $a = -0,5$ ($D > 0$, парабола вниз, між коренями ≥ 0), що дозволяє оцінити вплив параметра на графік. Учні додають: «Для $a = 0,25, D = 0$, рівняння має один корінь, нерівність ≥ 0 для всіх x , бо $a > 0$ » [9].

Для наглядності ПМЦ наведено таблицю з прикладом від одного учня:

Плюс	Мінус	Цікаво
Дискримінант $D = 1 - 4a$ визначає кількість коренів і знак	Аналіз випадків $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$ вимагає багато розрахунків	Модельовання в GeoGebra показує зміну графіка при зміні a
Перевірка точок підтверджує розв'язки	Помилки при обчисленні коренів для $a < 0$	Застосування в реальних задачах, як оптимізація функцій з параметрами
Узагальнення для всіх x при $D < 0$	Складність комбінації умов	Інтеграція з похідними для аналізу мінімумів

2.4 Конспект уроку на тему «Показникові рівняння» у технології критичного мислення

Клас: 11 клас (профільний рівень)

Тема уроку: Показникові рівняння

Тип уроку: Урок засвоєння нових знань

Мета уроку:

Навчальна: сформувати в учнів уміння розв'язувати показникові рівняння, використовуючи властивості показникової функції, логарифми та метод заміни, а також розвивати навички критичного аналізу умов задач.

Розвивальна: розвивати критичне мислення через застосування методичних прийомів, сприяти формуванню аналітичних навичок, здатності до аргументації та самоконтролю.

Виховна: формувати в учнів відповідальність за власний навчальний процес, уміння співпрацювати в групах, повагу до думок однокласників та мотивацію до саморозвитку.

Тривалість: 45 хвилин

Обладнання: дошка, маркери, роздаткові матеріали (таблиці ЗХД, тексти для інсерту), ноутбуки або планшети з доступом до GeoGebra, аркуші для групової роботи, проєктор.

Методична основа: технологія розвитку критичного мислення за трифазною моделлю (актуалізація, побудова знань, консолідація) за А. Кроуфорд, В. Саул, С. Метью, Д. Макінстер.

Хід уроку

I. Стадія виклику (10 хвилин)

Мета фази:

- актуалізувати знання про властивості показникових функцій та основу майбутніх способів розв'язування;
- виявити прогалини у розумінні та помилкові уявлення;

- сформуувати готовність учнів до роботи з показниковими рівняннями;
- стимулювати інтерес до теми через постановку проблемних питань.

Завдання фази:

1. Пробудити інтерес учнів до теми, спираючись на їхні знання про показникові функції;
2. Активізувати мислення через групову роботу та висловлення власних ідей;
3. Визначити мету уроку та мотивувати до цілеспрямованого навчання;

Методичні прийоми:

Парна мозкова атака: вчитель ставить питання: «Які методи можна використати для розв’язання рівнянь виду $a^x = b$ або складніших, наприклад, $a^x + a^y = c$?» Учні поділяються на групи по 4-5 осіб і протягом 3 хвилин записують ідеї на аркушах (або в Jamboard). Наприклад, група може запропонувати: «використати логарифми», «спростити через заміну», «перевірити область визначення», «побудувати графік». Вчитель групує ідеї на дошці за категоріями: алгебраїчні методи (логарифми, заміна), графічні методи, аналітичні (область визначення). Учні обговорюють: «Чому логарифми підходять для $a^x = b$?» (Відповідь: дозволяють позбутися показника). Це допомагає актуалізувати знання про логарифми та їх зв’язок із показниковими функціями.

Робота з ключовими словами: вчитель записує на дошці центральне поняття «Показникові рівняння». Учні в групах протягом 4 хвилин створюють асоціативний куц, додаючи гілки: «властивості показникової функції», «логарифми», «заміна змінної», «графічний метод», «питання: як розв’язати $2^x + 2^{x-1} = 3$?». Одна група пропонує: «Використати властивість $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ». Учні презентують куці, порівнюючи ідеї. Наприклад, одна

група додає гілку «перевірка коренів», пояснюючи: «Для $2^x = -1$ немає розв'язків, бо $2^x > 0$ ». Це допомагає виявити помилкові уявлення (наприклад, ігнорування області значень a^x).

Таблиця для роботи з ключовими поняттями (приклад від однієї групи):

Центральне поняття	Гілка 1	Гілка 2	Гілка 3	Питання
Показникові рівняння	Властивості $a^x > 0$	Логарифми для $a^x = b$	Заміна змінної	Як розв'язати $2^x + 2^{x-1} = 3$?
	Графік в GeoGebra	Перевірка коренів	Область визначення	Як врахувати $a < 0$?

Створення кластера.

Учні працюють в групах, формуючи кластер «Показникові рівняння».

Учень 1: «Я знаю, що 2^x завжди додатне, тому $2^x = -1$ неможливо».

Учень 2: «А якщо підставити логарифми, ми зможемо розв'язати $2^x = 8$?»

Вчитель: «Чудово, давайте сформулюємо мету: навчитися розв'язувати показникові рівняння, використовуючи логарифми, заміну та перевірку».

Висновок фази: учні актуалізували знання про показникову функцію ($a^x > 0$, монотонність), логарифми та методи розв'язання рівнянь. Учитель формулює мету уроку: «Сьогодні ми навчимося розв'язувати показникові рівняння, застосовуючи різні методи, та перевіряти їхні розв'язки».

II. Стадія осмислення (25 хвилин)

Мета:

- співвіднести новий матеріал із наявними знаннями;
- опанувати методи аналізу показникових рівнянь;
- навчитися аргументувати вибір способу розв'язування;
- поставити нові запитання для поглиблення розуміння.

Завдання:

- забезпечити контакт з новою інформацією через розв’язання задач;
- стимулювати аналіз та синтез через групову роботу та порівняння методів;
- відстежити процес мислення учнів, виявити труднощі та сформулювати нові запитання.

Методичні прийоми:

Маркування тексту. Учням роздається текст про розв’язання показникових рівнянь. Учні маркують текст:

- «V» – відоме (наприклад, « $a^x > 0$ для всіх x »),
- «+» – нова інформація (наприклад, « $\log_a a^x = x$ дозволяє розв’язати $a^x = b$ »),
- «?» – питання (наприклад, «як розв’язати $2^x + 2^{x-1} = 3$?»),
- «←» – суперечливе (наприклад, «заміна може дати сторонні корені»).

Задача для маркування:

Розв’язати рівняння $2^x + 2^{x-1} = 3$.

Учні застосовують позначки:

- Область значень: $2^x > 0$, тому рівняння визначене для всіх x .
- Використовують властивість: $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$, рівняння стає $2^x + \frac{2^x}{2} = 3$. Спрощують: $2^x \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3, 2^x \cdot \frac{3}{2} = 3, 2^x = 2$. Отже, $x = 1$.
- Перевіряють: $2^1 + \frac{2^1}{2} = 2 + 1 = 3$, виконується.
- Для «?» учні будують в GeoGebra графік $y = 2^x + 2^{x-1}$ та $y = 3$, підтверджуючи перетин при $x = 1$.

Учні в парах обговорюють позначки: «Чому заміна $t = 2^x$ спрощує задачу?» (Відповідь: перетворює показники в лінійне рівняння). Це

допомагає зіставити нову інформацію (властивості показників) із попередніми знаннями.

Подвійний щоденник:

Задача: Розв'язати рівняння $3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$.

Клас ділиться на три експертні групи:

Група 1 (заміна змінної): Замінують $t = 3^x, t > 0$. Рівняння: $t^2 - 2t + 1 = 0, (t - 1)^2 = 0, t = 1$. Отже, $3^x = 1, x = 0$. Перевіряють: $3^{2 \cdot 0} - 2 \cdot 3^0 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, виконується.

Група 2 (графічний метод): В GeoGebra будують графік $y = 3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1$, визначаючи перетин з $y = 0$ при $x = 0$.

Група 3 (аналітичний метод): Розглядають рівняння як квадратне щодо 3^x : $(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x + 1 = 0$, що підтверджує $x = 0$.

В змішаних групах учні синтезують: заміна $t = 3^x$ дає точний розв'язок, графічний метод підтверджує єдину точку перетину, аналітичний метод уточнює унікальність кореня. Учні перевіряють точку $x = 1: 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 9 - 6 + 1 = 4 \neq 0$, що виключає інші корені. Обговорюють: «Чому заміна ефективніша?» (Відповідь: спрощує до квадратного рівняння).

Діалог учнів:

Учень 1: «Заміна $t = 3^x$ зробила рівняння простим, але як перевірити, чи немає інших коренів?»

Учень 2: «Графік показує одну точку перетину, але я б перевірів $x = 1$ ».

Вчитель: «Чудово, перевірка виключає помилки. Які нові питання виникли?»

Учень 3: «Як розв'язати, якщо є параметр, наприклад, $a \cdot 3^x = b$?»

Висновок: учні освоїли методи розв'язання показникових рівнянь (заміна, логарифми, графічний), порівняли їх ефективність і сформулювали нові питання, наприклад, про рівняння з параметрами.

III. Стадія рефлексії (10 хвилин)

Мета:

- узагальнити знання про методи розв'язання показникових рівнянь;
- сформуванати рефлексію щодо отриманих знань і їх значення;
- оцінити процес навчання та поставити додаткові запитання.

Завдання:

- узагальнити основні ідеї (властивості показникових функцій, методи розв'язання);
- інтерпретувати знання через зв'язок з реальними задачами;
- обмінятися думками в групах та оцінити власний прогрес.

Методичні прийоми:

Повернення до кластеру:

Задача. Розв'язати рівняння $5^x = 25$.

Учні розв'язують: $5^x = 5^2, x = 2$. Перевіряють: $5^2 = 25$, виконується.

Складають кластер:

1. Рівняння.
2. Показникове, просте.
3. Логарифмує, перевіряє, спрощує.
4. Логарифми дають точний розв'язок.
5. Задача.

Учні презентують кластери в парах, обговорюючи, чому логарифми ефективні: «Для $5^x = 25$, $\log_5 25 = 2$ одразу дає x ». Це допомагає узагальнити методи та підкреслити важливість перевірки.

ПМЦ (Плюс – Мінус – Цікаво):

Учні заповнюють таблицю ПМІ:

Плюс: «Логарифми спрощують $a^x = b$ до $x = \log_a b$ », «Заміна перетворює складні рівняння в квадратні».

Мінус: «Легко забути перевірити область значень», «Графічний метод менш точний».

Цікаво: «Як показникові рівняння використовуються в моделюванні зростання населення?»»

Учні діляться таблицями в групах, обговорюючи: «Мінус можна подолати, якщо завжди перевіряти корені». Вчитель пропонує зв'язок з реальним світом: «Показникові рівняння описують експоненціальне зростання, наприклад, у фінансах чи біології».

Таблиця ПМЦ (приклад від одного учня):

Плюс	Мінус	Цікаво
Логарифми спрощують $a^x = b$	Ігнорування перевірки коренів	Застосування в моделюванні зростання
Заміна $t = a^x$ для складних рівнянь	Графічний метод дає наближені значення	Як розв'язати з параметрами?
Перевірка підтверджує точність	Складність із дробовими основами	Зв'язок з реальними задачами

Діалог учнів:

Учень 1: «Логарифми спрощують, але я забув перевірити $2^x > 0$ ».

Учень 2: «Цікаво, як 2^x моделює бактерії. Це як у біології?»»

Вчитель: «Так, експоненціальне зростання описує популяції. Які ще питання у вас?»»

Учень 3: «Як розв'язати $2^x + a \cdot 2^x = b$?»»

Висновок: учні узагальнили методи розв'язання показникових рівнянь, оцінили їх переваги та недоліки, пов'язали знання з реальними задачами та сформулювали нові питання, наприклад, про параметри.

IV. Домашнє завдання (2 хвилини)

1. Розв'язати рівняння:

– $4^x = 16$

– $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

2. Скласти кластер на тему «Логарифми в показникових рівняннях».

3. В GeoGebra побудувати графіки для рівняння $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ та перевірити розв'язки.

Оцінювання: учні отримують бали за активність в групах, коректність розв'язань і якість рефлексії в сенкані та ПМЦ.

2.5. Конспект уроку на тему «Логарифмічні нерівності» у технології критичного мислення

Клас: 11 клас (профільний рівень)

Тема уроку: Логарифмічні нерівності

Тип уроку: Урок удосконалення вмінь і навичок

Мета уроку:

– **Навчальна:** вдосконалити вміння учнів розв'язувати логарифмічні нерівності, застосовуючи властивості логарифмічної функції, метод інтервалів, зміну основи та перевірку області визначення, а також формувати навички аналізу складних задач;

– **Розвивальна:** розвивати критичне мислення через застосування методичних прийомів, сприяти вдосконаленню аналітичних навичок, аргументації та самоконтролю;

– **Виховна:** виховувати в учнів інтерес до самостійного розв'язання задач, відповідальність за групову роботу, толерантність до думок інших та мотивацію до постійного самовдосконалення.

Тривалість: 45 хвилин

Обладнання: дошка, маркери, роздаткові матеріали (таблиці ЗХД, тексти для маркування), ноутбуки або планшети з доступом до GeoGebra, аркуші для групової роботи, проектор.

Методична основа: Технологія розвитку критичного мислення за трифазною моделлю (актуалізація, побудова знань, консолідація) за А. Кроуфорд, В. Саул, С. Метью, Д. Макінстер.

Хід уроку

I. Стадія виклику (10 хвилин)

Мета:

- актуалізувати знання про логарифмічну функцію та її властивості;
- виявити можливі хибні уявлення щодо логарифмів з різними основами;
- створити початкові орієнтири для подальшого розв'язування нерівностей.;
- стимулювати інтерес через проблемні ситуації.

Завдання:

1. пробудити інтерес учнів до теми, спираючись на їхні наявні вміння;
2. активізувати мислення через групову взаємодію та аналіз власних знань;
3. визначити мету уроку та мотивувати до удосконалення навичок.

Методичні прийоми:

Парна мозкова атака. Вчитель ставить питання: «Які стратегії розв'язання логарифмічних рівнянь можна адаптувати до нерівностей, наприклад, $\log_a(f(x)) > b$?» Учні поділяються на групи по 4-5 осіб і протягом 3 хвилин записують ідеї на аркушах (або в Jamboard). Наприклад, група може запропонувати: «використати монотонність логарифмів», «врахувати знак основи», «застосувати метод інтервалів», «перевірити графічно». Вчитель групує ідеї на дошці за категоріями: властивості логарифмів (монотонність, зміна основи), методи аналізу (інтервали, графіки). Учні обговорюють: «Чому для $a > 1$ $\log_a x > b$ означає $x > a^b$?» (Відповідь: через зростаючу функцію). Це допомагає актуалізувати вміння з попередніх уроків.

Робота з ключовими словами. Вчитель записує на дошці центральне поняття «Логарифмічні нерівності». Учні в групах протягом 4 хвилин створюють асоціативний кущ, додаючи гілки: «монотонність функції»,

«зміна знаку для $a < 1$ », «метод інтервалів», «графічний метод», «питання: як розв'язати $\log_4(x^2 - 3) < 1$?». Одна група пропонує: «Комбінувати з квадратичними нерівностями». Учні презентують кущі, порівнюючи ідеї. Наприклад, одна група додає гілку «перевірка області визначення», пояснюючи: «Для $\log_a x, x > 0, a > 0, a \neq 1$ ». Це допомагає виявити прогалини, наприклад, в розумінні зміни знаку.

Діалог учнів:

Учень 1: «Монотонність допомагає перетворювати $\log_a x > b$ на $x > a^b$ для $a > 1$ ».

Учень 2: «А для $a < 1$ знак змінюється на $x < a^b$ ».

Вчитель: «Правильно, давайте сформулюємо мету: удосконалити вміння розв'язувати логарифмічні нерівності з перевіркою».

Висновок:

Учні актуалізували вміння роботи з логарифмами (монотонність, область визначення), сформулювали ідеї для удосконалення методів розв'язання нерівностей. Вчитель формулює мету уроку: «Сьогодні ми удосконалимо вміння розв'язувати логарифмічні нерівності, застосовуючи різні методи та перевіряючи розв'язки».

II. Стадія осмислення (25 хвилин)

Мета:

- забезпечити глибоке розуміння логіки розв'язування логарифмічних нерівностей;
- навчитись аналізувати вплив основи логарифма на напрям нерівності;
- відпрацювати алгоритмічні та концептуальні складові розв'язування нерівностей;
- поставити нові запитання для поглиблення.

Завдання:

- забезпечити практику з новою інформацією через розв'язання задач;
- стимулювати аналіз і синтез через групову роботу;
- відстежити процес мислення, виявити труднощі та сформулювати нові запитання.

Методичні прийоми:

Маркування тексту: учням роздається текст про логарифмічні нерівності. Учні маркують текст:

- «V» – відоме (наприклад, « $\log_a x$ визначена для $x > 0$ »),
- «+» – нова інформація (наприклад, «для $0 < a < 1$ знак змінюється»),
- «?» – питання (наприклад, «як розв'язати $\log_4(x^2 - 3) < 1$?»),
- «-» – суперечливе (наприклад, «ігнорування зміни знаку»).

Задача для маркування: Розв'язати нерівність $\log_4(x^2 - 3) < 1$.

Учні застосовують позначки:

- область визначення: $x^2 - 3 > 0, |x| > \sqrt{3}$.
- зміна основи: $\log_4 y = \frac{\ln y}{\ln 4} = \frac{1}{2} \log_2 y$, але простіше: оскільки $4 > 1$, $\log_4(x^2 - 3) < 1$ еквівалентна $x^2 - 3 < 4 = 4, x^2 < 7, |x| < \sqrt{7}$. Комбінують: $\sqrt{3} < |x| < \sqrt{7}$.
- перевіряють точку $x = 2$: $\log_4(4 - 3) = \log_4(1) = 0 < 1$, виконується.
- Для «?» учні будують в GeoGebra графіки $y = \log_4(x^2 - 3)$ та $y = 1$, підтверджуючи інтервал.

Учні в парах обговорюють позначки: «Чому зміна основи допомагає?» (Відповідь: спрощує до знайомої \log_2).

Подвійні щоденники:

Задача: Розв'язати нерівність $\log_{0,2}(x + 4) > 2$.

Клас ділиться на три експертні групи:

– **Група 1 (алгебраїчний метод):** Оскільки основа $0,2 < 1$, нерівність $\log_{0,2}(x + 4) > 2$ еквівалентна $x + 4 < 0,2^2 = 0,04$ (змінений знак), $x < -3,96$. Область визначення: $x + 4 > 0, x > -4$. Комбінують: $-4 < x < -3,96$.

– **Група 2 (метод інтервалів):** Знаходять критичну точку $x + 4 = 0,2^2, x = -3,96$, та аналізують знаки.

– **Група 3 (графічний метод):** в GeoGebra будують $y = \log_{0,2}(x + 4), y = 2$, визначаючи інтервал, де функція > 2 .

В змішаних групах учні синтезують: алгебраїчний метод дає точний розв'язок, метод інтервалів перевіряє знаки, графічний підтверджує $-4 < x < -3,96$. Учні перевіряють точку $x = -3,98: \log_{0,2}(0,02) > 2$, оскільки $0,2 < 1$ і $0,02 < 0,04$. Обговорюють: «Чому знак змінюється?» (Відповідь: функція спадна для $a < 1$).

Діалог учнів:

Учень 1: «Для $a < 1$ знак змінюється, тому $x < a^b$ ».

Учень 2: «Метод інтервалів показує, де функція більша за 2».

Вчитель: «Правильно, перевірка виключає помилки. Які нові питання виникли?»

Учень 3: «Як розв'язати з двома логарифмами?»

Висновок: учні удосконалили вміння розв'язання логарифмічних нерівностей (алгебраїчний, метод інтервалів, графічний), порівняли їх ефективність і сформулювали нові питання, наприклад, про комбіновані нерівності.

III. Стадія рефлексії (10 хвилин)

Мета:

- узагальнити засвоєні знання про логарифмічні нерівності;
- оцінити власний прогрес;
- сформулювати навички аргументації.

Завдання:

- узагальнити основні ідеї (властивості логарифмів, зміна знаку);

- інтерпретувати знання через зв'язок з реальними задачами;
- обмінятися думками в групах та оцінити власний прогрес.

Методичні прийоми:

Повернення до кластера

Задача. Розв'язати нерівність $\log_5(x-2) > 0$.

Учні розв'язують: для $a = 5 > 1, x - 2 > 5^0 = 1, x > 3$. Область визначення: $x > 2$. Комбінують: $x > 3$. Перевіряють: $x = 4, \log_5 2 > 0$, оскільки $2 > 1$.

Складають кластер:

1. Нерівність
2. Логарифмічна, аналітична
3. Аналізує, перевіряє, комбінує
4. Область визначення ключова
5. Задача

Учні презентують кластери в парах, обговорюючи, чому властивості логарифмів ефективні: «Для $\log_5(x-2) > 0, x > 3$, але перевірка $x > 2$ уточнює». Це допомагає узагальнити методи та підкреслити важливість перевірки.

ПМЦ (Плюс – Мінус – Цікаво):

Учні заповнюють таблицю ПМЦ:

Плюс: «Метод інтервалів точний для складних аргументів», «Зміна знаку для $a < 1$ допомагає».

Мінус: «Легко пропустити перевірку області визначення», «Графічний метод вимагає інструментів».

Цікаво: «Як логарифмічні нерівності застосовуються в економічних моделях?»

Учні діляться таблицями в групах, обговорюючи: «Мінус можна подолати, якщо систематично перевіряти умови». Вчитель пропонує зв'язок з реальним світом: «Логарифмічні нерівності використовуються в шкалах вимірювань, наприклад, Ріхтера».

Таблиця ПМЦ (приклад від одного учня):

Плюс	Мінус	Цікаво
Метод інтервалів точний	Ігнорування області визначення	Застосування в економічних моделях
Зміна знаку для $a < 1$	Графічний метод вимагає GeoGebra	Як розв'язати з параметрами?
Перевірка підтверджує точність	Складність із дробовими основами	Зв'язок із реальними задачами

Діалог учнів:

Учень 1: «Метод інтервалів точний, але я пропустив область».

Учень 2: «Цікаво, як логарифм моделює зростання».

Вчитель: «Так, логарифми в шкалах. Які ще питання у вас?»

Учень 3: «Як комбінувати з іншими функціями?»

Висновок: учні узагальнили методи розв'язання логарифмічних нерівностей, оцінили їх переваги та недоліки, пов'язали знання з реальними задачами та сформулювали нові питання, наприклад, про комбіновані нерівності.

IV. Домашнє завдання (2 хвилини)

1. Розв'язати нерівності:

– $\log_9(x+3) < \frac{1}{2}$

– $\log_{0,1}(x^2+x) > -1$

2. Скласти кластер на тему «Методи розв'язання логарифмічних нерівностей».

3. В GeoGebra побудувати графіки для нерівності $\log_{0,1}(x^2+x) > -1$ і перевірити розв'язки.

Оцінювання: учні отримують бали за активність у групах, коректність розв'язань і якість рефлексії в кластері та ПМЦ.

2.6 Експериментальна перевірка окремих результатів дослідження

Метою експерименту було порівняння ефективності методичних прийомів розвитку критичного мислення з класичними методами навчання під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» в курсі алгебри і початків аналізу в старшій школі. Дослідження мало на меті перевірити гіпотезу, що використання технології критичного мислення сприяє формуванню аналітичних здібностей, розвитку вмінь аргументувати розв'язання та застосовувати знання в нестандартних ситуаціях. Експеримент проводився в ліцеї №16, який знаходиться в місті Київ. Для експерименту було обрано 10-А клас, який налічує 28 учнів.

Організація експерименту

Педагогічний експеримент проводився в три етапи: підготовчий, основний та оцінювальний. Для забезпечення об'єктивності дослідження клас було поділено на дві групи – експериментальну та контрольну, по 14 учнів в кожній. Поділ здійснювався за принципом випадкового відбору з урахуванням рівня попередньої підготовки учнів, щоб забезпечити однакові стартові умови.

Підготовчий етап:

– **експериментальна група** – навчання проводилося з використанням методичних прийомів критичного мислення. Дані методи передбачали активну участь учнів в постановці запитань, аналізі альтернативних підходів до розв'язання рівнянь і нерівностей, а також рефлексію над власними розв'язками.

– **контрольна група** – навчання здійснювалося за традиційною методикою, яка включала лекційно-практичний підхід, а саме, пояснення вчителем теоретичного матеріалу, демонстрація стандартних алгоритмів розв'язання, виконання типових вправ та контроль знань через тестування.

Вхідне тестування для обох груп, було проведено щоб переконатися в відсутності значних відмінностей в рівні знань з алгебри на початку

експерименту. Результати вхідного тестування показали середній бал 7,8 для експериментальної групи та 7,7 для контрольної групи, що підтверджує порівнянність груп.

Основний етап

Протягом 4 тижнів учні обох груп вивчали теми «Показникові рівняння» та «Логарифмічні нерівності». Уроки в експериментальній групі були структуровані за трифазною моделлю технології критичного мислення: виклик (актуалізація знань), осмислення (аналіз нового матеріалу через проблемні завдання) та рефлексія (оцінка власного розуміння). Наприклад, учні експериментальної групи розв'язували задачі, що вимагали порівняння різних методів розв'язання показникових рівнянь (аналітичного, графічного), а також пояснення їх доцільності. В контрольній групі уроки базувалися на прямій передачі знань та відпрацюванні стандартних алгоритмів.

В експериментальній групі активно використовувалися інтерактивні методи. В контрольній групі основний акцент робився на індивідуальній роботі та механічному відтворенні алгоритмів.

Оцінювальний етап

Контрольна робота, яку дали учням складалася з трьох блоків завдань:

- **теоретичні питання** (знання означень, властивостей показникових та логарифмічних функцій);
- **стандартні задачі** (розв'язання типових рівнянь та нерівностей);
- **творчі завдання** (задачі, що вимагали аналізу, порівняння методів або розв'язання нестандартних ситуацій).

Результати експерименту

Результати контрольної роботи показали значні відмінності між групами. Для експериментальної групи результати відображені на рисунку 3.1:

Результати експериментальної групи

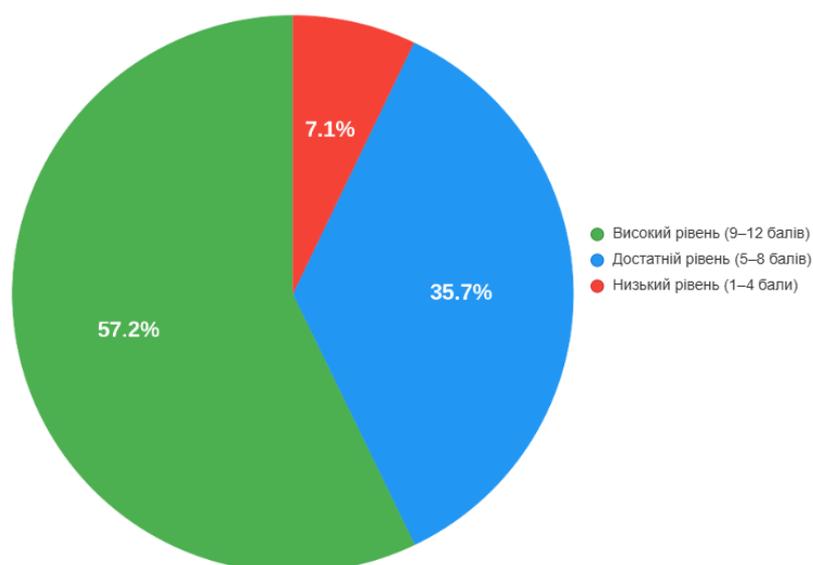


Рисунок 3.1 – Результати оцінювання експериментальної групи
Для контрольної групи результати відображені на рисунку 3.2:

Результати контрольної групи

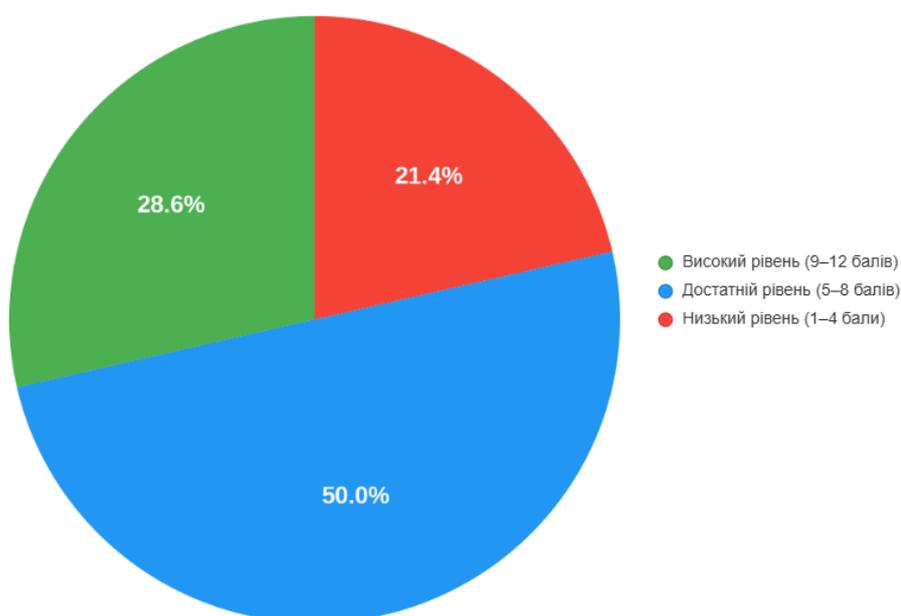


Рисунок 3.2 – Результати контрольної групи

Середній бал в експериментальній групі склав 9,2, тоді як в контрольній групі – 7,6. Учні експериментальної групи показали кращі результати в творчих завданнях (середній бал – 8,9 проти 6,5 в контрольній

групі), що свідчить про вищий рівень аналітичних здібностей та вміння застосовувати знання в нестандартних ситуаціях.

Додатково було проведено опитування учнів щодо їх мотивації до навчання. В експериментальній групі 78,6% учнів зазначили, що інтерактивні методи підвищили їхню зацікавленість в предметі, тоді як в контрольній групі лише 42,9% учнів висловили позитивне ставлення до уроків.

Порівняння результатів дозволяє зробити наступні висновки.

Учні експериментальної групи частіше використовували альтернативні методи розв'язання (наприклад, графічний метод для перевірки аналітичного розв'язання) та надавали обґрунтовані пояснення своїх розв'язків. Це підтверджує ефективність методів критичного мислення у формуванні аналітичного підходу.

Використання таких прийомів як мозковий штурм та інсерт сприяли підвищенню інтересу до вивчення алгебри. Учні експериментальної групи частіше висловлювали бажання досліджувати різні способи розв'язання задач.

Лише 7,1% учнів експериментальної групи отримали низький рівень, порівняно з 21,4% в контрольній групі. Це свідчить про те, що методи критичного мислення сприяють кращому засвоєнню матеріалу навіть учнями з нижчим рівнем підготовки.

Учні експериментальної групи показали значно кращі результати в задачах, що вимагали нестандартного підходу, порівняння методів або аналізу умов задачі.

Під час експерименту було помічено, що учні експериментальної групи активніше брали участь в груповій роботі, демонстрували вищий рівень співпраці та ініціативності. Наприклад, під час виконання завдань за методом «Мозковий штурм» учні пропонували власні ідеї щодо розв'язання логарифмічних нерівностей, що сприяло глибшому розумінню матеріалу. В контрольній групі такі ініціативи були рідкішими, а учні частіше покладалися на вказівки вчителя.

Крім того, методи критичного мислення сприяли розвитку метакогнітивних навичок, учні експериментальної групи частіше аналізували власні помилки та пропонували способи їх виправлення. Це підтверджується результатами рефлексії, проведеної після уроків, де учні експериментальної групи надавали більш ґрунтовні відповіді на запитання типу «Що я зрозумів на уроці?» та «Як я можу покращити свої результати?».

Результати експерименту підтверджують гіпотезу, що використання методичних прийомів критичного мислення під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» є ефективнішим порівняно з традиційними методами. Учні експериментальної групи продемонстрували вищі академічні результати, зокрема в творчих завданнях, що вимагали аналізу, синтезу та оцінювання інформації. Крім того, методи критичного мислення сприяли підвищенню мотивації до навчання, розвитку аналітичних здібностей та вмінню працювати в команді. Отримані дані можуть бути використані для вдосконалення методики викладання алгебри і початків аналізу в старшій школі, а також для розробки нових підходів до навчання математики, спрямованих на формування критичного мислення учнів.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження присвячене аналізу та впровадженню технології розвитку критичного мислення в процесі навчання змістової лінії «Рівняння і нерівності» на уроках алгебри і початків аналізу в старшій школі. В сучасних умовах реформування освіти, спрямованих на формування компетентнісного підходу, розвиток критичного мислення набуває особливого значення як ключовий елемент підготовки учнів до самостійного аналізу, прийняття обґрунтованих рішень та розв'язання складних проблем в динамічному світі. Дослідження охопило як теоретичні аспекти критичного мислення, так і практичні підходи до його реалізації в освітньому процесі, що дозволило комплексно оцінити ефективність запропонованої методичної моделі.

Критичне мислення, як когнітивний процес, передбачає здатність учнів аналізувати інформацію, оцінювати її достовірність, знаходити альтернативні підходи до розв'язання задач і обґрунтовувати власні висновки. У контексті вивчення алгебри і початків аналізу, зокрема тем «Показникові рівняння» та «Логарифмічні нерівності», технологія критичного мислення сприяє формуванню в учнів не лише предметних знань, а й метакогнітивних навичок, таких як рефлексія, самоконтроль та вміння працювати в команді. Використання таких методичних прийомів, як «Мозковий штурм», «Інсерт», «Джигсоу» та «ПМЦ», дозволяє структурувати навчальний процес за трифазною моделлю (виклик, осмислення, рефлексія), що стимулює активну пізнавальну діяльність учнів.

Експериментальна перевірка підтвердила ефективність використання технології критичного мислення порівняно з традиційними методами навчання. Учні експериментальної групи, які навчалися за запропонованою методичною моделлю, продемонстрували вищі результати в розв'язанні творчих завдань, що вимагали аналізу, синтезу та порівняння різних методів розв'язання. Середній бал в цій групі склав 9,2 проти 7,6 в контрольній групі,

що свідчить про кращу успішність та глибше розуміння матеріалу. Особливо помітною була перевага в нестандартних задачах, де учні експериментальної групи показали середній бал 8,9 проти 6,5 в контрольній групі. Крім того, опитування учнів виявило зростання їх мотивації до навчання: 78,6% учнів експериментальної групи зазначили підвищення зацікавленості в предметі завдяки інтерактивним методам, тоді як в контрольній групі цей показник склав лише 42,9%.

Результати дослідження вказують на те, що технологія критичного мислення не лише сприяє засвоєнню математичних знань, а й формує в учнів ключові компетентності, такі як аналіз, оцінювання, співпраця та комунікація. Інтерактивні методи, застосовані в процесі навчання, допомогли зменшити кількість низьких результатів (7,1% в експериментальній групі проти 21,4% у контрольній), що свідчить про ефективність запропонованого підходу навіть для учнів з нижчим рівнем підготовки. Учні експериментальної групи частіше демонстрували ініціативність, пропонували власні ідеї та аналізували помилки, що є важливим показником розвитку метакогнітивних навичок.

Запропонована методична модель, яка включає конспекти уроків на теми «Показникові рівняння» та «Логарифмічні нерівності», може бути адаптована до інших тем курсу алгебри і початків аналізу, а також до інших предметів, що потребують аналітичного підходу. Використання технології критичного мислення створює умови для формування в учнів цілісного розуміння математичних концепцій, розвитку вміння застосовувати знання в нестандартних ситуаціях і підвищення їх мотивації до навчання. Отримані результати можуть бути використані вчителями математики для вдосконалення методик викладання, а також слугувати основою для подальших досліджень в сфері впровадження компетентнісного підходу в освіті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти) / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – Київ: Видавничий дім "Освіта", 2018. – 288 с.
2. Бевз Г.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти) / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – Київ: Видавничий дім "Освіта", 2019. – 272 с.
3. Бурда М.І. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М.І. Бурда, Т.В. Колесник, Ю.І. Мальований, Н.А. Тарасенкова. – К. : УОВЦ «Оріон», 2018. – 272 с.
4. Енциклопедія педагогічних технологій та інновацій / Автор-укладач Н.П. Новолокова.-2-ге вид. – Х.: Вид.група «Основа», 2012.-С.57-63.
5. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. – Київ: Генеза, 2018.-384 с.
6. Козира В. М. Технологія розвитку критичного мислення у навчальному процесі: навчально-методичний посібник для вчителів. Тернопіль ТОКІШПО. 2017. 60 с.
7. Корнієнко Т.Л. Алгебра. 10-11 класи. Методи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем: Розробки занять/ Т.Л. Корнієнко, В.І. Фіготіна. – Х.: Вид-во "Ранок", 2009.-272с.
8. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Річняк Р. Я. Інноваційні методи навчання математики. Науково-методичний посібник. Інноваційні методи навчання математики. Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 148 с.
9. Лякішева А. В., Вітюк В. В., Кашуб'як І. О. Кейсбук методів і прийомів технології розвитку критичного мислення в Новій українській школі : навч.-метод. посіб. для вчит. поч. класів ЗЗСО та

- студ. спец. 013 Початкова освіта / Анна Лякішева, Валентина Вітюк, Ірина Кашуб'як. 2-ге вид., переробл. і доповн. Луцьк : ФОП Іванюк В. П., 2022. 116 с.
10. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В.Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 256 с.
 11. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 208 с.
 12. Мерзляк А.Г. та ін.. Алгебраїчний тренажер: Посібник для школярів і абітурієнтів/ Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С.-2-ге вид., перероб. і доп. -Х.: Гімназія, 2009. - 272с.
 13. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту // Математика в рідній школі. – 2017. №10. – С.2-10.
 14. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // <https://mon.gov.ua/> / ... programi / navchalni-programi- dlya – 10-11...2018.
 15. Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закл. загал. Серед. освіти) / Є.П. Нелін. – Харків: Вид-во "Ранок", 2018. - 328 с.
 16. Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 11 кл. закл. загал. Серед. освіти) / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Харків: Вид-во "Ранок", 2019. - 304 с.
 17. Перехейда О.М., Ушаков Р.П. Розв'язуння нерівностей.-Х.: Вид. гр. "Основа", 2005. - 112с.
 18. Пометун О., Пилипчатіна Л., Суценко І., Баранова І. Основи критичного мислення. Т.: Навчальна книга – Богдан, 2010. 74 с.

19. Рибка О.М., Соколенко Л.О. Інтерактивні цифрові інструменти як засіб формування критичного мислення учнів старшої школи під час навчання змістової лінії «Рівняння та нерівності». **Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання** : Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених (18 листопада 2025 р., м. Чернігів). Чернігів : НУЧК імені Т.Г. Шевченка, 2025. С. 98.
20. Рудницька О. П. Педагогіка: загальна та мистецька: навч. посіб. Тернопіль, 2005. 160 с.
21. Сільвестрова І.А. Навчаємось розв'язувати рівняння і нерівності / І.А. Сільвестрова, М.С. Фурман.-Х.: Вид. група "Основа", 2004. - 272с.
22. Скрипка Г. В. Формування в учнів навичок ХХІ століття засобами інформаційно-комунікаційних технологій. Інформаційні технології і засоби навчання. 2016. Т. 54. № 4. С. 99-107.
23. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. - 2-ге вид., допов. і переробл.-К.: Вища шк., 2006. - 582с.
24. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики.-Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.-240с.
25. Слєпкань З.І., Горохольська А.В., Волянська О.Є. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. Навч. посібн. Для учнів 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. - 240с.
26. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. - Чернігів: Сіверянська думка, 2002.- 128с.
27. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум.

- Навч. посіб. -Київ: Навч.посіб.-Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.-128с.
28. Терно С. О. Критичне мислення — сучасний вимір суспільствознавчої освіти / С. О. Терно. – Запоріжжя: Просвіта, 2009. – 268 с
29. Терно С. О. Методика розвитку критичного мислення старшокласників у процесі навчання історії : дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02. Київ, 2015. 400 с.
30. Цьома Н. С. Сутність та структура критичного мислення. Гуманізація навчально-виховного процесу. Словянськ, 2019. № 4 (96). С. 207- 221.
31. Чаплак Я. В. Роль критичного мислення у творчих пошуках «внутрішнього камертона душі» особистості. Зб. наук. праць: філософія, соціологія, психологія. Івано-Франківськ: Вид-во Прикарпатського нац. ун-ту ім. Василя Стефаника, 2011. Вип. 16 (1). Ч. 1. 192 с. С. 136-147.
32. Швець В.О. Теорія та методика навчання математики у старшій профільній школі: курс лекцій. – Київ.: Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024.-504 с.

ДОДАТКИ

Контрольна робота «Логарифмічні та показникові рівняння та нерівності»

I варіант

1. Вкажіть кількість коренів рівняння $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 0$

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Один	Два	Три	Безліч

2. Вкажіть нерівність, множиною розв'язків якої є проміжок $(1; \infty)$

А	Б	В	Г	Д
$5^x > \frac{1}{5}$	$5^x > 1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3^{-1}$	$3^{x^2} < 1$	$3^{1-x} > 1$

3. Якому проміжку належить корінь рівняння $0,008^x = 5^{1-2x}$

А	Б	В	Г	Д
$[0; 2]$	$(-1; 5]$	$(2; 3)$	$(0; 1)$	$[-3; 0]$

4. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-20} > 1$

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$	$(-5; 4)$	$\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right)$	$(4; 5)$	$(-4; 5)$

5. Розв'язати рівняння $\log_2(-x) = 5$

А	Б	В	Г	Д
\emptyset	32	-32	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$

6. Розв'язати рівняння :

А) $2 \cdot 5^{x+1} - 5^x = 45$;

Б) $3^{2\sqrt{x-3}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x-3}} + 3 = 0$.

7. Розв'язати рівняння :

А) $\log_8(4+x) + \log_8(x+2) = 1$;

Б) $\log_4 4x + \log_4 4x = 2$

8. Розв'язати нерівність: $2^{x^2-1} \geq 8$.

Контрольна робота «Логарифмічні та показникові рівняння та нерівності»

II варіант

1. Укажіть кількість коренів рівняння $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 0$

А	Б	В	Г	Д
Жодного	Один	Два	Три	Безліч

2. Укажіть нерівність, множиною розв'язків якої є проміжок $(-\infty; 1)$

А	Б	В	Г	Д
$5^x > \frac{1}{5}$	$5^x > 1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 3^{-1}$	$3^{x^2} < 1$	$3^{1-x} > 1$

3. Якому проміжку належить корінь рівняння $0,2^{x+1} = \frac{1}{625}$

А	Б	В	Г	Д
$[0; 2]$	$(-1; 5]$	$(2; 3)$	$(0; 1)$	$[-3; 0]$

4. Розв'язати нерівність $0,3^{x^2-x-6} \leq 1$

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$	$(-3; 2)$	$\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$	$(2; 3)$	$(-2; 3)$

5. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$

А	Б	В	Г	Д
\emptyset	16	-16	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$

6. Розв'язати рівняння :

А) $7^{x+1} - 7^x = 294$;

Б) $2^{2\sqrt{x+5}} - 5 \cdot 2^{\sqrt{x+5}} + 4 = 0$.

7. Розв'язати рівняння :

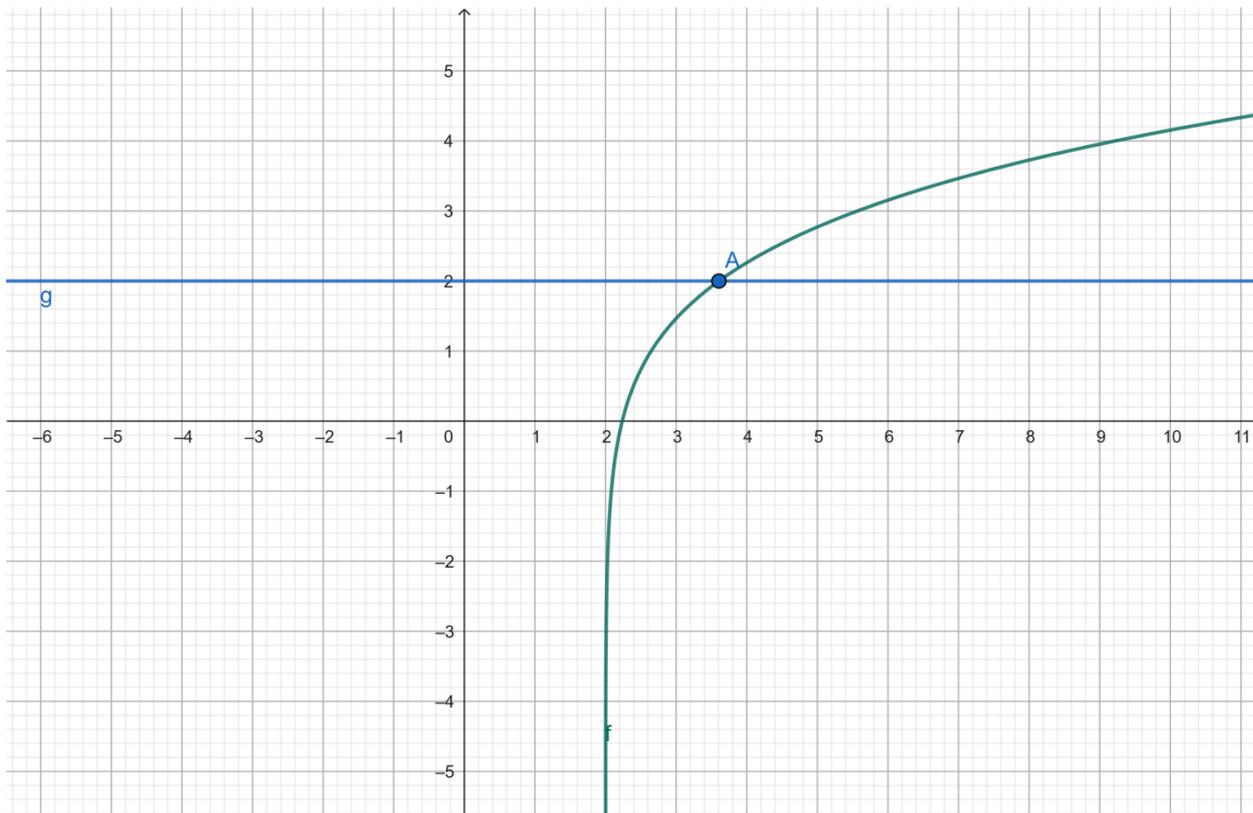
А) $\log_6(3+x) + \log_6(x+2) = 1$;

Б) $\lg 10x - \lg 10x = 2$

8. Розв'язати нерівність: $0,3^{x^2-2x+2} \leq 0,09$.

Застосування GeoGebra для розв'язування рівнянь та нерівностей

Розв'язати логарифмічне рівняння $\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = 2$



Розв'язати логарифмічну нерівність $\log_3(x^2 + 2x) < 1$

