

**Національний університет «Чернігівський колегіум»
імені Т. Г. Шевченка**

Природничо-математичний факультет
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітнього ступеня «магістр»
на тему:

Доведення в курсі «Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень»

Виконала:
студентка 2 курсу, групи 61,
спеціальності
014 Середня освіта (Математика)
Колесник Дарина Анатоліївна

Науковий керівник:
к.п.н, доцент Філон Л.Г.

Чернігів – 2025

Роботу подано до розгляду «_____» _____ 20__ року.

Студентка _____
(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник _____
(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент _____
(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики.

Протокол № _____ від «_____» _____ 20__ року.

Студентка допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри _____
(підпис) (прізвище та ініціали)

АНОТАЦІЯ

Колесник Д.А. Доведення в курсі «Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень». Кваліфікаційна робота освітнього ступеня «магістр». На правах рукопису.

Спеціальність – 014 Середня освіта (Математика). – Чернігів, 2025.

У кваліфікаційній роботі розглянуто теоретичні основи навчання доведень, зокрема сутність поняття доведення та історичний аспект формування методів доведень, основні методи математичних доведень, значення доведень у загальному розвитку учнів. Схарактеризовано та проаналізовано методичні підходи щодо навчання доведень в курсі алгебри та початків аналізу. Наведено аналіз змісту способів подання методів доведень в чинних підручниках алгебри та початків аналізу для профільного рівня.

Результатом проведеного дослідження є запропоновані методичні рекомендації, які можуть бути використані вчителями математики закладів загальної середньої освіти під час підготовки до уроків, у системі методичної роботи, при розробці навчальних і практико-орієнтованих матеріалів, а також у процесі професійної підготовки майбутніх педагогів у закладах вищої освіти.

Ключові слова: математичне доведення, логічне мислення, методи доведень, структура доведення, методичні рекомендації, навчання учнів.

SUMMARY

Kolesnyk D. A. Proof in the Course «Algebra and the Elements of Analysis. Advanced Level.» Qualification Thesis for the Master's Degree. Manuscript status.

Specialty – 014 Secondary Education (Mathematics). – Chernihiv, 2025.

This qualification thesis examines the theoretical and methodological foundations of teaching proofs within the "Algebra and the Elements of Analysis" course at the advanced level. The study initially explores the essence of the proof concept, its

historical development, the main methods of mathematical proof, and the significance of proof in the general intellectual development of students.

The core of the research involves characterizing and analyzing methodological approaches to teaching proofs specifically adapted for the Algebra and Elements of Analysis curriculum. Furthermore, the thesis provides a detailed analysis of the content and methods of presenting proofs in current school textbooks designed for the advanced study level.

The result of the conducted research is a set of proposed methodological recommendations. These recommendations can be effectively used by mathematics teachers in general secondary education institutions during lesson preparation, within professional development systems, for developing practical and educational materials, and in the process of professional training for prospective teachers in higher education institutions.

Keywords: mathematical proof, logical thinking, methods of proof, proof structure, methodological recommendations, student learning.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	10
1.1. Доведення: сутність поняття та історичний аспект формування методів доведень	10
1.2. Основні методи математичних доведень.....	16
1.3. Значення доведень у загальному розвитку учнів.....	25
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ НАВЧАННЯ ДОВЕДЕНЬ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ.....	30
2.1. Методичні підходи щодо навчання доведень у курсі алгебри і початків аналізу.....	30
2.2. Аналіз змісту і способів подання доведень у чинних підручниках «Алгебри і початків аналізу» профільного рівня.....	40
2.3. Методичні рекомендації навчання учнів доведення в курсі «Алгебра і початки аналізу» та їхня апробація.....	54
ВИСНОВКИ.....	68
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	71

ВСТУП

Розвиток математичного мислення є невід’ємною складовою навчання, тому в процесі вивчення курсу «Алгебра і початки аналізу» учні мають опанувати це важливе інтелектуальне уміння. У цьому процесі ключова роль належить доведенню, що допомагає учням не лише обґрунтовувати математичні твердження, а також використовувати доведення в якості інструмента формування цінних інтелектуальних навичок: логічного мислення, дедуктивного міркування, уміння аналізувати, узагальнювати інформацію та робити обґрунтовані висновки [7]. У профільному навчанні вміння будувати доведення набуває особливого значення, оскільки воно є основою для подальшого опанування складніших математичних дисциплін. Окрім цього, формування в учнів навичок доведення сприяє цілісному розумінню математичної науки. Вивчаючи доведення, учні починають краще усвідомлювати, як між собою пов’язані різні математичні поняття, твердження та теореми. Вони бачать логічні зв’язки між темами і розуміють, що математика – це не просто набір формул і алгоритмів, а цілісна, системна наука, в якій одні знання логічно впливають з інших. Таке розуміння сприяє більш глибокому засвоєнню навчального матеріалу і забезпечує внутрішню мотивацію до подальшого навчання [4].

Водночас навчання доведень є складним методичним завданням для вчителя [29]. Багато учнів відчують труднощі при опануванні логічної структури доведень, при виборі стратегії доведення чи формулюванні власних міркувань у чіткій, доказовій формі. Саме тому дослідження, спрямовані на вдосконалення методики навчання доведенню, розробку дидактичних матеріалів, побудову ефективних освітніх стратегій у цій сфері, є вкрай актуальними та мають вагомe значення для розвитку математичної освіти на профільному рівні.

Дослідження проблеми навчання доведень у шкільному курсі алгебри і початків аналізу, особливо на профільному рівні, має достатньо глибоку історію в педагогічній науці України. Водночас, зважаючи на зміну освітніх пріоритетів, поширення компетентнісного підходу, розвиток цифрових технологій та нові

запити до математичної підготовки старшокласників, ця тема залишається актуальною і потребує подальшої теоретичної і методичної розробки.

Проблема навчання учнів доведення математичних тверджень у курсі «Алгебра і початки аналізу» посідає центральне місце в сучасній методиці навчання математики. Аналіз сучасних наукових досліджень показав, що ця тема є предметом уваги багатьох науковців, які розглядають різні аспекти даної проблеми. Зокрема, Питання структурування процесу формування вмінь доводити теореми ґрунтовно проаналізовано у працях Н. Кугай, де окреслено функції задач на доведення у шкільному курсі математики та визначено методичні умови розвитку логічного мислення [10; 11]. Дослідження Н. Недялкової [23; 24] зосереджені на методичних підходах до формування відповідних умінь у майбутніх учителів математики, що дозволяє розглядати проблему в ширшому професійному контексті.

У працях З. Слєпкань окреслено психолого-педагогічні засади формування логічного мислення та обґрунтовано роль доведення як інструмента розвивального навчання [35]. Питання формування компонентів логічного мислення у процесі навчання учнів доведенню теорем розкрито також у роботі І. Лов'янової [13]. Питання дослідницької діяльності у процесі навчання алгебри і початків аналізу висвітлено у працях Г. Грищенко [6], С. Семенця та О. Чугунової [32], де доведення розглядається як чинник розвитку математичних здібностей і засіб формування дослідницької компетентності.

Попри значну кількість праць, присвячених окремим аспектам формування доказових умінь учнів, тема «Доведення в курсі «Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень» все ще потребує системного опрацювання. Спостерігається фрагментарність підходів: одні автори розглядають формування у майбутніх вчителів вмінь доводити теореми, інші – функції задач на доведення у шкільному курсі математики, треті – як впливає процес доведення теорем на розвиток учня і, зокрема, на розвиток його логічного мислення. Водночас бракує комплексних досліджень, які б поєднували дидактичні, методичні й психолого-педагогічні

підходи з урахуванням сучасних вимог профільної освіти і компетентнісного навчання. Це створює умови для подальшої наукової розробки теми.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики учнів старшої школи в умовах профільного навчання, зокрема в межах курсу «Алгебра і початки аналізу».

Предмет дослідження – методичні підходи, зміст, форми й способи подання доведень математичних тверджень у курсі «Алгебра і початки аналізу» на профільному рівні.

Мета дослідження – теоретично обґрунтувати та розробити методичні рекомендації навчання учнів умінь доводити математичні твердження у курсі «Алгебра і початки аналізу» на профільному рівні.

Для досягнення мети в роботі необхідно вирішити наступні завдання:

1. Розглянути сутність поняття «доведення», основні методи математичних доведень та визначити роль доведень у загальному розвитку учнів.
2. Розглянути методичні підходи щодо навчання доведень у курсі алгебри і початків аналізу.
3. Проаналізувати зміст і способи подання доведень у чинній навчальній програмі та підручниках «Алгебри і початків аналізу» профільного рівня.
4. Розробити методичні рекомендації навчання учнів доведень в курсі «Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень».
5. Здійснити апробацію окремих положень дослідження.

Методи дослідження. У процесі написання кваліфікаційної роботи були використані різноманітні методи дослідження. *Теоретичний аналіз науково-педагогічної літератури, порівняльний аналіз, а також аналіз нормативних документів* (чинних державних стандартів). *Контент-аналіз підручників* використовувався з метою з'ясування ролі доведень у курсі алгебри і початків аналізу, а також виявлення типів доведень, способів їх подання та методичних підходів до організації роботи з доказовим матеріалом. *Історико-педагогічний аналіз* допоміг розглянути історичні аспекти становлення методів математичного

доведення. Він охоплював вивчення праць провідних математиків минулого та ключових етапів розвитку логічних засобів доведення. Застосовано *класифікаційний аналіз і логічний аналіз* для опису основних типів математичних доведень.

Елементи наукової новизни дослідження полягають у тому, що було здійснено комплексний аналіз подання доведень у чинних підручниках профільного рівня, що дало змогу виявити особливості типів доведень і методичних прийомів їх викладу. У роботі теоретично обґрунтовано й розроблено методичні рекомендації навчання доведень, які було апробовано під час проходження виробничої практики.

Практична значущість дослідження полягає в тому, що у процесі написання кваліфікаційної роботи було розроблено й апробовано методичні рекомендації навчання доведень.

Апробація результатів роботи. Основні положення та результати дослідження були представлені у доповіді на VI Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (м. Суми, 28 листопада 2025 р.). За матеріалами дослідження підготовлено та опубліковано тези доповіді:

1. Колесник Д. Методичні підходи до навчання доведень у курсі алгебри і початків аналізу старшої школи // *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2025 Форум молодих дослідників»* : матеріали VI Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (м. Суми, 28 листопада 2025 р.). 2025. С. 35-36 [8].

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг кваліфікаційної роботи становить 75 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Доведення: сутність поняття та історичний аспект формування методів доведень

Поняття доведення у науковій літературі використовується у двох значеннях – широкому та вузькому. У широкому сенсі під доведенням розуміють будь-який спосіб обґрунтування істинності твердження, незалежно від того, має він логічний характер чи спирається на позалогічні міркування, інтуїцію, досвід або авторитет. У цьому значенні доведення постає як загальна форма підтвердження правильності висловлювання [1, с. 7].

У вузькому розумінні доведення трактується як спеціальна логічна процедура, у процесі якої істинність певного судження встановлюється на основі інших суджень, істинність яких уже прийнята або доведена раніше. Таке тлумачення відповідає логіко-методологічній традиції, у рамках якої доведення розглядається як центральна операція формальної логіки. Метою доведення є не лише встановлення істинності твердження, а й переконання співрозмовника у його правильності шляхом логічно несуперечливих, необхідних міркувань [1, с. 8].

Науковці (К. Неद्याлкова, С. Іванова, А. Тумбрукакі) доведення визначають як системно організовану сукупність логічних прийомів, спрямованих на обґрунтування істинності певного твердження через використання інших, взаємопов'язаних і вже доведених суджень [23, с. 17]. У такому вигляді доведення виступає не лише інструментом логічного мислення, а й важливим механізмом формування раціонального, доказового стилю пізнання.

Отже, під доведенням будемо розуміти логічно впорядкований процес обґрунтування істинності певного твердження на основі інших, уже встановлених або доведених суджень, унаслідок чого істинність нового висловлювання набуває необхідного й переконливого характеру. У цьому

значенні доведення виступає як ключова інтелектуальна процедура, що забезпечує послідовність, обґрунтованість і логічну завершеність математичного міркування.

У шкільному курсі математики термін «доведення» традиційно вживається у значенні «доведення математичних тверджень», тобто суджень, істинність яких необхідно логічно обґрунтувати. У цьому контексті математичне доведення розуміють як послідовний ланцюжок логічних міркувань, що підтверджує правильність певного твердження (теореми) шляхом опори на вже встановлені факти, раніше доведені твердження або аксіоми. Такий процес демонструє, що нове твердження логічно випливає з відомих положень, а отже, має підстави вважатися істинним.

У межах даного дослідження важливо простежити становлення сучасної культури математичного мислення, що неможливо без аналізу історичного аспекту розвитку методів доведення. Від перших інтуїтивних міркувань давніх цивілізацій до строгої дедуктивної системи, закладеної Евклідом, методи доведення постійно еволюціонували. Зміна наукових підходів, розвиток логіки та поступова формалізація математичних теорій удосконалили способи обґрунтування тверджень, створивши підґрунтя для сучасного розуміння математичного доведення.

Історичний розвиток методів доведення виступає не лише фундаментальним компонентом формування математичного мислення, а й одним із ключових чинників його поступового вдосконалення. У найдавніші часи людська діяльність у сфері обґрунтування математичних знань базувалася на емпіричних та практичних прийомах, що застосовувалися в різних цивілізаціях, зокрема в Єгипті, Вавилоні, Індії та Китаї. Ці первісні методи доведення, хоч і не мали формалізованої логічної структури, закладали основу для розуміння причинно-наслідкових зв'язків і дозволяли успішно розв'язувати прикладні задачі.

Згодом, у міру розвитку абстрактного мислення, наукової рефлексії та логіки, процес обґрунтування почав набувати дедалі більшої строгості. Особливо

важливим етапом у цьому розвитку став період античної Греції, де зародилася традиція систематичного доведення через аксіоми, визначення і теореми. У працях таких мислителів, як Евклід, Платон і Аристотель, з'явилися перші формальні спроби логічного впорядкування математичних знань, що сприяло утвердженню дедуктивного методу як основи наукового пізнання [30].

Перші систематичні спроби кодифікації методів доведення з'явилися в епоху Давньої Греції – період, який вважається однією з найважливіших віх у становленні наукового і логічного підходу до пізнання. Особливе місце в цьому процесі займає трактат Евкліда «Начала», що датується приблизно III століттям до н.е. Цей фундаментальний твір став не лише зразком геометричного викладу, а й першим узагальненим прикладом застосування аксіоматичного методу у математиці. Евклід розпочинав побудову математичної системи з набору аксіом – безумовно прийнятих положень, які не потребували доведення, а також з чітких визначень ключових понять. Від цих вихідних положень логічним шляхом виводилися дедалі складніші твердження – теореми, що підкріплювалися строгими доведеннями [12].

Цей підхід, зосереджений на дедукції – логічному переході від загальних положень до конкретних результатів, – сформував основу класичної математичної логіки. Він не лише організував знання у впорядковану і послідовну систему, а й сприяв розвитку особливого типу мислення – дедуктивного, яке відзначається послідовністю, точністю та суворою логічною аргументацією. Унаслідок цього доведення стало не просто способом переконання, а засобом пізнання істини, що ґрунтується на чітких логічних правилах. Евклідова методологія вплинула не лише на математику, а й на розвиток філософії, науки і теорії пізнання загалом, визначивши стандарти наукової доказовості на багато століть вперед [12].

Варто також зауважити, що цей аксіоматичний підхід відкрив шлях для подальшої формалізації математичних наук у Новий час, коли з'явилися нові напрями математичних досліджень і були розроблені нові логічні системи, проте основний принцип побудови доведень залишився незмінним. Таким чином,

епоха Давньої Греції стала переломним моментом у розвитку не лише методів доведення, а й самого математичного мислення, що знайшло своє відображення у сучасних теоріях і практиках.

В античності доведення розглядалося не просто як один із інструментів математичної діяльності, а як фундаментальна умова забезпечення строгості, обґрунтованості та надійності математичних знань. Математики та філософи того часу усвідомлювали, що без чіткої системи доведення неможливо сформувати наукову дисципліну, яка претендує на об'єктивність і вічність істин. Саме тому дедуктивний метод, який базується на логічному виведенні нових тверджень із аксіом і раніше доведених теорем, набув статусу основного способу пізнання в математиці. Цей метод сприяв формуванню і розвитку особливого типу мислення – послідовного, системного, аналітичного, орієнтованого на сувору логіку. Такий спосіб мислення став невід'ємною складовою математичного процесу, дозволяючи не лише підтверджувати істинність нових фактів, а й формувати цілісні та взаємопов'язані знання, що базуються на чітких принципах [28].

У середньовіччі, зокрема в контексті християнської філософії та теології, методи доведення зазнали подальшого розвитку і вдосконалення. Цей період відзначений активним розвитком формальної логіки, що супроводжувався глибокими дискусіями про структуру та природу знання, істини й доказу. Філософи-схоласти, такі як Фома Аквінський, використовували логічні методи для систематизації теологічних та філософських доктрин, що вимагало ретельної аргументації та послідовного доведення. Внаслідок цього сталася значна еволюція в розумінні структури аргументації: акцент змістився з простого доведення фактів на аналіз форми та логічної послідовності висновків. Саме в цей час були закладені основи для кодифікації та формалізації методів доведення, які пізніше стали невід'ємною частиною математичної методології. Отже, середньовічний період можна розглядати як міст між античністю і Новим часом, коли формальні методи дедукції отримали свій подальший розвиток і

структуризацію, що стало необхідною передумовою для появи сучасних математичних методів і логічних систем [28].

В епоху Нового часу, коли наукові дослідження набували дедалі більшої ваги, зростала й потреба у впровадженні більш формалізованих, систематичних і строгих методів доведення. Раніше домінували інтуїтивні підходи, які ґрунтувалися на практичних спостереженнях і словесно-описових міркуваннях, поступово поступилися місцем методам, що базувалися на чітких логічних процедурах і строгій структурі аргументації. Такий перехід стимулював розвиток абстрактного та критичного мислення, оскільки вчені почали відходити від конкретних прикладів і емпіричних доведень на користь загальних теоретичних побудов, здатних витримати систематичну перевірку. Підвищення значущості доведень як основного засобу розвитку математичного мислення зумовило зростання рівня точності, глибини і наукової суворості математичних досліджень, що істотно вплинуло на прогрес усієї науки [19].

Особливо помітним цей процес став на рубежі XIX–XX століть, коли наукова спільнота здійснила кардинальний крок у напрямку повної формалізації математики. У цей період були створені і систематизовані аксіоматичні системи для різних галузей математики, таких як геометрія, арифметика, теорія множин. Поява й широке застосування різноманітних типів доведень – прямих, непрямих, доведень від супротивного, індуктивних – значно розширили спектр логічних інструментів. Ці методи не лише забезпечували аналітичну точність, а й стимулювали розвиток творчого мислення, оскільки дозволяли формулювати та перевіряти нові гіпотези, шукати нестандартні логічні ходи та конструкції [1, с. 10]. Таким чином, доведення стали не просто процедурою підтвердження істини, а активним засобом розвитку і збагачення математичного мислення.

На сучасному етапі розвитку методів доведення, коли використовуються формальні логічні системи, комп'ютерна перевірка доведень, це істотно розширює можливості математичного мислення. Це дозволяє підвищити гнучкість, швидкість і ефективність роботи над складними проблемами, забезпечуючи водночас сувору перевірку правильності аргументів. Сучасні

методи доведення виступають як потужний інструмент не лише для формального підтвердження математичних фактів, а й для стимулювання інноваційного, креативного підходу в наукових дослідженнях [1, с. 11].

Таким чином, історичний розвиток методів доведення виступає як відображення поступового ускладнення, диференціації та систематизації логічної структури математичної аргументації. Цей процес не лише сприяв підвищенню строгості і точності верифікації математичних тверджень, а й відіграв ключову роль у формуванні високого рівня математичного мислення, яке слід розглядати як складну інтегровану когнітивну діяльність. Методи доведення, будучи не просто формальним інструментом підтвердження істинності математичних положень, водночас виступають як фундаментальний засіб розвитку логічного, аналітичного і критичного мислення, що є базовими компонентами математичної компетентності. Поступове вдосконалення цих методів відобразило глибоке розуміння необхідності суворої аргументації в математиці, що вимагає одночасно здатності аналізувати, узагальнювати, синтезувати інформацію та формувати обґрунтовані висновки. Отже, методи доведення виступають як динамічний механізм, що сприяє розвитку не лише конкретних математичних навичок, а й загальних когнітивних процесів, необхідних для пізнавальної діяльності в ширшому сенсі. З огляду на це, історію розвитку методів доведення слід розглядати не лише як хронологію технічних прийомів, а як відображення еволюції способів мислення, що визначають сучасний рівень математичної освіти і наукового пошуку.

Крім того, історичний аспект доведень може бути продуктивно використаний у шкільній практиці під час опанування таких тем, як похідна, інтеграл і тригонометрія, оскільки дає змогу продемонструвати учням, як від інтуїтивних міркувань та емпіричних залежностей математика переходила до строгих означень і логічно вивірених доведень, формуючи сучасну структуру математичного знання.

1.2. Основні методи математичних доведень

У сучасній математичній освіті доведення розглядаються не лише як інструмент перевірки істинності тверджень, але й як структурований спосіб мислення, що дозволяє будувати знання послідовно, аргументовано та узгоджено з принципами формальної логіки. Тому необхідною умовою розвитку здатності оперувати абстрактними поняттями учнів є їх ознайомлення із різними видами доведень [22]. Необхідність їх вивчення зумовлюється також тим, що різні математичні твердження потребують різних методів обґрунтування. Наприклад, властивості функцій часто доводяться за допомогою прямих логічних міркувань, тоді як існування певних об'єктів доцільно встановлювати конструктивними методами або доведенням від супротивного. Така різноманітність сприяє глибшому розумінню природи математичних тверджень і дозволяє учням усвідомити, що доведення – це не шаблонний алгоритм, а гнучкий інтелектуальний інструмент.

Раніше ми з'ясували, що поняття доведення є центральним у математиці: саме завдяки ньому твердження набуває логічної обґрунтованості та визнаної істинності. Коли послідовність міркувань оформлена відповідно до правил логіки, вона підводить нас до іншого важливого поняття – теореми, тобто твердження, істинність якого вже встановлено. У методичній літературі поняття «теорема» пояснюється як «математичне речення (твердження), істинність якого встановлюється за допомогою доведення в рамках даної теорії» [24, с. 18].

«Довести теорему» означає надати логічне обґрунтування її істинності, використовуючи аксіоми та вже доведені раніше теореми. Шлях до математичної істини не єдиний: одну й ту саму теорему часто можна довести по-різному, спираючись на різні властивості, методи або логічні стратегії [20].

Різні математичні доведення відрізняються не лише змістом аргументів, які використовує автор, але й способом організації міркування – тобто тими логічними правилами, що визначають шлях переходу від вихідних положень до остаточного твердження [5]. Сукупність цих складників формує метод

доведення. В одних випадках він ґрунтується на послідовних аналітичних перетвореннях, в інших – на індуктивному узагальненні або на геометричній інтерпретації, що розкриває внутрішню структуру твердження. Таким чином, метод доведення можна розглядати як поєднання змістової аргументації та логічної форми, що разом забезпечують строгість, обґрунтованість і переконливість математичного міркування.

У навчальному посібнику з методики навчання здобувачів середньої освіти доводили математичні твердження (автори – К. Недялкова, С. Іванова, А. Тумбрукакі) запропонований підхід до класифікації математичних доведень за різними основами (рис. 1.1):

- 1) *за послідовністю міркувань*: синтетичне й аналітичне доведення;
- 2) *за загальнологічною основою*: пряме і непряме доведення, цільне і по частинах;
- 3) *за формою умовиводу* (в якій здійснюються доведення): індуктивне і дедуктивне доведення;
- 4) *в залежності від використання математичних теорій*: координатний метод доведення, векторний метод доведення, доведення на основі геометричних перетворень, доведення за допомогою рівності трикутників та ін. [24, с. 20].

У підручнику з методики навчання математики (автор – З. Слєпкань) вказані наступні методи доведень: синтетичний, аналітичний, аналітико-синтетичний, метод доведення від супротивного, повної індукції, математичної індукції, методи геометричних перетворень (центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія та подібність), алгебраїчний метод, (а також векторний та координатний методи як окремі його випадки). Окрім цього, стверджується, що у шкільному курсі застосовуються також методи математичного аналізу: метод границь, методи диференціального та інтегрального числення [34, с. 80].

Синтетичний і аналітичний методи

Логічною основою *синтетичного методу* доведення є аксіома: «З

істинного твердження завжди впливає наслідок».

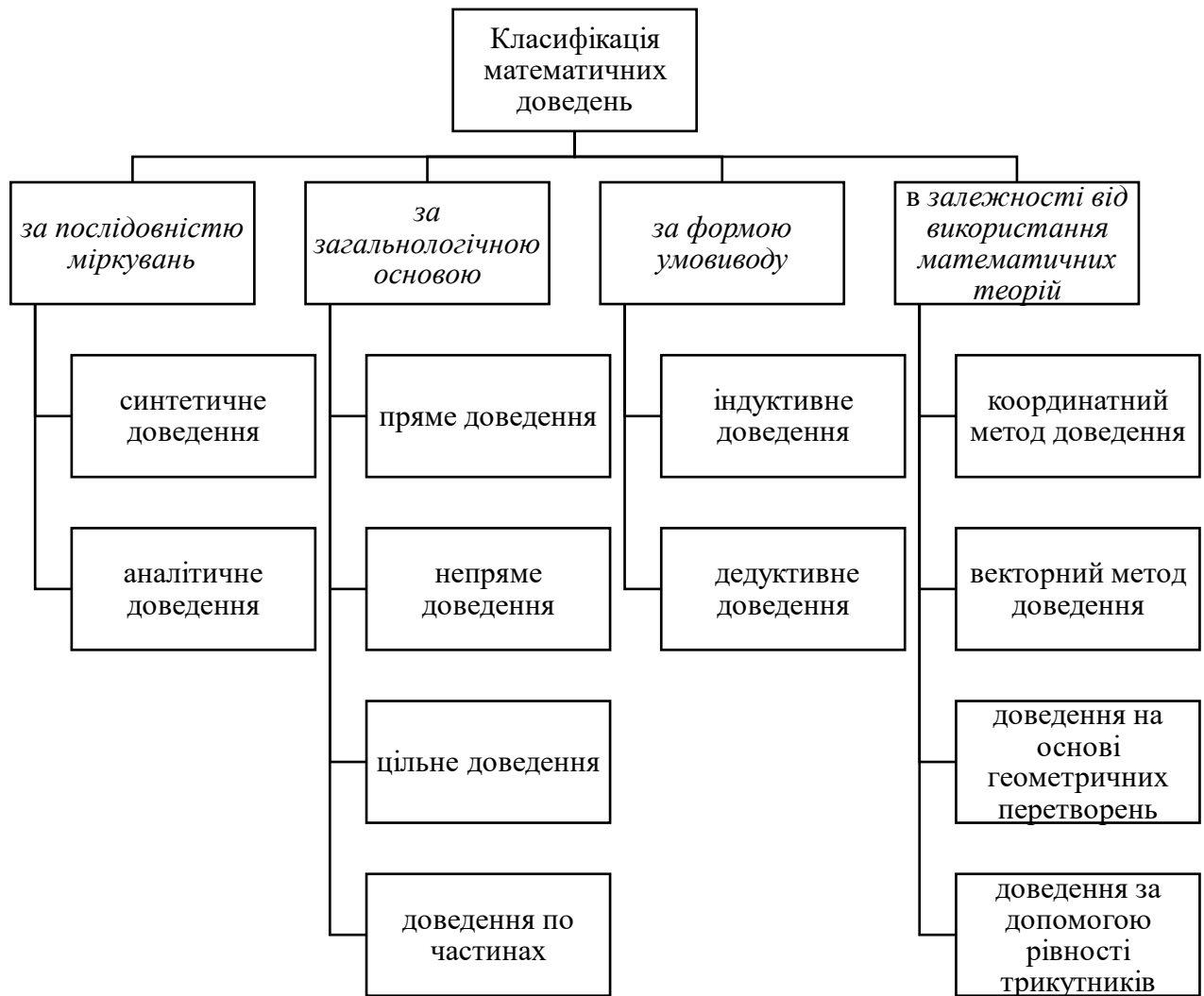


Рис. 1.1. Класифікація математичних доведень

Розглянемо сутність методу: «синтетичне доведення починається з виведення деякого наслідку B_1 з умови A (або його частини) з використанням певних, пов'язаних з умовою, речень теорії T , істинність яких вже була встановлена. Потім, аналогічно, з B_1 отримують речення-наслідок B_2 і так до тих пір, поки в якості наслідку не отримують висновок – речення B , що доводиться» [24, с. 20].

Такий спосіб доведення можна представити у вигляді логічної схеми:

Теорема $A \Rightarrow B$. Доведення: $A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow B$.

Приклад. Розглянемо доведення такого твердження:

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Доведення: Якщо $\overbrace{a \geq 0, b \geq 0}^A$, то $\overbrace{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0}^{B_1}$ або $\overbrace{a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0}^{B_2}$,
звідки $\overbrace{a + b \geq 2\sqrt{ab}}^{B_3}$; поділивши обидві частини на 2, отримаємо: $\overbrace{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}^B$.

Що і необхідно було довести.

У процесі доведення на основі синтетичного методу виникають деякі труднощі: існує велика міра невизначеності і багатозначності у процесі вибору шляху доведення (наприклад, яким чином здогадатися, що доведення варто починати з нерівності $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$?).

Тому для учнів мотиви тих кроків, які здійснюються при синтетичному доведенні, є невідомими майже до завершення доведення. Така його особливість робить процес навчання школярів самостійно доводити теореми більш складним. Проте цей метод має низку переваг: він є переконливим, лаконічним та простим з логічної точки зору.

Під аналітичним доведенням розуміють доведення, при якому відправляються не від умови, а від висновку. Воно реалізується методами нисхідного і висхідного аналізів [24, с. 21].

Розглянемо висхідний аналіз.

Логічна схема: $B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow \dots \Leftarrow B_n \Leftarrow A$.

$$B_1 \Rightarrow B$$

$$B_2 \Rightarrow B_1$$

Або:

$$B_3 \Rightarrow B_2$$

.....

$$A \Rightarrow B_n$$

1) Логічна основа висхідного аналізу така сама, як і у синтетичного методу: з правильного твердження випливає правильний наслідок.

2) Сутність методу полягає у тому, що необхідно знайти таке твердження або достатню умову, з якого (якої) випливає те, що необхідно довести. Після цього відшукують таке твердження або достатню умову, з якого (якої) випливає раніше знайдене і т.д., поки не приходять до вже відомого твердження (або умови) [24, с. 21].

Приклад: Дано $a \geq 0, b \geq 0$; Довести $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення: щоб показати, що для $a \geq 0, b \geq 0, \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, достатньо показати, що $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (оскільки з цього випливає те, що необхідно довести). А це, у свою чергу, випливає з нерівності $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$ або $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. А ця нерівність вірна для будь-яких $a \geq 0, b \geq 0$, оскільки квадрат числа не може бути від'ємним. Отже, висхідний аналіз полегшує пошук доведення теореми, яке можна потім представити синтетичним методом.

Розглянемо нисхідний аналіз (аналіз Евкліда).

Логічна схема: $B \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow A$.

Цей метод має особливість у порівнянні із синтетичним методом. Вона полягає у спрямованості міркувань. Його сутність полягає у наступному: припускають, що шукане (теза) є істинним твердженням, далі на основі виведених з нього наслідків отримують відому істину.

Приклад: Дано: $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$. Довести $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення: Нехай $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ істинно, для $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$, тоді помноживши обидві частини на 2, отримаємо: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, тобто $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ – істинно. Отже, вірним є і вихідне твердження.

Варто відзначити те, що аналіз Евкліда не є строгим доведенням. У даному випадку показано, що з припущення істинності твердження випливає правильний наслідок. Проте існують випадки, коли правильний наслідок можна отримати і з невірної твердження. Наприклад: $-2=2$ – невірно, але $4=4$ вірно. Таким чином, аналіз Евкліда має здатність тільки спрощувати пошук доведення, спрямовувати хід думки [24, с. 22].

Аналітико-синтетичний метод полягає в тому, що пошук доведення починають аналітичним методом, але міркування не доводять до кінця, а, спиняючись на певному кроці, починають міркувати у зворотному напрямі, тобто з розгортання умови. Отже, завершують доведення синтетичним методом [34, с. 82].

Пряме і непряме доведення

Пряме доведення полягає у тому, що необхідно довести істинність судження, яке безпосередньо міститься у висновку теореми.

У підручнику [34, с. 77] пряма теорема записана у вигляді умовного висловлення: «Якщо P , то Q », де P – умова теореми, Q – її висновок».

Приклад: Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.

Доведення. Нехай x_1, x_2 – довільні значення аргументу функції f , узяті з проміжку I , причому $x_1 < x_2$.

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на проміжку I , то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови Лагранжа. Тоді існує така точка

$$x_0 \in (x_1; x_2), \text{ що } f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) = 0$. Отже, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$. Звідси $f(x_2) = f(x_1)$.

Враховуючи, що числа x_1 і x_2 вибрано довільним чином, можемо зробити висновок: функція є константою на проміжку I [15, с. 309].

Сутність *непрямого доведення* полягає у тому, що необхідно довести хибність судження, яке суперечить висновку теореми, тим самим не прямо, а опосередковано доводиться істинність висновку теореми [20].

Непряме доведення здійснюють за допомогою методу від супротивного (який також відомий як доведення від протилежного, доведення суперечністю або зведення до абсурду).

Метод доведення від супротивного

Поняття *методу від супротивного* вперше розглядають у курсі геометрії 7 класу. Його логічною основою є закон виключення третього: з двох супротивних

твердження одне завжди правильне, друге – неправильне, а третього бути не може. Завдяки цьому закону замість доведення певного твердження під час використання методу доведення від супротивного доводять, що супротивне йому твердження – неправильне, і на цій підставі роблять висновок, що правильне доводжуване твердження [34, с. 83].

Учні мають опанувати загальний алгоритм його використання. Щоб довести твердження цим методом, слід:

- 1) Припустити протилежне до того, що потрібно довести.
- 2) Спираючись на це припущення, а також на аксіоми та вже відомі твердження, шляхом логічних міркувань одержати висновок, що суперечить умові задачі, певній аксіомі, раніше доведеному факту або самому припущенню.
- 3) Зробити висновок, що вихідне припущення хибне; отже, істинним є саме те твердження, яке й вимагалось довести.

Приклад: Дано: $a \geq 0, b \geq 0$. Довести: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення: припустимо, що $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$, для $a \geq 0, b \geq 0$. Тоді

$a + b < 2\sqrt{ab}$, тобто $a - 2\sqrt{ab} + b < 0$ або $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$. Але ця нерівність не може бути істинною ні при яких $a \geq 0, b \geq 0$. Отже, істинно супротивне: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Цільне доведення і доведення по частинах

Потрібно розрізняти *цільне доведення* та *доведення по частинах* (*роздільне доведення*). *Цільним* називають таке доведення, у якому твердження встановлюється одразу для всіх випадків. *Роздільне доведення* передбачає, що твердження перевіряється окремо для кожного можливого часткового випадку. Такий підхід спирається на метод повної індукції й базується на логічній аксіомі: якщо певною властивістю володіють усі елементи множини А та всі елементи множини В, то цією ж властивістю наділені всі елементи об'єднання множин $A \cup B$ [24, с. 24].

Метод повної та неповної індукції

Під час доведення методом повної індукції теорему поділяють на

скінченну кількість тверджень, кожне з яких описує окремий частковий випадок. Коли кожне з цих тверджень доведено окремо, можна зробити висновок про істинність загального твердження [14].

Приклад: довести, що для кожного натурального a $(a^3 - a) : 3$.

Доведення: $(a^3 - a) = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1)$. Достатньо показати, що $a : 3$, або $(a - 1) : 3$, або $(a + 1) : 3$ при $a \in N$. При діленні на 3 натуральне число a може давати остачу 0, 1 або 2, тобто $a = 3k$, $a = 3k + 1$, $a = 3k + 2$, де $k \in N$.

Якщо $a = 3k$, то $a : 3$ і твердження вірне. Якщо $a = 3k + 1$, то $a - 1 = 3k + 1 - 1 = 3k : 3$ і твердження вірне. Якщо $a = 3k + 2$, то $a - 1 = 3k + 2 + 1 = (3k + 3) : 3$ і твердження вірне. Отже, твердження істинне для будь-якого натурального a .

Учням корисно дати орієнтовне правило щодо використання методу повної індукції:

а) В алгебрі, коли потрібно довести певне твердження для всіх натуральних чисел, інколи достатньо окремо розглянути його для всіх парних чисел, для всіх непарних чисел та окремо для числа 1.

б) У геометрії цей метод застосовують у тих випадках, коли для вивчення властивостей фігур необхідно проаналізувати всі можливі варіанти їхнього розміщення або всі можливі типи фігур. Якщо теорему доведено для кожного окремого випадку, тоді можна зробити узагальнений висновок. Класичний приклад – теорема про вписаний кут [24, с. 25].

Якщо розглядати не всі частинні випадки, а деякі, то отримаємо *метод неповної індукції*, який не є строгим доведенням.

Приклад: складаючи формулу для отримання простих чисел, Ейлер з'ясував, що при $n \in N$ формула $f(n) = 2n^2 + 29$ дає 28 простих чисел при $n \leq 28$, а при $n = 29$ дає вже складене число 2959. Аналогічно, формула $f(n) = n^2 + n + 41$ дає прості числа при $n \leq 39$, але при $n = 40$ – отримаємо

складене число.

Такі приклади добре показують учням, що результатам, отриманим методом неповної індукції, не можна повністю довіряти – вони завжди потребують подальшого доведення. Адже в обох випадках, навівши прості числа для перших 10 чи навіть 20 натуральних значень n , неповна індукція може створити хибне враження, що формули породжують прості числа для всіх натуральних n .

Нерідко метод неповної індукції використовується у початковій школі або ж при вивченні математики у 5-6 класах. Наприклад, у процесі вивчення у 6 класі елементів теорії подільності, наводять факти:

$$28 : 7 ; 36 : 9$$

$$\underline{21 : 7 ; 54 : 9}$$

$$(28 + 21) : 7 ; (36 + 54) : 9$$

Після розгляду ще кількох подібних часткових випадків роблять узагальнений висновок: якщо кожен доданок суми ділиться на певне число, то й уся сума також ділиться на це число – типовий приклад висновку, зробленого на основі неповної індукції.

Індуктивне і дедуктивне доведення

За характером міркувань, які лежать в основі доведення, розрізняють *дедуктивні* та *індуктивні* доведення. *Дедуктивним доведенням* називають встановлення істинності загального твердження шляхом використання дедуктивних схем, тобто чітких логічних правил виведення. *Індуктивне доведення* полягає в об'єднанні всіх часткових випадків, що охоплюють дану ситуацію, і відповідає методу повної індукції [24, с. 26].

Хоч термін «*індукція*» присутній у назві методу математичної індукції, самі міркування, що виконуються за цим методом, є дедуктивними. Справді, перший крок методу містить елемент індуктивного міркування, однак завдяки зверненню до загального, уже відомого твердження – аксіоми індукції, яка й слугує логічною основою методу, – третій крок показує, що вся побудова доведення фактично має дедуктивний характер.

Отже, нами були розглянуті основні методи математичних доведень, що лежать в основі шкільного курсу алгебри й початків аналізу та геометрії та визначають характер доказової діяльності учнів. Аналіз показав, що різні методи доведення відрізняються як за логічною структурою, так і за змістовою наповненістю, а їхнє цілеспрямоване поєднання дозволяє формувати цілісне розуміння математичних тверджень.

1.3. Значення доведень у загальному розвитку учнів

Вивчення теоретичних тверджень і їхніх доведень посідає центральне місце у шкільному курсі математики, однак водночас становить одну з найбільш складних методичних проблем. Аналіз сучасної педагогічної практики демонструє помітне зниження зацікавлення здобувачів освіти доказовою діяльністю: учні рідше виявляють готовність самостійно розмірковувати, виконувати задачі на доведення чи шукати альтернативні способи обґрунтування математичних тверджень. У багатьох школярів спостерігається часткова або недостатня сформованість умінь доводити твердження як у межах геометричного, так і алгебраїчного матеріалу. Разом із тим опанування логіки доведень має суттєвий розвивальний потенціал: під час такої діяльності учні формують логічне та критичне мислення, розвивають просторові уявлення, оволодівають основними методами доведення і евристичними прийомами мислення. Доказова практика сприяє також вихованню важливих рис характеру – наполегливості, уважності, кмітливості та вміння послідовно працювати над інтелектуальною задачею. Отже, значущість вивчення теорем і їх доведень у шкільній математичній освіті є надзвичайно високою і має фундаментальне значення для формування всебічно розвиненої особистості.

Доведення посідають особливе місце у шкільній математичній освіті, оскільки вони формують підґрунтя для усвідомленого опанування алгебри та початків аналізу. Саме через доведення учень отримує можливість побачити внутрішню логіку математичних понять, зрозуміти причини їх властивостей та

побудувати цілісне бачення математичної теорії. Науковці, що досліджують природу математичного мислення, підкреслюють, що доведення є не лише засобом перевірки істинності тверджень, а фундаментальним механізмом розвитку абстрактного та логічного мислення [19].

У методиці навчання вважається, що розвиток уміння доводити не повинно зводитися до формального відтворення зразків. Він має бути спрямований на формування в учнів уміння мислити, аналізувати, ставити запитання, будувати логічні зв'язки. Саме тому сучасні підходи пропонують поєднувати інтуїтивні міркування з поступовим переходом до строгих логічних доведень, що створює оптимальні умови для розвитку математичної компетентності.

Систематичне навчання доведення є одним із ключових чинників розвитку логічного мислення школярів, адже доведення передбачає послідовне, аргументоване та обґрунтоване викладення думки. У процесі опанування доведень учень не лише засвоює певні математичні факти, а й вчиться вибудовувати логічні зв'язки між поняттями, аналізувати передумови та наслідки, критично оцінювати твердження. Регулярна робота з доведеннями формує навичку мислити не інтуїтивно, а системно, спираючись на правила, структуру та необхідність аргументації. Таким чином, доведення стає не просто навчальною дією, а інтелектуальним інструментом розвитку мислення [33].

Доведення також виконує важливу функцію у формуванні наукового стилю мислення. Воно допомагає учням зрозуміти, що будь-яке наукове твердження має бути логічно виведеним, підтвердженим і внутрішньо несуперечливим. Уміння доводити формує культуру раціонального мислення, яка є основою всіх наукових дисциплін – від математики до природничих і соціальних наук [25].

Опанування різних методів доведення дозволяє учням засвоїти евристичні прийоми інтелектуальної діяльності, навчитися свідомо обирати раціональний шлях розв'язання задачі та аргументовано обґрунтовувати власні висновки. Крім того, доказова діяльність формує важливі особистісні якості – уважність, наполегливість, посидючість, критичність та вміння працювати з абстрактним

матеріалом. Отже, доведення у шкільному курсі математики виконує не лише пізнавальну, а й виховну та розвивальну функції, забезпечуючи становлення цілісної математичної культури учнів [24, с. 30].

Доведення виступає тим інтелектуальним інструментом, який надає математичним поняттям і формулами внутрішньої цілісності та перетворює їх на логічно впорядковану систему знань. Саме завдяки доведенням математика зберігає статус строгої науки, у якій кожне твердження має чітке логічне підґрунтя. Якщо ж вилучити доведення з навчального процесу, математика втрачає свою сутність і перетворюється лише на набір емпіричних правил та формальних інструкцій, що суперечить її природі як науки про необхідні логічні зв'язки та узагальнення [2].

Варто відзначити те, що уміння доводити твердження формує в учнів не лише академічну грамотність, а й важливі навички, що відповідає сучасним вимогам до результатів загальної середньої освіти. Залучення школярів до доведення математичних фактів сприяє глибшому осмисленню понять, виявленню міжпредметних зв'язків, формуванню системного бачення математичної науки. Через структуру доведення учень навчається аналізувати вихідні посилки, дотримуватися логічної послідовності, виділяти головне й формулювати узагальнення, що є важливими елементами наукового підходу до пізнання. Крім того, навчання доведень забезпечує формування ключових компетентностей, зокрема – уміння вчитися протягом життя, комунікативної, когнітивної та соціальної компетентностей. Воно стимулює самостійність учнів у здобутті знань, підвищує рівень математичної культури, забезпечує інтелектуальну готовність до подальшого навчання в закладах вищої освіти.

С. Семенець та О. Чугунова (2019) аргументовано доводять, що систематичне включення до навчального процесу задач, які потребують доведення тверджень, створює умови для активного залучення учнів до пізнавальної діяльності, стимулює інтелектуальний розвиток та сприяє формуванню навичок дедуктивного міркування [32, с. 169-173].

У дисертаційному дослідженні Н. Кугай [10] ґрунтовно розкрито значущість формування в учнів старшої школи умінь доводити математичні твердження як ключового чинника інтелектуального розвитку. Авторка розглядає навчання доведень не лише як засіб засвоєння змісту шкільного курсу алгебри і початків аналізу, а як важливий етап становлення цілісної когнітивної культури учня. Зокрема, доведення розглядається не як рутинне відтворення шаблонних міркувань, а як вид пізнавальної діяльності, що активізує інтелектуальні ресурси старшокласників, розвиває вміння аналізувати ситуацію, прогнозувати наслідки міркувань, застосовувати раніше здобуті знання в нових умовах. Н. Кугай підкреслює, що ефективне навчання доведень можливе лише за умови цілеспрямованого, поетапного формування відповідних умінь. Такий підхід включає ознайомлення учнів із логічною структурою математичного міркування, опанування ними базових понять і методів доведення, поступовий розвиток здатності до самостійного аргументованого викладення думки. У цьому процесі важливо не лише оволодіння формальними техніками доведення, а й формування внутрішнього розуміння логіки міркувань, що забезпечує осмисленість і переконливість кожного кроку [10].

Доведення, у трактуванні дослідниці, є багатогранним феноменом, що об'єднує інтелектуальні, логічні, мовленнєві та рефлексивні компоненти. Саме тому воно повинно посідати центральне місце у структурі змісту профільного навчання математики, оскільки дає змогу учневі не лише відтворювати знання, а й опановувати загальні інтелектуальні прийоми діяльності, що мають широке міжпредметне й життєве застосування [10].

Таким чином, висновки Н. Кугай підтверджують, що навчання доведень сприяє розвитку універсальних навчальних дій, стимулює когнітивну гнучкість та критичне мислення, формує культуру доведення як ознаку зрілого математичного мислення. Ці результати набувають особливої цінності в контексті реалізації компетентнісного підходу до математичної освіти, який орієнтований не лише на результат, але й на якісну зміну характеру пізнавальної діяльності учнів [10].

Всі наведені наукові дослідження одностайно підтверджують, що навчання доведень виступає не лише як один із базових елементів формування математичної компетентності учнів, але й як потужний чинник розвитку їхнього критичного мислення, аналітичних здібностей та логічної культури. Через опанування навичками доведення школярі набувають умінь аргументувати, аналізувати, систематизувати та узагальнювати математичний матеріал, що безпосередньо впливає на їхню здатність до самостійного та творчого мислення. Ці компетентності є особливо актуальними з огляду на вимоги сучасної вищої освіти та професійної діяльності, де вміння застосовувати математичні знання в нових, часто міждисциплінарних контекстах, має ключове значення.

Крім того, комплексний підхід до навчання доведень сприяє формуванню в учнів навичок системного мислення, що дозволяє їм краще орієнтуватися в структурі математичних понять та закономірностей, а також усвідомлено підходити до процесу пізнання. Це важливо для старшокласників, які готуються до переходу в університетське середовище, де глибоке розуміння теоретичних засад і вміння аргументовано доводити твердження є обов'язковими [9].

Таким чином, застосування доведень у навчальному процесі виступає не лише інструментом для засвоєння математичного змісту, а й важливим засобом розвитку логічного мислення, уміння міркувати послідовно, критично аналізувати вихідні умови задачі, оцінювати правильність суджень і будувати переконливі аргументи. Враховуючи вищезазначене, використання доведень у курсі алгебри та початків аналізу є не лише доцільною, а й необхідною складовою модернізації математичної освіти в Україні. Це сприятиме підвищенню якості освіти, забезпечить кращу підготовку молоді до викликів сучасного науково-технічного прогресу і сприятиме формуванню конкурентоспроможних фахівців у майбутньому.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ НАВЧАННЯ ДОВЕДЕНЬ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

2.1. Методичні підходи щодо навчання доведень у курсі алгебри і початків аналізу

У сучасній математичній освіті особливе значення має формування в учнів умінь будувати логічні міркування та доведення. Саме через доведення школярі досягають справжню сутність математичних тверджень, вчаться розрізняти обґрунтовані судження від інтуїтивних припущень і опановують спосіб мислення, притаманний науці. Тому необхідною умовою якісної математичної підготовки є вивчення методичних підходів до навчання доведень у курсі алгебри і початків аналізу. Воно дозволяє зрозуміти, як поступово формувати в учнів здатність аналізувати умови задач, вибудовувати логічні зв'язки та аргументовано обґрунтовувати отримані результати. Розгляд таких підходів забезпечує цілісність навчального процесу та створює підґрунтя для подальшого успішного засвоєння складніших математичних понять і методів.

У методичній літературі вказується, що структура доведення включає такі елементи: тезу – судження, істинність якого необхідно довести; аргументи – істинні судження, що використовуються для підтвердження тези; та демонстрацію або форму доведення – спосіб логічного зв'язку між тезою та аргументами. Аргументами можуть бути засвідчені поодинокі факти, такі як статистичні дані, результати експериментів чи спостережень; означення понять; аксіоми, що приймаються без доведення, та постулати, які визнаються істинними в межах наукової теорії; а також закони науки і теореми [24, с. 18].

При доведенні слід дотримуватися певних правил логічного міркування: теза має бути чіткою, точно сформульованою, послідовною та залишатися незмінною протягом усього доведення чи спростування. Аргументи повинні бути істинними, несуперечливими між собою та достатніми для підтвердження

тези. Їх істинність повинна бути обґрунтована самостійно, незалежно від підтверджуваної тези. Теза має логічно впливати з аргументів відповідно до загальних правил умовиводів або бути отриманою за правилами непрямого доведення. Доведення є обов'язковим етапом у процесі побудови аргументації.

К. Недялкова, С. Іванова, А. Тумбрукакі є авторами навчального посібника з методики навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження [24], який став для нас надзвичайно цінним джерелом. Його автори вважають, що у процесі вирішення проблеми, пов'язаної з навчанням доведень здобувачів середньої освіти, доречним є її поділ на скінченну кількість методичних завдань, розв'язання яких здійснюється послідовно. Таким чином, вони виділяли методичні завдання у навчанні доведень (рис. 2.1) [24].

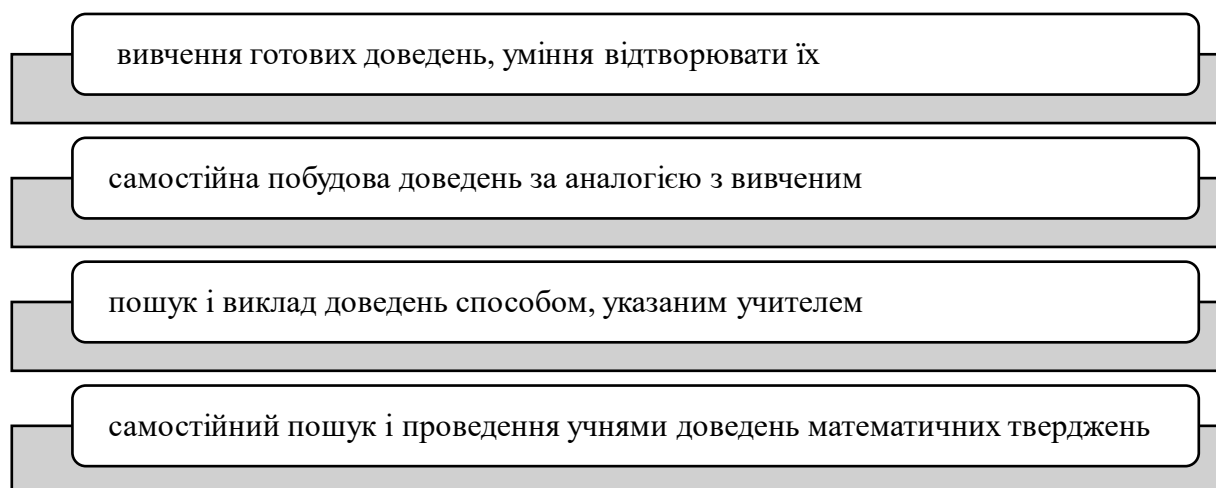


Рис. 2.1. Послідовність методичних завдань у навчанні доведень

Щоб учні змогли ефективно оволодіти способами та методами доведень, вони мають мати достатньо сформовану систему теоретичних знань і практичних умінь: знати поняття й їх означення, аксіоми, теореми, а також уміти виконувати основні побудови та інші необхідні дії. Бажано, щоб учні володіли основами математичної логіки – зокрема, знали правила логічних висновків, розуміли необхідні та достатні умови тощо. Крім того, важливим є сформованість загальних розумових умінь і прийомів, від яких значною мірою залежить успішність виконання доведень, а саме: *аналізу* (уміння розглядати формулювання теореми чи умову задачі, а також рисунок); *синтезу* (уміння

співставляти вимогу з умовою, переосмислювати елементи задачі та встановлювати між ними нові зв'язки; у цьому процесі застосовуються порівняння, абстрагування від несуттєвих деталей); *узагальнення* (здатності поширювати доведену теорему на всі можливі випадки) [24].

Окрім цього, важливою умовою успішності навчання учнів доведенню теорем знаходиться у прямій залежності від того, чи сформовані у них специфічні, суто математичні методи і прийоми розумової діяльності. До таких, зокрема, відносять підведення під поняття, виведення наслідків, а також від уміння вибирати достатні ознаки поняття.

У процесі формування в учнів умінь доводити математичні твердження можна окреслити три послідовні етапи (рис. 2.2).

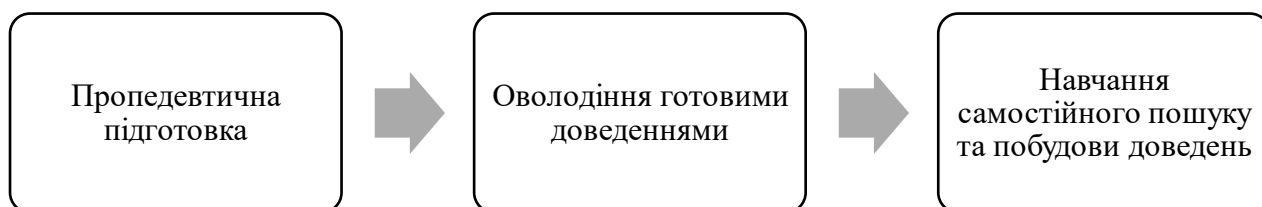


Рис. 2.2. Основні етапи навчання учнів доводити математичні твердження

Першим етапом є *пропедевтика навчання учнів доведень*. Підготовча робота до формування в учнів умінь доводити теореми розпочинається вже у 5–6 класах. На цьому етапі, хоча терміни «теорема» і «доведення» ще не вживаються, школярі знайомляться з елементарними твердженнями та виконують свої перші дедуктивні міркування.

Підготовча робота з навчання учнів доводити твердження розпочинається з формування в учнів звички завжди пояснювати свої дії, обґрунтовувати твердження та наводити доведення [24]. Наприклад, на початковому етапі формування доказових умінь учителю доцільно систематично ставити запитання, що спонукають учнів обґрунтовувати свої твердження. Так, учитель може запитати: «Поясни, чому число 2001 є кратним 3» – і скеровувати учня до використання відповідної ознаки подільності. Або, з'ясовуючи розуміння поняття правильного дробу, учитель може запросити учня пояснити, чому дріб

4/7 вважається правильним, тим самим підводячи до посилання на означення. Подібні запитання сприяють розвитку в учнів звички не лише давати відповідь, а й аргументувати її, що є важливим компонентом підготовки до повноцінного опанування доведень.

Наступним етапом навчання учнів доводити математичні твердження є *навчання школярів готових доведень*. Цілеспрямоване навчання доведень теорем бере свій початок у 7 класі на уроках геометрії. На перших уроках учні знайомляться з новими для них поняттями «теорема» та «доведення теореми». Перші теореми учитель доводить самостійно. Основна мета таких уроків полягає у тому, щоб продемонструвати школярам конкретні приклади теорем і способи їх доведень. Крім цього, вони мають засвоїти сутність таких понять, як «теорема» та «доведення» [24].

3. Слєпкань стверджувала, що поняття «знати доведення теореми» варто розглядати як взаємозв'язок двох компонентів. Першим із них є те, що учень має знати головну ідею доведення, а другим компонентом є вміння на її основі, використовуючи при цьому міркування, відтворювати конкретне доведення [34].

Якщо учні розуміють ті доведення, які містяться у підручнику і які учитель їм пояснює на уроці, уміють відтворювати готові доведення теореми або формули, то варто говорити лише про перший, але надзвичайно важливий рівень навчання школярів доведень [24].

У цій роботі ключовими є такі аспекти:

1. *Усвідомлення вихідних даних та вимог теореми (або задачі).* Учні 7-го класу важливо привчати помічати, що в кожній теоремі міститься певна умова й те, що необхідно довести. Якщо теорема подана у формі «якщо... то...», варто окремо виділяти її умову та висновок. Стисле формулювання зручно записувати у вигляді «дано – довести».

2. *Розуміння провідної ідеї та логічної послідовності доведення.* Основна ідея допомагає легше запам'ятати та відтворити доведення, виступаючи своєрідним «ключем» або стислим його варіантом. Учні повинні не лише пам'ятати цю суть, а й уміти розгорнути її в повне, розширене доведення.

3. *Розуміння методу доведення.* Формування цього вміння є тривалим процесом і відбувається протягом багатьох наступних уроків.

4. *Виділення ключових етапів доведення та чітке усвідомлення всіх його аргументів* [24].

Науковці пропонують пояснювати деякі доведення два і три рази. Це стосується доведення тих теорем, які мають засвоїти всі учні у класі. При цьому за першим разом дається доведення у загальних рисах, за другим – дається повна аргументація кожного кроку, за третім – ще раз повторюється хід доведення (при цьому здійснюється акцент на окремих важливих місцях) [24].

Найважливішими елементами під час запам'ятовування теорем є їхнє точне формулювання, основна ідея доведення, а для складніших тверджень – продуманий план або схема доведення. Значущим може бути й сам метод доведення, особливо якщо він має характерні особливості та може виступати своєрідною підказкою для відтворення повного міркування (наприклад, доведення методом від супротивного).

Третім етапом навчання учнів доводити є *навчання учнів самостійного пошуку доведень* – це другий, найбільш важливий рівень навчання доведенням. Серед компонентів, які входять в уміння самостійно доводити теореми і задачі на доведення, відносять: «підведення об'єктів під поняття; знання необхідних і достатніх ознак понять, про які йде мова у висновку теореми; вибір ознак понять, що відповідають даним теореми (умові); дія розгортання умови» [24].

У міру того як в учнів формується базовий комплекс умінь, необхідних для виконання доведень, і накопичується практичний досвід, їм можна запропонувати узагальнену евристичну схему пошуку доведення: 1. Визначити, які відомості наведені в умові та що саме потрібно довести. 2. Увести необхідні позначення; у геометричних задачах передусім виконати якісний та точний рисунок. 3. Подати умову й висновок теореми або задачі в символічному вигляді. 4. Перелічити ознаки поняття, під яке необхідно підвести твердження у висновку. 5. Проаналізувати умову, тобто вивести всі можливі наслідки з поданих даних. 6. Порівняти кожну ознаку з умовою та отриманими наслідками,

з'ясувати, за якою з них зручніше здійснити доведення, і вибрати оптимальний шлях. 7. Якщо визначити відповідну ознаку одразу не вдається, з'ясувати, які додаткові характеристики або зв'язки, необхідні для доведення, можуть бути приховано закладені в умові. 8. Постійно повертатися до даних та наслідків, адже саме вони є основою для подальших логічних кроків у доведенні [24].

У процесі формування в учнів умінь доводити теореми важливо враховувати низку методичних положень. Насамперед слід забезпечити актуалізацію й повторення опорних знань, що може відбуватися як до початку доведення, так і безпосередньо під час нього; мотиваційний аспект зручно реалізовувати через створення проблемної ситуації. Необхідним етапом є аналіз формулювання теореми з подальшим чітким виокремленням умови та висновку у вигляді запису «дано – довести». Поступово учнів потрібно ознайомлювати з логікою дедуктивної системи, наголошуючи, що аргументи доведення мають ґрунтуватися на істинних положеннях: на умові, означеннях, аксіомах або вже доведених твердженнях [14].

Окрему увагу слід звернути на значення рисунка: він не є доведенням, але відіграє роль важливої зорової опори, що допомагає краще зрозуміти хід міркувань. Важливо навчити учнів бачити головне в доведенні, а також забезпечити систематичне закріплення вивчених теорем. Розвиток уміння виконувати доведення нерозривно пов'язаний із засвоєнням методів доведення, тому доцільно вводити правила-орієнтири, що регламентують їх застосування. Важливо також сформувати навичку укладання наборів достатніх умов для різних понять і поступово привчати учнів застосовувати здобуті вміння під час розв'язування задач на доведення [24].

Варто підкреслити, що неможливо на кожному уроці зосереджуватися виключно на теоремах і їх доведеннях, адже надзвичайно важливими є також формування понять, виконання геометричних побудов, розвиток просторового мислення та інші складові математичної освіти. Саме тому не всі теореми, особливо в старших класах, доцільно обов'язково пропонувати всім учням з повним доведенням. Деякі з них можна розглянути вибірково або лише з

окремою групою учнів. Наприклад, немає потреби вимагати від усього класу доведення теорем про похідну добутку чи частки, а також твердження про бічну поверхню конуса [18].

У методиці навчання математики існують різні підходи до структурування й визначення етапів роботи над опануванням теорем, що дає можливість обирати найбільш раціональний шлях відповідно до навчальних цілей і підготовки учнів.

У методичній літературі досить часто зустрічається такий спосіб виділення етапів роботи з теоремою: мотивація вивчення теореми; ознайомлення з теоремою; засвоєння змісту теореми; запам'ятовування формулювання теореми; ознайомлення із способом доведення; доведення теореми; застосування теореми; встановлення зв'язків теореми з раніше вивченими теоремами [37].

У навчальному посібнику з дисципліни «Методика навчання математики» (автори – К. Неद्याлкова, С. Іванова, А. Тумбрукакі) запропонований інший підхід щодо етапів вивчення теореми та шляхів їх реалізації (рис. 2.3) [24].

Етапи роботи над теоремою	Актуалізація опорних знань і умінь учнів
	Мотивація вивчення теореми
	Робота над засвоєнням формулювання теореми
	Побудова рисунка та запис короткої умови теореми
	Робота над доведенням теореми
	Первісне закріплення
	Застосування теореми, визначення її місця у шкільному курсі математики

Рис. 2.3. Етапи роботи над теоремою

Відповідно до рисунка 2.3 робота над теоремою передбачає послідовне проходження кількох важливих етапів, кожен із яких виконує свою функцію у формуванні повного й усвідомленого розуміння математичного твердження. Спершу здійснюється *актуалізація опорних знань і вмінь учнів*: повторюються основні поняття, математичні факти та методи доведення, необхідні для формулювання й доведення теореми. Після цього відбувається *мотивація вивчення нового матеріалу*, що допомагає учням усвідомити значущість і

практичну цінність теореми. Наступний крок – *опрацювання формулювання теореми*, під час якого забезпечується її чітке й правильне розуміння. Далі учні переходять до *побудови рисунка та запису короткої умови*, створюючи наочне зображення, вводять зручні позначення та виокремлюючи умову й висновок. Центральним етапом є *робота над доведенням*, яка реалізується через трикратний підхід: спочатку учні знайомляться з основною ідеєю доведення, далі виконуються окремі кроки з детальним обґрунтуванням, а потім повторюється загальна послідовність кроків. Після цього здійснюється *первісне закріплення*, що включає розв’язування найпростіших задач на застосування теореми та відтворення доведення за зміненим рисунком. Завершальним етапом є *ширше застосування теореми й визначення її місця у шкільному курсі математики*: учні розв’язують складніші задачі, встановлюють зв’язки з іншими теоремами та розглядають можливі узагальнення [24].

Розглянемо прийоми, що дають змогу результативно реалізувати кожен із зазначених етапів.

На етапі *актуалізації опорних знань і вмінь* варто пропонувати учням завдання чи вправи, у яких вони застосовують уже відомі поняття та теореми, необхідні для подальшого формулювання й доведення нової теореми. У деяких випадках слід пригадати також ідею та основні кроки використання певного методу доведення (наприклад, доведення від супротивного, метод векторів або координат, застосування допоміжних побудов чи елементів тощо).

Іноді можна обмежитися лише повторенням означень і формулювань теорем, що стосуються відповідних понять. Однак такий підхід зазвичай є менш дієвим і застосовується лише тоді, коли доведення теореми не становить труднощів для учнів або коли на її опрацювання відведено мінімальну кількість часу [24].

Для *мотивації вивчення теореми* варто використовувати різноманітні прийоми, які викликають інтерес і допомагають усвідомити її значущість. Це можуть бути відомості з історії математики щодо появи та розвитку відповідної теореми, цікаві історичні факти, пов’язані з нею, спостереження за наочними

матеріалами – рухомими моделями, кресленнями чи комп'ютерною графікою. Дієвим мотивувальним чинником також є демонстрація того, що вивчення цього твердження необхідне для доведення інших теорем або розв'язування певних задач, особливо тих, що мають практичне спрямування.

На наступному етапі – *опрацюванні формулювання теореми* – зазвичай застосовують один із двох підходів: конкретно-індуктивний або абстрактно-дедуктивний. У межах першого вчитель створює проблемну ситуацію на основі побудов, вимірювань, розв'язування обчислювальних задач чи виявлення закономірностей. Учні самостійно або з частковою допомогою педагога доходять до висунення гіпотези, яка переростає у формулювання теореми. У межах другого підходу теорему формулює сам учитель, а завдання учнів полягає в тому, щоб зрозуміти її зміст і структуру [24].

Четвертий етап *передбачає побудову рисунка та складання короткої умови теореми*. На цьому етапі особливо важливо, щоб учитель постійно контролював дотримання учнями вимог до якості й наочності рисунка, правильності використання стандартних позначень, а також однакового оформлення структурних елементів умови та висновку (традиційно: *дано: ...; довести: ...*).

Далі йде етап *роботи над доведенням теореми*, у межах якого доцільно застосовувати триразове опрацювання доведення – так зване «доведення в три проходи». Під час першого проходу основна увага приділяється ознайомленню учнів з основною ідеєю доведення. На другому етапі важливим є виокремлення й докладне обґрунтування кожного кроку, супроводжене оформленням зразкових записів на дошці. Завершальний, третій прогін спрямований на відтворення послідовності кроків доведення та формування цілісного уявлення про логіку доведення теореми [3, с. 385].

Для ефективного ознайомлення учнів з ідеєю доведення окремих теорем корисно опиратися на вже розв'язану задачу. Наприклад, перед доведенням теореми косинусів доцільно розібрати задачу на обчислення сторони трикутника за двома сторонами та кутом між ними, використовуючи допоміжний елемент – висоту, проведену до однієї із заданих сторін. Під час третього проходу

доведення особливо корисними є наочні схеми, які допомагають сформувати цілісне уявлення про логіку міркувань.

Шостий етап – *первісне закріплення* – передбачає роботу у двох напрямках. Перший – перевірка розуміння доведення, яку доцільно проводити за зміненим рисунком: варіюють форму, розмір або взаємне розташування елементів фігури, а також змінюють позначення, наприклад, інші букви для вершин трикутника. Другий – демонстрація практичного використання теореми, що реалізується через розв’язування найпростіших задач на її застосування, переважно усно або за готовим рисунком із коротким записом розв’язання.

Завершальний, сьомий етап – *застосування теореми та визначення її місця в курсі математики* – також включає два основні напрями роботи. Перший полягає у розв’язуванні більш складних задач, які вимагають творчого застосування вивченої теореми. Другий – у встановленні зв’язків між цією теоремою та раніше опрацьованими твердженнями, що сприяє формуванню цілісної системи математичних знань [24].

На цьому етапі, за можливості, доцільно організувати роботу над *узагальненнями теореми*. Це дає змогу поглибити розуміння її змісту та показати ширші можливості її застосування.

Важливе значення має урахування психологічних аспектів процесу доведення. Для багатьох учнів абстрактний характер математичних тверджень стає серйозним викликом, оскільки потребує оперування об’єктами, які не мають прямих аналогів у реальному досвіді. Зіткнення з абстракцією часто викликає інтелектуальне напруження та може спричинити психологічний дискомфорт. Тому важливо поступово формувати в учнів здатність працювати з абстрактними поняттями, використовуючи наочні моделі, порівняння та опори на конкретні приклади. Одночасно важливим є розвиток внутрішньої мотивації до пошуку обґрунтувань: учень має відчувати не зовнішній примус до виконання доведення, а внутрішню потребу з’ясувати, чому саме твердження є істинним. Така мотивація виникає тоді, коли вчитель створює ситуації пізнавального інтересу,

пропонує задачі з відкритим кінцем, стимули до дослідження та можливість самостійного відкриття закономірностей [36].

Таким чином, методичні підходи до навчання доведень у курсі алгебри та початків аналізу спрямовані на поетапне формування в учнів умінь логічного мислення, аналізу математичних фактів і здійснення самостійних аргументованих доведень. Використання різноманітних форм організації навчальної діяльності – від проблемних завдань та математичних експериментів до колективного обговорення і самостійного відтворення доведень – забезпечує глибоке розуміння теоретичного матеріалу та ефективне застосування теорем у практичних завданнях. Такий підхід сприяє розвитку не лише математичних знань, а й критичного мислення та здатності учнів до самостійної творчої роботи.

2.2. Аналіз змісту і способів подання доведень у чинних підручниках «Алгебри і початків аналізу» профільного рівня

Важливим етапом даного дослідження є аналіз навчальної програми та чинних підручників з алгебри та початків аналізу профільного рівня, оскільки вони визначають зміст, структуру та методологічні підходи до формування в учнів умінь виконувати математичні доведення. Програма задає загальні цілі й вимоги до результатів навчання, визначає місце доказової діяльності у змісті шкільного курсу, тоді як підручники реалізують ці вимоги на практичному рівні, пропонуючи конкретні формулювання теорем, приклади доведень, задачі та вправи, орієнтовані на розвиток логічного мислення. Тому комплексний аналіз цих двох складових освітнього процесу має стати методологічною основою наступного етапу дослідження, присвяченого формуванню умінь доводити у школярів.

Аналіз навчальної програми з алгебри та початків аналізу профільного рівня показав, що у результаті вивчення дисципліни учні зможуть не лише оволодіти обчислювальними навичками, а й зможуть сформулювати уміння логічно

мислити, аргументувати та доводити математичні твердження. Доведення розглядається як невід'ємний компонент математичної діяльності, що пронизує більшість змістових ліній курсу. У програмі акцентується увага на тому, що для школярів важливим є вміння обґрунтовувати висновки, користуватися точною математичною мовою та дотримуватися коректності міркувань. Розвиток таких умінь забезпечується як через опрацювання аксіоматичного підґрунтя математичних понять, так і через використання доведень у курсі алгебри і початків аналізу [21].

У 10 класі доведення вперше з'являється в темі, що стосується функцій, многочленів, рівнянь і нерівностей. Відповідно до програми учні повинні не тільки виконувати обчислення, а й уміти застосовувати метод математичної індукції, обґрунтовувати рівносильність перетворень та користуватися наслідками теореми Безу під час розв'язування алгебраїчних задач. Усе це сприяє формуванню навичок логічного аналізу, уміння пояснювати отримані результати та доводити тотожності.

У розділах, присвячених вивченню тригонометричних функцій, рівнянь та нерівностей, доведення відіграють особливо помітну роль. Учні знайомляться з виведенням тригонометричних формул, обґрунтовують властивості тригонометричних функцій та аналізують загальний вигляд розв'язків тригонометричних рівнянь. Ці елементи сприяють тому, що учень починає сприймати математичний факт не лише як формулу, яку потрібно запам'ятати, а як результат логічної побудови [21].

Найбільш насиченою доказовою складовою є тема, присвячена границі, неперервності та похідній. Тут учні працюють із означенням границі, вивчають властивості неперервних функцій, засвоюють доведення умов зростання та спадання. У межах цієї теми вони також знайомляться з умовами існування екстремумів, обґрунтовують властивості функцій за допомогою першої та другої похідних і використовують похідну як інструмент доведення нерівностей. Розгляд похідної як засобу аналізу функцій формує логічну культуру мислення, необхідну для подальшого вивчення аналізу.

У 11 класі навчання доказових методів продовжується. Вивчення показникових і логарифмічних функцій супроводжується доведенням їхніх властивостей, а також з'ясуванням монотонності цих функцій на основі похідної. Під час вивчення інтегралів учні розглядають формулу Ньютона–Лейбніца та обґрунтовують геометричний зміст визначеного інтеграла, що дозволяє побачити логічний зв'язок між інтегралом і площею чи об'ємом. Елементи комбінаторики та теорії ймовірностей також передбачають доведення формул і наслідків, що випливають із аксіоматики теорії ймовірностей, а також логічне з'ясування властивостей незалежних подій і умовної ймовірності [21].

Завершальний розділ, присвячений рівнянням і нерівностям, систематизує навички доведення. У ньому передбачено обґрунтування рівносильності перетворень, аналіз застосування різних методів розв'язування та пояснення коректності математичних моделей, які використовуються для опису реальних ситуацій. Цей матеріал узагальнює й закріплює вміння логічно доводити твердження, що формувалися в учнів упродовж усього курсу [21].

Наведений аналіз шкільної програми з математики профільного рівня дає змогу зробити висновок, що доведення є системоутворювальним елементом усього курсу алгебри і початків аналізу. Воно не обмежується окремими темами, а інтегровано в усі змістові лінії, що дозволяє поступово й послідовно формувати в учнів уміння логічно міркувати, робити обґрунтовані висновки й аргументувати хід розв'язання задач. Таким чином, програма не лише забезпечує засвоєння учнями певного обсягу математичних знань, але й цілеспрямовано формує культуру раціонального мислення, що ґрунтується на доказовості й логічній послідовності. Це створює необхідні передумови для подальшого успішного вивчення вищої математики, де доведення відіграє провідну роль, а також сприяє розвитку загальної інтелектуальної компетентності учнів, необхідної в сучасному освітньому та професійному середовищі [26; 27].

У процесі формування в учнів уміння будувати математичні доведення важливе значення має не лише засвоєння теоретичних положень і вивчення методичних підходів, але й те, як саме подається матеріал у навчальних

джерелах. Підручники з «Алгебри і початків аналізу» профільного рівня відіграють провідну роль у структуризації змісту навчання, визначаючи логіку викладення матеріалу, типові методи доведень та рівень їх доступності для старшокласників. Саме тому виникає потреба у ґрунтовному аналізі змісту доведень, їхньої побудови та способів подання у сучасних підручниках. Такий аналіз дає змогу виявити, наскільки ефективно ці ресурси сприяють формуванню доказових умінь, чи забезпечують вони поступовість, системність і методичну чіткість, необхідні для оволодіння учнями логічною культурою та математичним мисленням.

Першим об'єктом аналізу було обрано підручник «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу (автори – А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський, М. Якір; 2018 р.) [15]. У передмові автори чітко зазначають, що у процесі даного курсу школярі ознайомляться з низкою важливих теорем. Деякі з них містять повні доведення, а деякі теореми подані без доведень (у тих випадках, коли обґрунтування виходить за межі шкільного курсу) [15, с. 3].

Більшість доведень у підручнику мають аналітичний характер. Вони побудовані як ланцюжки тотожних перетворень, що повністю відповідає категорії аналітичних доведень у класичній класифікації. Такі доведення характерні передусім для розділів, пов'язаних із многочленами, тотожностями та властивостями степеневих виразів.

Характерним прикладом є доведення теореми Безу (теорема 6.2) [15, с. 44], у якому автори застосовують класичну схему: спочатку записують поділ многочлена за схемою ділення з остачею, а потім здійснюють підстановку $x = \alpha$, що дозволяє показати, що саме значення многочлена в точці є шуканою остачею. Таке доведення є коротким, лаконічним і демонструє учням природний зв'язок між формальним оператором ділення та числовим значенням многочлена.

На основі аналітичного методу також доведені властивості коренів n -го степеня (теореми 11.1–11.6) [15, с. 78-80]. Вони укладені у вигляді послідовних маніпуляцій із виразами, що ґрунтуються на базових означеннях та раніше

вивчених властивостях додатних чисел і степеневих функцій. Автори послідовно демонструють, як через прості трансформації можна отримати загальні твердження, що формують основу для подальших узагальнень у 10–11 класах.

До цієї ж категорії належать і доведення, що спираються на властивості неперервності та теореми аналізу, наприклад міркування, пов'язані із застосуванням теорем Больцано–Коші. Формально вони використовують аналітичний апарат, хоча їхня логічна структура поєднує елементи строгих доведень і адаптовані пояснення.

Поряд із цим у підручнику трапляються доведення, що за формою умовиводу належать до індуктивних. Найпоказовішим прикладом є розділ, присвячений математичній індукції. Метод математичної індукції подано в підручнику надзвичайно детально, що відповідає його значенню як одного з ключових інструментів у доведенні тверджень, які мають рекурсивну або послідовну структуру [15, с. 48].

У пункті, присвяченому введенню методу, особливу увагу спрямовано на мотивацію: учням пропонується розглянути суму непарних чисел як наочний приклад твердження, яке природно перевіряється через перехід від k до $k+1$ додатків. У цьому поясненні автори використовують інтуїтивний підхід, формуючи в учнів розуміння «чому» індукція працює, перш ніж наводити формальну структуру.

Після інтуїтивної частини подано строге формулювання правила математичної індукції, яке складається з двох етапів: доведення істинності твердження для базового випадку; доведення істинності переходу від довільного k до $k+1$ [15, с. 50-51]. Така організація матеріалу є методично вивіреною, оскільки спершу забезпечує формування концептуального розуміння, а потім – формальної строгості.

Ще одна група доведень, яка потребує коректного зіставлення з теоретичною класифікацією, – це доведення з геометричною інтерпретацією. У класичній типології такі міркування могли б бути віднесені до «доведень на основі математичних теорій», зокрема до методу геометричних перетворень або

синтетичних доведень. Проте в підручнику для 10 класу вони виконують іншу функцію: їхня роль полягає не у формальному використанні геометричних методів, а у наданні інтуїтивної візуальної опори для аналітичних тверджень. У темах математичного аналізу такі візуальні міркування допомагають пояснити властивості дотичних, екстремумів, опуклості та інших понять, але не виступають як окремий метод доведення у строгому сенсі. Тому їх доцільно розглядати як геометризовану форму аналітичних доведень, яка виконує методичну, а не теоретико-логічну функцію.

Наприклад, теорема Ферма про необхідну умову екстремуму (теорема 39.1) подається через розгляд поведінки графіка функції поблизу точки екстремуму [15, с. 307]. Автори підкреслюють зміну напрямку руху точки по кривій, ілюструючи, що похідна в цій точці має дорівнювати нулю. Такий підхід дозволяє учням інтуїтивно зрозуміти суть твердження ще до знайомства з формальними визначеннями.

У темі «Друга похідна. Поняття опуклості функції» застосовується аналіз різниць ординат за допомогою спеціальної функції $y = f(x)$, а також геометрична побудова дотичної [15, с. 336]. Це дає можливість зіставляти аналітичні ознаки опуклості (через другу похідну) з їхнім геометричним змістом.

Таким чином, геометричні доведення сприяють формуванню глибокого розуміння взаємозв'язку між аналітичними та геометричними властивостями функцій.

Щодо непрямих доведень, доведень від супротивного та логічних структур типу «по частинах», то вони у підручнику 10 класу практично не використовуються. Автори орієнтуються на конструктивні схеми міркування, що відповідає дидактичній доцільності шкільного курсу. Усі подані доведення є прямими або побудовані як послідовний ланцюг логічних кроків, що дозволяє однозначно класифікувати їх як прямі дедуктивні доведення.

У 10 класі тригонометричні функції визначаються з опорою на координатну систему (синус та косинус розглядаються як координати точки одиничного кола), проте у підручнику не використовується координатно-

векторний метод доведення. Координати подані як аналітичний інструмент для визначення функцій, але не як засіб побудови або обґрунтування теорем.

Хоча в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу векторний апарат не вивчається як окрема тема і не формується як універсальний метод доведення, у підручнику профільного рівня він використовується епізодично. Зокрема, при доведенні формул додавання тригонометричних функцій (с. 161) автори звертаються до векторної інтерпретації: розглядаються одиничні вектори, кут між ними та їх координати [10, с. 161]. Такий підхід має пояснювально-ілюстративний характер і спрямований на глибше осмислення тригонометричних співвідношень, а не на формування векторного методу як самостійної логічної техніки доведення. Вектори в цьому випадку виконують роль допоміжного засобу, що поєднує алгебраїчний і геометричний підходи.

Таким чином, при зіставленні загальної методичної класифікації доведень із реальними прикладами з підручника стає очевидним, що автори фактично використовують лише ті типи доведень, які відповідають змісту шкільного курсу: аналітичні, прямі дедуктивні, індуктивні. Інші типи залишаються поза межами підручника, що відповідає його програмним обмеженням і педагогічній логіці викладання матеріалу.

Автори підручника послідовно підкреслюють, що учень має сприймати доведення як природну складову математичного знання. Такий підхід відповідає традиціям математики, де правильність твердження визначається не інтуїтивною переконливістю чи чисельними прикладами, а саме логічною обґрунтованістю.

Попри важливість доказовості, автори свідомо обирають доведення, які відповідають рівню готовності учнів. Не всі теореми подаються з обґрунтуваннями – частина з них опускається у зв'язку з надмірною складністю або необхідністю використання апарату, що виходить за рамки шкільної програми. Такий добір матеріалу має чітку педагогічну логіку: забезпечити доступність теоретичних понять; уникнути перевантаження надмірною формалізацією; не руйнувати інтерес до предмета, дозволяючи учням зосередитися на змістовому розумінні явищ. Таким чином, принцип доступності

не лише полегшує засвоєння матеріалу, але й створює мотиваційну основу для вивчення математичного аналізу в майбутньому.

Важливою особливістю підручника є те, що значну частину доведень пропонується виконати учням самостійно. Така практика відповідає вимогам профільного рівня навчання математики та сприяє формуванню в учнів умінь: відтворювати логічні міркування; застосовувати вивчені методи в нових ситуаціях; встановлювати власні зв'язки між твердженнями; переходити від прикладів до узагальнень.

Наприклад, після наведення ідеї доведення теореми 13.3 («Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному» [15, с. 95]) учням пропонується самостійно довести теореми 13.4–13.7 [15, с. 96-98], використовуючи аналогічну логіку: «Скориставшись ідеєю доведення теореми 13.3, доведіть цю теорему самостійно». Це стимулює: аналітичне опрацювання структури доведення; усвідомлення його ключових кроків та ролі кожного з них; розвиток доказових навичок, необхідних для подальшої математичної освіти. Такий підхід узгоджується з конструктивістською моделлю навчання, у якій знання формується у процесі активної діяльності, а не лише у процесі пасивного сприйняття інформації.

Аналіз змісту підручника «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу профільного рівня показує, що автори особливо ретельно опрацьовують структуру подання доведень. Вони прагнуть сформувати в учнів цілісне уявлення про математичне доведення як логічно організований процес, одночасно забезпечуючи доступність і методичну доцільність. У підручнику поєднано формальні, інтуїтивні й графічні елементи доведення, що відповідає сучасним освітнім підходам до розвитку теоретичного мислення учнів.

Наступним кроком даного дослідження стало проведення аналізу підручника «Алгебра і початки аналізу» для 11 класу профільного рівня (автори – А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський, М. Якір; 2019 р.) [16]. Він показав суттєву зміну методичних підходів до подання доведень порівняно з

матеріалом 10 класу. Якщо у 10 класі акцент робиться на формуванні базової культури доведень – через численні формальні, аналітичні та структуровані доведення – то в 11 класі автори свідомо змінюють акценти відповідно до специфіки змісту математичного аналізу.

У першому пункті (§1, п. 1, с. 6–7) автори одразу зазначають, що «строге означення степеня з дійсним показником і доведення його властивостей виходять за межі шкільної програми» [16, с. 6]. Натомість подано лише загальні міркування, які пояснюють ідею означення через границю послідовностей раціональних наближень. Отже, в цьому розділі фактичні доведення відсутні: матеріал подано у формі інтуїтивних міркувань і базових тверджень, що приймаються без строгого доведення. Це свідчить про зміщення акценту з теоретичної строгості (характерної для підручника 10 класу) на функціональне розуміння поняття: учень має оперувати властивостями степеня, але не зобов'язаний відтворювати повний аналітичний метод доведення.

У розділі «Логарифм і його властивості» підручника для 11 класу (§ 1, п. 4) подані основні властивості логарифма з доведеннями. Ці доведення мають програмний характер і ґрунтуються на означенні логарифма як оберненої до показникової функції та на властивостях степеня. Водночас строгі аналітичні обґрунтування властивостей степеня з дійсним показником не подаються, що зумовлює методичну спрямованість викладу на змістове розуміння, логічне міркування та формування вмінь застосовувати властивості логарифмів у розв'язуванні задач.

Найбільш повноцінні та структуровані доведення містяться у розділі §2 («Інтеграл та його застосування»). Саме тут автори повертаються до строгого доведення фундаментальних тверджень аналізу, приділяючи увагу логічній послідовності. У цьому розділі міститься теорема 11.1 про площу криволінійної трапеції (формула Ньютона-Лейбніца) [16, с. 99]. Вона подана разом з повним доведенням, адаптованим до рівня підготовки учня, але збереженим у формальній структурі. Доведення включає такі етапи:

1. Введення функції $y = S(x)$ як площі криволінійної трапеції на проміжку $x \in [a; b]$.
2. Розгляд приросту Δx при переході від x до $x + \Delta x$.
3. Геометричне наближення приросту площі прямокутником із довжинами сторін Δx і $f(x)$.
4. Перехід до границі $\Delta x \rightarrow 0$, що приводить до рівності $S'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$.
5. Інтегрування та отримання формули
$$F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) = S(b) - S(a) = S(b).$$

Стиль доведення поєднує геометричну інтуїцію та аналітичну строгість, відтворюючи університетську традицію введення означеного інтеграла, але у спрощеному вигляді, зрозумілому для учня профільної школи.

У розділах з комбінаторики та ймовірностей (пункти §3 відповідного параграфа) автори надають: аксіоми теорії ймовірностей (без доведення, як це відповідає природі аксіоматичного означення); короткі обґрунтування комбінаторних формул (перестановок, розміщень, комбінацій); словесно-логічні пояснення змісту формул та правил комбінаторики; інтуїтивне пояснення формул математичного сподівання. Формальних доведень майже немає: матеріал подано у вигляді алгоритмічно-логічних міркувань, які більше спрямовані на засвоєння підрахункових принципів, ніж на аксіоматичну строгість.

Таким чином, у підручнику 11 класу простежується зміна методичної парадигми порівняно з підручником 10 класу:

- зменшено кількість строгих доведень у темах, де теоретичний апарат виходить за межі шкільної програми (ступінь з дійсним показником, логарифм);
- натомість зроблено акцент на інтуїтивних поясненнях, функціональному змісті й умінні застосовувати властивості;
- повні доведення подано лише там, де вони методично значущі та доступні, зокрема у розділі про інтеграл;

- у комбінаториці та ймовірностях подано обґрунтування, а не строгі математичні доведення.

Загалом стиль подання доведень у підручнику 11 класу можна охарактеризувати як прагматично орієнтований, спрямований на зміцнення змістового розуміння та здатності оперувати математичними поняттями, а не на формальне відтворення повних доведень.

Аналіз доказової бази підручника для 11 класу показує, що з усієї загальноприйнятої класифікації математичних доведень у шкільному курсі використовуються лише кілька типів, адаптованих до специфіки математичного аналізу та комбінаторики. Домінуючими у змісті виступають аналітичні та прямі дедуктивні доведення, а також геометризovanі, тобто наочно-графічні, міркування, які відіграють важливу роль у формуванні інтуїтивного розуміння складних понять. Решта класичних методів, зокрема непрямі доведення, індуктивні міркування, векторні, координатні та геометричні методи, у тексті підручника відсутні.

Найхарактернішими прикладами аналітичних доведень є міркування, пов'язані з визначенням інтеграла. Особливо показовим у цьому контексті виступає доведення теореми Ньютона–Лейбніца, подане як Теорема 11.1 на сторінці 100 підручника. У цьому доведенні використано стандартний для математичного аналізу підхід, що включає означення функції площі, аналіз приросту функції, перехід до границі та отримання остаточного результату у вигляді різниці значень первісної. Попри доступність викладу, структура доведення відповідає базовим вимогам формальної строгості, демонструючи зразок аналітичного методу міркування [16, с. 100].

Аналітичний характер мають також доведення у темі комбінаторики. На сторінці 133 подано класичне обґрунтування формули кількості перестановок $P_n = n!$, яке ґрунтується на логічній аргументації щодо підрахунку можливих впорядкувань елементів множини. Доведення подано чітко та послідовно, що відповідає дедуктивному типу міркування.

Усі доведення, подані в підручнику повністю, належать до категорії прямих. У жодному випадку автори не використовують міркування від супротивного чи інші форми непрямих доведень. Це пояснюється як загальною методичною орієнтацією курсу на конструктивні, а не абстрактно-логічні міркування, так і обмеженнями шкільної програми. Дедуктивний характер аргументації проявляється в тому, що кожне доведення формується як послідовний перехід від означень і властивостей до чітко сформульованого висновку. Так побудовано як доведення теореми Ньютона–Лейбніца, так і аналітичні міркування в комбінаторних задачах.

Важливе місце в доведеннях займають геометризovanі, тобто наочні, інтерпретації. У темі «Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл» автори дбають про створення концептуального уявлення про природу визначеного інтеграла, тому графічні елементи відіграють не другорядну, а методично значущу роль. На сторінці 100 наведено рисунки 11.2–11.4, які ілюструють приріст площі, порівняння площі криволінійної фігури з площею прямокутника та мотивують перехід від наближених значень до границі [16, с. 100]. Такі наочні компоненти є не окремим методом доведення, а засобом підсилення аналітичного доведення, властивим шкільному викладанню аналізу. До геометризovаних міркувань можна віднести і виклад принципу Кавальєрі на сторінці 118-119, де на основі рисунків 12.10–12.12 пояснюється рівність площ фігур, хоча повного доведення не наведено, оскільки воно виходить за межі програми [16, с. 118-119].

Інші типи доведень, характерні для геометрії або вищої математики, у підручнику не представлені. Векторний та координатний методи не застосовуються, оскільки курс алгебри та початків аналізу 11 класу зосереджений на аналізі та комбінаторних структурах, а не на геометричних задачах. Математична індукція, яка розглядається в курсі 10 класу, у підручнику для 11 класу не використовується як метод обґрунтування теоретичних тверджень. Методи геометричних перетворень також відсутні з огляду на відсутність відповідних тем.

Таким чином, система доведень у підручнику «Алгебра і початки аналізу» для 11 класу профільного рівня має виразний аналітичний і дедуктивний характер із суттєвим посиленням наочної складової в темах математичного аналізу. Це відповідає методичним вимогам профільного рівня навчання: поєднання строгої аргументації у фундаментальних твердженнях із доступною, інтуїтивно зрозумілою подачею матеріалу там, де надмірна теоретичність була б недоцільною. Підручник забезпечує логічно виважений баланс між теоретичною математичною культурою та педагогічною доцільністю, що робить його ефективним інструментом навчання старшокласників.

Аналіз підручників «Алгебра і початки аналізу» для 10 і 11 класів профільного рівня свідчить про їхню концептуальну єдність і послідовну методичну лінію у поданні доведень. В обох класах автори дотримуються високого рівня наукової коректності, поєднуючи її з доступністю та орієнтацією на вікові й пізнавальні можливості учнів.

Спільною й визначальною рисою є *чітка структурованість доведень*. У підручниках обох класів доведення мають логічно завершену побудову: формулювання умов і означень, послідовне міркування з обґрунтуванням кожного кроку, логічний підсумок та формальне завершення символом «◀». Така організація матеріалу формує в учнів культуру математичного письма, навички логічного мислення та вміння будувати власні доведення.

Важливою методичною особливістю є *поєднання строгих формальних доведень з інтуїтивними та наочними поясненнями*. У 10 класі це проявляється переважно через графічні інтерпретації понять аналізу, які передують строгим міркуванням, тоді як в 11 класі інтуїтивні елементи активно поєднуються з формальними доказами в складніших темах (інтеграл, логарифмічні та степеневі функції). Такий підхід забезпечує поступовий перехід від образного сприйняття до теоретичної строгості.

Для підручника 11 класу більш характерною стає *геометризація доведень*, особливо в темах інтегрального числення, де геометричні образи та графіки виконують не лише ілюстративну, а й пояснювальну функцію. Водночас у 10

класі акцент робиться на формуванні базових аналітичних уявлень і логічних схем доведення.

Обидва підручники демонструють *тісний зв'язок теорії з практикою*: після кожного суттєвого твердження або теореми подаються приклади застосування. Це сприяє глибшому розумінню ролі доведень у розв'язуванні задач і запобігає формальному засвоєнню матеріалу.

Загалом підручники для 10 і 11 класів утворюють *єдину методично продуману систему*, у межах якої поступово ускладнюється зміст, зростає рівень абстракції та розширюється спектр доказових методів. Така наступність забезпечує послідовний розвиток логічного, аналітичного та теоретичного мислення учнів і відповідає сучасним вимогам профільної математичної освіти.

Проведений аналіз змісту та способів подання доведень у чинних підручниках «Алгебра і початки аналізу» профільного рівня для 10 і 11 класів дав змогу встановити, що система доведень, представлена в обох виданнях, має чітку методичну логіку та відповідає сучасним вимогам шкільної математичної освіти. У підручнику 10 класу домінують аналітичні доведення, доповнені індуктивними міркуваннями та геометричними інтерпретаціями, а також доведеннями, що спираються на базові властивості неперервності та елементарні теореми аналізу. У 11 класі структура доведень зазнає певної трансформації: зменшується частка строгих доведень, натомість зростає роль інтуїтивно-графічних пояснень і геометризації матеріалу, особливо в темах математичного аналізу. Водночас саме найбільш фундаментальні твердження, такі як формула Ньютона–Лейбніца, зберігають повноцінну дедуктивну структуру та подаються з дотриманням вимог логічної строгості. У цілому підручники демонструють послідовну й педагогічно виважену систему доказової діяльності, що орієнтована на формування логічного мислення, математичної культури та здатності учнів до осмисленого оперування теоретичним апаратом.

2.3. Методичні рекомендації навчання учнів доведення в курсі «Алгебра і початки аналізу» та їхня апробація

У межах даного дослідження актуалізується проблема цілеспрямованого формування в учнів умінь математичного доведення, що є однією з ключових складових профільного навчання математики в старшій школі. Курс «Алгебра і початки аналізу» вирізняється підвищеною теоретичною насиченістю, значною кількістю означень, тверджень і теорем, засвоєння яких неможливе без належного рівня розвитку доказового мислення учнів.

Аналіз чинних програм і підручників продемонстрував наявність у навчальному матеріалі різноманітних доведень. Проте процес навчання учнів доказової діяльності часто носить фрагментарний характер і зводиться до відтворення готових зразків. За таких умов у школярів недостатньо формуються вміння аналізувати структуру доведення, усвідомлювати логічні зв'язки між його елементами та самостійно будувати міркування. Це зумовлює необхідність розроблення спеціальних методичних рекомендацій, спрямованих на поетапне й системне навчання доведень саме в курсі алгебри і початків аналізу профільного рівня.

Таким чином, у межах даного дослідження постає завдання розробити та обґрунтувати методичні рекомендації навчання учнів доведень у курсі «Алгебра і початки аналізу» профільного рівня, які б забезпечували поступовий перехід від засвоєння готових доведень до самостійної доказової діяльності. Реалізація таких рекомендацій покликана підвищити рівень математичної підготовки учнів, сприяти розвитку їхнього логічного мислення та сформувати стійкі вміння аргументовано обґрунтовувати математичні твердження.

На рис. 2.1 даної роботи були відображені чотири послідовні методичні завдання у методичній системі навчання математичних доведень. Вони відображають поступовий перехід учнів від репродуктивної до продуктивної та творчої діяльності. Йдеться про вивчення готових доведень і формування вміння їх відтворювати; самостійну побудову доведень за аналогією; пошук і виклад

доведень способом, запропонованим учителем; а також самостійний пошук і проведення доведень учнями. Реалізація зазначених завдань потребує чіткої організації навчального процесу та методично виваженого педагогічного супроводу.

Ефективним інструментом реалізації цих чотирьох методичних завдань є система методичних орієнтирів, які структурують діяльність учителя й учнів на кожному етапі роботи з доведенням. До них ми відносимо: актуалізацію опорних знань, демонстрацію зразка доведення, систему завдань для самостійної роботи учнів, методичні рекомендації щодо виконання доведень.

Актуалізація знань забезпечує опору на вже сформовані поняття, означення та раніше вивчені твердження, без яких неможливе усвідомлене сприйняття доведення. Демонстрація доведення виконує зразкову функцію та сприяє формуванню уявлення про логічну структуру міркувань і послідовність аргументації. Завдання для учнів забезпечують поступове включення їх у діяльність з відтворення, модифікації та самостійної побудови доведень, а методичні рекомендації спрямовують процес мислення, запобігаючи формальному засвоєнню матеріалу.

Таким чином, послідовна реалізація чотирьох методичних завдань через систему методичних орієнтирів створює умови для цілеспрямованого формування в учнів умінь математичного доведення, розвитку логічного мислення та поступового набуття досвіду самостійної доказової діяльності, що є важливою складовою профільного навчання математики.

На основі матеріалу алгебри і початків аналізу 10 класу профільного рівня розглянемо, яким чином можна реалізувати запропоновану систему методичних орієнтирів.

Як приклад розглянемо теорему про симетрію графіка парної функції, що подається в підручнику «Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень» (А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський, М. Якір, 2018) [15].

Теорема 2.1. *Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції* (параграф 2 «Функція та її властивості») [15, с. 17].

Актуалізація знань. На етапі актуалізації знань учитель організовує повторення базових понять, необхідних для вивчення нового матеріалу.

Учитель ставить учням такі запитання:

- Що називається функцією?
- Що таке область визначення функції? Чому вона є важливою для аналізу властивостей функції?
- Яку функцію називають парною? Сформулюйте означення.
- Які приклади парних функцій ви можете навести з курсу 7–9 класів?
- Чи є функція $y=x^2$ парною? Обґрунтуйте відповідь.
- Чи буде функція $y=x^3$ парною? Чому?

Далі вчитель звертає увагу на аналітичний запис властивості парної функції та запитує:

- Що означає рівність $f(-x)=f(x)$?
- Для яких значень x має виконуватися ця рівність?

Переходячи до геометричного змісту, учитель ставить проблемні запитання:

- Як пов'язані точки з абсцисами x і $-x$ на координатній площині?
- Яку симетрію ми спостерігаємо, якщо значення функції в цих точках однакові?
- Як, на вашу думку, рівність $f(-x)=f(x)$ відображається на вигляді графіка функції?

Таким чином учитель підводить учнів до усвідомлення зв'язку між аналітичним означенням парної функції та симетрією її графіка відносно осі ординат, створюючи необхідну опору для сприйняття нового твердження та підготовки до аналізу його доведення.

Демонстрація доведення. Демонстрація доведення здійснюється вчителем за підручником [15, с. 17]. Учитель розглядає довільну точку $M(a;b)$, що належить графіку парної функції, і показує, що симетрична їй точка $M_1(-a;b)$ також належить цьому графіку. Ключовим моментом доведення є використання означення парної функції та логічний перехід від аналітичного запису до

геометричного висновку. Під час пояснення вчитель акцентує увагу на структурі доведення: формулювання умови, використання означення, логічний висновок. Таким чином формується вміння учнів відтворювати готові доведення та усвідомлювати їх логіку.

Завдання для учнів. Після демонстрації доведення доцільно запропонувати учням систему завдань різного рівня складності. На початковому етапі учні відтворюють доведення теореми за поданим планом або з опорою на текст підручника. Далі пропонуються завдання на застосування теореми, зокрема вправи 2.9, 2.11 [15, с. 18–19], у яких потрібно встановити парність функції або довести її аналітично.

На наступному етапі учні отримують завдання на самостійний пошук доведення за аналогією, наприклад довести теорему 2.2 про симетрію графіка непарної функції [15, с. 17], що прямо передбачено підручником як самостійна робота учнів.

Методичні рекомендації. У процесі роботи з даною теоремою важливо не обмежуватися формальним заучуванням твердження. Учитель має спрямовувати увагу учнів на взаємозв'язок алгебраїчного запису та геометричної інтерпретації функції. Доцільно використовувати графічні ілюстрації та навідні запитання, що стимулюють учнів до самостійних висновків. Особливу методичну цінність має поступовий перехід від відтворення готового доведення до самостійного пошуку доведення аналогічного твердження, що відповідає загальній логіці формування умінь математичного доведення в старшій школі.

Наступною розглянемо теорему 13.3 [15, с. 95], подану в підручнику «Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень» (А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський, М. Якір, 2018).

Теорема. Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Актуалізація знань.

На етапі актуалізації знань учитель організовує повторення понять рівносильних рівнянь, властивостей степеневих функцій непарного степеня, а також актуалізує знання про монотонність і оборотність функцій.

Учитель ставить учням такі запитання:

- Які рівняння називаються рівносильними?
- Що означає, що множина розв'язків рівняння не змінюється?
- Наведіть приклади рівносильних перетворень рівнянь, відомих вам із попередніх класів.
- Чи завжди піднесення обох частин рівняння до степеня є рівносильним перетворенням? За яких умов?

Далі вчитель переходить до повторення властивостей степеневих функцій і запитує:

- Який вигляд має степенева функція непарного степеня?
- Якими властивостями володіє функція $y=x^3$? А функція $y=x^5$?
- Що означає, що функція є строго монотонною на всій числовій прямій?
- Що означає оборотність функції?

Учитель акцентує увагу на загальному вигляді функції $y = x^{2k-1}, k \in \mathbb{N}$, та ставить уточнювальні запитання:

- Чому ця функція є строго зростаючою на всій числовій прямій?
- Які наслідки має ця властивість для розв'язування рівнянь виду $x^{2k-1} = a$?

Для закріплення вчитель пропонує прості приклади рівнянь і організовує обговорення:

- Чи є рівносильними рівняння $x^3=8$ і $x=2$? Чому?
- Які перетворення було виконано?
- Чи зміниться множина розв'язків, якщо до обох частин рівняння застосувати функцію, що є строго монотонною та оборотною?

Таким чином учитель підводить учнів до усвідомлення зв'язку між властивостями степеневих функцій непарного степеня та коректністю

рівносильних перетворень рівнянь, створюючи необхідну основу для подальшого вивчення нового матеріалу.

Демонстрація доведення. Доведення теореми демонструється вчителем як логічно завершений зразок міркувань. Учитель показує, що рівняння $f(x)=g(x)$ і рівняння $(f(x))^{2k-1} = (g(x))^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, є рівносильними, оскільки піднесення до непарного степеня є оборотним перетворенням. Акцент робиться на тому, що саме непарність степеня гарантує збереження рівносильності, на відміну від піднесення до парного степеня.

Після доведення розглядається приклад розв'язування ірраціонального рівняння $(\sqrt{3x-4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$, у якому змінна міститься під знаком кореня. Учитель демонструє, що піднесення обох частин рівняння до непарного степеня дає рівносильне рівняння, яке значно простіше розв'язати.

Далі в підручнику подано теореми 13.4, 13.5, 13.6, 13.7 без доведення. Учням пропонується, спираючись на ідею доведення теореми 13.3, самостійно довести ці твердження, аналізуючи, за яких умов піднесення до степеня зберігає рівносильність рівнянь [15].

Завдання для учнів. Після викладу теоретичного матеріалу та доведення теореми 13.3 у підручнику пропонується система вправ, спрямована на поетапне формування вмінь розв'язувати ірраціональні рівняння із застосуванням піднесення обох частин до степеня.

На початковому етапі учням пропонуються типові вправи репродуктивного характеру, у яких необхідно застосувати безпосередньо теорему 13.3: піднести обидві частини рівняння до непарного степеня та розв'язати отримане рівносильне рівняння. Такі завдання сприяють закріпленню розуміння того, що піднесення до непарного степеня не змінює множини розв'язків [15].

Наступна група завдань має частково-пошуковий характер. У них учні повинні самостійно визначити доцільність використання піднесення до степеня, виконати відповідні перетворення та здійснити перевірку отриманих розв'язків.

Це формує вміння аналізувати структуру рівняння та усвідомлено застосовувати теоретичні твердження.

Окрему роль відіграють завдання, у яких рівняння містять кілька радикалів або складні алгебраїчні вирази. Такі вправи спрямовані на розвиток навичок логічного мислення, уважності до області допустимих значень і контролю правильності рівносильних перетворень.

Загалом система завдань після теоретичного матеріалу вибудована за принципом поступового ускладнення – від відтворення способу дій за зразком до завдань, що потребують самостійного аналізу, обґрунтування та узагальнення. Такий підхід забезпечує глибоке засвоєння теореми 13.3 та створює основу для подальшого вивчення ірраціональних рівнянь.

Методичні рекомендації. Рекомендується звертати особливу увагу учнів на відмінність між піднесенням до парного і непарного степеня, формуючи вміння свідомо обирати перетворення рівняння. Доцільно залучати учнів до коментування кожного кроку розв’язання та аналізу можливих помилок.

Як приклад розглянемо основну тригонометричну тотожність, подану в підручнику «Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень» (А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський, М. Якір, 2018). Теорема розглядається у § 3 «Тригонометричні функції» [15, с. 156].

Теорема (основна тригонометрична тотожність):

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Актуалізація знань. На етапі актуалізації знань учитель організовує повторення означень синуса і косинуса гострого кута в прямокутному трикутнику, а також основних властивостей прямокутного трикутника.

Учитель ставить учням такі запитання:

- Що називається синусом гострого кута в прямокутному трикутнику?
- Що називається косинусом гострого кута?
- Які елементи прямокутного трикутника беруть участь у цих означеннях?

– Чи можуть значення синуса або косинуса гострого кута перевищувати одиницю? Чому?

Далі вчитель актуалізує знання про теорему Піфагора:

- Сформулюйте теорему Піфагора.
- Яку роль відіграє теорема Піфагора у встановленні зв'язку між сторонами прямокутного трикутника?
- Як за допомогою цієї теореми можна виразити одну сторону трикутника через дві інші?

Переходячи до проблемного запитання, учитель пропонує учням поміркувати:

- Чи залежать значення $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ від розмірів конкретного трикутника чи лише від величини кута?
- Чи можна, використовуючи лише означення синуса, косинуса та теорему Піфагора, встановити зв'язок між $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ одного й того самого кута?
- Яким, на вашу думку, може бути цей зв'язок і чи буде він універсальним для всіх гострих кутів?

Таким чином учитель створює проблемну ситуацію, яка мотивує учнів до усвідомленого сприйняття нового твердження та готує їх до подальшого аналізу його доведення.

Демонстрація доведення. Демонстрація доведення здійснюється вчителем як зразок логічно послідовних міркувань. Учитель показує, що координати будь-якої точки одиничного кола задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Далі вчитель нагадує учням означення тригонометричних функцій через одиничне коло та пояснює, що при повороті точки $P_0(1;0)$ на кут α одержуємо точку $P(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Акцент робиться на тому, що значення $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$ безпосередньо є координатами точки на одиничному колі, а, отже, їх можна підставити в рівняння кола. Учитель виконує підстановку та послідовно коментує кожен крок, підводячи учнів до рівності $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. Особлива увага звертається на те, що кут α вибрано довільно, тому отримана рівність є тотожністю і справджується для будь-якого значення аргументу [15].

Далі, на основі використання основної тригонометричної тотожності, автори підручника демонструють існування залежності між тангенсом і косинусом, а також між котангенсом і синусом:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Завдання для учнів. Після демонстрації доведення учням пропонується приклад розв'язання завдань, де необхідно застосувати основну тригонометричну тотожність (приклад 1, сторінка 157). Далі виконуються вправи [15, с. 158–161], у яких необхідно використати основну тригонометричну тотожність для обчислення значень тригонометричних функцій, а також інші співвідношення між тригонометричними функціями, які були виведені на основі неї.

Методичні рекомендації. Методично важливо заохочувати учнів до пояснення кожного кроку доведення власними словами, що сприяє розвитку математичного мовлення. Поступовий перехід від відтворення готового доведення до самостійного виведення нових тотожностей забезпечує реалізацію послідовних методичних завдань навчання доведень у курсі тригонометрії.

Як приклад розглянемо теорему про похідну суми. Теорема розглядається у підручнику *«Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень»* (А.Г. Мерзляк та ін., 2018) [15, с. 292].

Теорема: У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Коротко говорять: похідна суми дорівнює сумі похідних.

Використовують спрощений запис: $(f + g)' = f' + g'$.

Актуалізація знань. На етапі актуалізації знань учитель організовує повторення означення похідної функції в точці, поняття диференційовності, а також раніше вивчених властивостей границь. Доцільно актуалізувати вміння

учнів знаходити похідні простих функцій та обчислювати границі, використовуючи їх основні властивості. Це створює необхідну теоретичну основу для сприйняття нового твердження.

Демонстрація доведення. Учитель пропонує розглянути довільну точку x_0 , у якій функції $f(x)$ і $g(x)$ є диференційовними, та нагадує означення похідної через границю відношення приросту функції до приросту аргументу. Далі вчитель показує, як знаходиться приріст суми функцій у точці x_0 , послідовно записуючи приріст кожного доданка. Акцент робиться на поданні приросту суми як суми приростів окремих функцій. Учитель звертає увагу учнів на перехід до відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ і пояснює, що границя цього відношення визначає похідну функції в точці. Особливий акцент робиться на використанні властивості границі суми: якщо функції f і g диференційовні в точці x_0 , то існують відповідні границі для їхніх відношень приростів. Учитель підкреслює, що завдяки цій властивості границю суми можна подати як суму границь, у результаті чого отримується рівність $f'(x_0) + g'(x_0)$. На завершальному етапі вчитель формулює висновок: функція $y = f(x) + g(x)$ є диференційовною в точці x_0 , а її похідна в цій точці дорівнює сумі похідних доданків.

Завдання для учнів. Після демонстрації доведення учням пропонується розв'язати вправи на знаходження похідних сум функцій, спочатку за зразком, а згодом – самостійно. Завдання добираються так, щоб учні застосували теорему в стандартних ситуаціях, а також у поєднанні з раніше вивченими правилами диференціювання. Це сприяє закріпленню нового теоретичного матеріалу та формуванню обчислювальних навичок.

Методичні рекомендації. Рекомендується під час пояснення активно залучати учнів до аналізу кожного етапу доведення, ставити запитання проблемного характеру та пропонувати передбачити наступний крок міркувань. Доцільно поєднувати фронтальну роботу з індивідуальними завданнями, що дозволяє врахувати рівень підготовки учнів і сприяє глибшому усвідомленню властивостей похідної.

Розроблені методичні рекомендації були апробовані в освітньому процесі під час вивчення курсу «Алгебра і початки аналізу» у 10 класі профільного рівня. Участь у проведенні експериментального дослідження взяли 28 учнів. Апробація здійснювалася впродовж вивчення тем «Функція та її властивості», «Ірраціональні рівняння», «Тригонометричні функції», «Похідна та її властивості», що містять значну кількість теоретичних тверджень і доведень.

У процесі апробації навчання математичних доведень організовувалося відповідно до запропонованої системи методичних орієнтирів: актуалізації опорних знань, демонстрації зразка доведення, виконання системи завдань різного рівня складності та використання методичних рекомендацій, спрямованих на поетапне формування доказових умінь. Особлива увага приділялася поступовому переходу учнів від відтворення готових доведень до самостійного пошуку й обґрунтування математичних тверджень.

Для оцінювання результативності апробації використовувалися такі показники:

- уміння учнів відтворювати доведення з опорою на логічний план;
- здатність пояснювати окремі кроки доведення та встановлювати причинно-наслідкові зв'язки між ними;
- уміння застосовувати вивчені ідеї доведень у нових навчальних ситуаціях;
- готовність учнів до самостійної побудови доведень за аналогією.

Для оцінювання сформованості вмінь здійснювати математичні доведення було визначено критерії та рівні сформованості, а також проведено вхідну та підсумкову діагностику.

У межах дослідження було виділено такі критерії оцінювання сформованості вмінь математичного доведення:

1. Розуміння структури доведення (уміння виділяти умову, твердження, хід міркувань і висновок).
2. Логічна послідовність міркувань (здатність обґрунтовувати кожний крок доведення).

3. Усвідомлене використання означень і теорем.
4. Самостійність у побудові доведення.
5. Математична коректність і мовлення.

На основі зазначених критеріїв було визначено три рівні сформованості вмінь математичного доведення:

- *низький рівень* – учні відтворюють доведення фрагментарно, без розуміння логічних зв'язків, допускають суттєві помилки або не можуть пояснити хід міркувань;
- *середній рівень* – учні здатні відтворити доведення за зразком або планом, пояснити окремі кроки, але відчують труднощі під час самостійної побудови доведень;
- *високий рівень* – учні усвідомлено аналізують структуру доведення, логічно обґрунтовують міркування, здатні самостійно будувати доведення або знаходити їх за аналогією.

Результати вхідної діагностики показали, що на початку експерименту: низький рівень сформованості вмінь математичного доведення мали 46,43% учнів; середній рівень – 39,29% учнів; високий рівень – лише 14,28% учнів (рис. 2.4).

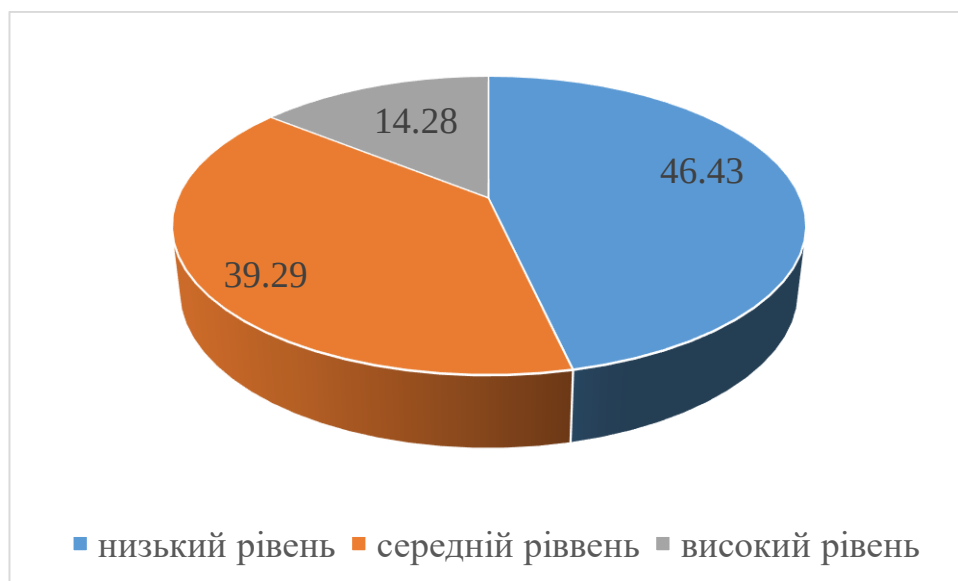


Рис. 2.4. Результати вхідної діагностики сформованості вмінь математичного доведення

У процесі того, як з учнями використовувалися методичні рекомендації щодо навчання їх доведенням в курсі «Алгебра і початки аналізу», нами проводилося спостереження за їх навчальною діяльністю. Учні більш усвідомлено підходили до аналізу математичних тверджень, частіше використовували коректну математичну аргументацію, виявляли вміння прогнозувати хід доведення та критично оцінювати його логічну завершеність.

Після впровадження системи методичних орієнтирів і цілеспрямованої роботи з доведеннями було повторно проведено дослідження рівнів сформованості вмінь математичного доведення. Його результати продемонстрували наявність позитивної динаміки: частка учнів з низьким рівнем зменшилася до 21,43%; кількість учнів із середнім рівнем становила 46,43%; кількість учнів з високим рівнем зросла до 32,14% (рис. 2.5).

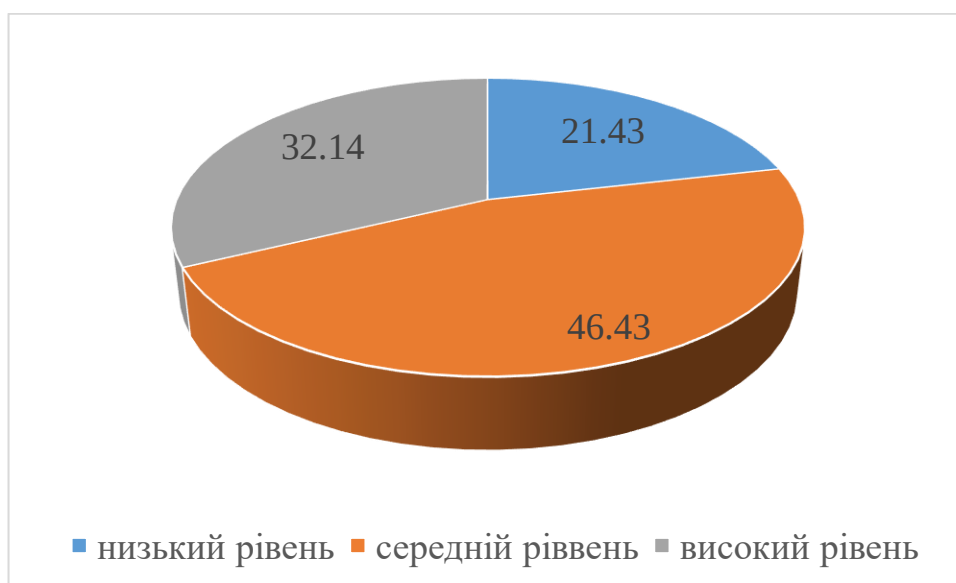


Рис. 2.5. Результати вихідної діагностики сформованості вмінь математичного доведення

Особливо помітні зміни було зафіксовано в уміннях учнів: пояснювати логіку готових доведень; застосовувати ідею доведення в нових навчальних ситуаціях; самостійно будувати доведення за аналогією (наприклад, при переході від доведення властивостей парної функції до непарної).

Отримані кількісні показники переконливо підтверджують ефективність запропонованих методичних рекомендацій навчання учнів математичних доведень у курсі «Алгебра і початки аналізу». Позитивна динаміка у зменшенні частки учнів із низьким рівнем сформованості доказових умінь та зростанні кількості учнів із середнім і високим рівнями свідчить про результативність системного й поетапного підходу до організації навчання.

Систематичне використання актуалізації опорних знань забезпечує свідоме включення учнів у процес доведення та створює необхідну логічну основу для сприйняття нових тверджень. Демонстрація зразка доведення сприяє формуванню в учнів уявлення про структуру доказу, логіку міркувань і способи аргументації, що є необхідною умовою переходу від репродуктивної до продуктивної діяльності. Поетапна система завдань, побудована за принципом поступового ускладнення, забезпечує розвиток умінь аналізувати, відтворювати та самостійно будувати доведення, а методичний супровід учителя запобігає формальному засвоєнню матеріалу та сприяє усвідомленню кожного кроку міркувань.

У сукупності зазначені методичні прийоми сприяють не лише підвищенню рівня сформованості доказових умінь учнів профільної школи, а й розвитку їхнього логічного, аналітичного та критичного мислення, вміння аргументовано відстоювати власну позицію та коректно використовувати математичну мову. Це підтверджує доцільність упровадження запропонованих методичних рекомендацій у практику навчання математики старшої школи.

ВИСНОВКИ

Важливе місце в сучасній математичній освіті посідає вміння будувати математичні доведення. Особливого значення воно набуває в курсі алгебри і початків аналізу, адже це важливий чинник формування логічного мислення та математичної культури учнів. Результати дослідження, присвяченого аналізу підходів до навчання доведень, дозволило сформулювати загальні висновки.

Відповідно до *першого завдання* розглянуто сутність поняття «доведення». Розглянуті історичні аспекти розвитку методів доведення дозволили простежити еволюцію математичної аргументації – від інтуїтивних міркувань давніх цивілізацій до формування строгих логічних структур, які стали основою сучасної математики. Це дало можливість глибше усвідомити природу доведення як ключового методу наукового пізнання та виявити закономірності, що визначають його побудову. Визначені основні типи математичних доведень, які зустрічаються у шкільному курсі математики. Проаналізовано їхню роль у навчанні та особливості застосування, визначено, що їхнє цілеспрямоване поєднання дозволяє формувати цілісне розуміння математичних тверджень. Показано, що доведення виступають не лише інструментом обґрунтування математичних тверджень, а й ефективним засобом формування вміння аналізувати умови задачі, будувати послідовні міркування, узагальнювати результати та робити обґрунтовані висновки.

Відповідно до *другого завдання* розглянуті методичні підходи щодо навчання доведень у курсі алгебри і початків аналізу. Виділено основні етапи формування в учнів вміння доводити математичні твердження. Першим етапом визначено пропедевтику, під час якої створюються передумови для подальшого оволодіння доведеннями: формуються базові логічні уявлення, вміння аналізувати умови задачі та робити висновки. Другим етапом є навчання школярів працювати з готовими доведеннями, що передбачає їх осмислення, відтворення та аналіз структури математичної аргументації. Третім етапом виступає формування в учнів вміння самостійно знаходити та будувати

доведення, що є найбільш складною, але водночас найбільш важливою складовою методики.

У рамках дослідження також визначено етапи роботи над теоремою, які забезпечують системне й послідовне опанування доведень: актуалізація опорних знань, мотивація вивчення нового матеріалу, опрацювання формулювання теореми, побудова рисунка та короткого запису умови, аналіз і виконання доведення, первинне закріплення та застосування теореми з визначенням її ролі в курсі математики. Таким чином, здійснений аналіз дозволив окреслити цілісну систему навчання доведень у курсі алгебри і початків аналізу та визначити ефективні методичні підходи до формування в учнів умінь логічної аргументації.

Відповідно до *третього завдання* проаналізовано навчальну програму з математики для учнів 10-11 класів та зміст і способи подання доведень у чинних підручниках «Алгебри і початків аналізу» профільного рівня. Визначено, які типи доведень використовують автори цих підручників, а також охарактеризовано ключові методичні особливості їх подання. Здійснений аналіз дав змогу виокремити основні параметри організації доказової діяльності, що визначають методичну цінність та педагогічну спрямованість навчального матеріалу. Проведене дослідження змісту та структури доведень показало, що система доведень, представлена в підручниках, має чітку методичну логіку та відповідає сучасним вимогам шкільної математичної освіти. Автори створюють цілісну та послідовну систему роботи з доведеннями, яка спрямована на формування в учнів логічного мислення, математичної культури та здатності до осмисленого оперування теоретичними поняттями. У цілому підручники демонструють педагогічно виважений підхід до подання доведень, що сприяє ефективному розвитку умінь математичної аргументації.

Відповідно до *четвертого завдання* розроблені методичні рекомендації навчання учнів доведень в курсі «Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень», які ґрунтуються на запропонованій системі методичних орієнтирів, що забезпечує цілісну організацію діяльності вчителя й учнів на кожному етапі роботи з доведенням. Зазначена система спрямована не лише на засвоєння

конкретних доведень, а й на формування в учнів уміння логічно міркувати, аналізувати математичні твердження та самостійно будувати докази.

Запропоновані методичні орієнтири структурують процес навчання доведень і охоплюють такі взаємопов'язані компоненти: *актуалізацію опорних знань*, що створює необхідне теоретичне підґрунтя для сприйняття нового матеріалу; *демонстрацію зразка доведення*, яка виступає еталоном логічно впорядкованих міркувань і формує уявлення учнів про структуру математичного доказу; *систему завдань для самостійної роботи учнів*, спрямовану на поступовий перехід від відтворення готових міркувань до самостійного доведення тверджень; а також *методичні рекомендації щодо виконання доведень*, які допомагають учням усвідомлено планувати хід доказу, добирати необхідні твердження та аргументувати кожен крок.

Реалізація такої системи методичних орієнтирів у навчальному процесі сприяє поетапному формуванню в учнів умінь і навичок доведення, забезпечує наступність між окремими етапами навчання та підвищує рівень їхньої математичної культури загалом.

Відповідно до *п'ятого завдання* описані результати апробації окремих положень дослідження. Апробація запропонованих методичних рекомендацій підтвердила їхню ефективність у формуванні в учнів умінь математичного доведення в курсі «Алгебра і початки аналізу» профільного рівня. Запропонована система методичних орієнтирів може бути рекомендована для використання в практиці роботи вчителів математики старшої школи з метою підвищення рівня логічної культури та математичної підготовки учнів.

Перспективи подальших досліджень полягають у створенні цифрових і інтерактивних ресурсів, які підтримували б навчання доведень у змішаному чи дистанційному форматі, адже в умовах, коли велика частина закладів середньої освіти в Україні працює дистанційно у зв'язку з бойовими діями, окупацією територій та ризиками для безпеки, це б дозволило забезпечити безперервність навчального процесу та підвищити ефективність засвоєння способів доведення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акуленко І. А., Максименко Т. І. Навчання учнів доведень теорем (погляд учителів). *Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького*. Серія: «Педагогічні науки». 2017. № 13-14. С. 7–15.
2. Бевз Г. П. *Методи навчання математики*. Х. : Видавнича група «Основа», 2003. 96 с.
3. Бевз Г. П. *Моя методика математики*; упоряд. і відп. редактор В.О. Тадесєв. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2021. 584 с.
4. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики. *Математика в школі*. 2007. №7. С. 3–6.
5. Волянська О. Є. Задачі на дослідження в курсі алгебри і початків аналізу в умовах профільного навчання. *Математика в школі*. 2011. №7–8. С. 45–47.
6. Грищенко Г. О. Навчально-дослідницька діяльність у процесі навчання алгебри і початків аналізу та її структура. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2020»*: матеріали III Міжнародної дистанційної науково-методичної конференції, квітень-травень 2020 р., м. Суми. С. 22–24.
7. Державний стандарт базової середньої освіти: постанова Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF> (дата звернення: 15.10.2025).
8. Колесник Д. Методичні підходи до навчання доведень у курсі алгебри і початків аналізу старшої школи // *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2025 Форум молодих дослідників»* : матеріали VI Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (м. Суми, 28 листопада 2025 р.). 2025. С. 35-36.

9. Концепція «Нова українська школа»: схвалена Колегією МОН 27.10.2016 р. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Book-ENG.pdf> (дата звернення: 10.09.2025).

10. Кугай Н. В. Розвиток умінь старшокласників доводити твердження у процесі вивчення алгебри і початків аналізу. Автореф. дис.... канд. пед. наук: 13.00.02 «Теорія та методика навчання математики». Київ: Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. 2007. 18 с.

11. Кугай Н. В. Функції задач на доведення у шкільному курсі математики. *Дидактика математики: проблеми і дослідження* : Міжнародний збірник наукових робіт. 2010. Вип. 34. С. 77–81.

12. Кудінов М. В. П'ять постулатів геометрії Всесвіту: «Начала» Евкліда Александрійського і математика досконалості. Zenodo. 2025. 30 с.

13. Лов'янова І. В. Формування компонентів логічного мислення у процесі навчання учнів доведенню теорем. *Наукові записки*. Випуск 82. Частина 2. Серія: Педагогічні науки. Кіровоград, 2009. С. 45–50.

14. Лутфуллін М. Проблема взаємозв'язку індукції та дедукції в історії математики і математичної освіти. *Педагогічні науки* : зб. наук. праць / гол. ред. М. І. Степаненко ; Полтав. нац. пед. ун-т імені В. Г. Короленка. Полтава, 2018. Вип. 72. С. 103–108.

15. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 400 с.

16. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 352 с.

17. Методика навчання математики в поняттях, схемах і таблицях : навчально-методичний посібник / уклад. Л. А. Благодир. Умань : ВПЦ «Візаві» 2018. 144 с.

18. Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Методологія математики», модуль: Загальнонаукові методи пізнання в математиці. Одеса : Університет Ушинського, 2024. 30 с.

19. Мислення, пізнання, навчання: синергія взаємодії : посібник / За заг. ред. М.В. Ліпіна. Київ : Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2017. 125 с.

20. Муранова Н. П., Баришовець П. П., Горюнов А. С. Елементи математики : навч. посібник. К. : НАУ, 2016. 68 с.

21. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 19.10.2025).

22. Нак М.М. Співвідношення алгоритмічного та евристичного підходів при розв'язуванні алгебраїчних задач. Міжнародний збірник наукових робіт «Дидактика математики: проблеми і дослідження». 2005. Вип. 24. С. 212–217.

23. Недялкова К. В. Формування складника методичної компетентності майбутніх учителів математики щодо навчання учнів доводити математичні твердження. URL: <https://ps.journal.kspu.edu/index.php/ps/article/view/4315/3813> (дата звернення: 23.10.2025).

24. Недялкова К. В., Іванова С. В., Тумбрукакі А. В. Методика навчання здобувачів середньої освіти доводити математичні твердження: навчальний посібник з дисципліни «Методика навчання математики» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальностей: А4 Середня освіта (Математика. Інформатика), А4 Середня освіта (Математика. Англійська мова), А4 Середня освіта (Фізика. Математика). Одеса: Університет Ушинського, 2025. 152 с.

25. Пешкова О. М. Методичні засади розвитку математичної мови учнів у процесі вивчення курсу алгебри та початків аналізу. Суми: СумДПУ, 2020. 128 с.

26. Про освіту : Закон України від 01.07.2014 р. № 1556-VII. Дата оновлення: 28.09.2018. URL:<http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1556-18> (дата звернення: 15.11.2025).

27. Про освіту : Закон України від 31.10.2025 р. № 2145-VIII. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19/conv#n3> (дата звернення: 15.11.2025).

28. Решетова Е. Е. Математика і освіта в епоху античності. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. 2011. №2. С. 32–37.

29. Розуменко А. О. Формування у майбутніх учителів математики вмінь доводити теореми. *Фізико-математична освіта*, вип. 2019. 3(21). с. 121–126.

30. Семенець С. П. Навчальне моделювання методів доведення в шкільному курсі математики. *Математика в школі*. 2006. №9. С. 12–16.

31. Семенець С. П. Щодо особливостей навчання курсу алгебри і початків аналізу в загальноосвітній школі. *Матеріали всеукраїнської конференції «Актуальні проблеми вивчення природничо-математичних дисциплін у загальноосвітніх навчальних закладах України»*. URL: <http://eprints.zu.edu.ua/id/eprint/20189> (дата звернення: 15.11.2025).

32. Семенець С., Чугунова О. Розвиток математичних здібностей старшокласників у навчанні алгебри і початків аналізу: реалізація задачного підходу. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія: «Педагогіка. Соціальна робота». 2019. (1(44)). С. 169–173.

33. Скафа О. І. Теоретико-методичні основи формування прийомів евристичної діяльності при вивченні математики в умовах впровадження сучасних технологій навчання. Дис.... д-ра пед. наук: 13.00.02 «Теорія та методика навчання математики». Донецьк: Донецький національний університет. 2004. 479 с.

34. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. 2-ге вид., доп. і переробл. К. : Вища шк., 2006. 582 с.

35. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль: Підручники і посібники. 2004. 240 с.

36. Чугунова О. В. Психолого-педагогічні умови розвитку математичних здібностей старшокласників. *Фізико-математична освіта*. 2024. Вип. № 3 (17). С. 99–103.

37. Швець В. О. Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі : курс лекцій. Київ : Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2024. 504 с.