

Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г.Шевченка

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітнього ступеня «магістр»

на тему:

**ВНУТРІШНЬОПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ КУРСУ «АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ
АНАЛІЗУ» ТА ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ У ПРОФІЛЬНОМУ НАВЧАННІ**

Виконала:

студентка 2 курсу, групи 51 з-ФМТ

спеціальності

014 Середня освіта (Математика)

Чиж Ірина Михайлівна

Науковий керівник:

к. п. н., доцент Філон Л. Г.

Чернігів – 2025

Роботу подано до розгляду « _____ » _____ 20__ року.

Студентка _____ Чиж І.М. _____

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Науковий керівник _____ Філон Л. Г. _____

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Рецензент _____

(підпис)

(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики.

Протокол № _____ від « _____ » _____ 20__ року.

Студентка допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри _____ Філон Л.Г. _____

(підпис)

(прізвище та ініціали)

АНОТАЦІЯ

Чиж І.М. Внутрішньопредметні зв'язки курсу «Алгебра і початки аналізу» та їх реалізація у профільному навчанні. Кваліфікаційна робота освітнього ступеня «магістр». На правах рукопису. Спеціальність – 014 Середня освіта (Математика). – Чернігів, 2025.

Кваліфікаційна робота присвячена питанням теоретичних і методичних аспектів реалізації внутрішньопредметних зв'язків у курсі «Алгебра і початки аналізу» профільного навчання. У дослідженні розглянуто сутність та значення внутрішньопредметних зв'язків у навчанні математики, схарактеризовано їх види, засоби реалізації, наведено методичні рекомендації щодо практичної реалізації внутрішньопредметних зв'язків, упорядкованих за етапами уроку, оцінювання рівня сформованості вмінь учнів встановлювати та використовувати внутрішньопредметні зв'язки.

Ключові слова: внутрішньопредметні зв'язки, профільне навчання, курс алгебри і початків аналізу.

SUMMARY

Chizh I. M. Intra-subject connections of the course Algebra and the beginnings of analysis and their implementation in profile teaching. Qualification work of the educational degree «master». On the rights of the manuscript. Specialty – 014 Secondary Education (Mathematics). – Chernihiv, 2025.

The qualification work is devoted to the issues of theoretical and methodological aspects of the implementation of intra-subject connections in the course «Algebra and the Beginnings of Analysis» of profile training. The study examines the essence and significance of intra-subject connections in teaching mathematics, characterizes their types, means of implementation, provides methodological recommendations for the practical implementation of intra-subject connections, arranged according to the stages of the lesson, and assesses the level of formation of students' skills in establishing and using intra-subject connections.

Keywords: intra-subject connections, profile teaching, course of algebra and the beginnings of analysis.

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ВНУТРІШНЬОПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ КУРСУ «АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ» У ПРОФІЛЬНОМУ НАВЧАННІ.....	9
1.1. Сутність та значення внутрішньопредметних зв'язків у навчанні математики.....	9
1.2. Класифікація та види внутрішньопредметних зв'язків.....	11
1.2.1. Зв'язки між поняттями.....	13
1.2.2. Зв'язки між методами доведення тверджень, розв'язування задач...	15
1.2.3. Зв'язки між теоремами.....	17
1.2.4. Зв'язки між змістовими лініями.....	18
1.2.5. Принцип наступності.....	22
1.2.6. Роль попередніх знань.....	24
1.2.7. Структурна класифікація внутрішньопредметних зв'язків.....	26
1.3. Психолого-педагогічні аспекти реалізації внутрішньопредметних зв'язків у навчальному процесі.....	27
1.4. Пропедевтика, узагальнення, систематизація та повторення – засоби встановлення та реалізації внутрішніх зв'язків математики.....	30
1.4.1. Пропедевтика як підготовка до встановлення зв'язків.....	30
1.4.2. Узагальнення як засіб інтеграції та виявлення зв'язків.....	32
1.4.3. Систематизація як інструмент упорядкування та структуризації знань.....	34
1.4.4. Повторення як засіб закріплення та переосмислення зв'язків.....	35
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ ВНУТРІШНЬОПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ У КУРСІ «АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ» У ПРОФІЛЬНОМУ НАВЧАННІ.....	37
2.1. Аналіз навчальної програми та підручників з курсу «Алгебра і початки	

аналізу» 10-11 класів профільного рівня щодо відображення	
внутрішньопредметних зв'язків.....	37
2.2. Методичні підходи реалізації внутрішньопредметних зв'язків (на прикладі теми «Найбільше і найменше значення функції на відрізку» в 10 класі).....	45
2.3. Методи та прийоми встановлення та реалізації внутрішньопредметних зв'язків на різних етапах навчання.....	49
2.3.1. Актуалізація опорних знань.....	49
2.3.2. Мотивація навчальної діяльності.....	52
2.3.3. Вивчення нового матеріалу.....	53
2.3.4. Закріплення вивченого матеріалу.....	56
2.3.5. Застосування знань і вмінь.....	60
2.3.6. Узагальнення та систематизація.....	60
2.4. Практична реалізація внутрішньопредметних зв'язків (на прикладі теми «Найбільше і найменше значення функції на відрізку»).....	61
2.5. Методичні рекомендації щодо інтеграції внутрішньопредметних зв'язків у процес навчання курсу «Алгебра і початки аналізу» з метою підвищення його ефективності у профільному навчанні.....	68
2.6. Рекомендації щодо оцінювання рівня сформованості вмінь учнівства встановлювати та використовувати внутрішньопредметні зв'язки	72
ВИСНОВКИ.....	77
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	79

ВСТУП

Актуальність дослідження. У сучасному освітньому процесі особлива увага приділяється формуванню в учнів не лише суми знань, умінь та навичок, але й цілісного наукового світогляду, здатності до самостійного пізнання та застосування отриманих знань у різних контекстах, а також системного математичного мислення. Курс «Алгебра і початки аналізу» відіграє важливу роль у математичній підготовці старшокласників, закладаючи фундамент для подальшого вивчення математичних дисциплін та їх застосування в інших галузях знань.

Одним із ключових дидактичних принципів, що сприяє глибокому та системному засвоєнню навчального матеріалу, є принцип взаємозв'язку між елементами змісту навчання. Внутрішньопредметні зв'язки курсу «Алгебра і початки аналізу» відображають єдність його структурних компонентів, забезпечуючи розуміння взаємозалежності понять, методів і теорем. Їх усвідомлення учнями сприяє формуванню цілісної картини предмета, розвитку логічного мислення та підвищенню мотивації до навчання.

Особливої актуальності питання реалізації внутрішньопредметних зв'язків набуває в умовах профільного навчання, оскільки поглиблене вивчення математики передбачає більш складний рівень узагальнення та систематизації знань, а також їхнє застосування для розв'язування нестандартних і практично орієнтованих задач. Недостатня увага до встановлення та використання внутрішньопредметних зв'язків може призвести до фрагментарного засвоєння матеріалу, утруднення у застосуванні знань в нових ситуаціях та зниження ефективності профільного навчання.

У зв'язку з цим дослідження теоретичних і методичних аспектів реалізації внутрішньопредметних зв'язків у курсі «Алгебра і початки аналізу» профільного навчання є актуальним.

Об'єкт дослідження: процес навчання курсу «Алгебра і початки аналізу» у профільній школі.

Предмет дослідження: система реалізації внутрішньопредметних зв'язків курсу «Алгебра і початки аналізу» під час навчання на профільному рівні.

Мета дослідження: виявити та систематизувати методичні підходи до ефективної реалізації внутрішньопредметних зв'язків, розробити методичні рекомендації їх впровадження в курсі «Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень».

Завдання дослідження:

1. На підставі аналізу науково-методичних джерел з'ясувати сутність поняття «внутрішньопредметні зв'язки» та розкрити їх значення у навчанні математики.
2. Виявити, систематизувати та узагальнити види внутрішньопредметних зв'язків, що проявляються між ключовими темами курсу «Алгебра і початки аналізу» 10-11 класів профільного рівня.
3. Схарактеризувати психолого-педагогічні аспекти реалізації внутрішньопредметних зв'язків та встановити дидактичні умови їхнього ефективного застосування у навчальному процесі.
4. Розглянути засоби, що забезпечують формування та реалізацію внутрішніх зв'язків математики.
5. Проаналізувати стан відображення внутрішньопредметних зв'язків у чинній навчальній програмі та підручниках «Алгебра і початки аналізу» для профільного навчання.
6. Визначити методичні підходи та прийоми ефективного встановлення та застосування внутрішньопредметних зв'язків на різних етапах навчання курсу «Алгебра і початки аналізу».
7. Розробити методичні рекомендації щодо інтеграції внутрішньопредметних зв'язків у процес навчання курсу «Алгебра і початки аналізу» з метою підвищення його ефективності у профільному навчанні.
8. Розробити рекомендації оцінювання рівня сформованості вмінь учнівства встановлювати та використовувати внутрішньопредметні

зв'язки при вивченні курсу «Алгебра і початки аналізу» на профільному рівні.

Методи дослідження:

1. Теоретичний аналіз наукової літератури, праць з дидактики та методики навчання математики з метою розкриття сутності внутрішньопредметних зв'язків та критичного аналізу існуючих підходів.
2. Аналіз навчальної документації (програм та підручників) для виявлення та порівняння стану відображення внутрішньопредметних зв'язків.
3. Моделювання та проєктування (розробка дидактичних матеріалів).
4. Узагальнення та систематизація результатів дослідження, включаючи аналіз ефективності розроблених матеріалів та формулювання методичних рекомендацій.

Елементами наукової новизни є: виявлення сутності внутрішньопредметних зв'язків у курсі «Алгебра і початки аналізу» профільного рівня; визначення структурної класифікації цих зв'язків; розробка відповідних методичних прийомів, впорядкованих за етапами навчання та методичних рекомендацій їх реалізації.

Практичну значущість становлять: розроблені методичні рекомендації щодо інтеграції внутрішньопредметних зв'язків під час навчання курсу «Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень»; відповідні дидактичні засоби та методичні прийоми їх практичного впровадження в освітній процес; рекомендації щодо оцінювання рівня сформованості вмінь учнівства встановлювати та використовувати внутрішньопредметні зв'язки.

Апробація дослідження. За темою кваліфікаційної роботи підготовлена доповідь на VI Всеукраїнську науково-методичну конференцію студентів, аспірантів та молодих вчених (м. Суми, 2025). Опубліковано тези доповіді «Внутрішньопредметні зв'язки курсу «Алгебра і початки аналізу» та їх реалізація у профільному навчанні» [23].

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ВНУТРІШНЬОПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ КУРСУ «АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ» У ПРОФІЛЬНОМУ НАВЧАННІ

1.1. Сутність та значення внутрішньопредметних зв'язків у навчанні математики

Навчання математики в сучасній школі виходить за межі простого засвоєння окремих фактів і формул. Воно спрямоване на формування цілісного, системного мислення, здатності бачити взаємозв'язки між різними елементами знань та застосовувати їх у нестандартних ситуаціях. У цьому контексті ключову роль відіграє принцип взаємозв'язку між елементами змісту навчання, який знаходить своє втілення у понятті внутрішньопредметних зв'язків.

Внутрішньопредметні зв'язки – це об'єктивно існуючі взаємозв'язки між різними компонентами (поняттями, законами, теоріями, методами) змісту одного навчального предмета, що відображають єдність його структури та логіку розвитку. У математиці, яка є надзвичайно логічною та взаємопов'язаною наукою, внутрішньопредметні зв'язки є невід'ємною частиною її сутності. Вони пронизують усі її розділи, роблячи математику не сукупністю розрізнених знань, а єдиною, гармонійною системою [11], [24].

Сутність внутрішньопредметних зв'язків полягає у відображенні логічної єдності математичної науки. Це не просто суміжність тем, а глибоке взаємопроникнення та взаємозалежність, де засвоєння однієї теми або поняття стає підґрунтям для розуміння іншої.

Видатні вітчизняні методисти З. Слєпкань, В. Швець, М. Бурда та інші одноставно підкреслювали, що ці зв'язки є не штучно створеними, а є об'єктивно існуючими й відображають логічну структуру наукових знань, забезпечуючи їхній розвиток та системність. Наприклад, поняття функції є наріжним каменем для всього курсу алгебри та початків аналізу. Його розуміння відкриває шлях до усвідомлення таких складних понять, як границя, похідна, інтеграл. Аналогічно, методи розв'язування рівнянь і нерівностей, вивчені в алгебрі, знаходять своє застосування при дослідженні функцій у

математичному аналізі, при знаходженні нулів функції або інтервалів знакосталості.

Значення внутрішньопредметних зв'язків у навчанні математики є багатоаспектним:

- 1) Формування системності та цілісності знань. Усвідомлення внутрішніх зв'язків дозволяє учням бачити математику не як набір розрізнених тем, а як єдину систему знань. Це сприяє подоланню фрагментарності мислення та формуванню цілісної картини предмета. Кожне нове поняття або метод інтегрується в уже існуючу систему знань, роблячи її більш стійкою та гнучкою.
- 2) Глибоке та міцне засвоєння навчального матеріалу. Коли учень розуміє, як одна тема пов'язана з іншою, він не просто запам'ятовує інформацію, а усвідомлює її логічну структуру. Це робить знання більш міцними, оскільки вони базуються на розумінні причинно-наслідкових зв'язків, а не лише на механічному запам'ятовуванні. Розуміння дозволяє легше відтворювати та застосовувати знання.
- 3) Розвиток пізнавальної діяльності та розумових здібностей. Пошук та встановлення внутрішньопредметних зв'язків активізує розумову діяльність учнів. Це сприяє розвитку логічного, аналітичного, синтетичного, асоціативного мислення, здатності до узагальнення, класифікації, порівняння. Учні вчаться бачити аналогії, знаходити спільне та відмінне, що є важливим для формування критичного мислення.
- 4) Підвищення мотивації до навчання. Коли учні бачать взаємозв'язок і практичну цінність вивченого матеріалу, їхній інтерес до предмета зростає. Розуміння того, що знання, отримані в одній темі, є ключем до розуміння наступної, робить процес навчання більш осмисленим і захоплюючим. Це допомагає долати труднощі та підтримує позитивне ставлення до математики.
- 5) Формування ключових та предметних компетентностей. Уміння встановлювати внутрішньопредметні зв'язки є важливою складовою

математичної компетентності. Це дозволяє учням ефективно застосовувати отримані знання для розв'язування різноманітних задач, бачити проблему з різних сторін, обирати найбільш раціональні шляхи її вирішення. Також це сприяє розвитку таких ключових компетентностей, як вміння вчитися, ініціативність, цілісне світобачення.

- 6) Економія часу та оптимізація навчального процесу. Цілеспрямована реалізація внутрішньопредметних зв'язків дозволяє уникнути дублювання матеріалу та ефективніше розподіляти навчальний час. Вчитель може спиратися на вже вивчене, лише поглиблюючи та розширюючи його, що прискорює процес засвоєння нових знань.

Таким чином, внутрішньопредметні зв'язки є не просто дидактичним прийомом, а фундаментальним принципом організації змісту навчання математики. Їхня усвідомлена реалізація є необхідною умовою для формування глибоких, системних та міцних математичних знань, розвитку інтелектуальних здібностей учнів та підвищення ефективності освітнього процесу в цілому. Особливо це актуально в умовах профільного навчання, де глибина та системність знань набувають першочергового значення.

1.2. Класифікація та види внутрішньопредметних зв'язків

Внутрішньопредметні зв'язки є невід'ємною характеристикою будь-якого навчального предмета, особливо математики, що має чітку логічну структуру. Для курсу «Алгебра і початки аналізу» вони виступають основою для формування системних знань та цілісного розуміння математичних явищ.

Саме завдяки врахуванню та використанню внутрішньопредметних зв'язків різних видів (інформаційно-змістовних, внутріпонятійних та міжпонятійних, операційно-діяльнісних) відбувається вивчення взаємопов'язаних понять, тверджень, способів (алгоритмічних приписів, правил, орієнтовних основ дій) розв'язування типових задач на певних етапах освіти, що у підсумку створює сприятливі умови для об'єднання знань учнів у цілісну систему [30].

Класифікація цих зв'язків дозволяє усвідомити їхню різноманітність та ефективніше використовувати у практико-педагогічній діяльності.

У методичній літературі існують різні підходи до класифікації внутрішньопредметних зв'язків. Проте більшість дослідників (М.І. Бурда, З.І. Слепкань, В.О. Швець та інші) сходяться на думці, що їх можна умовно розділити за характером взаємозв'язку та об'єктами, які вони об'єднують.

Наприклад, М.І. Бурда у своїх працях акцентує увагу на дидактичній цінності внутрішньопредметних зв'язків, розглядаючи їх як основу для формування узагальнених способів діяльності та переносу знань. Він виокремлює зв'язки на рівні понять, фактів, способів діяльності та теорій [3], [4].

З.І. Слепкань підкреслює структурно-логічний характер внутрішніх зв'язків, визначаючи їх як відображення логічної структури науки, розглядає їх через призму послідовного розвитку понять, методів та ідей у межах одного предмета. Автор дуже чітко розмежовує внутрішньопредметні та міжпредметні зв'язки, дає їхні визначення, обґрунтовує важливість та їх значення (глибоке засвоєння матеріалу, розвиток мислення, формування світогляду) [25].

В.О. Швець приділяє значну увагу взаємозв'язку між змістовими лініями шкільного курсу математики, розглядаючи, як, наприклад, алгебраїчний апарат слугує інструментом для аналізу функцій, а геометричні інтерпретації доповнюють алгебраїчні розв'язання.

Незважаючи на певні відмінності в термінології та акцентах, всі ці підходи ведуть до єдиного розуміння: внутрішньопредметні зв'язки є ключовим фактором, що забезпечує системність, наступність та цілісність навчального матеріалу.

Загалом виділяють таку класифікацію внутрішньопредметних зв'язків за об'єктами, що взаємодіють [3], [25], [30]:

- зв'язки між поняттями;
- зв'язки між методами доведення тверджень, розв'язування задач;
- зв'язки між теоремами;

- зв'язки між змістовими лініями.

Окремо буде розглянуто принцип наступності та роль попередніх знань, оскільки вони є фундаментальною дидактичною основою для ефективної реалізації всіх перелічених видів внутрішньопредметних зв'язків.

1.2.1. Зв'язки між поняттями

Зв'язки між поняттями становлять фундаментальну основу внутрішньопредметних зв'язків у математиці, адже будь-яка математична теорія чи розділ будується навколо системи взаємопов'язаних понять. Ці зв'язки відображають ієрархічну та логічну структуру математичної науки, де одні поняття є передумовою, основою або узагальненням для визначення інших, а їхні властивості взаємозалежні. Їх розуміння дозволяє учням будувати міцну й цілісну систему знань, а не просто запам'ятовувати розрізнені факти.

У курсі «Алгебра і початки аналізу» можна виділити кілька ключових проявів зв'язків між поняттями:

- 1) Наступність у розвитку понять (розширення та поглиблення). Багато математичних понять розвиваються еволюційно, послідовно набуваючи нового змісту або розширюючи область застосування від простих до складних, від конкретних до абстрактних.

Приклад 1: Розвиток поняття числа. Учні знайомляться з ним ще в початковій школі (натуральні числа). Потім відбувається розширення до цілих чисел (з'являються від'ємні числа та нуль), раціональних (дроби), дійсних (ірраціональні числа). Кожна наступна множина чисел включає в себе попередню та розширює можливості для розв'язування рівнянь та задач.

Приклад 2: Розвиток поняття функції. Починаючи з лінійних, квадратичних функцій у базовому курсі алгебри, учні поступово переходять до вивчення степеневих, тригонометричних, показникових, логарифмічних функцій. Кожна нова функція має свої унікальні властивості, але базується на загальному означенні функції та її основних характеристиках (область визначення, область значень, графік). Потім у 10-му класі поняття функції

поглиблюється через введення границі, неперервності, похідної та у 11-ому класі інтеграла.

- 2) Підпорядкування та ієрархія понять. Одне поняття може бути частиною, окремим випадком або похідним від іншого, більш загального поняття. Це створює ієрархічну структуру, де відношення «рід – вид» є основоположним.

Приклад 1: Рівняння як окремий випадок функцій. Будь-яке рівняння $f(x) = 0$ може бути розглянуте як пошук нулів функції $y = f(x)$. Учні, вивчаючи властивості функцій, наприклад, їх неперервність чи монотонність, можуть робити висновки про існування та кількість коренів рівнянь.

Приклад 2: Многочлен як функція. Функція $y = P(x)$, де $P(x)$ – многочлен, є окремим типом функції, яка має свої специфічні властивості, що впливають з її алгебраїчної структури.

Приклад 3: Екстремуми як особливі точки функцій. Точки максимуму та мінімуму є особливими точками функції, означення яких ґрунтується на поняттях зростання/спадання та похідної.

- 3) Взаємодоповнюваність понять. Два або більше понять можуть бути тісно пов'язані та доповнювати одне одного, дозволяючи повноцінно описувати математичні об'єкти або явища.

Приклад 1: Похідна та первісна. Ці два поняття є взаємно оберненими операціями. Розуміння похідної є необхідним для усвідомлення сутності первісної та інтеграла, і навпаки. Це ілюструє глибокий зв'язок між диференціальним та інтегральним численням.

Приклад 2: Границя функції та неперервність. Поняття неперервності функції в точці базується на понятті границі функції в цій точці. Без розуміння границі неможливо повноцінно усвідомити сутність неперервності, а відтак, і диференційованості.

Приклад 3: Поняття кореня n -го степеня та степенева функція. Ці поняття взаємопов'язані та допомагають розуміти обернені операції та властивості функцій.

4) Зв'язок «означення – властивість – застосування». Властивості математичних об'єктів безпосередньо впливають з їхніх означень, а розуміння властивостей відкриває шлях до їх практичного застосування.

Приклад: Означення парної/непарної функції (наприклад, $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$) безпосередньо веде до її властивостей (симетрія графіка відносно осі ординат/початку координат) та застосувань (для спрощення обчислень, розв'язування рівнянь, побудови графіків).

Реалізація цих зв'язків на уроках алгебри та початків аналізу дозволяє учням не просто завчити визначення, а зрозуміти їхню логічну взаємозалежність, бачити, як одне поняття «вирастає» з іншого, і як вони всі разом утворюють цілісну й логічну систему математичних знань. Це значно підвищує якість засвоєння матеріалу та розвиває системне математичне мислення.

1.2.2. Зв'язки між методами доведення тверджень, розв'язування задач

Зв'язки між методами відображають взаємозалежність інструментів, що використовуються в математиці для розв'язування задач, доведення тверджень та дослідження математичних об'єктів. Ці зв'язки демонструють універсальність математичних підходів та логічну структуру доведень, де одні твердження впливають з інших. У курсі «Алгебра і початки аналізу» такі зв'язки є ключовими для формування гнучкого мислення та вміння обирати оптимальний шлях розв'язування проблеми.

У математиці часто одна й та сама задача може бути розв'язана різними методами, а один метод може застосовуватися для розв'язування різних типів задач. Розуміння цих взаємозв'язків розширює арсенал учнів та сприяє розвитку їхнього аналітичного мислення.

Деякі методи є настільки потужними, що їх можна адаптувати до широкого кола завдань, що виникають у різних розділах курсу «Алгебра і початки аналізу». Це дозволяє учням бачити єдність математичних підходів, а

не сприймати кожен розділ як окремий набір правил. Такі методи є універсальними.

Їх універсальність полягає в тому, що певні математичні прийоми та підходи не обмежуються застосуванням у межах однієї теми чи розділу, а можуть бути успішно адаптовані та використані для розв'язування задач різного типу.

Як приклад, графічний метод. Цей метод є універсальним для розв'язування рівнянь і нерівностей. Рівняння $f(x) = g(x)$ можна розв'язати як пошук точок перетину графіків функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$. Це стосується як алгебраїчних (лінійних, квадратних), так і трансцендентних (тригонометричних, показникових, логарифмічних) рівнянь та нерівностей. Він забезпечує наочність розв'язку, хоча й не завжди точність.

Метод заміни змінної є ефективним інструментом для спрощення розв'язування складних рівнянь та нерівностей. Він широко застосовується при розв'язуванні:

- біквадратних рівнянь (заміна $x^2 = t$);
- тригонометричних рівнянь та систем, зводячи їх до простішого, часто алгебраїчного, вигляду (наприклад, $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$ через заміну $\cos x = t$);
- показникових (як приклад, $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$ через заміну $2^x = t$);
- логарифмічних (наприклад, $\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 = 0$ через $\log_2 x = t$).

Метод інтервалів є класичним для розв'язування раціональних нерівностей. Однак його логіка, що базується на аналізі знака функції на проміжках між її нулями, успішно застосовується і для розв'язування більш складних нерівностей інших типів (ірраціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних) після того, як їх вдається звести до вигляду, де можна знайти корені та дослідити знаки множників або функції загалом. Це підкреслює глибокі зв'язки між алгебраїчними та трансцендентними нерівностями.

Часто для повного розв'язування задачі або для перевірки результату доцільно використовувати кілька методів, або комбінацію різних методів. Такі методи є взаємодоповнювальними. Наприклад, при дослідженні функції її нулі можуть бути знайдені алгебраїчним методом, тобто розв'язуванням рівняння $f(x) = 0$, а інтервали монотонності та екстремуми – аналітичним методом (за допомогою похідної). Потім усі отримані дані (нулі, екстремуми, інтервали знакосталості та монотонності) синтезуються для побудови графіка. Графічний метод дозволить візуалізувати все дослідження.

Жоден з цих методів окремо не дасть повного уявлення про функцію. Вони доповнюють один одного, щоб дати комплексний розв'язок.

Таке комплексне дослідження дозволяє учням бачити, як різні математичні інструменти взаємодіють, доповнюючи одне одного для досягнення єдиної мети – повного розуміння властивостей функції.

1.2.3. Зв'язки між теоремами

Теорема в математиці не існують ізольовано. Вони є елементами логічної системи, де одні твердження впливають з інших або використовуються як інструменти для доведення нових. Розуміння цих зв'язків є основою для глибокого засвоєння теорії.

Приклади теорем як основи для подальших тверджень:

- 1) Теорема про корені многочлена (наприклад, що многочлен n -го степеня має не більше n коренів) ґрунтується на понятті кореня рівняння та теоремі Безу (про ділення многочленів).
- 2) Теорема про границі функцій (границя суми, добутку, частки) є фундаментальними для доведення правил диференціювання (похідна суми, добутку, частки), які, у свою чергу, використовуються для знаходження похідних складних функцій.
- 3) Теорема Ферма про екстремуми (якщо функція $f(x)$ має локальний екстремум у точці x_0 і диференційована в цій точці, то $f'(x_0) = 0$) є ключовою для розробки алгоритму дослідження функції на екстремуми за

допомогою похідної. Це є теоретичним обґрунтуванням практичних кроків.

Теорема Ферма (про необхідну умову екстремуму), теорема Лагранжа (про середнє значення), теорема Ролля – всі ці теореми належать до диференціального числення. Вони дозволяють аналізувати швидкість зміни функції, знаходити екстремуми, досліджувати її поведінку.

Одним із найяскравіших і найважливіших прикладів зв'язку між теоремами у курсі «Алгебра і початки аналізу» (а точніше, в його аналітичній частині) є взаємозв'язок між диференціальним та інтегральним численням, виражений через формулу Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна для $f(x)$. Ця формула пов'язує поняття похідної (через первісну) та інтеграла і показує те, що інтегрування є оберненою операцією до диференціювання, об'єднуючи ці два стовпи математичного аналізу. Це не просто два різні способи розв'язування, а й глибока теоретична взаємозалежність.

Реалізація зв'язків між методами та теоремами у навчальному процесі передбачає не лише демонстрацію їхнього існування, а й активне залучення учнівства до їхнього пошуку, порівняння різних методів розв'язування однієї задачі, обґрунтування вибору певного методу та доведення простих тверджень на основі вже вивчених теорем. Це сприяє не лише кращому засвоєнню матеріалу, а й формуванню математичної культури та здатності до самостійного мислення.

1.2.4. Зв'язки між змістовими лініями

Навчання математики є безперервним процесом, у якому кожний наступний етап будується на засадах попереднього. Важливим елементом цього процесу є змістові лінії – узагальнені структурні елементи навчального матеріалу, що забезпечують логічну послідовність та цілісність курсу.

У контексті базової середньої освіти, яка є підготовчим етапом до профільного навчання, в модельній програмі [16] виокремлюються такі наскрізні змістові лінії, що формують фундамент математичних знань:

1. Числа.
2. Алгебраїчні вирази.
3. Рівняння.
4. Нерівності.
5. Функції.
6. Математичні задачі як засіб дослідження життєвих ситуацій та реальних процесів. Математичне моделювання.

У модельній програмі [17], що містить алгебраїчну та геометричну складові, в алгебраїчній складовій інтегрованого курсу виділяють такі основні змістові лінії:

1. Арифметика.
2. Елементи алгебри.
3. Функції.
4. Дані, статистика та ймовірність.

Ці лінії закладають базові поняття та вміння, які є необхідним підґрунтям для поглибленого вивчення математики на профільному рівні. Їх назви можуть змінюватися з поглибленням та розширенням навчального матеріалу, але зміст залишається тим же.

Курс «Алгебра і початки аналізу» на профільному рівні (10-11 класи) є багатокомпонентним, охоплює низку змістових ліній, ґрунтується на засвоєних знаннях, проте має свої, більш спеціалізовані та поглиблені змістові лінії. Згідно з навчальною програмою з математики для 10-11 класів профільного рівня [18], провідними змістовими лініями є:

- 1) Числа і вирази.
- 2) Рівняння, нерівності та їх системи.
- 3) Функції.
- 4) Елементи математичного аналізу.

5) Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Внутрішньопредметні зв'язки між цими провідними змістовими лініями є визначальними для формування системного бачення курсу, усвідомлення взаємозалежності математичних знань та розвитку комплексного мислення учнів профільної школи. На цьому етапі ці зв'язки поглиблюються, стаючи більш явними та складними, що відображається у вимогах до компетентностей випускників профільної школи.

1) Зв'язок «Числа і вирази – Рівняння, нерівності та їх системи – Функції». Ці змістові лінії є фундаментальними і взаємопов'язаними на всіх етапах вивчення алгебри.

«Числа і вирази» як основа передбачає роботу з числовими виразами, їх перетворення (тотожні перетворення многочленів, раціональних, ірраціональних, тригонометричних, логарифмічних виразів). Ця змістова лінія є необхідною базою для успішного розв'язування рівнянь та нерівностей, а також для дослідження функцій. Наприклад, спрощення виразу перед підстановкою у функцію або перед розв'язуванням рівняння є ключовим етапом.

Зв'язок «Рівняння, нерівності та їх системи – Функції» передбачає знаходження нулів функції та інтервалів знакосталості, що вимагає розв'язування відповідних рівнянь $f(x) = 0$ та нерівностей $f(x) > 0, f(x) < 0$.

Знаходження області визначення функції часто зводиться до розв'язування нерівностей або систем нерівностей, наприклад, для функцій з коренями, логарифмічних функцій.

Дослідження точок перетину графіків функцій призводить до розв'язування систем рівнянь.

Графічний метод розв'язування рівнянь і нерівностей є яскравим прикладом зв'язку «Функції – Рівняння, нерівності та їх системи». Розв'язування рівняння $f(x) = g(x)$ зводиться до пошуку абсцис точок перетину графіків функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$.

Властивості функцій (монотонність, парність/непарність, періодичність) використовуються для аналізу розв'язків рівнянь та нерівностей, часто дозволяючи значно спростити їх розв'язування (метод оцінок, використання монотонності для доведення єдиності кореня).

2) Зв'язок «Функції – Елементи математичного аналізу».

Цей зв'язок є ядром курсу «Алгебра і початки аналізу» і відображає перехід від статичного опису функцій до динамічного аналізу їхньої поведінки.

Функції як об'єкт дослідження аналізу: поняття функції є центральним для елементів математичного аналізу. Границя, похідна, інтеграл – це інструменти, призначені для вивчення властивостей саме функцій.

Границя функції є базовим поняттям, що дозволяє формалізувати неперервність функції та визначення похідної. У свою чергу, похідна дозволяє досліджувати швидкість зміни функції, її монотонність, екстремуми, опуклість та увігнутість, знаходити рівняння дотичної до графіка. Все це є глибоким аналізом властивостей функції.

Поняття первісної є оберненим до похідної, а визначений інтеграл пов'язаний з первісною через формулу Ньютона-Лейбніца. Це дозволяє обчислювати площі криволінійних трапецій, об'єми тіл обертання, що є застосуванням аналізу до «функціональних» геометричних об'єктів.

3) Зв'язок «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики».

Хоча ця змістова лінія може здаватися дещо відокремленою від алгебри та початків аналізу, вона має важливі внутрішні зв'язки, особливо з розділом «Числа і вирази».

Комбінаторні формули (перестановки, комбінації, розміщення) ґрунтуються на операціях з числами (факторіал) та виразами, що описують кількість елементів у множинах. Крім того, комбінаторні формули є базовим інструментом для обчислення кількості можливих подій та кількості сприятливих подій при розв'язуванні ймовірнісних задач. Без уміння

застосовувати комбінаторні прийоми неможливо обчислити ймовірності складних подій.

Теорія ймовірностей надає теоретичні моделі для опису випадкових явищ, тоді як математична статистика займається аналізом емпіричних даних, що виникають з цих явищ, використовуючи ймовірнісні моделі. Зв'язок «Теорія ймовірностей та математична статистика» дозволяє аналізувати реальні дані, робити прогнози та приймати обґрунтовані рішення.

Реалізація цих внутрішньопредметних зв'язків між змістовими лініями є особливо важливою на профільному рівні, оскільки вона дозволяє учням бачити математику як єдину науку, де різні розділи не просто співіснують, а взаємодіють, доповнюють і розширюють можливості один одного. Це сприяє формуванню комплексного математичного світогляду, розвитку здатності застосовувати знання у різноманітних ситуаціях та підготовці до подальшого навчання у вищих навчальних закладах.

1.2.5. Принцип наступності

Принцип наступності є одним із фундаментальних дидактичних принципів у системі освіти, що відіграє ключову роль у забезпеченні логічної послідовності та ефективності навчального процесу. У процесі вивчення математики, особливо при переході від базової до профільної освіти, принцип наступності є невід'ємною умовою для формування глибоких і системних знань.

Наступність означає органічний взаємозв'язок між різними етапами, рівнями та компонентами навчального процесу, що забезпечує логічний перехід від уже засвоєного до нового, від простого до складного, від конкретного до абстрактного. Це не просто послідовність тем, а цілеспрямоване вибудовування навчального матеріалу, де кожен наступний елемент спирається на попередні знання, вміння та навички, поглиблюючи та розширюючи їх.

У курсі «Алгебра і початки аналізу» на профільному рівні принцип наступності проявляється так:

- 1) Наступність між рівнями освіти (базовий та профільний рівень).

Профільне навчання в 10-11 класах базується на міцному фундаменті знань, сформованих у 5-9 класах (базова освіта). Усі змістові лінії, які були визначені як наскрізні в базовій школі (числові системи, вирази, рівності й нерівності, пропедевтика функцій, математичне моделювання, аналіз даних), є основою для подальшого поглиблення. Наприклад, поняття функції, що було введено на пропедевтичному рівні, в профільному курсі поглиблюється через вивчення трансцендентних функцій (тригонометричних, показникових, логарифмічних) та вводиться апарат математичного аналізу для їхнього детального дослідження.

2) Наступність у розвитку математичних понять.

Багато понять у математиці мають спіральний характер вивчення. Наприклад, поняття числа розвивається від натуральних до цілих, раціональних, дійсних чисел. Кожний новий вид числа розширює можливості для розв'язування рівнянь, але базується на розумінні попередніх числових множин.

При вивченні розділу «Рівняння і нерівності» від простих лінійних та квадратних рівнянь учні поступово переходять до дробово-раціональних, ірраціональних, потім тригонометричних, показникових, логарифмічних рівнянь та систем, використовуючи прийоми, засвоєні на попередніх етапах.

3) Наступність у засвоєнні методів розв'язування задач.

Методи, які були ефективними на базовому рівні, отримують нове застосування або модифікуються для розв'язування складніших задач профільного рівня. Наприклад, метод інтервалів для розв'язування раціональних нерівностей на базовому рівні ефективно застосовується для розв'язування тригонометричних, показникових, логарифмічних нерівностей на профільному рівні.

Графічний метод розв'язування рівнянь і нерівностей, який формувався ще в середніх класах, на профільному рівні використовується для візуалізації розв'язків більш складних функціональних співвідношень.

4) Наступність у взаємодії між галузями математики.

Наступність проявляється у тісному переплетенні знань з різних галузей математики – алгебри та геометрії. Засвоєння нових геометричних понять часто вимагає міцних алгебраїчних знань, і навпаки. Так, формули, що визначають довжину кола $C = 2\pi r$ і площу круга $S = \pi r^2$, можна повноцінно вивчати тільки після ознайомлення з десятковими дробами та операціями з ними (арифметична наступність). Застосовувати теорему Піфагора до розв’язування задач учні зможуть ефективно, якщо їм буде вже відоме поняття квадратного кореня з числа та правила роботи з ним (алгебраїчна наступність у геометрії).

Розуміння парності й непарності функції (алгебра) доцільно розглядати, якщо учні мають уявлення про осьову і центральну симетрію (геометрія), що є наочною інтерпретацією цих алгебраїчних властивостей. Це ілюструє, як геометрія пов’язана з алгеброю.

Реалізація принципу наступності в процесі навчання математики вимагає від вчителя:

- чіткого розуміння структури навчального матеріалу на всіх етапах навчання;
- систематичної актуалізації опорних знань перед вивченням нової теми;
- побудови навчальних ситуацій, що дозволяють учням самостійно встановлювати зв’язки між раніше вивченим і новим матеріалом;
- використання завдань, що вимагають застосування інтегрованих знань та вмінь.

Таким чином, принцип наступності є невід’ємною умовою ефективної реалізації внутрішньопредметних зв’язків, оскільки він забезпечує міцність, системність і глибину математичних знань, формує цілісне бачення предмета та готує учнів до подальшого навчання.

1.2.6. Роль попередніх знань

Роль попередніх знань у процесі навчання є ключовою і нерозривно пов’язана з принципом наступності та реалізацією внутрішньопредметних зв’язків.

Попередні знання — це вся сукупність раніше засвоєних учнями фактів, понять, правил, алгоритмів, теорем, а також сформованих умінь і навичок, які є необхідною основою для розуміння та засвоєння нового навчального матеріалу.

У курсі «Алгебра і початки аналізу» на профільному рівні роль попередніх знань проявляється особливо чітко:

1) Формування фундаменту для нового матеріалу.

Кожне нове математичне поняття або метод вводиться на основі вже відомих учням фактів, означень або операцій. Наприклад, для успішного вивчення похідної учні повинні не тільки володіти поняттями функції, границі та неперервності, а й мати міцні навички виконання алгебраїчних перетворень для спрощення виразів. Без цього фундаменту розуміння сутності похідної та її застосування буде ускладненим.

Вивчення показникової та логарифмічної функцій базується на знаннях про степені з дійсним показником та властивості функцій загалом, засвоєних у попередніх класах.

2) Актуалізація та інтеграція знань.

Ефективне використання попередніх знань вимагає їх постійної актуалізації. Перед вивченням нової теми вчитель має свідомо звертатися до раніше засвоєних понять, створюючи «міст» між старим і новим. Це не просто повторення, а інтеграція, яка допомагає учням усвідомити єдність та системність математичних знань. Як приклад, при розв'язуванні тригонометричних рівнянь учні повинні актуалізувати знання про одиничне коло, тригонометричні тотожності, обернені тригонометричні функції, а також методи розв'язування алгебраїчних рівнянь (метод заміни змінної).

3) Уникнення фрагментарності та формування системності.

Систематичне використання попередніх знань допомагає запобігти розрізненому засвоєнню інформації. Нові елементи інтегруються в уже існуючу структуру знань, роблячи її більш стійкою, гнучкою та взаємопов'язаною. Учні починають бачити, як різні теми та розділи математики логічно доповнюють один одного.

4) Розвиток пізнавальної діяльності.

Свідоме звернення до попередніх знань під час вивчення нового матеріалу активізує аналітико-синтетичну діяльність учнів, сприяє встановленню асоціативних зв'язків, поглибленню розуміння та розвитку таких розумових операцій, як порівняння, узагальнення, абстрагування.

Таким чином, цілеспрямована робота з актуалізації, систематизації та використання попередніх знань є невід'ємною частиною реалізації внутрішньопредметних зв'язків. Вона забезпечує міцність, глибину та системність математичної освіти.

1.2.7. Структурна класифікація внутрішньопредметних зв'язків

Окрім класифікації за дидактичним змістом (між поняттями, методами, теоремами), у методиці навчання математики також виокремлюють класифікацію за структурною ознакою, що відображає організацію навчального матеріалу в межах одного уроку чи курсу.

Горизонтальні зв'язки — це зв'язки, які встановлюються між поняттями, темами або розділами, що вивчаються одночасно або паралельно (в межах одного уроку, теми або навчального року). Ці зв'язки інтегрують знання, допомагаючи учням застосовувати різні інструменти для розв'язування однієї задачі. Наприклад, використання властивостей логарифмічних функцій з розділу «Функції» для розв'язування логарифмічних нерівностей з розділу «Нерівності», які вивчаються в той самий період.

Вертикальні зв'язки — це зв'язки, які реалізують наступність курсу, встановлюючись між знаннями, що вивчалися послідовно на різних етапах навчання, наприклад, між 9-м та 10-м класами. Вони забезпечують безперервність формування поняття, як-от встановлення зв'язку між поняттям функції, вивченим у 9-му класі, та поняттям похідної як границі відношення приростів у 10-му класі, де похідна є якісно новим етапом розвитку функціонального поняття.

1.3. Психолого-педагогічні аспекти реалізації внутрішньопредметних зв'язків у навчальному процесі

Ефективна реалізація внутрішньопредметних зв'язків у курсі «Алгебра і початки аналізу» на профільному рівні вимагає не лише розуміння їхньої дидактичної та логічної сутності, а й врахування глибоких психолого-педагогічних аспектів. Це означає, що процес навчання має бути побудований таким чином, аби максимально сприяти когнітивному розвитку учнів, формуванню їхнього мислення та пізнавальної активності.

1) Вплив на формування системності та міцності знань

Одним з найважливіших психологічних ефектів від реалізації внутрішньопредметних зв'язків є формування системності та міцності знань. Людська пам'ять та мислення функціонують ефективніше, коли інформація не є розрізненою, а організована в логічні структури.

Коли учні розуміють, як різні поняття, методи та теореми взаємопов'язані, вони будують цілісну картину математики. Це запобігає фрагментарності засвоєння матеріалу, де кожна нова тема сприймається як ізольований елемент. Системність означає, що знання організовані в ієрархічні структури та мережі зв'язків, де нові елементи легко інтегруються в існуючу схему (системність знань).

Знання, набуті через усвідомлення зв'язків, є більш міцними та стійкими до забування. Коли одне поняття «тягне» за собою інше, а метод застосовується в різних контекстах, відбувається багаторазове повторення та закріплення матеріалу в нових умовах, що сприяє його глибшому осмисленню та довготривалому збереженню (міцність знань).

Реалізація зв'язків стимулює процеси узагальнення та систематизації, дозволяючи учням виявляти спільні закономірності та принципи, що лежать в основі різних математичних явищ.

2) Розвиток теоретичного та логічного мислення

Внутрішньопредметні зв'язки є потужним засобом для розвитку теоретичного та логічного мислення учнів профільного рівня. На відміну від

емпіричного мислення, що оперує зовнішніми властивостями об'єктів, теоретичне мислення дозволяє усвідомлювати внутрішні, суттєві зв'язки та закономірності.

Через побудову системи знань, де кожне нове поняття є результатом узагальнення попередніх, розвивається теоретичне мислення. Коли учні встановлюють зв'язки між, наприклад, лінійними, квадратичними та степеневими функціями, вони виходять на узагальнене розуміння функції як математичної моделі залежностей.

Пошук та встановлення зв'язків стимулює такі логічні операції як аналіз (розчленування цілого на частини), синтез (об'єднання частин у ціле), порівняння, класифікація, індукція та дедукція. Учні вчаться будувати логічні ланцюжки міркувань, обґрунтовувати свої дії та висновки.

Розуміння, що властивості похідної впливають з поняття границі, а поведінка функції визначається її похідною, формує усвідомлення причинно-наслідкових зв'язків, що є основою наукового мислення.

3) Вплив на пізнавальну активність, інтерес та мотивацію

Усвідомлення внутрішньопредметних зв'язків значно підвищує пізнавальну активність, інтерес та мотивацію учнів до вивчення математики.

Коли учні бачать, що математика – це не набір ізольованих тем, а логічна і взаємопов'язана система, це викликає глибший інтерес. Розуміння зв'язків дозволяє сформувати цілісність сприйняття, усвідомлювати мету вивчення тієї чи іншої теми.

Коли учні бачать, як раніше вивчений матеріал застосовується для розв'язування нових, складніших задач, вони усвідомлюють значущість і цінність своїх попередніх знань. Це підвищує внутрішню мотивацію до навчання.

Розв'язування задачі комплексним методом, або розуміння, як одна ідея пронизує різні розділи, часто викликає відчуття «еврики» та інтелектуального задоволення. Це підсилює позитивні емоції від навчального процесу.

Завдання, що вимагають встановлення зв'язків, стимулюють до самостійності, заохочують учнів до самостійного пошуку рішень, аналізу та синтезу інформації, що є важливим для профільного навчання.

4) Розвиток умінь переносу знань та формування навичок самоконтролю і самооцінювання навчальної діяльності

Систематична реалізація внутрішньопредметних зв'язків у навчанні математики є ключовим чинником для розвитку двох взаємопов'язаних умінь: переносу знань та самоконтролю навчальної діяльності.

Перенос знань – це здатність учня застосовувати вже засвоєні знання, поняття, методи та вміння з одного розділу курсу до розв'язування задач у нових, незвичайних або інтегрованих ситуаціях. У курсі «Алгебра і початки аналізу» на профільному рівні це проявляється у розумінні того, що алгебраїчні інструменти (наприклад, метод заміни змінної, розкладання на множники, властивості тригонометричних функцій) необхідні для завершення аналітичних завдань, пов'язаних із похідною чи інтегралом. Усвідомлення цього зв'язку значно підвищує здатність учнів до широкого переносу, що є критично важливим для розв'язування нестандартних задач високого рівня складності.

Формування навичок самоконтролю і самооцінювання навчальної діяльності тісно пов'язане з процесом встановлення зв'язків. Воно вимагає від учнів рефлексії над власним процесом мислення та вибору стратегії. Учні повинні не просто виконати алгоритм, а й усвідомлювати, чому вони обирають той чи інший метод, і як він пов'язаний з іншими темами.

Це включає:

- a) планування: свідомий вибір оптимального методу розв'язування, ґрунтуючись на розумінні зв'язків між умовами задачі та необхідними теоретичними знаннями;
- b) моніторинг: оцінку правильності та ефективності обраного підходу;
- c) оцінку (рефлексію): аналіз отриманих результатів та усвідомлення, як вони вписуються в загальну систему знань.

Цілеспрямована робота з реалізації внутрішньопредметних зв'язків у навчанні математики – це потужний психолого-педагогічний важіль для формування глибоких, міцних і системних знань, розвитку теоретичного мислення, підвищення пізнавальної активності та формування ключових компетентностей учнів профільної школи.

1.4. Пропедевтика, узагальнення, систематизація та повторення – засоби встановлення та реалізації внутрішніх зв'язків математики

Ефективне встановлення та реалізація внутрішньопредметних зв'язків у процесі навчання математики не відбувається спонтанно. Це цілеспрямований процес, що досягається за допомогою комплексу взаємопов'язаних дидактичних засобів. Серед них особливе місце посідають пропедевтика, узагальнення, систематизація та повторення [9]. Ці засоби не лише сприяють міцному засвоєнню матеріалу, а й формують системне бачення математичної науки.

1.4.1. Пропедевтика як підготовка до встановлення зв'язків

Пропедевтика (від грец. *propedeio* – готую, попередньо навчаю) – це попередній, підготовчий етап вивчення будь-якої теми, поняття чи розділу, метою якого є формування необхідних базових уявлень, умінь та навичок, що стануть основою для подальшого поглибленого вивчення матеріалу. У контексті внутрішньопредметних зв'язків пропедевтика забезпечує наступність у засвоєнні матеріалу, формуючи необхідний теоретичний та практичний фундамент для усвідомлення цих зв'язків.

Наприклад, у посібнику для майбутніх вчителів Л.А. Благодир називає пропедевтику «включенням частини матеріалу в попередні теми, з метою розгляду окремих елементів майбутніх понять, які мають надмірний обсяг нової інформації» [15].

Пропедевтика включає:

- 1) Формування базових уявлень.

Наприклад, у курсі алгебри 7-9 класів (базовий рівень) відбувається пропедевтика вивчення функцій та елементів математичного аналізу. Учні

знайомляться з поняттям функції, її основними властивостями (область визначення, область значень, нулі функції, проміжки знакосталості, монотонність), будують графіки лінійних, квадратичних функцій. Це є необхідним підґрунтям для глибокого вивчення трансцендентних функцій та аналізу (границя, похідна, інтеграл) на профільному рівні.

2) Створення «опорних точок» для майбутніх зв'язків.

Завдяки пропедевтиці в свідомості учнів формуються «точки опори», до яких можна буде прив'язати складніші поняття та ідеї в майбутньому. Без попереднього ознайомлення з поняттями рівняння та нерівності, їхніми властивостями та методами розв'язування неможливо ефективно вивчати більш складні види рівнянь і нерівностей (тригонометричні, показникові, логарифмічні).

3) Забезпечення наступності.

Пропедевтика є органічною складовою принципу наступності, гарантуючи, що перехід до нового матеріалу не є різким, а плавно впливає з уже засвоєного.

Ключові аспекти принципу наступності у навчанні:

1) Опора на раніше вивчене (ретроспективний аспект).

Це означає, що, вивчаючи новий матеріал, завжди спираються на те, що учні вже знають і вміють. Попередні знання є фундаментом, на якому будується нове. Наприклад, щоб зрозуміти похідну, потрібно знати границі та функції; щоб розв'язати показникове рівняння, потрібно вміти працювати зі степенями.

2) Врахування перспективи використання набутих учнями знань на наступному етапі (перспективний аспект).

Це означає, що, викладаючи поточний матеріал, вчителі повинні думати про те, як ці знання будуть використовуватися та розвиватися на наступних етапах навчання. Це вимагає бачити наперед, у перспективі і готувати ґрунт для навчання. Як приклад, вивчаючи властивості функцій у 8-9 класах (пропедевтика), закладається основа для детального аналізу за допомогою

похідної та інтеграла у 10-11 класах. Коли вивчаються десяткові дробы, вже є розуміння, що навички та знання знадобляться для обчислення площі круга.

Ці два аспекти принципу наступності взаємодоповнюють один одного, забезпечуючи неперервність і системність освіти. Вони гарантують, що навчання не є фрагментарним, а є логічно пов'язаним процесом, де кожен крок має свою мету і базується на попередніх досягненнях.

Пропедевтика за своєю суттю є реалізацією наступності.

Передумови реалізації наступності:

- 1) Створення відповідних навчальних планів, учбових програм і шкільних підручників. Ця відповідна побудова повинна відображати вимоги щодо послідовності та системності у розміщенні навчального матеріалу, формування умов для постійного та послідовного розвитку знань учнів, включення цих знань у нові зв'язки.
- 2) Застосування вчителем методичної системи і використання ним таких прийомів, які б надавали змогу під час подачі нової інформації та викладання нової теми забезпечити максимальну опору на вже сформовані в учнів теоретичні та практичні знання і вміння.
- 3) Осмислення школярами раніше пройденого матеріалу на більш вищому рівні, узагальнення його, розширення меж застосування знань, навичок і вмінь.
- 4) Вивчення матеріалу на конкретному етапі навчання має створювати необхідний фундамент, основу для успішного засвоєння учнями змісту навчальної програми на наступному етапі.

Пропедевтичний курс закладає основи, опирається на раніше вивчене, щоб врахувати перспективу подальшого навчання.

1.4.2. Узагальнення як засіб інтеграції та виявлення зв'язків

Узагальнення — це розумова операція, що полягає в переході від одиничних фактів або окремих понять до більш широких і спільних, від окремих властивостей до загальних. У навчанні математики узагальнення є

потужним засобом встановлення та реалізації внутрішньопредметних зв'язків, оскільки дозволяє інтегрувати розрізнені знання в єдину систему.

Саме послідовне здійснення узагальнення є необхідною передумовою для формування системних і міцних знань. Якщо учень здатен узагальнити, що похідна будь-якої функції – це також функція, властивості якої можна досліджувати алгебраїчними методами, це забезпечує цілісність курсу.

Узагальнення відіграє надзвичайно важливу роль, оскільки на його основі учні засвоюють наукові поняття, визначають їхні загальні та істотні ознаки, що є основою для глибокого розуміння математичної теорії.

У посібнику Л.А. Благодир, наприклад, наведено таке означення: «Узагальнення – виділення істотних ознак в заданих предметах і явищах» [15].

Завдяки узагальненню досягаються наступні педагогічні та дидактичні ефекти, що сприяють глибшому розумінню матеріалу:

1) Виявлення спільних закономірностей.

Шляхом узагальнення учні можуть виявляти спільні властивості та закономірності, що характерні для різних класів математичних об'єктів. Наприклад, узагальнення методів розв'язування різних типів рівнянь (лінійних, квадратних, показникових, логарифмічних) через застосування методу заміни змінної або графічного методу дозволяє учням усвідомити універсальність цих підходів та їхні внутрішні зв'язки.

2) Формування узагальнених понять.

Узагальнення веде до формування більш широких і абстрактних понять, які об'єднують низку окремих. Наприклад, поняття «функція» є узагальненням для лінійних, квадратичних, степеневих, тригонометричних, показникових, логарифмічних функцій. Це дозволяє учням бачити спільні риси та властивості цих різних функцій.

3) Побудова систем знань.

Саме через узагальнення формуються ієрархічні структури знань, де окремі поняття вбудовуються в більш загальні категорії, що сприяє системності.

Таким чином, узагальнення є не лише фундаментальною розумовою операцією, а й одним із провідних дидактичних засобів для ефективної реалізації внутрішньопредметних зв'язків у математиці. Воно дає змогу учням не просто засвоювати окремі факти, а інтегрувати знання в єдину, логічно взаємопов'язану систему, що є основою для розвитку теоретичного мислення та глибокого розуміння предмета. Через узагальнення учні навчаються бачити цілісну картину математики, її внутрішню єдність і універсальність її методів, що особливо важливо для профільного рівня навчання.

1.4.3. Систематизація як інструмент упорядкування та структуризації знань

Систематизація – це процес впорядкування, класифікації та структуривання набутих знань відповідно до певних критеріїв і зв'язків між ними. Вона дозволяє учням не просто мати суму знань, а розуміти їхню внутрішню логіку та взаємозалежність, що є критично важливим для профільного рівня.

Реалізація систематизації в навчальному процесі дозволяє досягти низки важливих результатів, що безпосередньо впливають на глибину та якість засвоєння матеріалу:

1) Організація знань.

Систематизація допомагає учням організувати розрізнені факти та поняття в логічно упорядковану систему. Це може відбуватися через складання схем, таблиць, діаграм, що відображають зв'язки (наприклад, таблиця похідних та первісних, схема класифікації функцій).

2) Виявлення ієрархії та взаємозв'язків.

Під час систематизації учні активно виявляють ієрархічні зв'язки (від загального до часткового), причинно-наслідкові зв'язки, зв'язки типу «означення – властивість – застосування». Це поглиблює їхнє розуміння структури математики.

3) Формування цілісного бачення.

Регулярна систематизація матеріалу сприяє формуванню цілісного бачення курсу «Алгебра і початки аналізу», дозволяючи учням бачити, як різні розділи та теми інтегруються в єдине ціле.

Систематизація є ключовим інструментом для впорядкування та структурування знань, що має вирішальне значення для реалізації внутрішньопредметних зв'язків. Вона перетворює розрізнені елементи інформації на логічно взаємопов'язану систему, сприяє виявленню ієрархічних та функціональних зв'язків між поняттями й методами. Це забезпечує міцність знань, розвиває системне мислення та формує цілісне бачення математики як єдиної науки, що особливо цінно для учнів профільного рівня.

1.4.4. Повторення як засіб закріплення та переосмислення зв'язків

Повторення – це цілеспрямоване, багаторазове відтворення та застосування засвоєних знань і вмінь. У контексті внутрішньопредметних зв'язків повторення не є механічним, а має бути спрямоване на їхнє усвідомлення, закріплення та переосмислення на новому рівні.

Сучасна дидактика розрізняє різні види повторення, кожен з яких відіграє свою роль у формуванні міцних і системних знань.

За класифікацією, наведеною в посібнику для вчителів [15, с. 21], виділяють наступні види повторення:

- 1) За часовою ознакою: на початку, протягом або в кінці учбового року.
- 2) За метою: опорне, первинно закріплююче, попереджувальне, узагальнююче.
- 3) За частотою використання: епізодичне, періодами, на постійній основі.
- 4) За місцем у процесі засвоєння: перед викладанням нового матеріалу, поряд із вивченням його чи після вивчення.

Саме така якісна організація повторення, що враховує його різноманітні види та цілі, забезпечує реалізацію кількох важливих функцій у контексті внутрішньопредметних зв'язків:

- 1) Закріплення раніше встановлених зв'язків.

Коли учні розв'язують задачі, що вимагають застосування одного й того ж поняття або методу в різних контекстах (наприклад, поняття функції при розв'язуванні рівнянь, побудові графіків, дослідженні за допомогою похідної), раніше встановлені зв'язки міцно закріплюються в їхній пам'яті.

2) Переосмислення та поглиблення.

Повторне звернення до матеріалу з урахуванням нових знань дозволяє поглибити розуміння раніше засвоєних зв'язків. Наприклад, після вивчення похідної, учні можуть по-новому подивитися на поняття монотонності функції, розуміючи її зв'язок зі знаком похідної.

3) Створення умов для автоматизації навичок.

Багаторазове застосування знань у різноманітних ситуаціях сприяє автоматизації базових умінь, що звільняє пізнавальні можливості для осмислення складних зв'язків та ідей.

4) Виявлення прогалин.

Систематичне повторення допомагає вчителю та учням виявити прогалини у знаннях та неповністю сформовані зв'язки, що дає можливість своєчасно їх скоригувати.

Таким чином, повторення виступає не просто як механічне відтворення, а як активний засіб закріплення, поглиблення та переосмислення внутрішньопредметних зв'язків. Його цілеспрямована організація, орієнтована на виявлення взаємозв'язків, дозволяє не лише консолідувати знання, а й розвивати здатність учнів до їх гнучкого застосування, формуючи цілісне й системне бачення математики.

Підсумовуючи, можна стверджувати, що пропедевтика закладає основи, узагальнення допомагає інтегрувати та виявляти зв'язки, систематизація впорядковує набуті знання, а повторення закріплює їх та дозволяє переосмислити на вищому рівні. У сукупності ці дидактичні засоби створюють сприятливі умови для ефективного формування та реалізації внутрішньопредметних зв'язків у навчанні математики на профільному рівні, сприяючи глибокому і системному засвоєнню матеріалу.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ ВНУТРІШНЬОПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ У КУРСІ «АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ» У ПРОФІЛЬНОМУ НАВЧАННІ

2.1. Аналіз навчальної програми та підручників з курсу «Алгебра і початки аналізу» 10-11 класів профільного рівня щодо відображення внутрішньопредметних зв'язків

Проаналізуємо, наскільки проблема реалізації внутрішньопредметних зв'язків відображена в офіційних нормативних документах та навчальних посібниках.

Згідно з навчальною програмою МОН України [18] математика подається порівнево: на рівні стандарту та на профільному.

Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів [18] акцентує увагу на низці ключових принципів, які є безпосереднім підґрунтям для реалізації внутрішньопредметних зв'язків. Одним з принципів є принцип наступності - «наступність у навчанні математики між різними ланками математичної освіти, наступність з допрофільним навчанням математики і навчанням математики на інших рівнях» [18, с. 8].

Наступність у навчанні математики є однією з основоположних засад, що безпосередньо забезпечує внутрішньопредметні зв'язки. Принцип наступності вимагає опори на раніше вивчене та врахування перспективи.

Програма акцентує увагу на формуванні цілісної системи знань, що є основною метою реалізації цих зв'язків.

У документі прописано, що провідною лінією в курсі «Алгебра і початки аналізу» профільного рівня є функціональна. Вона включає дослідження властивостей функцій, зокрема, знаходження нулів функції, проміжків зростання-спадання та проміжків знакосталості. Також вказано на те, що у процесі дослідження функцій повинен чітко демонструватися взаємозв'язок між такими поняттями, як функція, рівняння та нерівність. Наприклад, щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння $f(x) = 0$; щоб знайти проміжки знакосталості функції $y = f(x)$, необхідно встановити, при яких

значеннях x $f(x) > 0$, а при яких $f(x) < 0$. Це підтверджує, що ідея інтеграції знань усередині предмета є однією з ключових вимог до методики навчання на профільному рівні.

Аналогічний підхід програма пропонує і для інших ключових понять. Наприклад, поняття похідної рекомендується вводити як узагальнення результатів розв'язування прикладних задач з природознавства та техніки. Одночасне вивчення фізичного та геометричного змісту похідної підкреслює зв'язок між швидкістю процесу та «крутизною» його графіка. Це положення корелює з теоретичними висновками про роль узагальнення та повторення у встановленні внутрішньопредметних зв'язків.

Важливо, що програма також наголошує на розвитку графічної культури учнів, що зумовлено її практичною значущістю. Вимоги до умінь встановлювати властивості функції за її графіком та будувати ескізи графіків свідчать про необхідність міцного зв'язку між аналітичним і графічним способами представлення функцій, що є ще одним важливим аспектом внутрішньопредметних зв'язків.

Крім того, у документі згадуються і сучасні методичні підходи, які сприяють реалізації зв'язків.

Зокрема, йдеться про:

- використання проблемних ситуацій для мотивації, що вимагає залучення знань із різних розділів;
- організацію інтегрованих уроків (наприклад, з фізики), що посилює міжпредметні зв'язки та їхню практичну значущість;
- застосування ІКТ (програм GRAN, GeoGebra тощо) для візуалізації зв'язків між аналітичними виразами та графічними зображеннями.

Програма звертає увагу на інші змістові лінії, де реалізація внутрішньопредметних зв'язків є критично важливою. Зокрема, у розділі «Інтеграл та його застосування» наголошується, що «формування технічних навичок інтегрування не повинно підмінювати його використання при моделюванні реальних процесів» [18, с. 9]. Це положення підтверджує, що

теоретичні знання мають бути тісно пов'язані з їх практичним застосуванням, що є основою для розуміння як внутрішньопредметних, так і міжпредметних зв'язків.

Аналогічно, при вивченні теорії ймовірностей рекомендується поєднувати статистичний та аксіоматичний підходи, залучаючи значну кількість побутових та прикладних задач. Це дозволяє учням бачити зв'язок між абстрактними поняттями та реальними явищами.

Особливу роль у реалізації внутрішньопредметних зв'язків програма відводить задачам з параметрами. У документі зазначається, що «у процесі розв'язування таких задач до арсеналу прийомів та методів мислення школярів природно включаються аналіз, індукція та дедукція, узагальнення та конкретизація, класифікація та систематизація, аналогія» [18, с. 9]. Задачі з параметрами, таким чином, виступають як потужний діагностичний інструмент, що дозволяє перевірити рівень знань з різних розділів курсу, а також рівень сформованості логічного та дослідницького мислення, що є результатом глибокого усвідомлення зв'язків між поняттями.

Аналіз навчальної програми підтверджує, що ідея внутрішньопредметних зв'язків не є другорядною, а закладена в самій її основі.

Документ прямо вказує на необхідність:

- наступності у навчанні, що є фундаментом для реалізації зв'язків;
- інтеграції ключових понять курсу («Функція – Рівняння – Нерівність»);
- узагальнення теоретичних положень (наприклад, введення похідної через прикладні задачі);
- систематизації знань, зокрема через розв'язування задач з параметрами.

Програма побудована на ключових змістових лініях, які тісно переплітаються між собою.

По-перше. Наскрізна функціональна лінія. Програма з самого початку з 10 класу акцентує увагу на функціях та їх властивостях. Це є фундаментом для всього курсу. Учні повинні встановлювати за графіком функції її властивості та виконувати перетворення графіків. Ця лінія продовжується у 10 класі

вивченням степеневих та тригонометричних функцій, а в 11 класі – показникових та логарифмічних. Кульмінація відбувається у темі «Похідна та її застосування», де функціональна лінія поєднується з елементами аналізу. Учні досліджують функції за допомогою похідної та будують графіки функцій на основі цих досліджень, що є яскравим прикладом глибокого внутрішньопредметного зв'язку.

По-друге. Інтеграція понять: «Функція $\leftrightarrow$ Рівняння $\leftrightarrow$ Нерівність». Програма чітко вказує на цей взаємозв'язок. Учні повинні застосовувати властивості функцій до розв'язування рівнянь і нерівностей. Дана вимога простежується як у 10 класі при вивченні ірраціональних і тригонометричних рівнянь, так і в 11 класі – показникових та логарифмічних. Це пряма вказівка, що розв'язування рівняння $f(x) = 0$ і нерівностей $f(x) > 0$ чи $f(x) < 0$ є частиною дослідження функції $f(x)$.

По-третє. Систематизація як мета навчання. Особливу роль у реалізації внутрішньопредметних зв'язків навчальна програма відводить задачам з параметрами, які зустрічаються як у 10, так і в 11 класах. Документ зазначає, що їх розв'язування включає такі методи мислення, як аналіз, узагальнення та систематизація. Це підкреслює, що такі задачі виступають як інструмент для інтеграції знань із різних розділів. Сама назва теми в 11 класі – «Узагальнення та систематизація» – підтверджує, що це є однією з кінцевих цілей навчання.

По-четверте. Зв'язок між розділами математичного аналізу. У 11 класі програма послідовно пов'язує похідну, похідну та інтеграл. Вивчення теми «Інтеграл та його застосування» починається з розгляду первісної, демонструючи оберненість операцій диференціювання та інтегрування. Наголос на фізичному та геометричному змісті інтеграла та його застосуванні для обчислення площі ілюструє зв'язок між математичним аналізом і геометрією.

Аналіз підручників з курсу «Алгебра і початки аналізу» 10-11 класів профільного рівня щодо відображення внутрішньопредметних зв'язків наведено нижче.

Підручник [1] побудований на принципі системності та інтеграції знань. Внутрішньопредметні зв'язки реалізуються через дві основні складові — змістову інтеграцію та методичне структурування:

1. Змістова інтеграція.

В завданнях часто поєднується матеріал з алгебри, початків аналізу та тригонометрії, що вимагає від учнів одночасного застосування знань з різних розділів. Особлива увага приділяється задачам з параметрами, які дозволяють перевірити рівень знання основних розділів шкільного курсу математики. Це свідчить про те, що розв'язування таких задач виступає як потужний інструмент для узагальнення та систематизації знань.

2. Методичне структурування.

Для посилення зв'язків використовуються спеціальні рубрики, які інтегрують ключові формули, теореми, алгоритми з попередніх параграфів і розділів, що сприяє повторенню та закріпленню знань у зручному стислому форматі. Підручник містить завдання, які спонукають учнів застосовувати матеріал з різних тем у комплексі, а також аналізувати, порівнювати та узагальнювати методи розв'язування. Тестові завдання формують уміння швидко встановлювати міжтемні зв'язки, перевіряють готовність до роботи у форматі ЗНО, де часто поєднуються кілька тем в одному завданні. Задачі з параметрами базуються на попередніх знаннях з алгебри, теорії функцій та методів розв'язування рівнянь і нерівностей. Підсумкові вправи після розділів об'єднують зміст усього розділу та спонукають учнів згадувати матеріал попередніх тем, створюючи логічну цілісність курсу. Поділ завдань на рівні складності дозволяє організувати диференційоване навчання.

Підручник [12] спрямований на розвиток «аналітичного й логічного мислення, дослідницьких навичок, математичної культури» [12, с. 3]. Цей підхід закладає основу для системного вивчення курсу. Підручник відзначається чіткою структурою, логічною наступністю й орієнтацією на формування цілісної математичної компетентності.

Реалізація внутрішньопредметних зв'язків здійснюється через поєднання теоретичного матеріалу з інтегрованими вправами, поступове ускладнення задач і використання похідної як універсального інструмента аналізу функцій.

Ключові механізми реалізації внутрішньопредметних зв'язків:

1. Наступність і логічна послідовність.

Матеріал організовано так, що базові поняття з першого розділу (функції, графіки, методи їх аналізу) є інструментами для вивчення наступних тем (степеневі, тригонометричні функції, рівняння та нерівності). Це забезпечує поступовий розвиток математичного апарату.

2. Інтегровані завдання.

У багатьох вправах поєднуються знання з кількох тем, наприклад, при розв'язуванні ірраціональних та тригонометричних рівнянь учні застосовують властивості функцій і графічні методи, розглянуті раніше. Це формує цілісне бачення предмета.

3. Використання похідної як узагальненого методу.

Розділ про похідну є кульмінацією курсу, де знання про похідну застосовуються для глибокого дослідження функцій.

4. Систематизація знань.

Найважливішим елементом, що сприяє узагальненню, є окремий розділ для повторення матеріалу, який не тільки закріплює навички і вміння, а змушує учнів застосовувати знання з усього курсу в комплексі, що допомагає подолати фрагментарність знань, сформувати системне мислення та цілісне уявлення про взаємозв'язки між темами алгебри і початків аналізу.

Підручник [19] спрямований на більш поглиблене вивчення предмета. Курс об'єднує кілька галузей математики, а його вивчення базується на властивостях функцій до розв'язування рівнянь та нерівностей, що є ключовим для формування внутрішньопредметних зв'язків.

У підручнику можна виділити кілька ключових механізмів реалізації внутрішньопредметних зв'язків:

1. Акцент на функціональній лінії.

З самого початку курсу наголошується на тому, що особливу увагу треба звертати на властивості функцій до розв'язування рівнянь та нерівностей. Це дозволить учням бачити функцію як універсальний інструмент для рішення широкого спектра задач, що є основою внутрішньопредметних зв'язків.

2. Структуроване подання матеріалу.

Теорія подається коротко і схематично, часто у вигляді таблиць, схем з поясненнями, обґрунтуванням та прикладами розв'язування. Така структура сприяє систематизації знань та швидкому засвоєнню інформації, оскільки дозволяє учням орієнтуватися у взаємозв'язках між поняттями.

3. Формування узагальнених методів розв'язування.

Підручник пропонує «орієнтири» та «плани» розв'язування задач, що є потужним інструментом для реалізації внутрішньопредметних зв'язків. Завдяки цьому учні вчаться складати алгоритми рішення, що дозволяє використовувати один і той самий підхід до розв'язування різних завдань.

4. Детальний розбір зразків з коментарями.

Ключовою особливістю підручника є велика кількість прикладів розв'язування задач, які супроводжуються докладними коментарями. Цей підхід допомагає учням розуміти логіку і стратегію розв'язування, формує навички, необхідні для творчого застосування знань з різних тем у нестандартних ситуаціях, що є прямим проявом внутрішньопредметних зв'язків.

5. Диференціація завдань.

Наявність вправ трьох рівнів складності дозволяє організувати диференційоване навчання та поступово залучати учнів до освоєння внутрішньопредметних зв'язків.

6. Використання задач з параметрами як інструмента узагальнення.

У підручнику значна увага приділяється задачам з параметрами, які є потужним інструментом для узагальнення знань, оскільки для їхнього розв'язування необхідно застосовувати методи з різних тем. Такі завдання розвивають аналітичне мислення, індукцію, дедукцію, уміння систематизувати

інформацію та класифікувати її, що є ключовими навичками для успішного опанування курсу.

7. Орієнтація на нові теми.

Підручник зосереджений на послідовному вивченні нового матеріалу та не містить окремих блоків для повторення. Функція узагальнення та систематизації знань покладається на самостійну роботу учня та методичні прийоми вчителя.

Аналіз підручників з алгебри та початків аналізу для 10-го класу показав, що автори дотримуються певних методичних підходів.

Змістовий аналіз підручників для 11-го класу [8], [13], [20] підтверджує, що ці принципи є послідовними і продовжуються в усьому старшому курсі, хоча їх реалізація дещо відрізняється залежно від рівня навчання.

Підручник [8] демонструє комплексний підхід до реалізації внутрішньопредметних зв'язків. В ньому представлено спеціальний розділ для узагальнення та систематизації знань, використані додаткові рубрики, які сприяють не тільки навчанню, а й формуванню в учнів ключових компетентностей, показуючи зв'язок математики з реальним життям та іншими предметами.

Підручник [13] орієнтований на узагальнення та систематизацію знань шляхом повторення вивченого раніше матеріалу.

Підручник [20] відрізняється системним і методичним підходом до формування внутрішньопредметних зв'язків. Замість повторення пропонується узагальнення знань через схеми та таблиці, через приклади та алгоритми розв'язувань. Головний акцент на інтеграцію знань у процесі вивчення нового матеріалу. Це робить підручник ефективним інструментом для навчання учнів не лише розв'язувати задачі, а й мислити глобально, бачачи зв'язки між різними розділами математики.

Всі автори приділяють значну увагу формуванню внутрішньопредметних зв'язків, але використовують різні методичні підходи: алгоритмічний, рефлексивний, концентрований.

2.2. Методичні підходи реалізації внутрішньопредметних зв'язків (на прикладі теми «Найбільше і найменше значення функції на відрізку» в 10 класі)

Проаналізуємо методичні підходи для реалізації внутрішньопредметних зв'язків на прикладі теми «Найбільше і найменше значення функції», яка є важливою складовою курсу «Алгебра і початки аналізу» у 10 класі, за різними підручниками. Для прикладу розглянемо наступні завдання.

Приклад 1 [12, с. 330]. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на відрізку $[-2; 0]$.

Розв'язання

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12;$$

$$12x^2 - 18x - 12 = 0;$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{1}{2}$$

Таким чином, функція f має дві критичні точки, а проміжку $[-2; 0]$ належить одна: $x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Маємо: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, f(-2) = -38, f(0) = 6.$$

$$\text{Отже, } \max_{[-2; 0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, \min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = -38.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{37}{4}; -38.$$

У задачі пояснення побудоване на класичному аналітичному підході. Наведено повний приклад розв'язування з докладним пошуком критичних точок. Автор пропонує учням виконати диференціювання, знайти похідну, розв'язати рівняння $f'(x) = 0$. Далі учні перевіряють значення функції у критичних точках, що належать відрізку, і на кінцях відрізка $[-2; 0]$.

У підручнику демонструється послідовність зв'язків: похідна $\rightarrow$ критичні точки $\rightarrow$ дослідження функції.

Таким чином, внутрішньопредметний зв'язок між поняттями реалізується через поетапне використання вивчених раніше понять (розв'язування квадратних рівнянь, обчислення значень многочлена) у новій аналітичній ситуації. Методика є алгоритмічно-орієнтованою.

Приклад 2 [19, с. 237]. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 12x + 12$ на відрізку $[1; 3]$.

Розв'язання

- а) Упевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.

Область визначення функції – усі дійсні числа ($D(f) = R$), отже, заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.

- б) Знайти похідну $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12.$$

- с) Знайти критичні точки: $f'(x) = 0$ або не існує.

$f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна на заданому відрізку).

$$f'(x) = 0; 3x^2 - 12 = 0 \text{ при } x = 2 \text{ або } x = -2.$$

- д) Вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку.

Заданому відрізку $[1; 3]$ належить лише критична точка $x = 2$.

- е) Обчислити значення функції у вибраних критичних точках і на кінцях відрізка.

$$f(1) = 1; f(2) = -4; f(3) = 3.$$

- ф) Порівняти одержані значення функції та вибрати з них найменше і найбільше значення.

$$\max_{[1; 3]} f(x) = f(3) = 3, \min_{[1; 3]} f(x) = f(2) = -4.$$

У підручнику надається загальна схема - алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку. Алгоритм включає чіткі кроки:

- перевірити область визначення функції;

- знайти похідну;
- визначити критичні точки, вибрати ті, що належать відрізку;
- обчислити значення функції у критичних точках і на кінцях відрізка;
- зробити висновок.

Поруч наведено приклад, який ілюструє роботу кожного етапу.

Такий підхід дозволяє узагальнити та систематизувати знання, розвинути операційний компонент внутрішньопредметних зв'язків — учні вчаться застосовувати загальний метод до різних типів функцій, а також усвідомлюють необхідність врахування теоретичних понять (ОДЗ, неперервність) перед початком обчислень. Методика є рефлексивно-орієнтованою.

Приклад 3 [1, с. 307]. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ на проміжку $[-4; 4]$.

Розв'язання

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1).$$

Критичні точки: $x_1 = -3, x_2 = 1$.

Знайдемо значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка.

$f(-4) = 10, f(-3) = 17, f(1) = -15, f(4) = 66$. З цих чотирьох значень функції найменшим є -15, а найбільшим 66.

Відповідь. $\max_{[-4; 4]} f(x) = f(4) = 66, \min_{[-4; 4]} f(x) = f(1) = -15$.

Автори подають розв'язування стисло, концентровано, без особливих пояснень у контексті пошуку екстремальних значень, без детального опису алгебраїчних кроків, більше уваги приділяють застосуванню похідної до дослідження поведінки функції. Учні повинні самостійно встановити, як похідна допомагає знайти точки екстремуму.

Така побудова розвиває аналітичний зв'язок між геометричним і алгебраїчним підходами, формує навички самостійного перенесення знань у нові ситуації. Методика є концентровано-обчислювальною.

Проведений порівняльний аналіз зразків розв'язування задачі «Найбільше і найменше значення функції на відрізку» з підручників 10 класу дозволяє

зробити наступні висновки щодо реалізації внутрішньопредметних зв'язків за лінією «Функція $\rightarrow$ Похідна $\rightarrow$ Рівняння/Нерівність $\rightarrow$ Екстремум (Результат)».

У підручниках використано три суттєво відмінні методичні підходи для демонстрації вертикального зв'язку (наступності знань) у застосуванні похідної:

1) У підручнику [12] – алгоритмічний підхід.

Реалізує зв'язок через технічний компонент. Основний акцент зміщується на алгоритмічну послідовність і точне виконання алгебраїчних кроків (розв'язування рівнянь $f'(x) = 0$, обчислення $f(x)$). Зв'язок «Функція $\rightarrow$ Похідна» сприймається учнями як набір дій.

2) У підручнику [19] – рефлексивний підхід.

Реалізує зв'язок через теоретичний компонент. Схема-алгоритм явно вимагає актуалізації теоретичних знань (перевірка ОДЗ та неперервності) перед застосуванням похідної. Це формує усвідомлений зв'язок, де учні розуміють теоретичні передумови використання похідної.

3) У підручнику [1] - концентровано-обчислювальний підхід.

Реалізує зв'язок через аналітичний компонент. Стисле подання матеріалу вимагає від учнів самостійного відновлення проміжних алгебраїчних кроків, чим підкреслюється інструментальна функція похідної. Це сприяє формуванню навичок самостійної інтеграції знань.

Навіть у цій одній темі простежується закладений потенціал для встановлення горизонтальних зв'язків (інтеграція різних розділів курсу), оскільки критичні точки $f'(x) = 0$ можуть вимагати розв'язування:

- тригонометричних рівнянь, якщо $f(x)$ - тригонометрична функція;
- ірраціональних рівнянь, якщо $f(x)$ - ірраціональна функція.

Таким чином, система вправ використовує тему «Найбільше і найменше значення функції» як інтегративну ланку, яка об'єднує увесь функціональний та аналітичний апарат курсу алгебри і початків аналізу. Ефективність реалізації внутрішньопредметних зв'язків залежить від методичної стратегії підручника.

2.3. Методи та прийоми встановлення та реалізації внутрішньопредметних зв'язків на різних етапах навчання

Внутрішньопредметні зв'язки забезпечують цілісність математичних знань, сприяють глибшому розумінню учнями системи понять, теорем і методів дослідження тверджень. Для ефективної реалізації цих зв'язків у курсі «Алгебра і початки аналізу» важливо застосовувати відповідні методи і прийоми на всіх етапах навчального процесу, враховуючи методичні підходи, закладені в підручниках (алгоритмічний, рефлексивний, концентрований).

2.3.1. Актуалізація опорних знань

Метою цього етапу є відновлення в пам'яті учнів раніше засвоєних понять, властивостей і способів дій (пропедевтика), необхідних для сприйняття нового матеріалу. Основний акцент в роботі робимо на зв'язку «Функція $\rightarrow$ Рівняння». На цьому етапі доцільно використовувати прийоми, які безпосередньо пов'язують знання про функції (10 клас) з алгебраїчними інструментами (8–9 класи).

Основні прийоми, які можна застосовувати:

1) Складання «асоціативних рядів» або «поняттєвих карт».

Вони активують в пам'яті учня цілу низку пов'язаних з поняттям, яке розглядується, знань, формул, процедурних кроків і суміжних тем, забезпечують миттєвий перенос знань та сприяють уникненню фрагментарності. Учень не просто знає окрему формулу, а бачить її місце у загальній системі знань. Наприклад, при вивченні похідної треба активізувати пов'язані поняття: приріст функції, середня швидкість, тангенс кута нахилу. Перед виведенням правил диференціювання обговорити, що таке «градієнт» або «темپ зміни» у фізиці, пов'язавши з курсом фізики (вертикальний зв'язок).

2) Прийом «Бліц-розв'язування рівнянь» (просліджується у [1], [12]).

Виконання коротких усних вправ, які демонструють зв'язок між старим і новим. Наприклад, перед вивченням теми «Похідна» можна повторити правила знаходження приросту функції, властивості лінійних і квадратних функцій.

Приклад. Швидке розв'язування рівнянь, які потенційно виникають при $f'(x) = 0$. Це посилює зв'язок «Похідна $\rightarrow$ Рівняння».

Приклад: Нехай дано функцію $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 12x$. Знайти критичні точки функції.

Знаходять похідну $f'(x)$: $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x - 12 = 4x^2 - 8x - 12$.

Щоб визначити критичні точки, треба похідну прирівняти до нуля, тобто розв'язати алгебраїчне (квадратне) рівняння: $4x^2 - 8x - 12 = 0$. Для цього ділять всі частини рівняння на 4, отримують: $x^2 - 2x - 3 = 0$. Застосовують теорему Вієта, оскільки це найшвидший спосіб знайти корені рівняння.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1.$$

Внутрішньопредметні зв'язки: «Алгебра (8 клас) $\rightarrow$ Аналіз (Критичні точки)»; «Похідна $\rightarrow$ Рівняння $\rightarrow$ Алгебраїчні методи розв'язування»; «Функція $\rightarrow$ Похідна $\rightarrow$ Властивості функції»; «Алгебраїчне рівняння $\rightarrow$ Геометричний зміст похідної»; зв'язок між диференціюванням та алгебраїчними перетвореннями: «Правило похідної + спрощення $\rightarrow$ Рівняння $\rightarrow$ Корені рівняння»; пропедевтичний зв'язок із подальшими темами.

На етапі актуалізації проявляється зв'язок між змістовими лініями «Функція $\rightarrow$ Рівняння».

3) Прийом «Актуалізація ОДЗ та неперервності» або «Рефлексія ОДЗ» (просліджується у підручнику [19]).

Суть прийому: учитель просить учнів до початку роботи з похідною проаналізувати задану функцію $f(x)$ на предмет області визначення та неперервності.

Мета: застосовувати теоретичні знання про функцію (область визначення, неперервність) до початку роботи з похідною.

Приклад. Аналіз функції $f(x) = \frac{x}{x-2}$ на відрізку $[3; 5]$.

Перед розв'язуванням задачі на екстремум учитель ставить питання: «Чи має функція $f(x) = \frac{x}{x-2}$ критичні точки? Чи неперервна вона на відрізку $[3; 5]$?»

Це готує ґрунт для усвідомленого застосування теореми і посилює зв'язок «Функція $\rightarrow$ Теоретичні умови». Це пряма вимога повторити область визначення та неперервність різних типів функцій (раціональних, ірраціональних), що є ключовим для коректного застосування теорем аналізу.

Чи неперервна функція $f(x) = \frac{x}{x-2}$ на відрізку $[3; 5]$?

Аналіз ОДЗ: функція $f(x) = \frac{x}{x-2}$ не визначена (має розрив) при $x - 2 = 0$, тобто $x = 2$.

Перевірка: точка розриву $x = 2$ не належить відрізку $[3; 5]$.

Функція є неперервною на відрізку $[3; 5]$, отже, для неї працює теорема Вейерштрасса про існування найбільшого і найменшого значень.

Питання: «Чи має функція критичні точки на відрізку $[3; 5]$?

Учні знаходять похідну: $f'(x) = \left(\frac{x}{x-2}\right)' = \frac{1 \cdot (x-2) - x \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}$.

Аналіз критичних точок ($f'(x) = 0$): $\frac{-2}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x \neq 2, -2 \neq 0$. Рівняння не має розв'язків. На відрізку $[3; 5]$ не існує точок, в яких похідна дорівнює нулю. Це означає, що для знаходження точок екстремуму достатньо обчислити значення функції лише на кінцях відрізка (у точках $x = 3$ та $x = 5$).

$$f(3) = \frac{3}{3-2} = 3; f(5) = \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Порівняємо отримані значення: $3 > 1\frac{2}{3}$.

$$\max_{[3;5]} f(x) = f(3) = 3, \min_{[3;5]} f(x) = f(5) = 1\frac{2}{3}.$$

Внутрішньопредметні зв'язки: «Функція (теорія, 9 клас) $\rightarrow$ Аналіз (умови застосування алгоритму, 10 клас)», «Функція $\rightarrow$ Рівняння», «Похідна $\rightarrow$ Рівняння $\rightarrow$ Алгебраїчні методи розв'язування», «Числові значення $\rightarrow$ Нерівності».

4) Постановка проблемного питання (просліджується у підручнику [12]).

Учитель просить учнів пригадати формулу середньої швидкості ($v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, де Δs — переміщення, Δt — проміжок часу). Ставиться питання: «Як знайти

швидкість не на проміжку, а в конкретний момент часу t_0 при нерівномірному русі?».

Розглядається закон руху: $s(t) = t^2 + t$, наприклад для $s_0 = 0$, $v_0 = 1$, $a = 2$. Обчислюється середня швидкість на проміжку $[t_0; t_0 + \Delta t]$:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \dots = 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + \Delta t,$$

$$v_{\text{ср.}}(\Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta t(2t_0 + 1 + \Delta t)}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Алгебраїчні формули дозволяють обчислити лише $v_{\text{ср.}}$. Щоб знайти миттєву швидкість, необхідно, щоб $\Delta t \rightarrow 0$. У цей момент вираз $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ набуває невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$. Єдиний спосіб знайти миттєву швидкість — це здійснити граничний перехід: $v_{\text{митт}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср.}}(\Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1$. Цей процес знаходження границі, який вирішує проблему, що була недоступна для чистої алгебри, і є визначенням похідної функції $s(t)$ за аргументом t .

Внутрішньопредметний зв'язок: «Фізика/Алгебра (Середня швидкість) $\rightarrow$ Аналіз (Похідна як миттєва швидкість)».

2.3.2. Мотивація навчальної діяльності

Прийом «Постановка проблемного питання» можна застосовувати і під час мотиваційного етапу уроку, щоб мотивувати учнів до вивчення дослідження функції за допомогою похідної як єдиного інструменту для розв'язування прикладних задач.

Приклад (за матеріалами підручника [12]):

Постановка проблеми: учитель пропонує учням проаналізувати низку реальних проблем, що вимагають пошуку найкращого (оптимального) розв'язку:

- «Яку кількість продукції треба випустити підприємству, щоб отримати найбільший прибуток?»;
- «Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання за найменший час?»;

- «Як доставити товар у торговельні точки так, щоб витрати палива були найменшими?»

Необхідно звернути увагу, що ці задачі зводяться до пошуку найбільшого і найменшого значень деякої функції на певному відрізку $[a; b]$. Обговорення того, що для більшості функцій (зокрема, кубічних, дробово-раціональних, тригонометричних) знаходження цих значень неможливе лише за допомогою побудови графіка або знаходження координат вершини параболи, як це робилося у 9 класі стосовно квадратичної функції.

Для розв'язування цих практичних завдань потрібен новий, універсальний інструмент – похідна та заснований на ній алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значень функції, що підсилює зв'язок «Функція → Похідна → Точки екстремуму».

Внутрішньопредметні зв'язки: «Функція (9 клас) → Аналіз (Застосування похідної до дослідження функцій)», «Функція → Похідна → Точки екстремуму».

2.3.3. Вивчення нового матеріалу

На цьому етапі реалізація внутрішньопредметних зв'язків здійснюється через чітку логіку та зіставлення.

Ефективні прийоми:

- 1) Порівняння нового поняття з відомим: наприклад, поняття «степенева функція» і «показникова функція».
- 2) Побудова системи задач, що демонструють зв'язок між раніше вивченими та новими алгоритмами, підкреслюючи, що, наприклад, похідна є лише першим кроком, за яким слідує розв'язування рівняння. Зв'язок: «Функція → Похідна → Рівняння».
- 3) Прийом «Аналітичне зіставлення» [19]: при введенні поняття критичної точки треба чітко розділяти: «Поняття (критична точка) → Дія (розв'язування рівняння $f'(x) = 0$) → Зміст (горизонтальна дотична)», тобто використовувати двокомпонентний запис, як в підручнику:

- Крок (Поняття): знайти критичні точки.

- Дія (Рівняння): розв'язати відповідне рівняння $f'(x) = 0$.

Це наголошує на тому, що «критична точка» — це поняття, а $f'(x) = 0$ — інструмент його знаходження.

4) Прийом «Геометрична інтерпретація».

На кожному етапі, де це можливо (наприклад, при зміні знаку похідної), зображати відповідну геометричну ситуацію (кут нахилу дотичної, напрямок монотонності).

На етапі вивчення нового матеріалу використовується основний алгоритм, але з акцентом на міжпонятійних переходах.

Розглянемо на прикладі з підручника [19].

Дано функцію: $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$. Дослідити функцію на монотонність і екстремуми.

За аналітичним алгоритмом, поданим у підручнику, необхідно зробити наступні кроки:

- 1) Знайти область визначення функції: $D(f) = R$.
- 2) Знайти похідну $f'(x)$:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1).$$

- 3) Знайти критичні точки, тобто внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує: $f'(x)$ існує на всій області визначення. $f'(x) = 0$ при $x = 0, x = 1, x = -1$. При використанні прийому «Геометрична інтерпретація» $f'(x) = 0$ геометрично означає, що дотична до графіка функції у цій точці горизонтальна (паралельна осі ox). Це необхідна, але недостатня умова екстремуму.
- 4) Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму (рис.2.1).

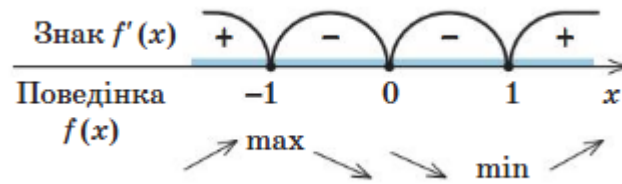


Рис.2.1. Дослідження знаку похідної

5) Записати відповідь за результатами дослідження.

Функція зростає на кожному з проміжків: $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$; функція спадає на проміжку $[-1; 1]$. Точки екстремуму $x_{\max} = -1, x_{\min} = 1$. У точці $x = -1$ знак похідної змінюється з «+» на «-». У точці $x = 1$ знак похідної змінюється з «-» на «+». У точці $x = 0$ знак похідної не змінюється («-» на «-»). $y_{\max} = f(-1) = 3$; $y_{\min} = f(1) = -1$.

На рис. 2.2 подано схематичну ілюстрацію графіка функції $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ з дотичними у критичних точках.

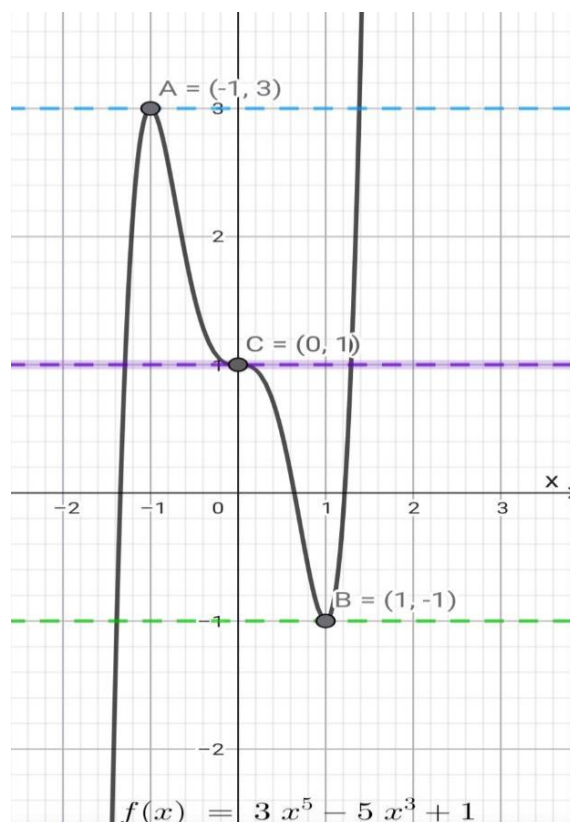


Рис. 2.2. Схематичний рисунок, який ілюструє геометричний зміст знаку похідної та характер монотонності функції

У точках $x = -1$ та $x = 1$ дотична є горизонтальною, при цьому знак похідної змінюється, що геометрично проявляється як зміна характеру руху графіка: у точці $x = -1$ графік переходить від зростання до спадання, що відповідає локальному максимуму; у точці $x = 1$ графік переходить від спадання до зростання, що відповідає локальному мінімуму; в $x = 0$ дотична також горизонтальна, однак знак похідної не змінюється, тому графік не змінює напрямку руху. Це дозволяє інтерпретувати дану точку як точку перегину, а не точку екстремуму.

На ілюстрації одночасно працюють:

- алгебра — аналітичне знаходження похідної та критичних точок;
- геометрія — кут нахилу дотичної до осі Ox ;
- функціональна лінія — зростання, спадання, екстремуми;
- аналіз — похідна як границя і швидкість зміни;
- графічна інтерпретація — перехід від формули до поведінки графіка.

Це є реалізація внутрішньопредметних зв'язків через методичний прийом «Геометрична інтерпретація». Зв'язок: «Похідна $\rightarrow$ Дотична $\rightarrow$ Кут нахилу $\rightarrow$ Монотонність $\rightarrow$ Екстремум».

Прийом «Геометрична інтерпретація» є методичним засобом, який додає візуальний та асоціативний сенс до аналітичного алгоритму, перетворюючи механічне обчислення на свідоме, системне мислення. Таким чином, аналітичний алгоритм забезпечує формальну правильність дослідження функції, тоді як прийом «Геометрична інтерпретація» наповнює кожен етап дослідження наочним змістом і забезпечує усвідомлене розуміння взаємозв'язку між похідною, дотичною та поведінкою графіка функції.

2.3.4. Закріплення вивченого матеріалу

Закріплення спрямоване на формування стійких умінь встановлювати зв'язки між різними способами розв'язування.

Ефективні прийоми:

- 1) Вправи з кількома способами розв'язування: наприклад, знаходження коренів рівняння алгебраїчним та графічним методами.
- 2) Порівняльний аналіз двох методів (алгебраїчного та графічного): наприклад, чому *min* чи *max* значення функції може бути на межах відрізка, а не лише у критичних точках (зв'язок із властивостями функції, зв'язок «Рівняння $\rightarrow$ Похідна»).
- 3) Побудова узагальнюючих таблиць і схем (як інструмент систематизації знань).

Методи і прийоми спрямовані на відпрацювання внутрішньопредметного зв'язку. Як приклади:

- 1) Прийом «Вправа-трансформер».

Дати учням кілька різних за класом функцій (многочлен, тригонометрична, дробово-раціональна) і попросити лише визначити тип рівняння $f'(x) = 0$, яке потрібно розв'язати. Це вчить класифікувати проблему, а не лише обчислювати.

- 2) Прийом «Знайти помилку в алгебрі».

Надати готове розв'язання задачі на екстремум, де помилка допущена саме на етапі розв'язування рівняння $f'(x) = 0$.

Прийом «Вправа-трансформер».

Головна мета - зупинити автоматизм обчислень і змусити учня виконувати найважливіший інтелектуальний крок: аналіз та класифікацію проблеми. Учень, побачивши рівняння, автоматично трансформує його у відповідний алгоритм розв'язування, активуючи внутрішньопредметний зв'язок між розділами курсу.

Завдання: Класифікуйте рівняння та визначте, який метод (алгоритм) необхідно використати для його розв'язування.

$$(x^2 - 1)^2 - 5(x^2 - 1) + 4 = 0;$$

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = 5;$$

$$\sin 2x + \cos x = 0;$$

$$\log_2(x^2 - 4x) = 5.$$

Учень дає відповіді:

Перше рівняння – ціле раціональне. Для його розв'язування потрібно застосувати метод заміни змінної $t = x^2 - 1$ і розв'язати рівняння відносно t .

Друге – дробове раціональне. Треба визначити ОДЗ: $x \neq -3$, потім звести до квадратного (в інших випадках лінійного рівняння) - $x^2 - 9 = 5(x + 3) \Rightarrow x^2 - 9 = 5x + 15 \Rightarrow x^2 - 5x - 26 = 0$.

Щоб розв'язати тригонометричне рівняння, необхідно зробити заміну $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ і потім розкласти на множники: $\cos x (2 \sin x + 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ або $2 \sin x + 1 = 0$, звести до найпростіших тригонометричних рівнянь.

Четверте рівняння відноситься до логарифмічних. Треба перейти до показникової форми: $x^2 - 4x = 2^5$ і розв'язати квадратне рівняння:

$$x^2 - 4x - 32 = 0.$$

Саме цей етап створює міцний внутрішньопредметний зв'язок, оскільки учень розпізнає клас функції, пригадує алгоритм, пов'язаний із цим класом, визначає послідовність дій. Рівняння учень може не розв'язувати. Прийом «Вправа-трансформер» відпрацьовує не вміння рахувати, а вміння планувати розв'язок, свідомо активуючи зв'язок між теоретичним розділом курсу та відповідним практичним інструментарієм.

Прийом «Знайти помилку в алгебрі»

Мета - розвиток критичного мислення, уваги до деталей та закріплення навичок розв'язування рівнянь, нерівностей в задачах на дослідження функції.

Завдання для учня: Знайдіть та виправте помилку в розв'язуванні задачі щодо знаходження екстремумів функції $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

Помилкове розв'язання, як його бачить учень:

Знаходження похідної: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$. Цей крок виконано правильно.

Знаходження критичних точок. Прирівнюємо похідну до нуля:

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$

Виносимо спільний множник: $15x^2(x^2 - 1) = 0$.

Помилка починається на цьому кроці. Неправильне розв'язання рівняння:

$$15x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$15x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Учень припустився помилки, пропустивши корінь $x = -1$.

Нанесення критичних точок на числову пряму. Учень наносить лише $x = 0$ та $x = 1$, що призводить до неправильного визначення інтервалів монотонності та екстремумів.

Визначення екстремумів (неправильно): $f(x)$ зростає на $(-\infty; 0)$, спадає на $(0, 1)$, зростає на $(1; +\infty)$. Локальний максимум у $x = 0$, локальний мінімум у $x = 1$.

Правильне розв'язання для перевірки: помилка допущена на етапі розв'язування рівняння $15x^2(x^2 - 1) = 0$.

$x^2 - 1 = 0$ має два корені: $x = 1$ та $x = -1$.

Правильні критичні точки: $x = -1, x = 0, x = 1$.

Геометрична інтерпретація помилки: пропуск кореня $x = -1$ означає, що учень проігнорував локальний максимум функції, а його схема інтервалів монотонності буде повністю хибною.

Цей приклад демонструє, як помилка в алгебраїчному рівнянні прямо впливає на аналіз функції (екстремуми та монотонність), тим самим підкреслюючи внутрішньопредметний зв'язок між такими розділами: «Алгебра (зокрема, розв'язування рівнянь вищих степенів, факторизація многочленів) $\rightarrow$ Математичний аналіз/Початки аналізу (дослідження функції, знаходження критичних точок, екстремумів та інтервалів монотонності)».

Помилка в алгебраїчному розв'язуванні рівняння ($f'(x) = 0$) повністю спотворює результат у математичному аналізі.

2.3.5. Застосування знань і вмінь

На цьому етапі внутрішньопредметні зв'язки проявляються найяскравіше, оскільки учні використовують знання з різних тем для розв'язування комплексних задач:

- 1) Прийом «Задача з параметром» ([19]), який вимагає комбінації знань про похідну та графіки функцій.
- 2) Прийом «Задачі на доведення нерівностей» ([1]): використання похідної як теоретичного інструменту для підтвердження властивостей.
- 3) Математичне моделювання: задачі про рух, оптимізацію, економічні задачі, де складається функція (Алгебра), а потім проводиться дослідження (Аналіз).

Етап застосування знань і вмінь ідеально підходить для реалізації горизонтальних зв'язків з тригонометрією, геометрією, а також фізикою.

Приклад: знайти найбільше значення функції $f(x) = x \sin x$ на заданому проміжку — це вимагає і похідної добутку, і знання тригонометрії.

2.3.6. Узагальнення та систематизація

Фінальний етап, де всі зв'язки зводяться в єдину систему. Узагальнення дозволяє учням усвідомити систему знань як цілісну структуру. На цьому етапі ефективні всі методи, представлені вище.

Таким чином, ефективна реалізація внутрішньопредметних зв'язків у курсі «Алгебра і початки аналізу» вимагає від учителя цілеспрямованого застосування різноманітних методів і прийомів на всіх етапах уроку. Систематичне використання таких прийомів, як «Рефлексія ОДЗ» (зв'язок «Функція $\rightarrow$ Похідна»), «Аналітичне зіставлення» (зв'язок «Поняття $\rightarrow$ Рівняння») та «Задачі-доведення» (зв'язок «Похідна $\rightarrow$ Нерівність»), забезпечує не лише засвоєння нового матеріалу, але й сприяє формуванню цілісного, системного бачення математики як єдиної науки, що є ключовою метою профільного навчання.

2.4. Практична реалізація внутрішньопредметних зв'язків (на прикладі теми «Найбільше і найменше значення функції на відрізку»)

Тема: «Найбільше і найменше значення функції на відрізку».

Ключова лінія зв'язку: «Функція $\rightarrow$ Похідна $\rightarrow$ Рівняння/Тригонометрія».

I етап. Актуалізація опорних знань (5 хвилин).

Мета: відновлення знань, повторення та перевірка усвідомлення учнями того, що неперервність на відрізку є критичною умовою для застосування алгоритму пошуку найбільшого та найменшого значення через похідну.

Методичний прийом: «Актуалізація ОДЗ та неперервності».

Питання до класу: Наведіть приклади функцій, які не є неперервними на проміжку $[0; 2\pi]$.

Очікувані відповіді: тангенс, котангенс, дробово-раціональні з нулем у знаменнику. Тригонометричні функції мають розриви, коли їхній знаменник (синус чи косинус) дорівнює нулю.

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cos x = 0, \text{ точки розриву на } [0; 2\pi]: x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2};$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x, \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x = 0, \text{ точки розриву на заданому проміжку}$$

$$x = 0, x = \pi, x = 2\pi;$$

$f(x) = \frac{5}{x-3}$. Функція має розрив у точці, де знаменник дорівнює нулю. Нулі знаменника $x = 3$, бо $x - 3 = 0$. Точка $x = 3$ належить $[0; 2\pi]$.

Висновок про неперервність: функція не є неперервною на заданому проміжку.

Питання до класу: «Чому ми можемо бути впевнені, що функція

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 \text{ є неперервною на будь-якому відрізку?}»$$

Очікувана відповідь: тому що це многочлен.

Вчитель: «Чому нам важливо знати, чи неперервна функція?»

Ключова відповідь (Теоретична вимога): Нам важливо знати, чи неперервна функція, тому що існує фундаментальна теорема курсу математичного аналізу, яка є основою для всього алгоритму. Ця теорема, відома як теорема Вейерштрасса (про найбільше і найменше значення),

стверджує, що: «Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція обов'язково досягає на цьому відрізку свого найбільшого і найменшого значень». Якщо функція не є неперервною на відрізку (має розрив), ця теорема не працює, і ми не гарантуємо існування *max* або *min* значень. Тому перевірка неперервності – це перша необхідна умова для початку роботи з похідною.

Вчитель: «Для неперервної функції на відрізку $[a; b]$ ми завжди можемо знайти найбільше та найменше значення (за теоремою Вейєрштрасса). Якщо ж функція на даному відрізку має розрив (наприклад, вертикальну асимптоту), її значення можуть бути необмеженими, і тому гарантувати існування найбільшого чи найменшого значення ми не можемо. Таким чином, знання про неперервність – це гарантія того, що наша відповідь (число) існує. Якщо функція не є неперервною на відрізку, наш алгоритм руйнується на етапі перевірки кінців відрізка. Навіть якщо ми правильно знайдемо всі критичні точки за допомогою похідної, ми можемо пропустити момент, коли функція має «стрибок» або йде в нескінченність у точці розриву. Наша відповідь буде неправильною або неіснуючою».

Реалізований внутрішньопредметний зв'язок: «Функція $\rightarrow$ Теоретичні умови». Посилення вертикального зв'язку, усвідомлення, що знання про ОДЗ та неперервність (Функція) контролює застосування похідної.

Таким чином, на етапі актуалізації опорних знань, особливо в профільному класі, ми повинні задавати питання як про неперервні, так і ті, що не є неперервними функціями, щоб посилити вертикальний зв'язок «Функція $\rightarrow$ Теоретичні умови», стимулювати учнів критично оцінювати, чи дозволяють старі знання (про ОДЗ та розриви) застосовувати нові інструменти (похідну).

Методичний прийом: «Бліц-розв'язування рівнянь».

Усне завдання: Розв'язати рівняння, що виникають при $f'(x) = 0$:

$$2x - 4 = 0;$$

$$\sqrt{x - 1} = 0;$$

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Очікувані відповіді:

$$2x - 4 = 0, \quad x - 1 = 0$$

$$2x = 4, \quad x = 1$$

$$x = 4 : 2, \quad 1 \geq 1 - \text{задовольняє ОДЗ.}$$

$$x = 2.$$

$$x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in Z$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Цей набір вправ чудово підходить для етапу актуалізації (Прийом «Бліц-розв'язування рівнянь»), оскільки він швидко перевіряє вміння учнів переходити від похідної до розв'язування трьох різних типів рівнянь, які найчастіше зустрічаються в задачах на екстремуми та ілюструє горизонтальні внутрішньопредметні зв'язки.

Реалізований внутрішньопредметний зв'язок: «Похідна $\rightarrow$ Рівняння» («Алгебра $\rightarrow$ Тригонометрія»). Підготовка технічної бази, демонстрація горизонтального зв'язку («Аналіз $\rightarrow$ Тригонометрія»).

II етап уроку. Мотивація навчальної діяльності (5 хвилин).

Мета: показати, що похідна — необхідний інструмент для розв'язування складної задачі.

Методичний прийом: «Постановка проблемного питання».

Вчитель: «Розглянемо функцію $f(x) = x + 2 \sin x$ на відрізку $[0; \pi]$. Спробуйте знайти її *max* і *min* графічно або алгебраїчно без похідної. Це складно. Похідна дає нам алгоритм для швидкого перетворення цієї проблеми на тригонометричне рівняння».

Реалізований внутрішньопредметний зв'язок: «Функція $\rightarrow$ Похідна (Інструмент)». Мотивація через демонстрацію недостатності старих алгебраїчних методів і введення похідної як ефективного аналітичного засобу.

III етап уроку. Вивчення нового матеріалу (15 хвилин).

Мета: покрокове застосування алгоритму з акцентом на міжпонятійних переходах.

Методичний прийом: «Аналітичне зіставлення».

Задача: Знайти $\max/\min f(x) = x + 2 \sin x$ на $[0; \pi]$.

Крок 1: Знайти $f'(x)$: $f'(x) = 1 + 2 \cos x$.

Крок 2: Вчитель наголошує: «Ми завершили аналіз. Переходимо до алгебри: $1 + 2 \cos x = 0$. Це тригонометричне рівняння».

Реалізований внутрішньопредметний зв'язок: «Похідна $\rightarrow$ Рівняння». Чітке розділення: «Поняття (критична точка) $\rightarrow$ Дія (розв'язування рівняння)». Посилення горизонтального зв'язку.

Методичний прийом: побудова системи задач (етап розв'язування рівняння).

Учні розв'язують рівняння $f'(x) = 0$: $f'(x) = 1 + 2 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 0 - 1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$. Знаходять загальні корені.

Загальний розв'язок має вигляд: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Учні обирають з множини загальних розв'язків ті значення, які належать заданому відрізку $[0; \pi]$: якщо $k = 0$, то:

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = \frac{2\pi}{3}$. Цей корінь належить $[0; \pi]$, оскільки $0 < \frac{2\pi}{3} < \pi$.

$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = -\frac{2\pi}{3}$. Цей корінь не належить проміжку $[0; \pi]$.

Перевіряють інші k (наприклад, $k = 1$ або $k = -1$):

при $k = 1$ $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi > \pi$. Не належить.

при $k = -1$ $x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi < 0$. Не належить.

Учні роблять висновок: на відрізку $[0; \pi]$ рівняння має лише один корінь: $x = \frac{2\pi}{3}$. Отже, на цьому відрізку функція має лише одну критичну точку.

Реалізований внутрішньопредметний зв'язок: «Рівняння $\rightarrow$ Відбір коренів». Інтеграція знань про формули коренів та обмеження відрізка.

IV етап уроку. Закріплення вивченого матеріалу (10 хвилин).

Мета: формування стійких навичок переходу від аналізу до алгебри.

Методичний прийом: «Вправа-трансформер».

Мета цього прийому — розділити процес знаходження екстремуму на дві ключові фази:

- фазу аналізу: знаходження похідної $f'(x)$;
- фазу алгебри: розв'язування рівняння $f'(x) = 0$.

Вчитель дає учням завдання виконати обидві фази, але фокусує увагу лише на складності фази алгебри, використовуючи функції, похідні від яких призводять до різних типів рівнянь.

Завдання: «Для трьох різних функцій (дробово-раціональна, ірраціональна, показникова) лише складіть і розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$.

Очікувані відповіді: $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = x \cdot e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{x} - x$.

Дробово-раціональна функція (алгебра, 8-9 класи): $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

Фаза аналізу – похідна $f'(x)$: $f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Фаза алгебри – рівняння $f'(x) = 0$: $\frac{x^2-1}{x^2} = 0$,

$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$, рівняння квадратне. Корені: $x = \pm 1$.

Реалізований зв'язок: «Похідна $\rightarrow$ Дробово-раціональне рівняння».

Експоненційна функція (горизонтальний зв'язок): $g(x) = x \cdot e^{-x}$.

Фаза аналізу – похідна добутку $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x).$$

Фаза алгебри – експоненційне рівняння $g'(x) = 0$:

$$e^{-x}(1 - x) = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0 \text{ або } 1 - x = 0.$$

$e^{-x} = 0$ – не має розв'язків, бо показникова функція завжди додатна для будь-якого значення x .

$1 - x = 0$ – лінійне рівняння. Корінь: $x = 1$.

Реалізований внутрішньопредметний зв'язок: «Похідна $\rightarrow$ Експоненційне рівняння».

Ірраціональна функція (алгебра 9-10 класи): $h(x) = \sqrt{x} - x$.

Фаза аналізу – похідна $h'(x)$: $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$.

Фаза алгебри – ірраціональне рівняння: $h'(x) = 0, \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow (2\sqrt{x})^2 = 1^2 \Rightarrow 4x = 1$.

$x = \frac{1}{4}$ – корінь рівняння.

Реалізований зв'язок: «Похідна $\rightarrow$ Ірраціональне рівняння», «Похідна $\leftrightarrow$ Різні типи рівнянь». Учні вчаться класифікувати проблему (квадратне, ірраціональне, експоненційне рівняння) і вибирати потрібний алгебраїчний інструментарій.

Методичний прийом: «Порівняльний аналіз».

Вчитель задає питання: «Чому при знаходженні *max/min* ми обов'язково перевіряємо значення функції на кінцях відрізка, навіть якщо там немає критичних точок?»

Очікувана відповідь: «Ми перевіряємо значення функції на кінцях відрізка (у точках $x=a$ і $x=b$), тому що це є вимогою теореми Вейєрштрасса про найбільше і найменше значення. Похідна ($f'(x) = 0$) дозволяє знайти лише локальні екстремуми всередині інтервалу. Але глобальне найбільше або найменше значення на всьому відрізку може бути досягнуте саме на кінцях, якщо функція на цьому відрізку монотонно зростає або спадає. Тобто для отримання гарантовано правильної відповіді ми повинні порівняти значення в усіх потенційних точках екстремуму — як у критичних точках, так і на межах відрізка».

Реалізований внутрішньопредметний зв'язок: «Функція $\leftrightarrow$ Властивості». Повернення до властивостей неперервних функцій (вивчене раніше), що посилює вертикальний зв'язок.

V етап уроку. Застосування знань і вмінь (10 хвилин).

Мета: демонстрація найвищого рівня інтеграції через нестандартні задачі.

Методичний прийом: «Задачі-доведення».

Завдання: Довести, що для $x \geq 0$ виконується нерівність $e^x \geq x + 1$.

Крок: дослідити функцію $f(x) = e^x - x - 1$ на мінімум за допомогою похідної, тобто довести, що мінімальне значення заданої функції на проміжку $[0; +\infty)$ дорівнює нулю. Якщо $\min f(x) = 0$, то $f(x) \geq 0$, що і доводить вихідну нерівність.

Учні знаходять похідну: $f'(x) = e^x - 1$.

Знаходять критичні точки: $e^x - 1 = 0$, $e^x = 1$.

Критична точка $x = 0$, оскільки $e^0 = 1$.

Досліджують знак похідної на проміжку $[0; +\infty)$: $f'(x) = e^x - 1$.

Якщо $x > 0$, то $e^x > 1$, отже $f'(x) = e^x - 1 > 0$.

Якщо $x < 0$ (це не обов'язково, але для повноти доведення), $e^x < 1$, отже $f'(x) < 0$.

На проміжку $[0; +\infty)$ функція зростає, у точці $x = 0$ функція має мінімум.

Учні знаходять мінімальне значення функції:

$$f_{\min}(x) = f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Оскільки мінімальне значення функції $f(x)$ на проміжку $[0; +\infty)$ дорівнює нулю ($\min f(x) = 0$), це означає, що для всіх $x \geq 0$: $f(x) \geq 0$.

$$e^x - x - 1 \geq 0,$$

$$e^x \geq x + 1. \quad \text{Нерівність доведено.}$$

Реалізований внутрішньопредметний зв'язок: «Похідна $\rightarrow$ Нерівність (Теорія)». Використання похідної як доказового інструменту, а не лише як обчислювального.

VI етап уроку. Узагальнення та систематизація (5 хвилин).

Мета: зведення всіх внутрішньопредметних зв'язків у єдину систему.

Методичний прийом: «Карта зв'язків» (Схематизація).

Вчитель: Підсумовує урок, підкреслюючи, що похідна — це «диригент» математичних знань. Пропонує учням у зошитах створити схему, де центральна

тема «Похідна» стрілками пов'язана з усіма розділами, які вона використовувала (тригонометрія, ОДЗ, рівняння, нерівності) (рис. 2.3).

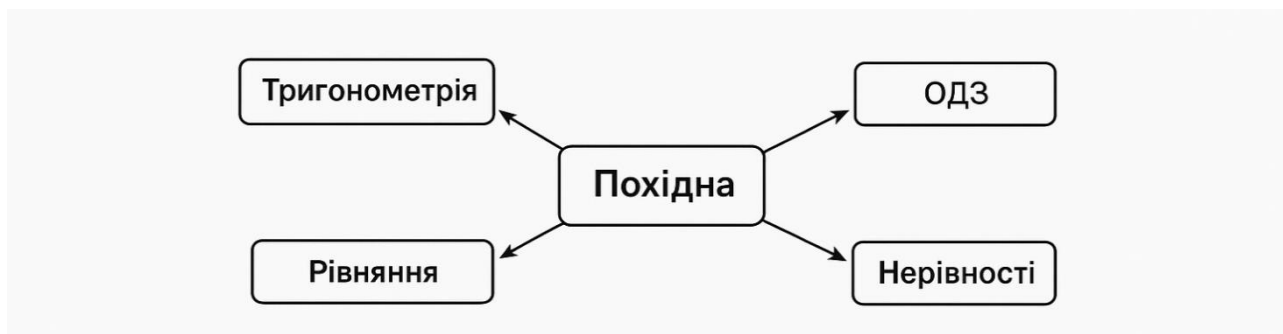


Рис. 2.3. Схема зв'язків похідної в математиці.

Реалізований зв'язок: Системне мислення. Формування цілісного бачення математики, де всі розділи взаємопов'язані.

2.5. Методичні рекомендації щодо інтеграції внутрішньопредметних зв'язків у процес навчання курсу «Алгебра і початки аналізу» з метою підвищення його ефективності у профільному навчанні

На основі проведеного аналізу навчально-методичних матеріалів та розгляду прийомів на різних етапах уроку запропоновано систему практичних рекомендацій, спрямованих на посилення інтеграції знань у курсі «Алгебра і початки аналізу» профільного рівня.

Для формування цілісного, системного мислення учнів профільного рівня рекомендується керуватися наступними принципами:

1) Принцип рефлексивності.

Кожен аналітичний крок (знаходження похідної, дослідження графіка) має супроводжуватися запитанням: «Яке знання з попередніх тем (алгебра, тригонометрія) ми зараз використовуємо?» Це перетворює рутинне обчислення на свідомий перехід між розділами.

2) Принцип алгоритмічної свідомості.

Вимагати від учнів обґрунтування передумов застосування теорем. Наприклад, перед початком алгоритму пошуку *max/min* завжди робити аналітичну перевірку області визначення функції та неперервності.

3) Принцип домінуючого зв'язку.

При вивченні нової теми (наприклад, інтегралу) завжди чітко артикулювати її зв'язок із попередньою (інтегрування як дія, зворотна до диференціювання).

Для систематизації роботи необхідно розрізняти два типи внутрішньопредметних зв'язків:

1. Вертикальні (наступність).

Вони відображають послідовність знань, необхідних для переходу між розділами різного рівня складності (наприклад, «Алгебра» → «Аналіз»). Зв'язок між послідовними етапами навчання, наступність знань у часі (наприклад, знання з 7-го класу потрібні у 11-му).

2. Горизонтальні (інтеграція).

Відображають необхідність комбінування інструментів з різних, але паралельних розділів (наприклад, «Тригонометрія» → «Показникові рівняння»). Зв'язок між різними розділами, які вивчаються одночасно або на одному рівні.

Вертикальні зв'язки посилюються через вимогу до теоретичної чистоти застосування математичних інструментів, горизонтальні зв'язки - через ускладнення алгебраїчної фази розв'язування задачі. Рекомендації щодо реалізації внутрішньопредметних зв'язків представлені в табл.2.1 та 2.2.

Таблиця 2.1

Рекомендації щодо реалізації вертикальних зв'язків

Напрямок зв'язку	Рекомендований методичний прийом	Мета та приклад
«Функція → Теоретичні умови»	«Аналіз передумов»	На етапі актуалізації вимагати аналізу $D(f)$ та неперервності (якщо $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$) перед початком диференціювання. Це гарантує коректність застосування теорем

Продовження таблиці 2.1

«Похідна ↔ ОДЗ (Алгебра)»	«Виключення критичних точок»	Після розв'язування $f'(x) = 0$ завжди вимагати перевірки, чи належать знайдені корені області визначення вихідної функції
«Похідна ↔ Нерівність» (Зворотний зв'язок «Аналіз ↔ Алгебра»)	«Похідна як доказовий інструмент»	Використовувати похідну не тільки для обчислень, а й для доведення нерівностей (наприклад, доведення $e^x \geq x + 1$ через знаходження $\min f(x)$).

Таблиця 2.2

Рекомендації щодо реалізації горизонтальних зв'язків

Напрямок зв'язку	Рекомендований прийом	Мета та приклад
«Похідна ↔ Різні типи Рівнянь»	«Вправа- трансформер»	На етапі закріплення давати завдання, де $f'(x) = 0$ призводить до тригонометричного, показникового, логарифмічного рівняння. Це тренує швидкий перехід між інструментами
«Аналіз ↔ Тригонометрія»	Систематичне включення тригонометрії	Додавати до стандартних задач на екстремум функції, які містять $\sin x$ або $\cos x$. Це змушує учнів актуалізувати знання про формули коренів та відбір розв'язків на заданому відрізку

Для забезпечення сталості внутрішньопредметних зв'язків рекомендуються наступні організаційно-методичні форми роботи:

1) Створення тематичних «Карток зв'язків».

Наприклад, наприкінці вивчення розділу «Застосування похідної» організовувати колективне складання ланцюжка, де центральне поняття («Похідна») пов'язане з усіма іншими розділами, знання яких були використані (ОДЗ, квадратне рівняння, тригонометрія). Це можуть бути «Рівняння», «Нерівності», «Тригонометрія», «Геометрія (дотична)», «Фізика (швидкість)».

2) Складання узагальнюючих схем (типу «Функції і їх властивості», «Методи розв'язування рівнянь»).

3) Створення «Інтелектуальних карток зв'язків Mind Map».

«Інтелект-картка зв'язків», або «Картка думок», допомагає об'єднувати різні завдання, розділи, теми, ідеї завдяки лініям, значкам, фігурам та іншим інструментам в одну графічну картинку, яка сприяє мозковому штурму, швидкому пошуку рішення проблем, запам'ятовуванню нової інформації, аналізу та досягненню зв'язків між різними елементами.

4) Проведення тематичних практикумів.

Практикуми повинні бути орієнтовані не на тип функції, а на тип рівняння, що виникає після диференціювання (наприклад, практикум «Розв'язування трансцендентних рівнянь при пошуку критичних точок», «Похідна як засіб розв'язування рівнянь»).

5) Використання завдань із параметром.

Задачі з параметром є найвищою формою інтеграції, оскільки вони вимагають комбінації знань про похідну, графіки функцій та аналітичне розв'язування нерівностей. В них відкривається сутність принципу наступності та вплив попередніх знань, вмінь та навичок.

6) Створення учнями діагностичних проєктів.

У цих проєктах повинно демонструватись застосування декількох тем (наприклад, на застосування похідної для розв'язування прикладних задач з

фізики, механіки, біології, а також оптимізаційних задач). У такій проєктній діяльності висвітлюються як внутрішньо предметні, так і міжпредметні зв'язки.

7) Використовувати метод проєктів для занять-конференцій.

На уроках-конференціях за допомогою знань з математики повинні вирішуватись питання, пов'язані з різними проблемними ситуаціями в реальному житті. Такі уроки підвищують компетентність учнів у сфері вирішення проблем, навчають самостійному, аналітичному, логічному та критичному мисленню, сприяють прийняттю учнівством аргументованих рішень.

8) Проведення математичних гейм-уроків в старших класах.

Це можуть бути дидактичні або інтерактивні ігри, які допомагають засвоювати як новий, так і старий матеріал, тестування, завдання на ілюстрованих картках, онлайн-вправи.

9) Інтеграція системи оцінювання.

Систематично використовувати критеріальну модель оцінювання, щоб заохочувати учнів до демонстрації системності знань (оцінювати не лише правильну відповідь, а й коректність переходу між алгебраїчним та аналітичним етапами).

Реалізація внутрішньопредметних зв'язків у курсі «Алгебра і початки аналізу» не є додатковим навантаженням, а є ключовим механізмом формування профільного мислення. Шляхом поєднання рефлексивного підходу на етапі актуалізації та алгоритмічного на етапі закріплення, учитель може забезпечити не тільки високий рівень володіння обчислювальними навичками, але й цілісне, системне бачення математики.

2.6. Рекомендації щодо оцінювання рівня сформованості вмінь учнівства встановлювати та використовувати внутрішньопредметні зв'язки

У цьому пункті наведені рекомендації для діагностики ефективності запропонованих методичних рекомендацій.

Метою є визначення критеріїв, за якими може бути оцінена здатність учнівства свідомо переходити між різними розділами курсу «Алгебра і початки аналізу».

Для об'єктивної оцінки внутрішньопредметних зв'язків недостатньо оцінити лише правильність фінальної відповіді, необхідно оцінювати процес розв'язування та усвідомлення учнем чи ученицею логіки переходу між алгебраїчним та аналітичним інструментарієм курсу. Критерії та показники оцінювання подані в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Критерії та показники оцінювання

Рівень сформованості	Критерій оцінювання	Характеристика вмінь (Показники)
I. Репродуктивний (Низький)	Оцінка технічної коректності	Учень коректно виконує окрему фазу обчислення (знаходить похідну чи інтегрує, або розв'язує просте рівняння, але демонструє фрагментарність знань, ігнорує теоретичні передумови (ОДЗ, неперервність) або не здатний виконати перехід до наступного алгебраїчного етапу, не вміє розв'язувати складний тип рівняння
II. Продуктивний (Середній)	Оцінка свідомого переходу, систематичного застосування зв'язків	Учень виконує обидві фази розв'язування («Аналіз $\rightarrow$ Алгебра»: коректно знаходить $f'(x)$, проміжне рівняння, враховує вертикальні (перевіряє умови теореми, відкидає сторонні корені), демонструє володіння горизонтальними зв'язками, (як-от при роботі з тригонометричними чи логарифмічними функціями)

Продовження таблиці 2.3

III. Творчий (Високий)	Оцінка інтеграції, переносу знань та обґрунтування	Учень здатний інтегрувати знання для розв'язування нестандартних задач (задачі з параметром, доведення нерівностей). Обґрунтовує вибір методу, здійснює перенос знань, самостійно встановлюючи зв'язки у нових проблемних ситуаціях (наприклад, обирає оптимальний шлях розв'язування)
---------------------------	--	--

Для перевірки всіх виділених у дослідженні ліній зв'язку пропонується використовувати систему трансформованих завдань. Завдання для діагностики наведені в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Діагностичний інструментарій (контрольні завдання)

Тип завдання	Діагностична мета (Перевірка зв'язку)	Приклад завдання
На рефлексію передумов	Вертикальний зв'язок («Функція ↔ ОДЗ/Неперервність»)	Знайти найбільше/найменше значення функції $f(x) = \frac{x}{x-2}$ на відрізку $[0; 4]$. Очікувана дія: учень повинен обґрунтувати неможливість застосування стандартного алгоритму через розрив у точці $x = 2$ та дослідити поведінку функції

Продовження таблиці 2.4

На технічну інтеграцію Тригонометрія	Горизонтальний зв'язок («Похідна ↔ Тригонометрія»)	Знайти критичні точки функції $f(x) = x - 2 \sin x$. Очікувана дія: учень повинен коректно розв'язати тригонометричне рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$ та знайти загальні корені, здійснити відбір розв'язків на заданому відрізку
На технічну інтеграцію (Показники/ Логарифми)	Горизонтальний зв'язок («Похідна ↔ Показникові/ Логарифмічні рівняння»)	Знайти екстремуми функції $h(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$. Очікувана дія: Учень повинен прирівняти похідну до нуля ($2e^{2x} - 4e^x = 0$) та розв'язати проміжне показникове рівняння методом заміни
На теоретичне застосування (Зворотний зв'язок)	Теоретичний (вертикальний) зв'язок («Похідна ↔ Доведення нерівностей»)	Довести, що для $x > 0$ виконується нерівність $x^3 + 1 > x^2 + x$. Очікувана дія: Учень повинен сформулювати функцію $k(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ і дослідити її <i>min</i> значення на проміжку $(0; +\infty)$ за допомогою похідної
На інтеграцію та перенос знань	Інтеграційний зв'язок («Похідна ↔ Задачі з параметром»)	При якому значенні параметра a функція $p(x) = x^3 - 3ax^2 + 3$ має єдину критичну точку? Очікувана дія: Учень повинен знайти похідну $p'(x) = 3x^2 - 6ax$ і, залежно від параметра a , визначити умови єдиності кореня квадратного рівняння

Впровадження розроблених методичних рекомендацій в навчальний процес, на нашу думку, сприятиме:

- зростанню рівня сформованості вмінь комплексного розв'язування нестандартних задач (з параметром, оптимізація);
- зменшенню типових помилок, пов'язаних із фрагментарністю знань та розривом між аналітичним та алгебраїчним етапами;
- підвищенню мотивації до вивчення курсу «Алгебра і початки аналізу» завдяки демонстрації його функціональності як єдиного інструменту, що об'єднує всі попередні знання.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження присвячене теоретичному обґрунтуванню та методичній розробці рекомендацій реалізації внутрішньопредметних зв'язків у курсі «Алгебра і початки аналізу» на профільному рівні навчання. В ході роботи було виконано поставлені завдання та досягнуто мети, що дозволяє сформулювати наступні висновки:

1. Теоретичне обґрунтування та сутність внутрішньопредметних зв'язків

а) Сутність інтеграції. Встановлено, що внутрішня інтеграція в курсі «Алгебра і початки аналізу» ґрунтується на взаємодії трьох ключових ліній: аналітичної (похідна, інтеграл), алгебраїчної (рівняння, нерівності) та функціональної (ОДЗ, властивості функцій). Ключовим інтегруючим механізмом є тріада: «Функція $\leftrightarrow$ Похідна/Аналіз $\leftrightarrow$ Рівняння/Нерівність».

б) Типологія зв'язків. Доведено, що для формування системного мислення учнів профільного рівня критично важливим є усвідомлення ними вертикальних зв'язків (логічна наступність «Алгебра $\rightarrow$ Аналіз») та горизонтальних зв'язків (інтеграція «Аналіз $\leftrightarrow$ Тригонометрія/Трансцендентні функції»).

в) Аналіз підходів. Виявлено, що у вітчизняних підручниках існують три основні, але не інтегровані, моделі реалізації зв'язків: алгоритмічна, рефлексивна та теоретична. Обґрунтовано необхідність їх комбінування у єдиній методичній системі.

2. Методична розробка та практична значущість

а) Розробка методики (Новизна). В межах дослідження обґрунтовано та сформовано систему методичних прийомів, орієнтованих на рефлексивну діяльність учнів, зокрема: «Аналіз передумов», «Вправа-трансформер» та «Похідна як доказовий інструмент». Ці прийоми забезпечують свідомий перехід між алгебраїчним та аналітичним апаратом.

б) Впровадження. Розроблено конспект уроку на тему «Найбільше і найменше значення функції на відрізку», який слугує практичною моделлю для

впровадження внутрішньопредметних зв'язків, демонструючи їхню реалізацію на кожному етапі уроку.

в) Методичні рекомендації. Створено комплекс методичних рекомендацій, спрямованих на формування математичного мислення через постійну артикуляцію зв'язків та використання завдань підвищеної інтеграції (наприклад, задачі з параметром).

г) Оцінювання. Розроблено рекомендації щодо оцінювання рівня сформованості вмінь учнівства встановлювати та використовувати внутрішньопредметні зв'язки, що передбачає виділення трьох рівнів сформованості вмінь (репродуктивний, продуктивний та творчий). Це дозволяє оцінювати не тільки кінцевий результат, а й глибину усвідомлення учнями логіки інтеграції алгебраїчного та аналітичного інструментарію.

б) Діагностичний інструментарій. Сформовано набір трансформованих завдань, які перевіряють здатність учнів свідомо переходити від похідної до розв'язування різних типів рівнянь (тригонометричних, експоненційних) та використовувати похідну для теоретичного обґрунтування властивостей функцій.

Впровадження у навчальний процес запропонованих у дослідженні методичних рекомендацій реалізації внутрішньопредметних зв'язків забезпечує не лише поглиблене вивчення курсу «Алгебра і початки аналізу», але й є необхідною умовою для формування системного, високоінтегрованого математичного мислення учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
2. Бурда М. І. Математика : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : проф. рівень / М. І. Бурда, О. П. Гловацька, Н. В. Листопад. – Київ : Освіта, 2018. – 416 с.
3. Бурда М. І. Особливості організації навчання математики в 10-12 класах на профільному рівні / М. І. Бурда, О. І. Глобін // Вісник Черкас. ун-ту. Сер. Пед. науки. – 2009. – Вип. 150.
4. Бурда М.І., Мальований Ю.І., Савченко О.Я. та ін. Методика навчання математики в 10-11 класах: Навч. посіб. для студ. вищ. пед. навч. закл. – К.: Зодіак-ЕКО, 2005. – 304 с.
5. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show>.
6. Державний стандарт профільної середньої освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-%D0%BF>.
7. Ігнатенко М.Я., Соколенко Л.О. Реалізація прикладної спрямованості шкільного курсу математики як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів: Навч. посібник К.: ІЗМН, 1997. – 76 с.
8. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіль. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. – Київ: Генеза, 2019. – 416 с. : іл.
9. Ключко В.І., Ковальчук М.Б. Систематизація та узагальнення знань у навчанні математиці. 2009. С. 1-4. URL: <https://fi.npu.edu.ua/zbirnyk-kosn/zbirnyk-5/2009-11-27-12-10-09408>
10. Концепція профільного навчання в старшій школі // Математика в сучасній школі. 2013. № 12. С. 2-12.

11. Лук'янова С. М., Філон Л. Г. Внутрішньопредметні зв'язки як засіб подолання освітніх втрат учнівства з математики. Грааль науки. 2023. 10 лист. (№33) URL : <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.10.11.2023.53>.
12. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2018. 400 с.
13. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. - 352 с. : іл.
14. Методика навчання математики. Загальна методика: Практикум: У 4-х ч.: Ч.1: Методика формування понять шкільного курсу математики: Навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи студентів / Н.А.Тарасенкова, І.А.Акуленко, І.С.Біда, М.М. Журба / За ред. Н.А.Тарасенкової. Черкаси: ЧДУ ім.. Б.Хмельницького, 2002. 120с.
15. Методика навчання математики в поняттях, схемах і таблицях : навчально-методичний посібник / уклад. Л. А. Благодир. Умань : ВПЦ «Візаві» 2018р. 144 с.
16. Модельна навчальна програма «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.) «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України» (наказ Міністерства освіти і науки України від 12.07.2021 № 795, у редакції наказу Міністерства освіти і науки України від 09.02.2022 № 143) URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.klas.Merzlyak.30.08.2023.pdf>
17. Модельна навчальна програма «Математика. 7-9 класи (інтегрований курс)» для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.) «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України» (наказ Міністерства освіти і науки України від 06.09.2023 № 1090) URL:

- <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Matematyka.7-9.kl.intehrovanyy.kurs-Ister-12.09.2023.pdf>
18. Навчальна програма МОН URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
 19. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 272 с.
 20. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 240 с.
 21. Практикум з методики навчання математики. Загальна методика: Навчальний посібник для організації самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / З.І.Слепкань, А.В.Грохольська, В.Я.Забранський, С.М.Лук'янова, Л.Л.Панченко, І.С.Соколовська. За редакцією проф. З.І.Слепкань. К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2006. 292 с.
 22. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за редакцією проф. В.О. Швеця. К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. 267 с.
 23. Чиж І. М. Внутрішньопредметні зв'язки курсу «Алгебра і початки аналізу» та їх реалізація у профільному навчанні//Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2025 Форум молодих дослідників»: матеріали VI Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (28 листопада 2025 р., м. Суми) / упорядн. Чашечникова О. С. Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2025. С. 73-74.

24. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. 2-ге вид., допов. і переробл. К.: Вища шк., 2006. 582 с.
25. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики: Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. 240 с.
26. Соколенко Л.О., Швець В.О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу // Математика в рідній школі. 2014. № 9. С. 2-10.
27. Старова О.О. Реалізація міжпредметних зв'язків на уроках математики // Математика в школах України. 2004. №3(51). С.16-18.
28. Стратегія розвитку вищої освіти в Україні на 2022–2032 роки. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/news/2022/04/15/VO.plan.2022-2032/Stratehiya.rozv.VO-23.02.22.pdf>.
29. Черкаська Л. П., Москаленко О. А., Москаленко Ю. Д., Коваленко О. В. Внутрішньопредметні зв'язки як засіб забезпечення системності знань учнів з математики. Грааль Науки. 2021. 9 квіт. (№ 2 - 3), 438-444. URL : <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.02.04.2021.088>.
30. Швець В. О. Реалізація внутрішньопредметних зв'язків при вивченні теми «Похідна» в курсі алгебри і початків аналізу / В. О. Швець // Математика в школі. 2015. № 5. С. 15-19.
31. Шунда Н.М. Застосування похідної до розв'язування задач. Посібник. К.: Техніка, 1999. 240 с.