Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г.Шевченка

Природничо-математичний факультет

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітнього ступеня «магістр»

на тему:

«Розв’язування прикладних задач в курсі математики профільної школи»

Виконав:

студент 2 курсу, групи 61,

спеціальності

014 Середня освіта (Математика)

Кислий Владислав Валерійович

Науковий керівник:

к.п.н., доцент Соколенко Л.О.

Чернігів – 2024

Роботу подано до розгляду «______» ____________________ 20___ року.

Студент ____________________ ________________________

(підпис) *(прізвище та ініціали)*

Науковий керівник ____________________ ________________________

(підпис) *(прізвище та ініціали)*

Рецензент ____________________ ________________________

(підпис) *(прізвище та ініціали)*

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики.

Протокол № _____ від «___»________________20___ року.

Студент(ка) допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри ________________ ____________________________

(підпис) *(прізвище та ініціали)*

АНОТАЦІЯ

Кислий, В.В. Розв'язування прикладних задач в курсі математики профільної школи. Кваліфікаційна робота освітнього ступеня «магістр». На правах рукопису. Спеціальність – 014 Середня освіта (Математика). Чернігів, 2024.

У кваліфікаційній роботі розглянуто теоретичні положення щодо реалізації прикладної спрямованості навчання курсів алгебри і початків аналізу та геометрії старшої школи. Розкрито сутність понять «прикладна спрямованість навчання математики», «прикладна задача», «математичне моделювання», визначено вимоги до підбору прикладних задач та їх розв'язування. Здійснено аналіз чинних програм та підручників з математики на предмет включення прикладних задач до різних тем курсів алгебри і початків аналізу та геометрії. Представлено аналіз проблеми дослідження в ЗЗСО та ЗФПО.

Результатом проведеного дослідження стала розроблена система прикладних задач, призначених для навчання курсу математики старшої школи та методика навчання учнів їх розв'язування. Ефективність запропонованої в роботі методики перевірена під час проведення окремих етапів педагогічного експерименту.

Ключові слова: прикладна спрямованість навчання математики, прикладна задача, математичне моделювання, методика розв'язування прикладних задач.

SUMMARY

Kyslyi, V.V. Solving applied problems in the mathematics specialised school's course. Qualification work of the educational degree «master». On the rights of the manuscript. Specialty – 014 Secondary Education (Mathematics) – Chernihiv, 2024.

In the qualified project the theoretical positions about the realization of algebra courses studying's applied direction and the beginnings of analysis and high school's geometry were considered. The meaning of “applied direction to mathematics studying”, “applied problem” and “mathematics modeling” was explained and the requirements of applied problems’ selection and solving was defined. The analysis of certain mathematics programs and student books was done in order to find applied problems of different algebra courses topics and the beginnings of analysis of geometry in student books and programs. The analysis of research problem is demonstrated in Institute of General Secondary Education and Institute of Professional Pre-Higher Education.

The result of research was creating the system of applied problems for the high school mathematics course studying and creating a method of student’s problem solving studying. The efficiency of proposed method was proved during the certain stages of teacher’s experiment.

Key words: applied direction of studying mathematics, applied problem, mathematics modeling, method of solving applied problems.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Починаючи з 2018-2019 навчального року в освіті набула чинності реформа, під назвою нова українська школа (НУШ), яка передбачає створення школи, де діти будуть навчатися через діяльність, «у якій буде приємно навчатись і яка даватиме учням не тільки знання, а й вміння застосовувати їх у житті» [43].

Освітня траєкторія здійснювала перебудову поступово. Спочатку питання було поставлено на рівні базової школи. У 2016 році Л.М. Гриневич було опубліковано концептуальні засади реформування середньої школи [48], в яких піднімалося питання щодо важливості для подальшого життя застосування знань в практичних ситуаціях (формування компетентностей). Згодом, у 2024 році був затверджений Державний стандарт профільної середньої освіти [22], основною метою якого є створення таких положень профільної школи, що сприятимуть розвитку особистості за рахунок формування компетентностей.

Метою *математичної освітньої галузі*, однієї з 9-ти галузей, представлених у державному стандарті, є розвиток особистості здобувача освіти через *формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної подальшої професійної діяльності впродовж життя*, що передбачає засвоєння системи знань, *удосконалення вмінь розв'язувати математичні та практичні задачі*; розвиток логічного мислення та психічних властивостей особистості; *здатність і готовність застосовувати математику в особистому і суспільному житті для продовження навчання або фахової спеціалізації* [22, с. 11].

Серед вимог до обов'язкових результатів навчання здобувачів профільної середньої освіти в математичній освітній галузі виділені наступні складові: 1) дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів, 2) моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв'язування проблемних ситуацій, 3) критичне оцінювання процесу та результату розв'язування проблемних ситуацій, 4) розвиток математичного мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіння математичною мовою [22, с.188-199]. По кожній з 4-х складових виокремлено загальні результати, конкретні результати, даються орієнтири для оцінювання (основний та поглиблений рівні).

Мета, яка поставлена перед математичною освітньою галуззю НУШ містить складові, які передбачались Концепціями математичної освіти в Україні і в попередні роки.

Зокрема передбачалось, що навчання математики на всіх ступенях повинно мати розвиваючий характер і *прикладну спрямованість*. Одна з основних проблем навчання математики полягала в тому, щоб забезпечити міцне і свідоме оволодіння учнями системою математичних знань і вмінь, необхідних їм у повсякденному житті, достатніх для вивчення суміжних дисциплін і продовження освіти.

У методиці навчання математики існують різні тлумачення поняття «прикладна спрямованість». Одним з них є означення запропоноване Колягіним Ю.М. та Піканом В.В. На їх погляд, «прикладна спрямованість навчання математики – це орієнтація змісту і методів навчання на застосування математики у техніці і суміжних науках; у професійній діяльності; народному господарстві та побуті» [68].

Наповнення навчального процесу прикладними задачами є одним з головних шляхів реалізації прикладної спрямованості навчання курсу математики основної та профільної школи.

Проблемою використання прикладних задач під час навчання математики в старшій школі та методикою навчання учнів їх розв'язування займались і в попередні роки. Зокрема методика реалізації прикладної спрямованості навчання шкільної алгебри і початків аналізу розроблена в дисертаційному дослідженні [67] Соколенко Л.О., яке проводилось у 1994-1997 роках під керівництвом професора Слєпкань З.І. в Українському державному педагогічному університеті імені Михайла Драгоманова. Прикладній спрямованості навчання алгебри і початків аналізу профільної школи та методиці навчання учнів розв'язування відповідних типів прикладних задач присвячені окремі посібники, серед яких

[68], [70] та численні статті [57], [65], [66], [69], [71], [72], [73], [74], [75], [77], [83].

Прикладній спрямованості шкільного курсу стереометрії присвячено дисертаційне дослідження [64] Прус А.В., яке проводилось у 2002-2007 роках під керівництвом професора Швеця В.О. в Національному педагогічному університеті імені Михайла Драгоманова. Його результати відображені у посібниках [54], [82] та численних статтях [59], [60], [63].

Значна частина робіт присвячена питанню використання математичного моделювання в процесі розв'язування прикладних задач – Прус А.В. [61], [62], Гребельної М.Ю. [17]; психолого-педагогічних передумов формування умінь математичного моделювання в курсі математики старшої школи – Катеренюк Г.Д. [30]. Окремо в роботах Прус А.В. [61], Панченко Л.Л. [49], розкрито питання про понятійний апарат математичного моделювання в шкільному та вузівському курсі відповідно.

У діючих нині підручниках математики для старшої школи Бевз В.Г [40], [41] Неліна Є.П. [35], [37] Тарасенкової Н.А. [36] представлені окремі прикладні задачі, що приводять до математичних понять та задачі на застосування цих понять на практиці.

Існує проблема вивчення та узагальнення результатів проведених раніше досліджень на предмет використання прикладних задач в курсі математики старшої школи. Залишаються актуальними питання урізноманітнення змісту прикладних задач різних типів, продовження роботи над методикою навчання їх розв'язування учнями профільної школи.

Сказане вище і обґрунтовує актуальність даного дослідження.

Об'єкт дослідження: процес навчання курсів алгебри і початків аналізу та геометрії в профільній школі.

Предмет дослідження: методика навчання учнів профільної школи розв'язування прикладних задач різних типів.

Мета дослідження: створити ефективну методику навчання учнів розв’язування прикладних задач курсів алгебри і початків аналізу та геометрії профільної школи.

Для досягнення мети були визначені такі **завдання**:

1. Вивчити наукову, навчально-методичну, психолого-педагогічну літературу з теми дослідження.
2. Здійснити аналіз чинних програм та підручників з математики для профільної школи на предмет включення в них прикладних задач.
3. Запропонувати диференційовану систему прикладних задач, призначену для учнів старшої школи.
4. Розробити методику навчання учнів старшої школи розв’язування різних типів задач, запропонованої системи.
5. Провести експериментальну перевірку окремих результатів дослідження.

Структура роботи: робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (85 найменувань) та 1 додаток.

У вступі обгрунтовано актуальність дослідження; визначено об’єкт, предмет, мету та завдання дослідження.

У першому розділі роботи (теоретичних основах дослідження) розкрито суть понять: «прикладна спрямованість шкільного курсу математики», «прикладна задача», «математичне моделювання». Проаналізовано програми та підручники з математики на предмет дослідження. Розглянуто питання щодо стану проблеми дослідження в шкільній практиці.

У другому розділі (практичній частині дослідження) на основі отриманих теоретичних напрацювань з теми представлено класифікацію прикладних задач за змістовими лініями курсів математики старшої школи, запропоновано систему прикладних задач з курсів математики старшої школи та методику навчання учнів їх розв’язування. Також представлено окремі етапи експериментального дослідження (опитування, бесіди з учнями, методика проведення додаткових занять), які є складовими навчально-педагогічного експерименту.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Реалізація прикладної спрямованості навчання математики старшої профільної школи

1.1.1. Суть понять "прикладна спрямованість навчання математики", "практична спрямованість навчання математики", психолого-педагогічні передумови для реалізації прикладної спрямованості курсу алгебра і початки аналізу та курсу геометрія старшої профільної школи

В науково-методичній літературі поняття «прикладна спрямованість» означуються різним чином. Вперше визначення поняття *прикладної спрямованості шкільного курсу математики* було дано В.В. Фірсовим [82]. Суть прикладної спрямованості ШКМ полягає у здійсненні цілеспрямованого змістового та методологічного зв'язків математики з практикою, що передбачає введення у шкільну математику специфічних моментів, які характерні для дослідження прикладних проблем математичними методами.

Ю.М. Колягін та В.В. Пікан розрізняли поняття *прикладна спрямованість* та *практична спрямованість*.

На їх погляд, «*прикладна спрямованість навчання математики* – це орієнтація змісту і методів навчання на застосування математики у техніці і суміжних науках; у професійній діяльності; народному господарстві та побуті» [68].

Практична спрямованість навчання математики - «це спрямованість змісту і методів навчання на розв'язування задач і вправ, на формування у школярів навичок самостійної діяльності математичного характеру» [68].

Психолого-педагогічними передумовами для реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри і початків аналізу є: більш високий рівень узагальнення і абстрагування розумової діяльності учнів старших класів, зростаюча тенденція до причинного пояснення явищ, уміння аргументувати і доводити твердження, робити глибоко обгрунтовані висновки, зв'язувати вивчене в систему; існування тісного зв'язку логічних процесів мислення та почуттєвого сприймання в пізнавальній діяльності учнів; їх певний життєвий досвід; знання суміжних дисциплін; наявність вмінь та навичок у застосуванні ІКТ; професійна орієнтація [68, с. 3-4].

Психолого-педагогічними передумовами для реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії є: широке коло пізнавальних інтересів; зростання свідомого відношення до навчальної діяльності; більший високий рівень розумової діяльності учня; здатність до пізнання навколишнього світу; виникнення інтересу до причинного пояснення явищ; застосування знань у різних сферах життя (навчанні, майбутній професії, побуті тощо); потреба у самореалізації та розвиткові власного «Я» [64, с. 37].

1.1.2. Особливості математичного змісту шкільних курсів математики, що сприяють реалізації прикладної спрямованості

На сучасному етапі в старшій школі виділяють такі змістові лінії курсу алгебри і початків аналізу: 1) Вирази, 2) Рівняння і нерівності, 3) Функції, 4) Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей, статистики.

Охарактеризуємо їх особливості, що сприяють реалізації прикладної спрямованості.

Основною задачею змістової лінії «Вирази» є формування математичних умінь та навичок до розв’язування різних типів задач. Дана змістова лінія є проміжною ланкою при реалізації прикладної спрямованості і може бути задіяна в процесі наступних змістової лінії.

Для змістової лінії «Рівняння і нерівності» варто приділити увагу до розв’язування прикладних задач, математична модель яких вимагає розв’язування вивчених у курсі старшої школи типів рівнянь та нерівностей (ірраціональні, тригонометричні, показникові та логарифмічні). До такого типу можна віднести задачі на: обчислення річного відсоткового приросту заданого процесу, визначення періоду піврозпаду радіоактивної речовини за умовами початкової та кінцевої маси, дослідження перевищення інтенсивності коливань землі під час землетрусу тощо.

Наступну змістову лінію «Функції» структурно можна поділити на вивчення: класів елементарних функцій, диференціальне та інтегральне числення.

При вивченні класів елементарних функцій слід приділити увагу на застосування їх до опису певних процесів та явищ дійсності. Нижче наведено приклади застосування (таблиця 1).

Таблиця 1

Клас функції	Вираз функції	Застосування
Лінійна $y = kx + b$.	$A(n) = \frac{A_0 p}{100} n + A_0$.	Формула «простих» відсотків, для відшукання грошового депозиту через n років, де A_0 – початковий вклад, p – відсоткова ставка.
Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$.	$I(R) = \frac{U}{R}$.	Закон Ома, який визначає силу струму через величину напруги (прямо пропорційну) та величину опору електричного кола (обернено пропорційну).
Степенева $y = Cx^p$, C, p – дійсні числа.	$E(v) = \frac{mv^2}{2}$.	Кінетична енергія тіла, яка визначає залежність енергії E тіла зі сталою масою m при змінній швидкості v.
Тригонометричні $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$.	$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.	Рівняння гармонічних коливань, за яким встановлюється координата x тіла за часом t, де $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклічна частота коливань з

		періодом T, φ_0 – початкова фаза коливань.
Показникова $y = a^x$, $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 0. \end{cases}$	$N(t) = N_0 e^{kt}$.	Формула для обчислення кількості бактерій в певний момент часу t, де N_0 – початкова кількість бактерій $(t = 0)$, k – коєфіцієнт розмноження бактерій.
Логарифмічна $\log_a b$, $\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ b > 0. \end{cases}$	$V(x) = \dfrac{110(\ln x - 2)}{x}$, $x \in [10; 100]$.	Формула визначення об’ємів легень людини, де x – вік людини в роках, $x \in [10; 100]$.

Вивчення диференціального числення варто почати із задач, що приводять до поняття похідної. Для більш ефективної реалізації прикладної спрямованості слід приділити увагу не тільки традиційним задачам (на геометричний та фізичний зміст), а також доповнити задачами на інші застосування (наприклад, про визначення: кутової швидкості та кутового прискорення, миттєвої потужності, величини змінного струму, лінійної густини стержня, питомої теплоємності речовини даного тіла, швидкості хімічної реакції і швидкості зростання популяції, продуктивності праці та інші [68, с. 10]).

Далі для розділу диференціального числення доцільно використати задачі, для яких вищезазначені застосування мають першочергову роль. Тоді після формування уявлень про техніку диференціювання різних класів функцій та їх дослідження за допомогою похідної прикладну спрямованість можна реалізувати за рахунок введення оптимізаційних задач. До такого типу можна віднести прикладні задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення на відрізку або задачі на знаходження екстремуму.

Вивчення інтегрального числення зумовлюється взаємозв’язком з диференціальним численням. Тоді аналогічно, мають місце задачі, які приводять до поняття первісної (наприклад: закон переміщення $s(t)$ є первісною для закону швидкості руху $v(t)$; закон виконаної роботи $A(t)$ є первісною для закону дії переміщення тіла $F(t)$ тощо). Після вивчення поняття визначеного інтегралу слід розглянути задачі на його застосування (наприклад, задачі: на знаходження шляху, який пройшло тіло за визначений термін часу; на визначення роботи змінної сили тощо). Після чого має місце використання прикладних задач в процесі вивчення застосування інтегралу до обчислення площ плоских фігур та об’ємів тіл обертання.

Змістова лінія «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей, статистики» має найбільший потенціал до реалізації прикладної спрямованості за рахунок необхідності використання прикладних задач до вивчення тем цієї змістової лінії. В даному випадку слід звернути увагу на тематику завдань: завдання повинні стосуватись не тільки побутових справ, а також можуть бути доповнені прикладними задачами з фізики, біології, хімії, фармакології тощо.

На сучасному етапі в старшій школі виділяють такі змістові лінії курсу геометрії: 1) Геометричні фігури, 2) Геометричні величини.

Охарактеризуємо їх особливості, що сприяють реалізації прикладної спрямованості.

Змістова лінія «Геометричні фігури» першочергово включає неозначувані поняття: «точка», «пряма», «площина» і загальні положення щодо взаємного розміщення прямих і площин. За даним теоретичним матеріалом можна запропонувати ряд прикладних задач на пояснення різних побутових та професійних процесів. Далі теоретичний матеріал доповнюється поняттями многогранників та тіл обертання. Слід зазначити, що для більш ефективного засвоєння даних понять наводяться приклади реальних об’єктів, що мають подібні властивості.

Змістова лінія «Геометричні величини» розкриває основні характеристики геометричних тіл: довжина, площа, об’єм, градусна міра кута. Після ознайомлення учнів із основними типами просторових фігур слід приділити увагу на формули обчислення площі їх поверхонь. Для кращого сприймання матеріалу доцільно використати ряд прикладних задач побутового та виробничого характеру. Вивчення формул для обчислення об’ємів повинно також супроводжуватись розв’язуванням прикладних задач. До таких можна віднести задачі: на обчислення маси тіл, на знаходження об’єму занурених предметів у посудину відповідної форми, на витрати тощо.

1.1.3. Методичні вимоги щодо реалізації прикладної спрямованості курсів алгебри і початків аналізу та геометрії старшої профільної школи.

До реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри і початків аналізу ставляться такі методичні вимоги:

1) доцільність реалізації прикладної спрямованості при вивченні кожної змістової лінії курсу потрібно з’ясовувати, виходячи з особливостей її математичного змісту;

2) у процесі вивчення теоретичного матеріалу потрібно, по можливості, ознайомлювати учнів з галузями його практичного застосування, акцентуючи увагу на універсальності математичних методів, та показувати на конкретних прикладах прикладний характер цих методів;

3) підготовку до вивчення теоретичних питань курсу потрібно здійснювати через прикладні задачі, що забезпечать мотивацію навчання при введенні нових понять і методів, сприятимуть розвитку пізнавального інтересу учнів;

4) наповнення навчального процесу прикладними задачами, що задовольняють певні специфічні вимоги, є одним з головних шляхів реалізації прикладної спрямованості курсу (ці задачі повинні утворювати певну систему, яка задовольняє ряд дидактичних вимог і забезпечує органічний зв’язок з теоретичним матеріалом);

5) система задач повинна поєднувати задачі прикладного характеру, що приводять до математичних понять, з прикладними задачами на застосування цих понять (це дасть змогу організувати навчання учнів елементам математичного моделювання в процесі розв’язування таких задач);

6) прикладні задачі та ілюстративні приклади повинні давати можливість з математичними знаннями засвоювати наукові факти суміжних предметів, тобто бути засобом здійснення міжпредметних зв’язків;

7) під час реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу повинно відбуватися ознайомлення учнів з НІТН (новими інформаційними технологіями навчання) [68, с. 19].

До реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії ставляться такі методичні вимоги: 1) чітко виділяти прикладний аспект теоретичного матеріалу; 2) широко використовувати геометричний експеримент; 3) систематично пов’язувати зв’язки стереометрії із іншими шкільними предметами, особливо природничого циклу; 4) знайомити учнів із поняттям математичної моделі та з методом математичного моделювання як основою для розв’язування ПЗ; 5) демонструвати універсальність методів стереометрії шляхом розв’язування ПЗ (на даний момент цей шлях є найбільш відомим в шкільній практиці) [64, с. 27].

Нижче наведемо основні положення, що приводять до поставлених рекомендацій.

Перш за все, як зазначає Л.О. Соколенко у навчальному посібнику [68], слід звернути увагу на важливість використання конкретно-індуктивного методу при формуванні нових понять та загальній схемі формування понять та узагальнень.

Як відомо з курсу загальної методики, конкретно-індуктивний метод навчання передбачає вивчення теоретичного матеріалу за рахунок введення прикладів і задач. При цьому варто розуміти, що математичні поняття є абстрактними, тобто такими, які в процесі пізнання складно зв’язати з предметами дійсності. До того ж принцип формування понять в учнів загалом відбувається за наступним чином (рис 1.1). Саме тому існує необхідність у використанні даного методу.

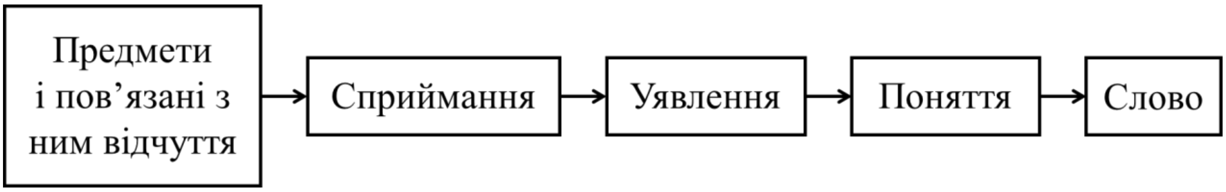

Рис 1.1

Конкретно-індуктивний метод дозволяє створити проблемні ситуації та мотивувати введення математичних понять.

Належну увагу слід приділити створенню математичної моделі. Побудова такої моделі вимагає дослідити об'єкт дійсності та за допомогою математичного апарату описати його. Також важливим є дотримання наступних властивостей до математичних моделей: адекватність та простота.

Показником засвоєння поняття в психології вважається вміння його застосовувати. «Оволодіти поняттям – це означає не тільки знати ознаки предметів і явищ, які охоплює дане поняття, але і вміти застосовувати поняття на практиці, вміти оперувати ним», - стверджує В.В. Давидов [68, с. 17].

Тому використання прикладних задач не обмежується лише задачами, що приводять до нових математичних понять відповідних курсів. До такої системи слід включити задачі на застосування введених раніше понять. Важливим є те, що в процесі розв'язування таких задач здійснюється розвиток загальних розумових дій, які необхідні для розв'язування математичних задач.

Раціональне поєднання прикладних задач, що приводять до математичних понять та задач на застосування цих понять на практиці дозволяє ефективно організувати навчальний процес.

1.2. Поняття прикладної задачі, вимоги до прикладних задач та до відбору системи прикладних задач та їх розв'язування

1.2.1. Поняття прикладної задачі. Специфічні вимоги, що ставляться до прикладних задач

Поняття прикладної задачі безпосередньо пов'язано з життєвим досвідом. Доречною є фраза з методичного посібника Г.П. Бевза [8]: «задачі, поставлені життям» [8, ст. 52]. Причому в навчальному посібнику [82] сформульовані різні трактування даного поняття, але при цьому сутність даного поняття є незмінною.

За навчальним посібником Л.О. Соколенко [68] розкриємо поняття «прикладна задача» (в контексті профільної школи) наступним чином: «під прикладною задачею в школі розуміють задачу, яка виникла поза курсом математики і розв'язується математичними методами і способами, які вивчаються в шкільному курс» [68, с. 19-20].

Виділяють основні вимоги, до прикладних задач, які використовуються під час навчання курсу алгебри і початків аналізу: 1) задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань; 2) задачі повинні відповідати шкільним програмам і діючим підручникам з курсу алгебри і початків аналізу щодо методів і фактів, які будуть використовуватися в процесі їх розв'язування; 3) прикладні задачі повинні демонструвати практичне застосування математичних ідей і методів в суміжних галузях наук, виробництві та життєвій практиці; 4) у змісті задачі по можливості повинен бути відображений особистий досвід учнів, місцевий матеріал, який дозволяє ефективно показати використання математичних знань і викликати в учнів пізнавальний інтерес; 5) поняття і терміни задач мають бути відомі або інтуїтивно зрозумілі учням; 6) числові дані в прикладних задачах повинні відповідати існуючим у практиці, тобто бути реальними. В процесі розв'язування задач потрібно дотримуватись правил наближених обчислень, а також використовувати обчислювальні засоби, зокрема ЕОМ; 7) при розв'язуванні прикладних задач у класах з поглибленим вивченням математики їх формулювання може бути розширене і являти собою деякий теоретичний вступ до проблеми, що вивчається [68, с. 20].

Також виділяють дидактичні вимоги до системи задач: 1) відбір задач системи повинен відповідати математичному змісту курсу алгебри і початків аналізу, на якому доцільно реалізовувати прикладну спрямованість; 2) в основу класифікації задач системи мають бути покладені види математичних моделей, які створюються при їх розв'язанні або містяться в умовах окремих задач; 3) задачі системи повинні відповідати їх функціям у процесі навчання математики; 4) необхідна можливість одержувати розв’язання задач системи не тільки незалежно від інших задач, а й на основі розв’язування попередніх; 5) вміння розв’язувати задачі одного типу повинно полегшувати розв’язування задач іншого типу; 6) відбір задач системи слід здійснювати диференційовано для різних типологічних груп учнів; 7) задачі системи повинні сприяти міжпредметному узагальненню набутих знань і вмінь; 8) тематика прикладних задач має бути сучасною і актуальною; 9) при розв’язуванні деяких типів повинен використовуватися алгоритмічний підхід; 10) до системи прикладних задач слід включити різні за змістом задачі, розв’язування яких зводиться до побудови однієї і тієї ж моделі; 11) необхідно передбачити можливість розв’язування деяких задач різними способами; 12) система повинна сприяти оволодінню учнями прийомами як алгоритмічної, так і евристичної діяльності [68, с. 20-21].

Виділяють основні вимоги, до прикладних задач, які використовуються під час навчання курсу геометрії: 1) прикладна задача повинна мати реальний практичний зміст; 2) прикладні задачі повинні демонструвати застосування математичних методів, зокрема, методу математичного моделювання, для дієвого вирішення поставлених питань, показувати значимість набутих геометричних ЗУН; 3) числові значення величин, які подані в умовах ПЗ, повинні бути характерними для практики, їх непотрібно «підганяти», щоб у результаті розв’язування отримати ціле значення; 4) у процесі розв’язування прикладних задач потрібно використовувати правила наближених обчислень, а також використовувати обчислювальні засоби, зокрема, інформаційно-комунікаційні технології; 5) прикладна задача повинна відповідати педагогічним вимогам до довільної задачі взагалі (математичний зміст такої задачі має відповідати програмі, підручнику, цілям уроку, відноситись до вказаної теми, не бути надто громіздким, сприяти засвоєнню тощо); 6) дидактичний рівень розв’язування ПЗ всередині математичної моделі не повинен перевищувати за складністю загального рівня розв’язування суто математичних задач даної теми; 7) прикладні задачі мають відображати передові досягнення науки, техніки, виробництва, бути, по можливості, пов'язані з місцевим матеріалом; 8) формулювання прикладної задачі не повинно містити незрозумілу для учнів термінологію, відомості про вузькотехнічні або інші складні виробничі процеси; 9) частина прикладних задач повинна бути складена за матеріалами екскурсій, відображати особистий досвід учнів [64, с. 23-24].

До системи прикладних задач з геометрії виділяють наступні дидактичні вимоги: 1) кожна ПЗ системи має задовольняти вимоги, поставлені до окремої ПЗ; 2) ПЗ системи мають відповідати змісту шкільного курсу стереометрії; 3) ПЗ кожної підсистеми повинні бути розташовані за ступенем зростання складності; 4) ПЗ системи мають давати можливість здійснювати диференційований підхід для різних типологічних груп учнів; 5) система ПЗ повинна сприяти оволодінню учнями прийомами алгоритмічної, евристичної і дослідницької діяльності [64, с. 24].

1.2.2. Математичне моделювання, як метод розв'язування прикладних задач

Для того, щоб розкрити суть поняття «математичне моделювання» та описати його основні структурні етапи здійснимо аналіз навчальних посібників В.О. Швеця, А.В. Прус [82], Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швеця [70] та наукових статей Л.Л. Панченко [49], А.В. Прус [61].

В статті А.В. Прус [61] здійснюється огляд різних трактувань поняття «математичне моделювання». Слід зазначити, що частина із запропонованих трактувань перелічують основні етапи математичного моделювання.

Звідси можна зробити висновок, що процесу розв'язування прикладних задач властиві всі етапи математичного моделювання [70, с. 10].

Зосередимо увагу на основних етапах математичного моделювання. В наукових роботах [61], [70], [82] виділяють три основні етапи математичного моделювання: 1) створення зв'язку природи з математичними об'єктами – побудова математичної моделі; 2) розв'язування поставленої проблеми математичними методами – розв'язування математичної моделі; 3) перевірка отриманих розв'язків математичної моделі за рахунок перенесення їх в реальну систему, що розглядалася в умові задачі – інтерпретація розв'язків.

Під час розв'язування прикладних задач будемо враховувати вищезазначені етапи. Унаочнимо їх за схемою (рис 1.4), яка була запропонована у посібнику [70].

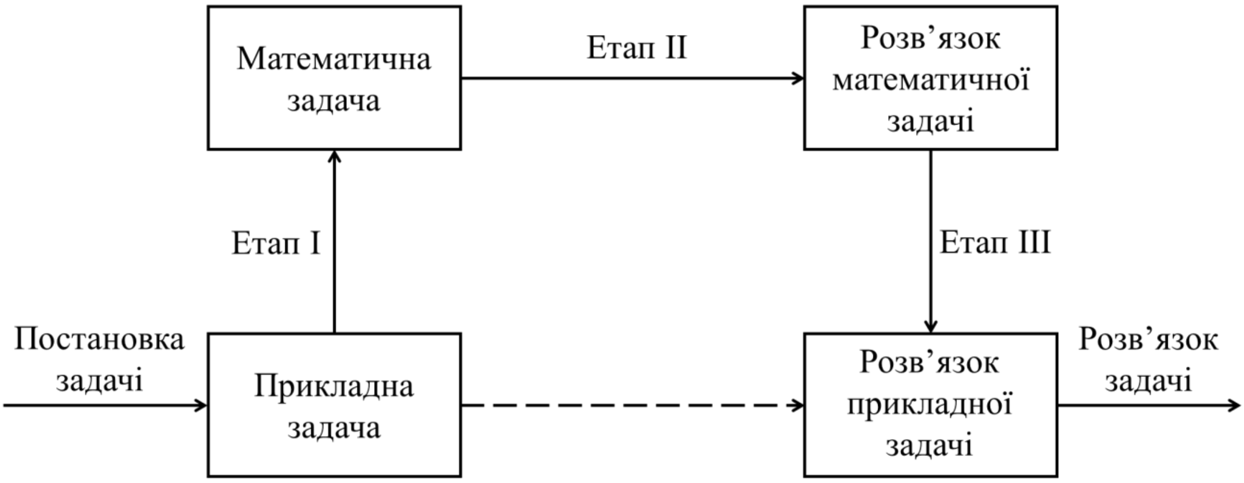

Рис 1.2

Доцільно більш детально окреслити особливості першого етапу математичного моделювання, оскільки побудова математичної моделі є ключовим компонентом розв'язування прикладної задачі.

Важливо зазначити, що об'єкти дійсності мають нескінченну кількість характеристик. Це означає, що математична модель відображає оригінал наближено, тобто не є його копією.

Загалом до математичних моделей можна виділити значну кількість властивостей, причому для курсу математики старшої школи мають місце наступні: адекватність та простота.

Адекватність математичної моделі полягає у відборі істотних характеристик та відсіюванні другорядних. Недотримання даної властивості може привести до помилок у змодельованій системі.

Простота математичної моделі полягає в тому, що її розв'язування не викликає труднощів. Слід зазначити, що спрощення будь-якої моделі може відбуватись до тих пір, поки існують другорядні характеристики, які можна виключити.

1.2.3. Вимоги до відбору системи прикладних задач та їх розв'язування

У пункті 1.2.1 було окреслено специфічні вимоги до системи прикладних задач та дидактичні вимоги до системи прикладних задач з алгебри і початків аналізу та геометрії. В даному пункті зосередимо увагу особливостях розв'язування прикладних задач (використанні розумових та практичних дій).

За посібником [68] автор виділяє формалізовані та неформалізовані прикладні задачі, встановивши сукупність розумових та практичних дій (мінімум дій) для розв'язування довільної прикладної задачі системи.

До цього мінімум відносять такі розумові та практичні дії: 1) розчленування формулювання задачі на умови та вимоги; 2) виявлення в умові задачі об'єктів і їх характеристик (властивостей об'єктів, відношень між об'єктами); 3) співставлення умов з вимогами; 4) встановлення типу прикладної задачі; 5) виділення з умови задачі математичного співвідношення, яке складає математичну модель прикладної задачі; 6) вибір методу дослідження побудованої моделі; 7) створення на основі загальних правил (формул, тотожностей) або загальних положень (означень, теорем) алгоритму розв'язування формалізованої задачі; 8) розв'язування формалізованої задачі за створеним алгоритмом; 9) дотримання правил наближених обчислень, а також використання обчислювальних засобів у процесі розв'язування задачі; 10) переклад на змістовну мову прикладної задачі одержаних результатів дослідження [68, с. 21-22].

Для неформалізованих прикладних задач п'ята дія вказаного мінімуму змінюється сукупністю наступних розумових і практичних дій необхідних для побудови математичної моделі: 1) вибір даних, необхідних для розв'язування задачі (відокремлення істотних характеристик об'єктів від другорядних; оцінка повноти вихідної інформації; введення при необхідності числових даних, яких недостає; виділення параметрів; введення змінних; виявлення фактів, що викликають похибку; з'ясування точності даних задачі); 2) заміна вихідних термінів вибраними математичними еквівалентами; 3) встановлення математичних співвідношень між введеними змінними і параметрами задачі (безпосередня побудова алгебраїчної моделі); 4) вибір сукупності всіх можливих математичних співвідношень, що описують ситуацію задачі, тих, які складають математичну модель; 5) зображення геометричних фігур, які виконують роль математичних еквівалентів; 6) виділення на малюнку необхідних для пошуку розв’язання фігур; 7) проведення додаткових побудов; 8) переусвідомлення елементів малюнка в плані різних понять; 9) встановлення необхідних співвідношень між елементами фігури, яка є геометричною моделлю даної задачі (перехід до алгебраїчної моделі); 10) переформулювання нестандартної задачі до еквівалентної їй стандартної; 11) поділ нестандартної задачі на декілька стандартних задач [68, с. 22].

Доповнимо вище сказане за посібником В.О. Швеця [81] основними прийомами, які використовуються при вивченні основних елементів математичного моделювання у вигляді схем (рис 1.3 – рис. 1.5).

І етап: Створення математичної моделі (математизація)			
використати евристичні, навідні, орієнтовані на правильну відповідь (питання), чітко виокремити вимогу (вимоги);	відділити властивості об’єктів прикладної задачі та умови її виконання (умови), які є неістотними для побудови математичної моделі і зосередитися на істотних, встановити характер залежностей між даними в умові задачі величинами;	допомогти учням виділити та вказати відмінності між об’єктом та його моделлю;	сформулювати умову задачі на математичній мові.

Рис. 1.3

ІІ етап: Дослідження математичної моделі (математичне моделювання)			
використати (за необхідності) додаткові теоретичні відомості та наукові джерела;	зробити ілюстративні графіки чи ескізи, які можуть допомогти у пошуку розв’язку (за необхідності);	якщо потрібно, то навести учням приклади схожих ситуацій;	довести знайдений розв’язок до числового значення або розрахункової формули.

Рис. 1.4

III етап: Відбір розв'язків прикладної задачі (інтерпретація)	
враховуючи область можливих значень для прикладної задачі, здійснити перевірку та відібрати правильні розв'язки;	за необхідності, оцінити ступінь точності розв'язку.

Рис. 1.5

Отже, при формуванні системи прикладних задач слід враховувати особливості розумових та практичних дій, до їх розв'язання.

1.3. Стан проблеми дослідження в психолого-педагогічній літературі та шкільній практиці

1.3.1. Аналіз чинних програм з математики для старшої профільної школи на предмет включення прикладних задач до різних тем курсу алгебри і початків аналізу та курсу геометрії

Для чинних програм з математики для старшої школи характерним є наявність та опис наскрізних ліній. Наскрізними лініями прийнято вважати надпредметні теми, основне призначення яких полягає у формуванні світогляду учнів та умінні застосовувати знання у практичних ситуаціях.

У вказаних навчальних програм [44-46] виділяють наступні наскрізні лінії: «Екологічна безпека та сталий розвиток», «Громадянська відповідальність», «Здоров'я і безпека», «Підприємливість та фінансова грамотність». Коротко охарактеризуємо потенціал даних ліній в контексті даного дослідження. Зазначимо, що дані змістові лінії відповідають компетентнісному потенціалу державного стандарту профільної середньої освіти [22].

Наскрізна лінія «Екологічна безпека та сталий розвиток» ставить за мету формування уявлень про світ за допомогою математичного апарату. Такі процеси моделювання розширюють практичне застосування математики. Постановка прикладних задач може включати наступні цілі: раціональне використання природніх ресурсів, дослідження окремих процесів дійсності, визначення правильності використання технічних засобів в межах екології та інші.

Для наскрізної лінії «Громадянська відповідальність» використання прикладних задач на перший погляд не має місця, але при цьому існує ряд сюжетних задач, в зміст яких входять: історична довідка про країну, опис краєвидів, традиції тощо.

Наскрізна лінія «Здоров’я і безпека» займає пріоритетне місце у фізичному та психологічному розвитку учнів. В основу даної лінії входять: задачі на розрахунок раціону харчування та загального процесу фізичного розвитку дитини; задачі з медичної галузі (вивчення ефективності медичних препаратів); задачі на рух транспортних засобів.

Для наскрізної лінії «Підприємливість та фінансова грамотність» мають місце прикладні задачі на: дослідження різних економічних процесів (кредитування, заощадження, страхування тощо); визначення оптимальних рішень в побуті або виробництві; створення графіку та оцінку можливостей його виконання тощо.

Для всіх програм з математики [44-46] характерним є опис основних етапів математичного моделювання (відрізняється тільки формулюванням).

Огляд наскрізних ліній та наявність в програмах методу математичного моделювання дає можливість перейти до перевірки на включення прикладних задач до змісту курсів алгебри і початків аналізу та геометрії.

Для курсу алгебри і початків аналізу провідною лінією є функціональна. Безпосередньо можна навести приклад з частини курсу 11 класу «Тема 1. Показникова та логарифмічна функції». Для опису зміни маси радіоактивної речовини використовують наступну залежність (показникову функцію): $m = m_0e^{-kt}$, де $k > 0$.

Далі розв’язування прикладних задач доцільно продовжувати в межах тем диференціального числення в 10 класі: «Тема 5. Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» та інтегрального числення в 11 класі: «Тема 2. Інтеграл та його застосування».

При вивчені похідної значну увагу слід приділяти задачам, що призводять до даного поняття. Як зазначено в навчальній програмі [45] це можна реалізувати за допомогою задач природничої, математичної та технічної тематики. За допомогою системи таких задач відбується з практичної точки зору сприймання даного поняття. Водночас в результатах навчання зазначено, що учень повинен вміти розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільшого і найменшого значень.

Для теми інтегрального числення істотним є встановлення балансу між технікою інтегрування та застосування даного поняття на практиці.

Розділ теорії ймовірності та математичної статистики в 11 класі за визначеними програмами [44], [45] визначається наступною частиною програми: «Тема 3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей». Дана тема повинна містити достатню кількість задач пов'язану з життєвими ситуаціями, задля ілюстрації розглянутих понять теми.

Завершення вивчення алгебри і початків аналізу відбувається за рахунок узагальнення рівнянь та їх систем «Тема 4. Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація». Вивчення даної теми повинно супроводжуватись розв'язанням текстових задач, математичні моделі яких відображають досвід розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем.

Для курсу геометрії аналіз програм [44-46] показав, що прикладні задачі мають місце, але при цьому на них зосереджується менше уваги. Розглянемо зміст навчального матеріалу та очікувані результати від навчання учнів.

Традиційно вивчення геометрії починається з частин «Тема 1. Вступ до стереометрії», «Тема 2. Паралельність прямих і площин у просторі», «Тема 3. Перпендикулярність прямих і площин у просторі». Більша частина тем передбачає вивчення абстрактних понять, аксіом та теорем.

У програмі [45] зазначено наступне: «розв'язує вправи, що передбачають моделювання життєвих ситуацій паралельності та проекціювання в задач практичного та прикладного змісту», «розв'язує вправи, що передбачають моделювання життєвих ситуацій застосування перпендикулярності прямих і площин; ортогонального проекціювання в задачах навчального-практичного та прикладного змісту».

Вивчення геометрії в 10 класі завершується розділом «Тема 4. Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі». Для даної теми можна навести наступні результати навчання: «наводить приклади моделей симетрії відносно точки та прямої із об'єктів навколишнього середовища», «розв'язує вправи, що передбачають моделювання задач природничих дисциплін навчально-практичного та прикладного змісту».

Курс геометрії 11 класу починається з вивчення «Тема 1. Многогранники». Зазначимо, що в даній теми визначається пріоритет на засвоєнні основних понять (типи многогранників та їх перерізи) та обчисленні площ поверхні многогранників та їх перерізів.

За навчальною програмою [45] можна зазначити наступні очікуванні результати учнів: «характеризує модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії», «розв'язує вправи, що передбачають використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у тому числі прикладного та практичного змісту».

Аналогічні застосування (за рахунок подібності теми) можна визначити для наступної теми: «Тема 2. Тіла обертання».

Далі розглядаються теми: «Тема 3. Об'єми многогранників», «Тема 4. Об'єми та площі поверхонь тіл обертання». До очікуваних результатів навчальної діяльності учнів можна віднести раніше зазначені результати, а саме: застосування понятійного апарату до розв'язування прикладних задач, а також характеристики математичних моделей при перекладі на математичну мову.

1.3.2. Аналіз чинних підручників з математики для старшої профільної школи на предмет включення прикладних задач до різних тем курсу алгебри і початків аналізу та курсу геометрії

У підручниках з математики Г.П. Бевза та ін. 10 класу [40] та 11 класу [41] визначено поділ прикладних задач за чотирма наскрізними лініями (умовні позначення вказано на рис. 1.6). Для підручників [1], [2], [12], [13], [35], [37] колективу Є.П. Неліна характерним є рубрика «Виявіть свою компетентність», в якій запропоновано прикладні задачі (в залежності від теми). Зазначимо, що подібна рубрика «Проявіть компетентність» використана в підручнику математики 10 класу М.І. Бурди [36].

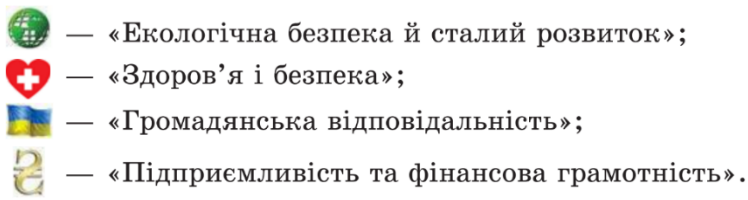

Рис 1.6

Тепер проаналізуємо кількісний показник прикладних задач в залежності від розділів у підручнику. Аналіз проведемо на основі підручників з математики Є.П. Неліна [35], [37].

Для підручника Є.П. Неліна 10 класу з математики [35] кількісний показник з математики прикладних задач за відповідними темами розподілено наступним чином. За розділом «Функції, їхні властивості та графіки» налічено 11 прикладних задач, «Тригонометричні функції» – 5 прикладних задач, «Похідна та її застосування» – 9 прикладних задач, «Паралельність прямих і площин у просторі» – 10 прикладних задач, «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» – 7 прикладних задач, «Координати вектори, геометричні перетворення» – 2 прикладні задачі.

Для підручника Є.П. Неліна 11 класу з математики [35] кількісний показник з математики прикладних задач за відповідними темами розподілено наступним чином. За розділом «Показникова та логарифмічна функції» налічено 2 прикладні задачі, «Інтеграл та його застосування» – 7 прикладних задач, «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» – 65 прикладних задач, «Многогранники» – 6 прикладних задач, «Тіла обертання» – 6 прикладних задач, «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» – 12 прикладних задач.

Не менш важливим залишається питання відсоткового показника прикладних задач. Як зазначено в навчальному посібнику В.О. Швеця та А.В. Прус [82] оптимальний відсоток розв'язаних прикладних задач від загальної кількості має становити близько третини (варіювання від 20% до 30%).

Відсоткова частина прикладних задач (від загальної) в підручниках з математики 10 класу визначилась наступним чином. У підручнику М.І. Бурди [36] ПЗ становили 9% від загальної кількості, у підручнику Є.П. Неліна [35] – 6%, у підручнику О.С. Істера [38] – 5%, у підручнику Г.П. Бевза [40] – 8%. Зазначимо, що переважну частину геометричних задач складають якісні прикладні задачі.

Для 11 класу, як показав аналіз, відсоткова частина прикладних задач мала більше числове значення. Так у підручнику з математики Є.П. Неліна [37] ПЗ займали 29% від загальної кількості, у підручнику О.С. Істера [39] – 19%, у підручнику Г.П. Бевза [41] – 19%. Слід зазначити, що відсоткові зрушення були спричинені внаслідок особливості тематики навчання 11 класу.

Відсотковий розподіл в підручниках профільного рівня здійснюється подібним чином. Варто зазначити, що рівень складності прикладних задач збільшився.

Для курсу алгебри і початків аналізу 10 класу відсоткова частина складає: для підручника Є.П. Неліна [1] – 4%, Г.П. Бевза [5] – 5%, О.С. Істера [3] – 4%. Для курсу алгебри і початків аналізу 11 класу відсоткова частина складає: для підручника Є.П. Неліна [2] – 20%, О.С. Істера [4] – 14%.

Для курсу геометрії 10 класу відсоткова частина складає: для підручника Є.П. Неліна [12] – 2%, Г.П. Бевза [15] – 5%, О.С. Істера [16] – 2%. Для курсу геометрії 11 класу відсоткова частина складає: для підручника Є.П. Неліна [13] – 8%, О.С. Істера [14] – 6%.

Під час проведення аналізу підручників можна зробити наступні висновки. Включення прикладних задач до тем курсу алгебри і початків аналізу здійснюється не однаково.

Так при вивчені тем пов’язаних з вивченням елементарних функцій розглядається обмежена кількість прикладних задач (або взагалі не розглядаються).

Теми диференціального та інтегрально числення на достатньому рівні розкривають прикладну спрямованість курсу (на основі фундаментальних застосувань), але при цьому кількісний показник завдань необхідно збільшити, оскільки розв’язування прикладних задач, особливо при вивченні даних тем, повинно бути систематичним та усвідомленим.

Кількісний показник прикладних задач з комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики є достатнім, оскільки, як зазначалося раніше, дана змістова лінія з логічних міркувань має переважно прикладний зміст.

Для курсу геометрії слід зазначити наступне. Розподіл прикладних задач за темами є більш рівномірний, порівнюючи з курсом алгебри і початків аналізу, за вийнятком розділу «Координати вектори, геометричні перетворення». Система прикладних задач 10 класу з геометрії переважно складається з якісних прикладних задач, що зумовлено змістом теоретичного матеріалу.

Відмітимо, що для курсу 11 класу, як показав аналіз підручників, при вивченні тем многогранників, тіл обертання та обчислення їх об’ємів та площ пріоритетними стають прикладні задачі, для яких необхідно в повному обсязі виконати процес математичного моделювання.

1.3.3. Стан проблеми дослідження в шкільній практиці

Під час проходження виробничо педагогічних практик у ліцеї №12 м. Чернігова було проведено опитування учнів 10-Е (вивчення математики на рівні стандарту) та 11-Б (вивчення математики на профільному рівні). Метою проведення даного опитування стало дослідження особливостей знань та навичок старшокласників (та їх зацікавленості) щодо розв'язування прикладних задач з математики у профільній школі. В опитуванні взяло участь 23 учасники.

На питання: «Чи ознайомленні, Ви, з поняттям «прикладна задача»?» 8 респондентів відповіла – «Ні», а інші зазначили, що ознайомлені. На питання: «Чи ознайомленні, Ви, з поняттям «математична модель» та «математичне моделювання»?» 16 учнів відповіли «так», а 7 – ні.

На питання: «Чи ознайомлювали Вас з етапами розв'язування прикладної задачі (побудова математичної моделі, її дослідження, інтерпретація розв'язків)?» 10 опитуваних осіб (43,5%) зазначили – «Ні».

Уподобання учнів щодо прикладних задач, які подобається розв’язувати на уроках математики було розподілено наступним чином: біологія – 5 учнів, інформатика – 6 учнів, економіка – 4 учні, фізика – 9 учнів, хімія – 7 учнів.

На питання: «З якими труднощами, Ви, зустрічаєтесь під час розв'язування прикладних задач?» 11 учнів (47,8%) зазначили, що складно здійснити побудову математичної моделі, 7 учнів (30%) відповіли, що складно підібрати спосіб розв’язання математичної моделі і 12 учнів (52 %) вказали, що складно здійснити перехід від розв’язків математичної задачі до прикладної.

На рис. 1.7 показна стовпчаста діаграма, за рахунок якої визначається оцінка учнями важливості використання прикладних задач.

Рис 1.7

Повторно опитування було проведено для студентів 1-2 курсу навчання у відокремленому структурному підрозділі «Фаховий коледж транспорту та комп’ютерних технологій» Національного університету «Чернігівська політехніка»

До опитування долучилось 44 респонденти, 32 з яких є студентами першого курсу, а 12 – студентами другого курсу. Близько четвертої частини респондентів (10 учасників) зазначили, що не були ознайомленні з поняттям «прикладна задача», «математична модель» та «математичне моделювання».

Близько 50% студентів (23 учасники) зазначили, що при розв'язуванні прикладних задач виникають труднощі.

Найбільша складність на думку респондентів (47 %) визначена у підборі способу розв'язку математичної моделі, близько 43% опитуваних зазначили, що складно переходити від розв'язку математичної моделі до розв'язку прикладної задачі, близько 38% студентів зазначили, що труднощі виникають при побудові математичної моделі і тільки у 18% опитуваних не виникає труднощів при розв'язуванні прикладних задач на заняттях математики.

На питання щодо вибору тематики прикладних задач було отримано наступну кількість відповідей: інформатика (16 студентів), фізика (13 студентів), біологія (12 студентів), економіка та хімія (7 студентів).

На останнє питання опитування, яке стосувалось оцінки важливості використання прикладних задач на уроках математики студенти надали наступну відповідь (рис 1.8).

Рис 1.8

Отримані результати дослідження свідчать про те, що питання розв'язування прикладних задач є складним процесом пізнання для більшості учасників навчального процесу, оскільки процес розв’язку таких завдань вимагає ґрунтовних знань з математики та умінні поєднувати математичну та інші галузями знань. Основною причиною труднощів з розв’язування такого типу завдань є нерозуміння студентами понятійних одиниць теми. Тому важливою частиною впровадження методики розв’язування прикладних задач в курсі математики профільної школи є послідовний підхід до викладу основних понять теми та виокремлення кожного етапу математичного моделювання під час процесу розв’язування прикладної задачі.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ПРИ ВИВЧЕННІ ОСНОВНИХ ЗМІСТОВИХ ЛІНІЙ КУРСУ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

2.1. Різновиди прикладних задач у системі навчання математики та їх роль у досягненні дидактичних цілей

В пункті 1.2.1 було визначено поняття прикладної задачі. Окрім цього в дисертаційному дослідженні Т.О. Насадюк [47], монографії І.В. Лов'янової [34] та методичному посібнику М.І. Бурди [53] виділяють: професійно спрямовані задачі [34], практико-орієнтовані завдання та практико-орієнтовані проєкти [47], компетентнісні задачі [53]. Вище зазначені типи задач відносять до засобів реалізації прикладної спрямованості. Охарактеризуємо їх особливості.

Під *професійно спрямованою* задачею ми будемо розуміти математичні, міжпредметні, практичні і прикладні задачі, які є носієм навчальної інформації, а процес їх розв'язування орієнтований на організацію навчальної математичної діяльності учнів на рівні, який відповідає обраному навчальному профілю [34, с. 216].

І.В. Лов'янова означує дане поняття через перелік інших понять. Тому варто зробити уточнення до розкриття сутності окремих понять з даного переліку.

Як було зазначено раніше, прикладними вважаються задачі, постановка яких зумовлена життєвою ситуацією та вимагає розв'язку математичними методами. Практична задача повинна включати в умові принаймні однин реальний об'єкт або процес; для розв'язування використовуються математичні поняття та їх властивості, при цьому пріоритетним в задачі є її математичний зміст. Поняття міжпредметної задачі включає поняття прикладних та практичних задач, які задовольняють мету певної теми з математики та пов'язані з іншими предметами профільної школи.

Також І.В. Лов'янова виділяє функції професійно спрямованих задач: 1) розвиток пізнавальних інтересів учнів до професійної сфери «математика» в межах обраного навчального профілю; 2) відкриття нових понять, фактів та способів діяльності; 3) розвиток інтелектуальної сфери особистості учнів; 4) організація рівнів навчальної математичної діяльності від репродуктивного до творчого; 5) підготовка до самостійного вирішення проблем [34, с. 217].

Для розкриття сутності понять «практико-орієнтоване завдання» та «практико-орієнтований проєкт» наведемо означення з дисертації Т.О. Насадюк.

Під *практико-орієнтованим завданням* розуміється завдання, виконання якого супроводжується певними практичними діями (вимірювання на місцевості, виготовлення і дослідження моделей, задачі-орігамі, побудова таблиць, графіків і діаграм з попереднім пошуком інформації тощо) з метою формування в учнів умінь і навичок, необхідних для застосування отриманих математичних знань в різних сферах практичного життя людини [47, с. 2].

Під *практико-орієнтованим проєктом* ми розуміємо діяльність учнів, спрямовану на здобуття знань, умінь і навичок у процесі розв’язання певної життєвої задачі-проблеми засобами математики, з опорою на власний життєвий досвід і знання з різних галузей науки, техніки [47, с. 176].

Первинне усвідомлення даних понять може вказувати на їх подібність, але існують відмінності. Для практико-орієнтованого проєкту характерним є наявність етапів його виконання: аналітичний (усвідомлення змісту проєкту та планування його виконання), практичний (безпосереднє виконання проєкту), підсумковий (рефлексія виконавців проєкту, підготовка презентації з оприлюдненням результатів), контрольний (максимально об’єктивна оцінка результатів) та тривалість виконання (кілька тижнів).

Під *компетентнісними задачами* слід розуміти задачі прикладного змісту, умова яких може мати недостатню або надлишкову кількість інформації, а також може мати цікаву інформацію мотивуючого характеру («шум»), яка не використовується під час виконання задачі [53, с. 14]

Далі слід навести основні типи прикладних задач системи, що стосуються курсів алгебри і початків аналізу та геометрії.

За навчальним посібником Л.О. Соколенко [68] можна виділити наступні прикладні задачі, що відповідають діючим програмам та підручникам з математики: 1) задачі, в основу сюжету яких покладені загальнофункціональні поняття, що вивчаються в основній школі; 2) прикладні задачі, математичні моделі яких включають тригонометричні, степеневу, показникову, логарифмічну функції; 3) задачі, в яких роль математичної моделі відіграють показникові та логарифмічні рівняння; 4) задачі, які приводять до поняття похідної та задачі, в розв’язанні яких це поняття відіграє першорядну роль; 5) прикладні задачі, в яких похідна застосовується: до дослідження на монотонність функції, яка відіграє роль математичної моделі задачі; з метою дослідження функції на екстремум; з метою знаходження найбільшого і найменшого значень функції; під час дослідження функції за загальною схемою, на основі якого будується її графік; 6) задачі, які приводять до поняття первісної, та задачі, в розв’язуванні яких це поняття відіграє першорядну роль; 7) задачі, які приводять до поняття інтеграла; 8) прикладні задачі на застосування інтеграла до обчислення площ плоских фігур та об’ємів тіл обертання; 9) задачі на застосування інтеграла у фізиці, природничих науках, економіці; 10) задачі з комбінаторики; 11) прикладні задачі, в яких йдеться про випадкові події та їх імовірності; 14) статистичні задачі прикладного характеру [68, с. 27].

Для даних типів задач Л.О. Соколенко [68] визначає наступні дидактичні цілі: підготовка та закріплення отриманих теоретичних знань; з’ясування мети для формування математичних навичок; повторення вивченого матеріалу; здійснення контролю щодо засвоєних знань.

Поділ прикладних задач з геометрії доцільно здійснити за навчальним посібником В.О. Швеця, А.В. Прус [82], дослідженням А.В. Прус [64] на групи: 1) аксіоми стереометрії та наслідки з аксіом; 2) паралельність в просторі; 3) перпендикулярність в просторі; 4) комбінації базових понять; 5) координати і вектори в просторі; 6) перетворення у просторі [82, с. 60-76]; 7) задачі, пов’язані лише з многогранниками та їх комбінаціями; 8) задачі, пов’язані лише із тілами обертання та їх комбінаціями; 9) задачі, пов’язані із многогранниками та тілами обертання; 10) задачі, пов'язані із опрацюванням окремих теоретичних положень; 11) задачі, умови яких містять прийоми, які використовуються на практиці та відомі з досвіду для обчислення значення тієї чи іншої величини [64, с. 71].

Слід зазначити, що для прикладних задач типів 7-11 має місце розмежування на задачі пов'язанні з: обчисленням площі поверхонь просторових фігур, обчисленням об'ємів просторових фігур, обчисленням площ та об'ємів просторових фігур.

До заданої системи прикладних задач з геометрії, враховуючи зміст дослідження А.В. Прус можна зазначити наступні дидактичні цілі: 1) систематичне вивчення теоретичного матеріалу курсу та його закріплення; 2) розвиток мислення та просторового уявлення (та уяви загалом); 3) формування математичних навичок; 4) визначення місця стереометрії в науці та професійній діяльності (мотиваційний аспект) [64, с. 50-51].

2.2. Методика впровадження та використання системи прикладних задач при вивченні класу елементарних функцій

У профільній школі передбачається вивчення наступних класів функцій: степеневі, тригонометричні, показникові та логарифмічні. Перед тим як перейти до розв'язування конкретних прикладів слід зупинитись на певних особливостях курсу алгебри і початків аналізу.

Л.О. Соколенко у статті [65] розкриває необхідність створення системи прикладних задач природничого спрямування для профільного вивчення математики. При цьому автор виділяє наступні призначення прикладних задач: а) які передують вивченню нових математичних фактів; б) які забезпечують мотивацію навчання при введенні нових понять і методів; в) які створюють проблемну ситуацію з метою формування в учнів нових знань [65, с. 219]

Як відомо навчання новим математичним поняттям відбувається у чотири етапи: 1*) пропедевтичний етап* – підготовку до формалізації (актуалізація знань і мотивація введення поняття) – введення; 2) *етап розкриття змісту поняття* і створення уявлення про його обсяг, а також засвоєння термінології і символіки

– засвоєння; 3) *етап відпрацювання навичок використання поняття* при розв'язуванні найпростіших задач – закріплення; 4) *етап включення в систему змістових зв'язків* з іншими поняттями – застосування [65, с. 219].

Варто зазначити, що вивчення вищезазначених класів функцій починається із засвоєння основних понять функціональної змістової лінії: числова функція, графік функції, закон задання функції, значення функції, зростаюча та спадна функції. Тому в процесі вивчення даних понять слід звернути увагу на їх практичне застосування. Нижче наведемо умови таких задач та запропонуємо методику їх розв'язання.

Задача 1. Медичними працівниками встановлено, що дитина віком a років $a < 18$, для нормального розвитку повинна спати протягом t год на добу, де $t = 16 - \frac{a}{2}$. Знайдіть $t(16)$, $t(15)$, $t(14)$ [35, с. 26].

Розв'язання:

I етап

При розв'язуванні такого типу завдання слід наголосити учням на наступних поняттях: закон задання функції, залежна та незалежна змінна. Математичною моделлю задачі є функціональна залежність $t = 16 - \frac{a}{2}$.

II етап

$$t(16) = 16 - \frac{16}{2} = 8; t(15) = 16 - \frac{15}{2} = 8{,}5; t(14) = 16 - \frac{14}{2} = 9.$$

III етап

Таким чином, для нормального розвитку дитина віком 16 років повинна спати 8 годин, 15 років – 8,5 годин, 14 років – 9 годин.

Відповідь. 8; 8,5; 9.

До розв'язування такої задачі можна включити визначення понять: область визначення та область значень функції. В умові зазначено, що a<18, але водночас вік дитини не може набувати від'ємного значення, тому слід включити умову, що $a \geq 0$, звідси $D(t) = [0; 18)$. Нескладно переконатись, що $E(t) = [16; 7)$.

Зосередження уваги на практичному уявленні даних понять дозволить більш усвідомлено підходити до подальшого розв'язування прикладних задач.

Далі слід приділити увагу завданням на встановлення аналітичного закону за відомими величинами.

Задача 2. З турбази на станцію, віддалену на відстань 60 км, вирушив велосипедист зі швидкістю 12 км/год. Знайдіть формулу залежності змінної s від t, де s – відстань велосипедиста від станції в кілометрах, а t – час його руху в годинах [36, с. 20].

Розв'язання:

<u>I етап</u>

Для початку слід зробити геометричну інтерпретацію задачі, для цього позначимо відрізок AB та точку C, що відповідає місцезнаходження велосипедиста в деякий час його руху (рис 2.1). Враховуючи умову нескладно встановити, що $BC = AB - AC$.

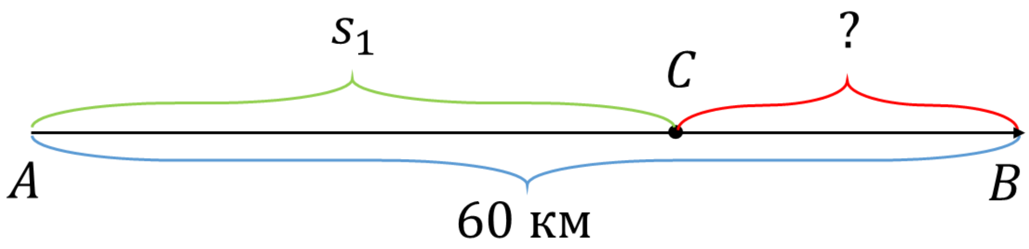

Рис 2.1

<u>II етап</u>

З умови відомо, що відстань $AB = 60$. Завдання полягає у відшуканні AC, що описує відстань s_1, з означення швидкості отримаємо: $AC = 12t$. Тоді вираз, який опису відстань BC становить: $60 - 12t$.

<u>III етап</u>

Таким чином, формула змінної s від t має вигляд: $s(t) = 60 - 12t$.

Відповідь. $s(t) = 60 - 12t$.

Відмітимо, що область визначення такої залежності буде відповідати часу руху велосипедиста, тобто $D(s) = [0; 5]$, тоді область значень – відстані, яка не перевищена відстанню між об'єктами $E(s) = [0; 60]$.

Важливим етапом реалізації прикладної спрямованості під час навчання функціональної змістової лінії є встановлення відповідності між визначеними графіками функції та запропонованими процесами дійсності. Розглянемо задачу.

Задача 3. Установіть, який із графіків (рис. 2.2) відповідає кожній з описаних нижче ситуацій:

1) на газоні росте трава, яку регулярно скошують (x — час, y — висота трави);

2) груша росте, потім її зривають і висушують (x — час, y — маса груші);

3) м'яч падає з деякої висоти на підлогу (x — час, y — відстань від м'яча до підлоги);

4) через кожну годину робочого часу на склад здають однакову кількість виготовлених деталей (x — час, y — кількість деталей на складі) [5, с. 26].

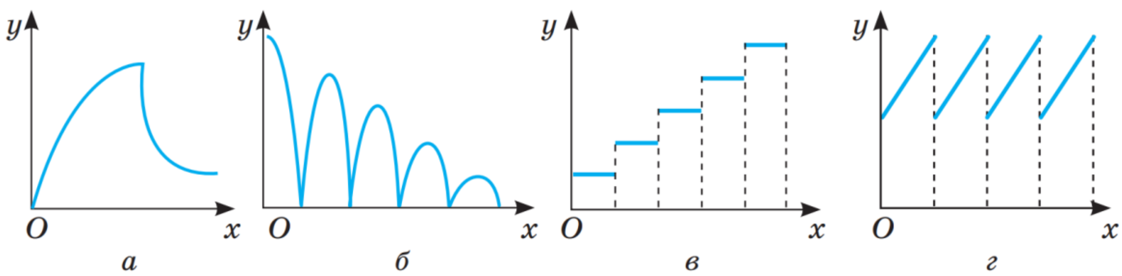

Рис 2.2

Розв'язання:

Розв'язування такої задачі слід почати з повторення поняття зростаючої та спадної функції, періодичної функції, оскільки за допомогою даних понять можна прослідкувати відмінності між процесами.

Для першого процесу характерним є регулярність скошування трави. Якщо даний процес виконується в приблизно однаковий час, то прийнявши, що закон росту трави описується лінійною залежністю приходимо до графіка г.

Для другого процесу характерним є дві дії: ріст плоду та його висушування. Під час росту плоду збільшується його маса, а під час висушування – зменшується. Приходимо до висновку, що процес описується за графіком а.

Для третього процесу характерним є пружність описаного об'єкту. Кожне наступне підскакування м'яча від підлоги буде на мешу висоту. Тому йому відповідає графік б.

Для четвертого процесу характерним є незмінність кількості деталей на складі впродовж певного часу. Через певний час кількість деталей збільшується, причому на однакову кількість. Отже, приходимо до графіка в.

Відповідь. 1 – г, 2 – а, 3 – б, 4 – в.

Після вивчення загальних понять функціональної змістової лінії можна переходити до застосування окремих класів функції. За посібниками Л.О. Соколенко [68], Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швеця [70] реалізація прикладної спрямованості навчання здійснюється при вивченні всіх елементарних функцій, але найбільш часто під час вивчення показникової та логарифмічної функції.

Розглянемо задачі, які приводять до поняття показникової функції. При цьому слід врахувати, що прикладні задачі повинні бути пов’язані з досвідом учнів. Оскільки наразі відбувається популяризація соціальних мереж, то можна запропонувати наступне завдання.

Задача 4. Дмитро вирішив стати блогером в інстаграм. Після місяця намагань автор блогу домігся результату в 100 підписників на своєму каналі. Автора не задовольнила повільна динаміка розвитку каналу, тому було вирішено замовити в адміністрації даної соціальної мережі рекламу. Умова реклами полягає в тому, що кожного тижня кількість підписників зростала на 10%, при цьому пропозиція рекламування акаунта Дмитра діє 50 тижнів. Якою буде кількість підписників на акаунті Дмитра після завершення угоди з рекламодавцем (при умові, що підписники не будуть відписуватись)?

Розв’язання:

I етап

Завдання полягає у визначені формули кількості підписників N в залежності від кількості пройдених тижнів k. Доцільно виконати узагальнений алгоритм, який описується рекурентно.

1) Позначимо, що початкова кількість підписників становила N_0. Через тиждень значення підписників стане N_1. Яким чином виразити N_1 через початкове значення N_0? ($N_1 = 1{,}1 \cdot N_0$).

2) Через два тижні значення підписників стане N_2. Яким чином виразити N_2 через значення N_1? Якого вигляду набуде формула, якщо записати її через початкове значення N_0? ($N_2 = 1{,}1 \cdot N_1 = (1{,}1)^2 \cdot N_0$).

3) Яким чином обчислюється значення N_3? ($N_3 = 1{,}1 \cdot N_2 = (1{,}1)^3 \cdot N_0$).

4) Яким чином обчислюється значення N_k, якщо задано N_{k-1}? Якого вигляду набуде функція від змінної k? $N_k = 1{,}1 \cdot N_{k-1}$; $N(k) = (1{,}1)^k \cdot N_0$.

5) Знайдіть залежність кількості підписників N_k від кількості тижнів k.

Отримали, функцію $N(k) = (1{,}1)^k \cdot 100$, $k \in [0; 50]$. Дана функція є математичною моделлю задачі. Нижче здійснимо обчислення.

II етап

$$N(50) = (1{,}1)^{50} \cdot 100 \approx 11739.$$

III етап

Отже кількість підписників на сторінці Дмитра після проведення реклами (50 тижнів) становитиме 11739.

Відповідь. 11739 підписників.

На даному етапі важливо не обмежуватись одним прикладом, а продемонструвати інші застосування показникової функції.

Наприклад, за законом $P = P_0 e^{kt}$ (P_0 – початкове значення кількості речовини або матеріалу, t – час процесу, k – коефіцієнт певного процесу) можна здійснювати дослідження природніх процесів: новоутворення (розмноження бактерій, ріст дерева тощо), розпаду (радіоактивний розпад).

Достатньо відомою також для учнів є формула обчислення складних відсотків, яка має узагальнений вигляд $P = P_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, де P_0 – сума вкладення, P – отримана сума, r – річні проценти, n – кількість зростань суми за рік (період), t – кількість років. Конкретизуємо застосування даної формули.

Нехай було зроблено вклад у банк у розмірі 12 тис. грн. під місячний приріст на 9%, тоді можна визначити функцію отриманої суми:

$$P(t) = 12000 \cdot \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12t} = 12000 \cdot (1,075)^{12t}.$$

Після первинного застосування прикладних задач до означення поняття показникової функції слід зосередити увагу на ознайомленні з поняттям показникового рівняння.

Задача 5. Маса деякої радіоактивної речовини становить 50 *г*, через яку кількість періодів піврозпаду маса даної речовини становитиме $6,25$ *г*?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначенні часу, за який маса радіоактивної речовини зменшиться до $6,25$ *г*. Встановлення залежності маси речовини після піврозпаду $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^t$ приводить до рівняння $6,25 = 50 \left(\frac{1}{2}\right)^t$, яке є математичною моделлю задачі.

II етап

Після рівносильних перетворень приходимо до рівняння:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{8};$$

Далі нескладно встановити, що $t = 3$.

III етап

Отже, через 3 періоди піврозпади радіоактивної речовини з початковою масою в 50 *г* стане $6,25$ *г*.

Відповідь. Через 3 періоди піврозпаду.

В даному випадку розв'язування показникового рівняння вимагало зведення обох частин рівняння до степенів з однаковою основою. При цьому важливо зосередити увагу на задачах, для яких розв'язування показникового рівняння потребує введення поняття логарифма.

Задача 6. Населення деякої країни зростає експоненціально, причому за рік приріст становить 8 %. За скільки років кількість населення становитиме 20 млн, якщо сьогодні воно становить 8,5 млн [70, с. 40]?

Розв'язання:

I етап

Розв'язування задачі слід почати із встановлення закону зростання населення: $N(t) = N_0 \cdot (1{,}08)^t$, де N_0 – початкове значення населення, $N(t)$ – кількість населення через t років.

Враховуючи умову задачі приходимо до наступного рівняння:

$$8500000 \cdot (1{,}08)^t = 20000000.$$

II етап

Здійснивши рівносильні перетворення та спростивши дріб у правій частині рівності приходимо до рівняння, яке є математичною моделлю даної задачі:

$$(1{,}08)^t = \frac{40}{17}.$$

Розв'язування такого типу рівняння потребує введення поняття логарифма, після чого отримаємо розв'язок:

$$t = \log_{1{,}08} \frac{40}{17}.$$

III етап

Оскільки $\log_{1{,}08} \frac{40}{17} \approx 11$, то через 11 років чисельність населення зросте до 20 млн осіб.

Відповідь. Через 11 років.

Зазначимо, що використання прикладних задач не обмежується на даному етапі. Покажемо розв'язування прикладної задачі, яке дає можливість ознайомитись із іншими типами показникових рівнянь.

Задача 7. Банкір Степан Олегович перевіряв депозитні вкладення клієнтів. Серед них було обрано два на початкову суму вкладень 100 тис гривень. При цьому особливістю виявилась відсоткова ставка даних депозитів. Перший вкладник вирішив внести суму під $10{,}25\%$ річних, тоді як другий, не звернувши увагу на річний відсоток обрав – 5%. Через яку кількість років сума першого вкладника збільшиться на 5250 гривень порівняно із сумою другого вкладника?

Розв'язання:

I етап

Оскільки завдання полягає у відшуканні різниці двох сум, то необхідно знайти закон задання суми вкладників. Використовуючи формулу складних відсотків отримаємо: $P_1(t) = 100000 \cdot (1{,}1025)^t$; $P_2(t) = 100000 \cdot (1{,}05)^t$.

Тоді за умовою задачі складаємо рівняння, що є математичною моделлю:

$$100000 \cdot (1{,}1025)^t - 100000 \cdot (1{,}05)^t = 5250;$$

$$10000 \cdot (1{,}1025)^t - 10000 \cdot (1{,}05)^t = 525.$$

Етап II

Враховуючи, що $1{,}1025 = (1{,}05)^2$ отримаємо рівняння:

$$10000 \cdot ((1{,}05)^t)^2 - 10000 \cdot (1{,}05)^t = 525.$$

Нехай $(1{,}05)^t = k$, $k > 0$, а $((1{,}05)^t)^2 = k^2$. Тоді маємо квадратне рівняння:

$$10000 \cdot k^2 - 10000 \cdot k - 525 = 0.$$

Використовуючи метод перекидання коефіцієнта k^2 та теорему обернену до теореми Вієта отримаємо корені:

$$\left[\begin{array}{l} k = \dfrac{10500}{10000}, \\ k = -\dfrac{500}{10000}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1{,}05, \\ k = -0{,}05; \end{array}\right. \Rightarrow k = 1{,}05.$$

Виконаємо обернену заміну:

$$(1{,}05)^t = 1{,}05 \Rightarrow t = 1.$$

III етап

Отже, через 1 рік сума депозиту першого вкладника буде більшою за суму другого на 5250 грн.

Відповідь. Через 1 рік.

Після даного етапу має місце використання прикладних задач при вивченні показникових нерівностей.

Задача 8. Звукове джерело випромінює звук, інтенсивність якого 100 *дб*. Проходячи крізь ізолюючу фонічну пластинку, він втрачає 10% своєї інтенсивності. Скільки пластинок повинен перетнути звук, щоб його інтенсивність стала меншою 1 *дб* [68, с. 35]?

Розв'язання:

I етап

Спочатку варто визначити закон зміни інтенсивності звуку:

$$I = 100 \cdot (0{,}9)^k.$$

Опираючись на функціональну залежність можемо записати нерівність:

$$100 \cdot (0{,}9)^k < 1;$$

$$(0{,}9)^k < 0{,}01.$$

II етап

До розв'язування такої нерівності необхідно застосувати основну логарифмічну тотожність. Отримаємо наступну нерівність:

$$(0{,}9)^k < (0{,}9)^{\log_{0,9} 0{,}01};$$

За властивістю показникової функції приходимо до рівносильної нерівності:

$$k > \log_{0,9} 0{,}01\,;$$

Звідси, враховуючи, що $\log_{0,9} 0{,}01 \approx 43{,}7$, отримаємо, $k > 43{,}7$.

III етап

Отже, інтенсивність звуку стане меншою за 1 *дб* при його проходженні через 44 ізолюючі пластинки.

Відповідь. 44 пластинки.

При вивченні поняття логарифмічної функції слід зосередити увагу на реальні процеси, що можна описати за допомогою неї. Наприклад, $R = \lg\frac{I}{I_0}$, де R – це значення шкали Ріхтера, I – інтенсивність землетрусу, I_0 – мінімальна норма інтенсивності землетрусу. Також можна навести формулу, до обчислення об'єму легенів людини V: $V(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}, x \in [10; 100]$, де x – вік людини.

Продемонструємо принцип розв'язку прикладної задачі на застосування одного із вищезазначених понять.

Задача 9. На території України (Чернівецька область) увечері 23 жовтня було зафіксовано землетрус магнітудою 3,1 (за шкалою Ріхтера). У скільки разів інтенсивність землетрусу I перевищувала норму I_0?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначені відношення $\frac{I}{I_0}$, для цього потрібно визначити математичну модель задачі. Очевидно, що рівняння $\lg\frac{I}{I_0} = 3{,}1$ описує умову задачі.

II етап

Для розв'язування рівняння використаємо означення логарифма:

$$\lg\frac{I}{I_0} = 3{,}1 \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{3{,}1} \approx 1259.$$

III етап

Отже, інтенсивність землетрусу I перевищувала норму I_0 у 1259 разів.

Відповідь. 1259 разів.

Дані задачі вимагали вивчення показникової та логарифмічної функції. Розглянемо прикладні задачі, математичною моделлю яких є степенева та тригонометрична функції.

Задача 10. За оцінкою лісника, запас деревини на одній ділянці лісу складає 10000 кубометрів. При якому середньому річному прирості (у %) через 10 років на цій ділянці буде 12800 м^3 деревини [70, с. 44]?

Розв'язання:

I етап

Оскільки завдання полягає у відшуканні середнього річного відсоткового приросту, то необхідно задати залежність зростання ділянки лісу P з плином часу t (у роках). Маємо наступну функцію:

$$P(t) = 10000 \cdot (1 + p)^t.$$

Враховуючи, що $P(10) = 12800$ отримаємо наступне рівняння:

$$10000 \cdot (1+p)^{10} = 12800 \Rightarrow (1+p)^{10} = \frac{32}{25}.$$

II етап

Для розв'язання використаємо поняття кореня n-степення. Враховуємо, що відсотковий приріст повинен бути додатним.

$$p = \sqrt[10]{\frac{32}{25}} - 1 \approx 0{,}025.$$

III етап

Таким чином, середній річний приріст становить $2{,}5\%$.

Відповідь. $2{,}5\%$.

Задача 11. Точки A і C є найбільш віддаленими одна від одної точками на березі озера (рис. 2.3). Відстань між точкою A і точкою B суші дорівнює $2{,}4$ $км$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 30°$. Визначте довжину AC [68, с. 38].

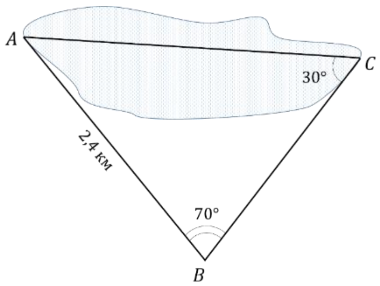

Рис 2.3

Розв'язання:

I етап

Для такого типу задачі важливо підвести до розв'язування математичної моделі, для цього слід розглянути геометричну модель задачі.

II етап

Нехай задано ΔABC, при цьому шукану довжину можна виразити за теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin \angle B}{\sin \angle C}.$$

$$AC = \frac{2{,}4 \cdot \sin 70°}{\sin 30°} = 4{,}8 \cdot \sin 70° \approx 4{,}5.$$

III етап

Отже, довжина озера становить 4,5 *км*.

Відповідь. 4,5 *км*.

2.3. Методика впровадження та використання системи прикладних задач під час вивчення елементів диференціального та інтегрального числення

2.3.1. Задачі прикладного змісту, які приводять до поняття похідної та задачі, в яких використання похідної має першочергову роль

Поняття похідної є фундаментальним при вивченні диференціального числення. Традиційно розглядають задачі на фізичний та геометричний зміст, що приводять до даного поняття. Суттєвим у понятті похідної є відношення приросту функції до приросту аргументу, що дає можливість говорити про швидкість зміни певного процесу.

Продемонструємо за таблицею у посібнику [68] Л.О. Соколенко основні застосування похідної.

Таблиця 2

Функція	*Приріст аргументу*	*Приріст функції*	*Середня швидкість зміни функції*	*Миттєва швидкість зміни функції*
1. $S = S(t)$ – шлях, який проходить тіло за час t; *[м]*	Δt	$\Delta S =$ $= S(t+\Delta t) - S(t)$	$v_с = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$	$v = \lim\limits_{\Delta t \to +\infty} v_с$ – швидкість *[м/с]*
2. $v = v(t)$ – швидкість нерівномірного руху тіла, де t – час; *[м/с]*	Δt	$\Delta v =$ $= v(t+\Delta t) - v(t)$	$a_с = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$	$a = \lim\limits_{\Delta t \to +\infty} a_с$ – прискорення *[м/с^2]*

3. $q = q(t)$ – кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за час t; *[Кл]*	Δt	$\Delta q =$ $= q(t + \Delta t) - q(t)$	$I_{\text{с}} = \dfrac{\Delta q}{\Delta t} =$ $= \dfrac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$	$I = \lim\limits_{\Delta t \to +\infty} I_{\text{с}}$ – сила струму *[A]*
4. $A = A(t)$ – робота, яка здійснюється у момент часу t; *[Дж]*	Δt	$\Delta A =$ $= A(t + \Delta t) - A(t)$	$W_{\text{с}} = \dfrac{\Delta A}{\Delta t} =$ $= \dfrac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}$	$W = \lim\limits_{\Delta t \to +\infty} W_{\text{с}}$ – потужність *[Вт]*
5. $P = P(t)$ – чисельність популяції в момент часу t; *[особин]*	Δt	$\Delta P =$ $= P(t + \Delta t) - P(t)$	$v_{\text{сп}} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t} =$ $= \dfrac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$	$v_{\text{п}} =$ $= \lim\limits_{\Delta t \to +\infty} v_{\text{ср}}$ – швидкість зростання популяції

Наведемо задачі прикладного змісту, для яких поняття похідної відіграє першочергову роль.

Задача 12. При переміщені тіла визначаються затрати роботи A (у *Дж*) відносно часу t (за *с*) за законом $A(t) = t^2 + 3t + 20$. Якого значення набуде потужність W у момент часу 10 *с*?

Розв'язання:

I етап

Оскільки завдання полягає у визначенні потужності W у момент часу 10 *с*, то доцільно пригадати формулу потужності $W = \frac{A}{t}$, яка приводить до застосування похідної: $W(t) = A'(t)$. Доцільно використати загальну схему визначення похідної.

1) Для змінної t надамо деякого приросту Δt.

2) Встановити приріст для функції затрат роботи ΔA:

$$\Delta A = A(t+\Delta t) - A(t) =$$
$$= (t+\Delta t)^2 + 3(t+\Delta t) + 20 - (t^2 + 3t + 20) =$$
$$= 2t\Delta t + 3\Delta t + (\Delta t)^2 = \Delta t(2t + 3 + \Delta t).$$

3) Скласти відношення $\frac{\Delta A}{\Delta t}$: $\frac{\Delta A}{\Delta t} = 2t + 3 + \Delta t$.

<u>II етап</u>

4) На даному етапі виконується математична задача – визначення граничного відношення $\frac{\Delta A}{\Delta t}$, при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(2t + 3 + \Delta t) = 2t + 3.$$

Отримали залежність значення потужності W відносно часу t, тобто $W(t) = 2t + 3$. Тоді $W(10) = 2\cdot 10 + 3 = 23$.

<u>III етап</u>

Отже, в момент часу 10 *с* значення потужності становило 23 *Вт*.

Відповідь. 23 *Вт*.

Введення такого типу завдання дає можливість зрозуміти сутність поняття похідної – визначення миттєвого значення зміни залежної величини.

Далі слід навести задачу на застосування правил диференціювання та таблиці похідних елементарних функцій.

Задача 13. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3 % за кожну годину. Визначте масу дріжджів через t годин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г. Знайдіть швидкість зміни маси при: а) t =1 год; б) t = 2 год; в) t = 5 год [70, с. 50].

Розв'язання:

<u>І етап</u>

Завдання полягає у знаходженні швидкості зміни маси у зазначений час. Важливо встановити закон зміни маси дріжджів: $m(t) = (1{,}03)^t$. Після цього використати означення похідної $v_m = m'(t)$.

II етап

Враховуючи таблицю похідних отримаємо:

$$m'(t) = ((1{,}03)^t)' = (1{,}03)^t \cdot \ln 1{,}03.$$

Після цього обчислимо значення виразу:

$$m'(1) = (1{,}03)^1 \cdot \ln 1{,}03 \approx 0{,}0304;$$

$$m'(2) = (1{,}03)^2 \cdot \ln 1{,}03 \approx 0{,}0313;$$

$$m'(5) = (1{,}03)^5 \cdot \ln 1{,}03 \approx 0{,}0342.$$

III етап

Отже, швидкість зміни маси дріжджів при 1 год від початку становить $0{,}0304$ г/год, при 2 год – $0{,}0313$ г/год, при 5 год – $0{,}0342$ г/год.

Відповідь. $m(t) = (1{,}03)^t$; $0{,}0304$ г/год; $0{,}0313$ г/год; $0{,}0342$ г/год.

Після розв'язування таких типів задач слід зосередити увагу на методиці розв'язування задач достатнього та підвищеного рівня складності.

Задача 14. Два тіла рухаються прямолінійно відповідно до законів $s_1(t) = t^3 + 3t^2 - 2t + 2$ і $s_2(t) = t^3 + 2t^2 + 5t - 4$ (s_1, s_2 – шлях у метрах, час t – у секундах). Знайдіть прискорення кожного з тіл у момент часу, коли вони пройшли однаковий шлях [5, с. 324].

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у виконанні двох дій. Спочатку слід визначити час, у момент якого тіла пройшли однаковий шлях, тобто розв'язування рівняння: $s_1(t) = s_2(t)$. Після цього необхідно обчислити значення прискорення у визначений момент часу за фізичним змістом похідної $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

II етап

Рівняння $t^3 + 3t^2 - 2t + 2 = t^3 + 2t^2 + 5t - 4$ за допомогою рівносильних перетворень зводиться до квадратного рівняння $t^2 - 7t + 6 = 0$, коренями якого є: $t = 1$ або $t = 6$.

За правилами диференціювання знаходимо $a_1(t)$, $a_2(t)$:

$$a_1(t) = (t^3 + 3t^2 - 2t + 2)'' = (3t^2 + 6t - 2)' = 6t + 6;$$

$$a_2(t) = (t^3 + 2t^2 + 5t - 4)'' = (3t^2 + 4t + 5)' = 6t + 4.$$

Знаходимо значення функцій при визначених вище значеннях змінної t: $a_1(1) = 12$, $a_1(6) = 42$, $a_2(1) = 10$, $a_2(6) = 40$.

III етап

Отже, прискорення першого тіла в момент часу 1 c становить 12 м/с^2, тоді як другого – 10 м/с^2, а в момент часу 6 c: першого – 42 м/с^2, другого – 40 м/с^2.

Відповідь. 12 м/с^2, 10 м/с^2, 42 м/с^2, 40 м/с^2.

Доцільно показати зв'язок геометричного змісту похідної на основі практичної ситуації.

Задача 15. Висячий міст має форму дуги параболи $y = ax^2$ (рис. 2.4). Проліт мосту $AB = 2l = 80$ *м*, стріла прольоту $OC = h = 5$ *м*. Визначте кут провисання α у точці A [68, с. 50].

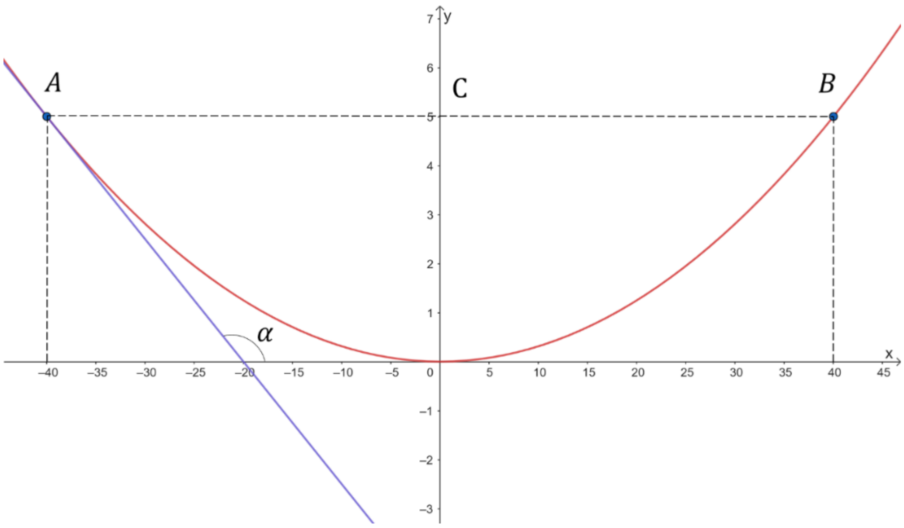

Рис. 2.4

Розв'язання:

I етап

Задача полягає у визначені кута провисання α, для цього слід пригадати геометричний зміст похідної. Слід врахувати, що через точку A проходить і графік функції, тобто можна визначити значення коефіцієнту.

Оскільки парабола проходить через точку $A(-40; 5)$, то координати точки задовольняють рівність: $1600a = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{320}$.

II етап

Тоді можна обчислити значення тангенса кута нахилу дотичної: $y' = \frac{1}{160}x$. Звідси приходимо, що $y'(-40) = -\frac{1}{4}$. Виходячи з того, що $\alpha = \pi - arctg\left(\frac{1}{4}\right)$ і $arctg\left(\frac{1}{4}\right) \approx 14°$, то $\alpha = 166°$.

Отже, кут провисання моста становить $166°$.

Відповідь. $166°$.

2.3.2. Застосування похідної для дослідження функцій, які моделюють процеси дійсності

Поняття похідної функції може бути використано до дослідження функцій, що є математичними моделями прикладних задач. Слід виділити, що для окремих задач завдання додатково полягатиме у створенні математичної моделі.

Перед цим доцільно розглянути задачу на застосування поняття екстремуму функції та зв'язку неперервності та диференційовності функції в точці.

Задача 16. При створенні динамічних відео з музичним супроводом враховують кількість метрометричних пульсацій (бітів). Нижче (рис. 2.5) наведено графік функції $y = f(t)$, $t \in [0; 60]$, який описує прискорення відео фрагменту (у %) за відповідний кадр t. Визначити які серед запропонованих точок описують метричну пульсацію, якщо відомо, що для даного випадку це повинні бути точки максимуму. Яка їх кількість? Чи існуватиме значення похідної в заданих точках (відповідь обґрунтуйте)?

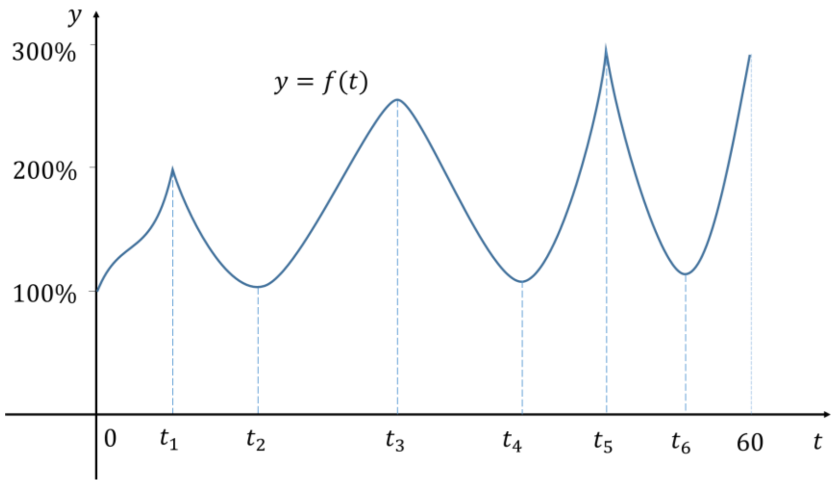

Рис. 2.5

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у: визначені точок максимуму та їх кількості, обґрунтувати існування похідної в усіх точках або спростувати це.

Математичною моделлю є зображення графіка функції, яке необхідно дослідити за допомогою вивченого матеріалу.

II етап

Нескладно встановити, що точки t_1, t_3, t_5 – точки максимуму, оскільки для них існують двосторонні околи: $(t_1 - \delta; t_1 + \delta)$, $(t_3 - \delta; t_3 + \delta)$, $(t_5 - \delta; t_5 + \delta)$ відповідно, для яких виконується умова: значення функції у даних точках більше за значення функції у відповідних околах (рис. 2.6). Важливо зазначити, що точка $t = 60$ не буде точкою максимуму (оскільки точка $t = 60$ не є внутрішньою, оскільки $D(f) = [0; 60]$, тобто для даної точки не існує правостороннього околу, який би входив до області визначення).

Оскільки в точках t_1, t_5 можна провести пари дотичних l_1, l_2 та l_4, l_5 відповідно, то значення похідної однозначно визначити не можливо. Для точки t_3 існує єдина дотична (пряма l_3), тобто функція є диференційовною в заданій точці.

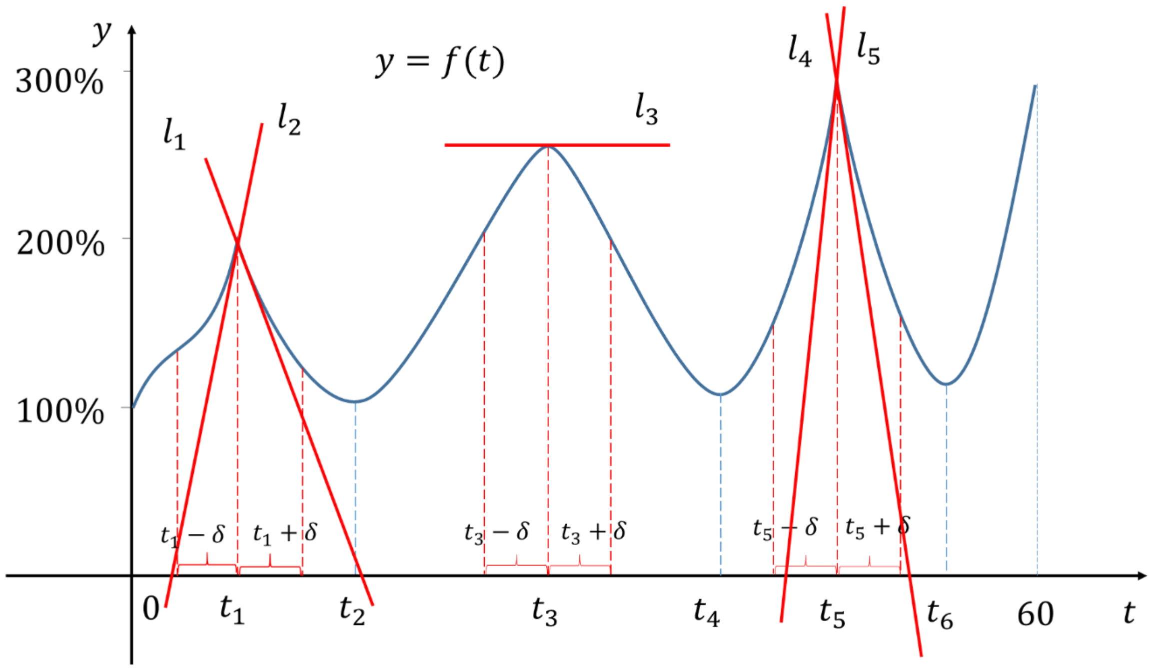

Рис. 2.6

III етап

Отже, серед всіх запропонованих точок тільки три: t_1, t_3, t_5, які описують метричну пульсацію; не у всіх серед визначених точок значення похідної існує.

Відповідь. t_1, t_3, t_5; три точки; не у всіх точках.

Задача 17. Хворому робиться ін’єкція ліків в момент часу $t = 0$. Концентрація цих ліків у крові в момент t описується залежністю $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$. Яке максимальне значення концентрації цих ліків у крові хворого і коли воно досягається [70, с. 59]?

Розв’язання:

I етап

Завдання полягає в тому, щоб знайти найбільше значення концентрації ліків у крові пацієнта після ін’єкції, тобто зводиться до дослідження функції $x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ на найбільше значення.

II етап

Оскільки відлік часу починається з моменту ін’єкції, то логічно встановити, що функції матиме область визначення $D(x)$: $t \in [0; +\infty)$.

Визначимо критичні точки, для цього знайдемо похідну функції $x(t)$:

$$x' = -e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

Після того, як було означено поняття критичної точки можна перейти до розв’язування рівняння $x' = 0$.

$$-e^{-t} + 2e^{-2t} = 0.$$

Поділивши обидві частини рівності на e^{-t} $(e^{-t} > 0)$, приходимо до рівняння рівносильного даному $2e^{-t} - 1 = 0$, коренем якого є число $t = \ln 2$. Оскільки $\ln 2 \in [0; +\infty)$, то $\ln 2$ є критичною точкою. Оскільки на області визначення існує єдина критична точка, то достатньо показати, що вона буде точкою максимуму.

Поділивши область визначення функції на проміжки, визначимо знак похідної на кожному з цих проміжків (рис 2.7). Приходимо до того, що $t_{max} = \ln 2$, $x_{max} = x(\ln 2\ ) = 1/4$.

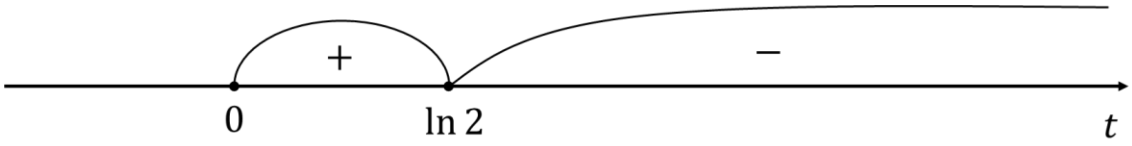

Рис. 2.7

III етап

Отже, найбільша концентрація ліків досягається у момент часу $t = \ln 2$ і становить $\frac{1}{4}$.

Відповідь. $\frac{1}{4}$, при $t = \ln 2$.

Задача 18. Для будівництва будинку прямокутної форми, зображеного на плані (рис. 2.8) темним прямокутником, з площею 400 м^2 відведено ділянку у вигляді прямокутника, межі якої повинні знаходитись від будинку на відстані 36 і 16 м. Які розміри потрібно надати будинку, щоб площа ділянки $ABCD$ була найменшою [68, с. 61]?

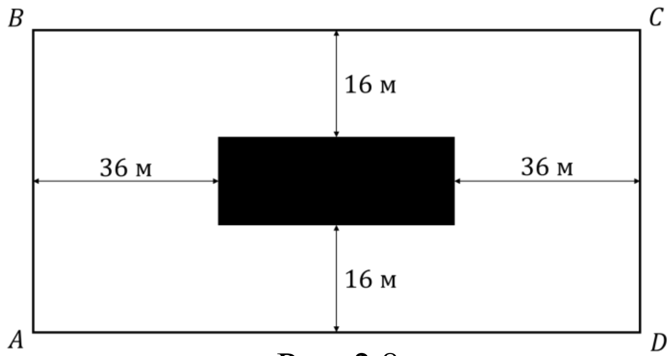

Рис. 2.8

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає в тому, щоб знайти найбільш оптимальні розміри будинку, щоб розміри ділянки були найменшими. Для цього потрібно побудувати цільову функцію $S(x)$, яка описує площу ділянки $ABCD$.

Нехай ширина будинку становить x метрів, а довжина з формули площі прямокутника становитиме $\frac{400}{x}$ метрів. Тоді нескладно визначити розміри ділянки: $AB = 32 + x$ (метрів) та $AD = 72 + \frac{400}{x}$ (метрів).

З отриманих значень приходимо до визначення залежності $S(x)$:

$$S(x) = (32 + x) \cdot \left(72 + \frac{400}{x}\right);$$

$$S(x) = 72x + \frac{12800}{x} + 2704.$$

Отримали цільову функцію, яка є математичною моделлю задачі. Задача зводиться до знаходження найбільшого значення функції на проміжку.

II етап

Оскільки довжина та ширина будинку повинні набувати додатних значень, то $D(S) = (0; +\infty)$.

Визначаємо критичні точки, для цього знаходимо похідну функції та знаходимо корені рівняння $S'(x) = 0$:

$$S'(x) = 72 - \frac{12800}{x^2}.$$

$$72 - \frac{12800}{x^2} = 0 \Rightarrow 72x^2 - 12800 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{40}{3}.$$

Враховуючи область визначення функції $D(S)$ критичною точкою є $x = \frac{40}{3}$.

Оскільки на області визначення існує єдина критична точка, то достатньо показати, що вона є точкою мінімуму. Розбиваємо область визначення критичною точкою та досліджуємо знак похідної на кожному із проміжків (рис. 2.9), враховуючи, що $S'(x) = \frac{\left(x - \frac{40}{3}\right)\left(x + \frac{40}{3}\right)}{x^2}$.

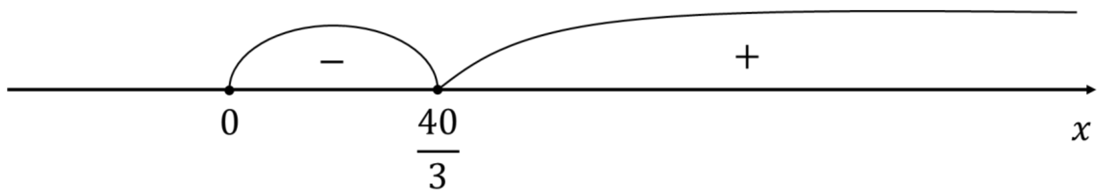

Рис. 2.9

Приходимо до того, що $x = \frac{40}{3}$ – точка мінімуму.

Етап III

Отже, довжина будинку повинна бути 30 метрів, а ширина – $13\frac{1}{3}$ метрів.

Відповідь. 30 метрів, $13\frac{1}{3}$ метрів.

Якщо до умови попередньої задачі додати: «Якщо ширина будинку не перевищує 15 м і не менша за 5 м», то дослідження функції на найбільше найменше значення буде проводити за іншою схемою.

2.3.3. Задачі прикладного змісту, які приводять до поняття первісної та інтеграла

Поняття первісної та інтегралу відіграють важливу роль при вивченні початків аналізу в профільній школі. Важливість даних понять полягає в описуванні різних природніх процесів та розв'язуванні класу прикладних задач.

Традиційно вивчення тем інтегрального числення починається із введення поняття первісної. Для того, щоб на початку вивчення теми поняття краще засвоїлось слід запропонувати учням колективне розв'язання наступної задачі.

Задача 19. Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $v = gt$, де $g \approx 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Знайдіть закон руху, якщо за перші 4 с тіло пройшло 80 м [68, с. 66].

Розв'язання:

I етап

Задача полягає у визначені закону руху тіла $s(t)$. Математичною моделлю задачі є закон $v = gt$. Доцільно пригадати фізичний зміст похідної: $s'(t) = v(t)$.

II етап

Далі доцільно задати питання: «Від якої функції $s(t)$ взяти похідну щоб в результаті отримати $v(t)$?». Зосередити увагу слід, на тому, що первісна не обмежується однією функцією $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. Тоді приходимо до сукупності первісних $s(t) = \frac{gt^2}{2} + C$, де $C = const$.

Після цього важливо знайти значення C, оскільки закон руху тіла повинен визначатись однозначно. Враховуючи, що закон руху тіла за рахунок зростаючої швидкості здійснюється в одному напрямку приходимо до початкової умови $s(4) = 80$, за якою встановлюємо значення сталої: $C = 0$.

III етап

Отже, закон руху тіла становить $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Відповідь. $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Після усвідомлення сутності понять первісної та невизначеного інтегралу вводиться поняття визначеного інтегралу. При введенні даного поняття доцільним є використання прикладних задач.

Задача 20. Визначте формулу для обчислення роботи A змінної сили $F(x)$ при переміщенні тіла по прямій з положення a в положення b, коли напрям сили співпадає з напрямом руху [68, с. 69].

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає в тому, щоб визначити значення роботи A, при цьому слід враховувати, що $A = F \cdot s$, де s – переміщення.

II етап

Будемо вважати, що функція $y = F(x)$ є неперервною та невід'ємно на числовому проміжку $[a; b]$, доцільно зобразити це графічно (рис. 2.10). Після цього виконаємо наступні кроки.

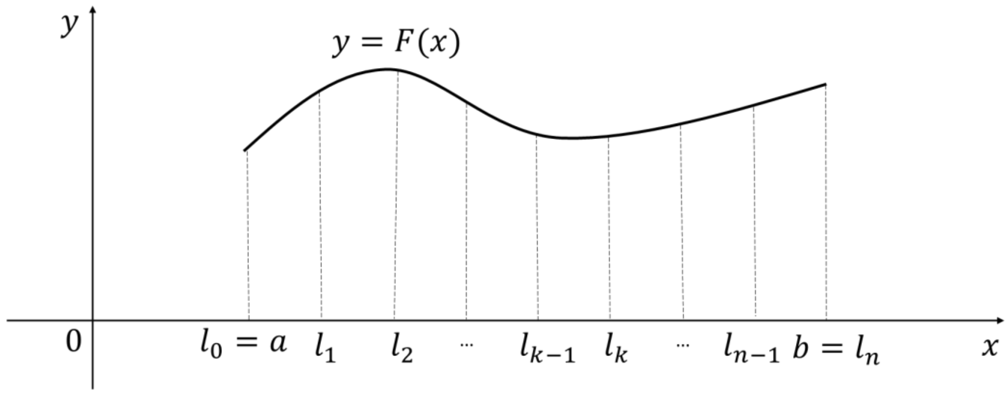

Рис. 2.10

1) Нехай заданий відрізок $[a; b]$ буде розділено на рівні частини, кількість яких становить n, тобто:

$$a = l_0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_k < l_{k+1} < \cdots < l_{n-1} < l_n = b.$$

2) Визначимо довжину кожного з відрізків Δl, оскільки загальна кількість відрізків складає n-рівних відрізків, то $\Delta l = \frac{b-a}{n}$.

3) Складемо добутки, які описують роботу по переміщенню тіла за частину шляху Δl: $F(l_{k-1}) \cdot \Delta l$, $k = \overline{1, n}$.

4) Знайдемо загальну суму отриманих на кроці 3 добутків, яка наближено описує значення роботи A_n на визначеному проміжку:

$$A_n = \big(F(l_0) + F(l_1) + F(l_2) + \dots + F(l_{n-1})\big) \cdot \Delta l.$$

5) Обчислення граничного значення $A = \lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

<u>III етап</u>

Отже, шукане значення роботи A обчислюється за формулою:

$$A = \int\limits_a^b F(x)\,dx.$$

Відповідь. $\int_a^b F(x)\,dx$.

В наступному пункті роботи зосередимо увагу на застосуванні первісної та визначеного інтеграла у різних наукових напрямках.

2.3.4. Застосування первісної та інтеграла у різних галузях знань

При вивченні теми первісної та невизначеного інтеграла можна запропонувати учням застосування до інших галузей знань, наприклад біології. Розглянемо дві задачі.

Задача 21. Популяція комах, початкова чисельність якої дорівнює 1000, зростає зі швидкістю $w(t) = \frac{9000}{(1+t)^2}$ комах у день. Знайдіть закон зміни чисельності P популяції комах в залежності від часу t (час виражено у днях) [68, с. 71-72].

Розв'язання:

<u>I етап</u>

Завдання полягає у визначені закону популяції. Оперуючи поняттям первісної можемо записати, що $P'(t) = w(t)$. При цьому доцільно показати учням інший спосіб відшукання загального вигляду первісної.

<u>II етап</u>

Знайдемо невизначений інтеграл $\int \frac{9000}{(1+t)^2} dx$. Обчислення даного інтегралу вимагає від учнів знань властивостей інтегрування. Одержимо:

$$\int \frac{9000}{(1+t)^2} dx = 9000 \int (1+t)^{-2}\ dx = -\frac{9000}{1+t} + C.$$

Користуючись початковою умовою, що $P(0) = 1000$ знаходимо значення сталої C:

$$-9000 + \mathrm{C} = 1000 \Longrightarrow C = 10000.$$

III етап

Отже, закон зміни популяції комах становить $P(t) = -\frac{9000}{1+t} + 10000$.

Відповідь. $P(t) = -\frac{9000}{1+t} + 10000$.

Задача 22. Якщо опустити кристал у насичений розчин цієї самої речовини, то кристал почне збільшуватись. Швидкість зміни маси кристала описується формулою $v = 0{,}002t$, де v – швидкість (в кг/с), t – час (в с). Знайдіть масу кристала через 5 с після того, як його опустили в розчин, якщо початкова маса кристала 0,005 кг [70, с. 71].

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначенні маси кристалу у момент часу $t = 5$. Потрібно зосередити увагу учнів на тому, що функція $v = 0{,}002t$ описує зростання маси тіла в певний момент часу, після чого визначити рівність: $m'(t) = v(t)$.

II етап

Використовуючи поняття невизначеного інтеграла отримаємо:

$$\int 0{,}002t\, dt = 0{,}001t^2 + C.$$

Виходячи з початкової умови $m(0) = 0{,}005$, приходимо, що $C = 0{,}005$. Тоді $m(t) = 0{,}001t^2 + 0{,}005$ – функція маси кристалу в залежності від часу t. Отримаємо, що $m(5) = 0{,}03$.

III етап

Отже, маса кристала в момент часу 5 с становитиме 0,03 кг.

Відповідь. 0,03 кг.

Зазначимо, що друга задача вимагає побудови функції та встановлення значення у відповідній точці.

Типовою помилкою учнів при розв'язанні другої задачі може бути використання поняття визначеного інтегралу. Тому важливо показати доцільність використання даного поняття на прикладі конкретної задачі.

Задача 23. Знайдіть кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за час від 2 до 6 с, якщо сила струму змінюється за законом $I(t) = 3t^2 - 2t + 1$ А [68, с. 73].

Розв'язання:

I етап

Для визначення кількості струму доцільно пригадати фізичний зміст похідної: $q'(t) = I(t)$, де $q(t)$ – закон передачі заряджених частинок та поняття сили струму: $I = \frac{q}{t}$. За аналогією до задачі 20 можемо прийти до формули визначення кількості електрики: $q = \int_a^b I(t)\,dt$.

II етап

Таким чином, отримаємо:

$$q = \int_2^6 (3t^2 - 2t + 1)\,dt = (t^3 - t^2 + t)|_2^6 = 180.$$

III етап

Отже, кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника у момент часу від 2 до 6 с становить 180 *Кл*.

Відповідь. 180 *Кл*.

Окрім такого типу завдань учням слід запропонувати розв'язування задач на обчислення площі плоских поверхонь та об'ємів тіл обертання.

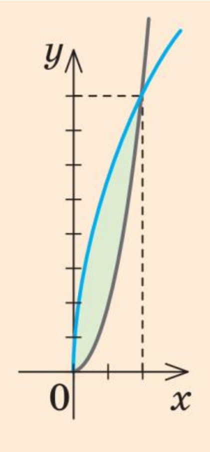

Рис. 2.11

Задача 24. Потрібно пофарбувати з однієї сторони 30 однакових плоских металевих деталей. Ескіз деталі зображено на рис. 2.11 (верхня межа деталі задається графіком функції $y = 8\sqrt{x}$, а нижня — графіком функції $y = x^2$, одиничний відрізок на ескізі дорівнює 20 см). Скільки банок, що містять по 0,9 кг фарби, потрібно придбати, якщо для фарбування 1 м^2 поверхні витрачається 130 г фарби [37, с. 99]?

Розв'язання:

I етап

Математичною моделлю задачі є даний в умові ескіз деталі, який задано відповідними функціями.

Для розв'язування задачі необхідно пригадати правило, за яким обчислюємо площу плоскої поверхні.

II етап

Очевидно, що підінтегральною функцією буде вираз $8\sqrt{x} - x^2$. Необхідно знайти межі інтегрування. Для цього розглянемо рівняння $8\sqrt{x} - x^2 = 0$, коренями якого є: $x = 0$ або $x = 2\sqrt[3]{2}$. Тоді площа плоскої поверхні деталі $S_{\text{дет}}$ дорівнює:

$$S_{\text{дет}} = \int_0^{2\sqrt[3]{2}} (8\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{16}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2\sqrt[3]{2}} = 16 \text{ кв. од.}$$

Отримане значення площі потрібно перевести до встановлених одиниць виміру. Оскільки одиничний відрізок ескізу менший у 5 разів за 1 метри, то одиниця площі, менша у 25 разів за 1 м^2. Тому $S_{\text{дет}} = \frac{16}{25}\text{м}^2$.

Оскільки потрібно пофарбувати 30 плоских деталей (з однієї сторони), то загальне значення площі становить $S = 30 \cdot S_{\text{дет}}$, тобто $\frac{96}{5}\text{м}^2 = 19{,}2 \text{ м}^2$.

Після цього потрібно визначити кількість банок фарби за відомими значенням, нескладно встановити формулу:

$$n = \frac{130 \cdot S}{900} \Rightarrow n \approx 2{,}82.$$

III етап

Оскільки фарба в магазині продається цілісно (без поділу), то необхідно закупити 3 банки фарби.

Відповідь. 3 банки фарби.

Одним з засобів реалізації прикладної спрямованості навчання у Франції є математичні сюжети. Приклади таких сюжетів представлені у статті О.І. Соколенко, Л.О. Соколенко [76]. Запропонуємо авторський сюжет на застосування визначеного інтегралу до обчислення об'єму тіла обертання, яке є математичною моделлю реального об'єкта.

Сюжет 1. Серед експонатів на виставці збільшених предметів була запропонована ваза (на спеціальній підставці) основа якої має форму кульового сегменту радіуса 5 дм, а верх – зрізаний конус висота якого 3 дм (рис. 2. 12). Обчислення об'єму даного тіла може бути здійснено за допомогою інтегрального числення. При цьому функція задається кусково-задано (рис. 2.13).

1. Обчислити об'єм V тіла за допомогою інтегрального числення.

2. Обчислити об'єм тіла за допомогою геометричних формул.

а) Обчислити об'єм кульового сегменту $V_{\text{сегм}}$.

б) Обчислити об'єм зрізаного конуса $V_{\text{зр.кон}}$.

в) Знайти об'єм V як суму об'ємів $V_{\text{сегм}} + V_{\text{кон}}$.

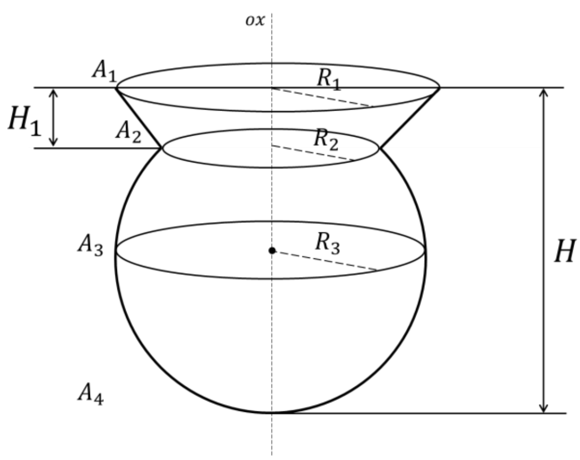

Рис. 2.12

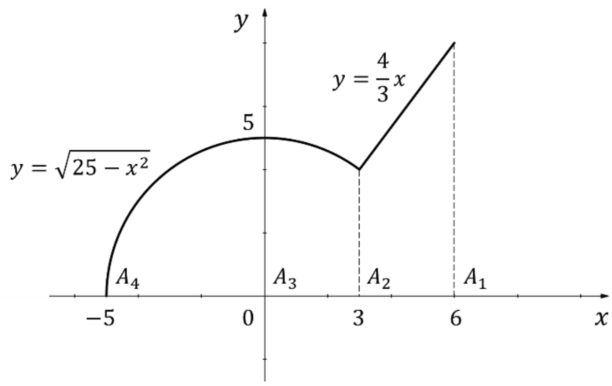

Рис. 2.13

Розв'язання:

I етап

Особливістю завдання є знаходження невідомого двома способами. Спочатку виконаємо дії над обчисленням об'єму як тіла обертання від заданої функції. Оскільки функція є неперервною, то обчислення об'єму можна розкласти на суму двох визначених інтегралів.

II етап

$$V = \pi \int_{-5}^{3} (25 - x^2)\, dx + \pi \int_{3}^{6} \frac{16x^2}{9}\, dx = \pi \left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{3} + \frac{16\pi}{27}(x^3)|_{-5}^{3} = \frac{784\pi}{3}.$$

Для обчислення об'єму другим способом учням необхідно згадати формули об'ємів для заданих геометричних тіл:

$$V_{\text{сегм}} = \pi H_{\text{сегм}}^2 \left(r - \frac{H_{\text{сегм}}}{3}\right);$$

$$V_{\text{зр.кон}} = \frac{1}{3}\pi H_1 (R_1^2 + R_1 R_2 + R^2).$$

Необхідні значення для обчислення об'єму можна визначити за рис. 2.14: $H_{\text{сегм}} = 8$ дм, $H_1 = 3$ дм, $R_1 = 8$ дм, $R_2 = 4$ дм, $R_3 = 5$ дм. Підставивши отримаємо наступні значення об'ємів.

$$V_{\text{сегм}} = \frac{448\pi}{3};$$

$$V_{\text{зр.кон}} = 112\pi;$$

$$V = \frac{448\pi}{3} + 112\pi = \frac{784\pi}{3}.$$

III етап

Враховуючи, що одиницями виміру є дециметри і $\frac{784\pi}{3} \approx 821$, то $V = 821\,\text{дм}^3$. Доцільно при цьому наголосити, що об'єм такої вази становитиме 821 л, що відповідає умовам виставки збільшених предметів.

Відповідь. $821\,\text{дм}^3$.

Зазначимо, що введення такого типу сюжетів дозволяє вдосконалити знання теоретичного матеріалу та проаналізувати доцільність використання різних методів.

2.4. Методика впровадження та використання системи прикладних задач при вивченні теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики»

Як було зазначено раніше для даної змістової лінії характерним є значний потенціал реалізації прикладної спрямованості. При вивченні елементів комбінаторики слід звернути увагу на застосування сполук (перестановки, розміщення, комбінації) та комбінаторних правил (суми, добутку).

Спочатку запропонуємо методику розв'язування задач на первинне засвоєння понять основних сполук.

Задача 25. Старшокласник Андрій спланував на вихідних виконати ряд завдань: зробити домашнє завдання на понеділок, відвідати гурток робототехніки, зробити генеральне прибирання у кімнаті, зустрітись із друзями, сходити до стоматолога. Скільки можливих послідовностей виконання поставлених Андрієм завдань може бути?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає в тому, щоб знайти загальну кількість способів. Загалом множина діяльностей налічує 5 дій, послідовність виконання яких має значення. Оскільки всі елементи задіяні, то приходимо до формули перестановок.

II етап

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

III етап

Отже, існує 120 способів планування діяльності на вихідних у Андрія.

Відповідь. 120 способів.

Задача 26. Для виконання проєктів клас поділили на 5 груп. Вчитель запропонував до вибору учнів 10 навчальних проєктів. Скількома способами учні можуть обрати теми для виконання проєктів, якщо кожна група може обрати тільки одну тему?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає в тому, щоб визначити загальну кількість способів обирання тем для проєкту. Загалом задано множина з 10 елементів, що описує кількість проєктів. Утворена множина повинна включати 5 елементів – групи учнів, кожна з яких обрала тему. Причому така множина є упорядкованою (обирання тем має значення). Тоді приходимо до поняття розміщення.

II етап

$$A_{10}^{5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240.$$

III етап

Отже, обирання тем проєктів для 5 груп можна здійснити 30240 способами.

Відповідь. 30240 способів.

Задача 27. Максим вирішив сходити в магазин АТБ за покупкою двох різних безалкогольних газованих напоїв. На вітрині магазину були наступні: «Кока-кола», «Живчик», «Пепсі», «Байкал», «Фанта», «Тархун». Скількома способами хлопчина може це зробити?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає в тому, щоб серед шести напоїв обрати два. Для даного випадку доцільно наголосити на тому, що порядок обирання напоїв не має значення (для розуміння можна змоделювати ситуацію, коли розташування напоїв у сумці не має значення). Приходимо до поняття комбінації.

II етап

$$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15.$$

III етап

Отже, обирання двох різних напоїв серед запропонованих можна зробити 15 способами.

Відповідь. 15 способів.

Паралельно до виконання даних задач вчитель повинен запропонувати учням заповнити таблицю. Послідовність виконання задач та заповнення таблиці допоможе структурувати теоретичний матеріал.

Таблиця 3

Початкова множина	5 видів діяльності	10 навчальних проєктів	6 видів напоїв
Новостворена множина або підмножина	Множина послідовності виконання 5 дій	Підмножина 5 груп учнів, що обирають проєкти	Підмножина обирання 2 напоїв
Впорядкованість	Так	Так	Ні
Сполука	Перестановка	Розміщення	Комбінація

Вище зазначені задачі слід доповнити складнішими, в яких додатково використовуються комбінаторні правила: суми і добутку.

Задача 28. В одній піцерії діє пропозиція на приготування піци за власним рецептом. Базовий набір інгредієнтів включає: тісто, томатна паста, сир та базилік. Доповнити даний рецепт можна наступними позиціями зі списку: ковбаса, шинка, гриби, помідори, цибуля, болгарський перець. Скільки всього можна зробити рецептів (враховуйте, що базовий набір продуктів вважається окремим рецептом)?

Розв'язання:

<u>I етап</u>

Завдання полягає у тому, що визначити загальну кількість рецептів. Загалом множина інгредієнтів, які можна додати до приготованої піци становить 6 продуктів. Коли здійснюється замовлення касир запитує: «Чи хочете ви додати в піцу ковбасу?» відповідь на дане питання може бути: «так» або «ні».

Аналогічно можна запитати до додавання інших продуктів (і шинки, і грибів, і помідорів і т.д.). Такий діалог приводить до узагальненого правила добутку.

<u>II етап</u>

$$N = 2^6 = 64.$$

<u>III етап</u>

Отже, всього можна зробити піцу за 64 рецептами.

Відповідь. 64 рецепти.

Доцільно звернути увагу на прикладні задачі, які вимагають складання множини, яка є доповненням до даної.

Задача 29. З 10 різних квітів треба скласти букет так, щоб у ньому було не менше двох квітів. Скількома способами можна скласти такий букет [68, с. 96]?

Розв'язання:

<u>I етап</u>

Завдання полягає в тому, щоб визначити кількість букетів, які мають не менше двох квітів, тобто від 2 до 10. Очевидно, що використання формули комбінації з правилом додавання є громіздкою.

Введемо множину, яка доповнює дану. Нескладно встановити, що це число букетів, яке складається з однієї квітки. Позначимо, що $N_{заг}$ – загальна кількість способів формування букетів, N_1 – кількість способів складання букету з однієї квітки ($N_1 = 10$), N – шукане число. Тоді $N = N_{заг} - N_1$.

<u>II етап</u>

Загальне число букетів обчислимо аналогічно як в попередньому пункті, виключивши одну множину (всі квіти в букеті відсутні, тобто букета не існує). $N_{заг} = 2^{10} - 1 = 1023$. Тоді $N = 1023 - 10 = 1013$.

<u>III етап</u>

Отже, букет, який складається не менше ніж із 2 квітів можна зробити 1013 способами.

Відповідь. 1013 способів.

Після вивчення теми комбінаторики починається засвоєння теоретичного матеріалу з теорії ймовірностей. До фундаментальних понять теми можна віднести: випадкова подія, простір елементарних подій, класичне означення ймовірності. Для засвоєння даних понять доцільно запропонувати розв'язування задач середнього або достатнього рівня складності.

Задача 30. Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри і, пам'ятаючи лише, що всі цифри різні, набрав їх довільно. Знайдіть ймовірність того, що було набрано потрібний номер телефону [68, с. 98].

Розв'язання:

I етап

Перш за все необхідно встановити випадкову подію. Нехай A – подія, коли було набрано вірний номер телефону. Тоді за класичним означенням ймовірності потрібно прийти до визначення простору елементарних подій n та кількості сприятливих елементарних подій m, що задовольняють подію A. При цьому слід звернути увагу на те, що кожен телефонний номер є унікальним.

II етап

Оскільки $m = 1$ та за правилом добутку: $n = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, то ймовірність події A становить: $P(A) = \frac{1}{720}$.

III етап

Отже, ймовірність правильно зателефонувати навмання за номером телефону, в якого три останні цифри запису є різними, становить $\frac{1}{720}$.

Відповідь. $\frac{1}{720}$.

Водночас для закріплення знань можна виконати і більш складні задачі.

Задача 31. Десять різних книг, серед яких тільки дві мають одного автора, стоять на полиці. Визначте ймовірність того, що книги одного автора стоять поруч [68, с. 99].

Розв'язання:

I етап

Нехай A – подія, коли дві книги одного автора стоять поряд. Тоді за класичним правилом ймовірності задача зводиться до відшукання m та n.

II етап

При розв'язуванні задачі слід навести ілюстрацію (рис. 2.14), показавши, що 2 підручники можна вважати за один. Причому позицій для розташування комплексу підручників буде 9, для інших підручників діє правило перестановки.

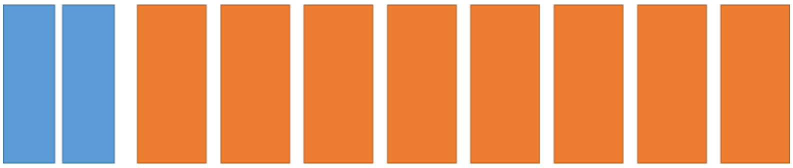

Рис. 2.14

Враховуючи, що книги одного автора також можуть переставлятись приходимо до значення кількості сприятливих подій m за правилом добутку матиме вигляд: $m = 2 \cdot 9 \cdot P_8 = 18 \cdot 8!$. Загальна кількість всіх варіантів може бути представлена у вигляді перестановок за десятьма елементами: $n = 10!$.

Приходимо за класичним означенням імовірності: $P(A) = \frac{18 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{5}$.

III етап

Отже, ймовірність того, що на полиці з 10 книг дві книги одного автора стоятимуть поряд становить $\frac{1}{5}$.

Відповідь. $\frac{1}{5}$.

Прикладні задачі доцільно використати при вивченні основних теорем, які описують додавання та множення несумісних подій, а також на визначення значення ймовірності принаймні однієї події.

Задача 32. Відповідно до статистичних даних, групу крові A має $0{,}369$ частини всіх європейців, групу B – $0{,}235$, групу AB – $0{,}006$, групу O – $0{,}390$. Знайдіть імовірність того, що у довільно взятого донора – європейця група крові А або В [70, с. 98].

Розв'язання:

I етап

Нехай K – подія обирання донора з групою крові A, L – з групою B, M – з групою AB, N – з групою O. Зосередити увагу учнів слід на тому, що дані події є несумісними і разом утворюють повну групу подій.

<u>II етап</u>

За правилом суми несумісних подій отримаємо: $P(K \cup L) = P(K) + P(L)$. Тобто $P(A \cup B) = 0{,}369 + 0{,}235 = 0{,}604$.

<u>III етап</u>

Отже, ймовірність, що кров довільного донора-європейця буде або A або B становить $0{,}604$.

Відповідь. $0{,}604$.

Задача 33. Під час лікування захворювання використовуються 3 лікарські препарати, кожен з яких дає алергічні реакції у 1 % випадків. Яка ймовірність, що у хворого, вибраного довільним чином не буде алергії при прийомі трьох препаратів одночасно [70, с. 101]?

Розв'язання:

<u>I етап</u>

Нехай A – подія виникнення алергічної реакції на перший препарат, B – на другий, C – на третій. Тоді доцільно звернути увагу на ситуацію, коли препарати не будуть давати алергічної реакції. Приходимо до поняття протилежної події.

<u>II етап</u>

$$P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = P(\bar{C}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

За правилом добутку трьох несумісних подій приходимо до того, що $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C})$. Звідси, $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \approx 0{,}9702$.

<u>III етап</u>

Отже, ймовірність відсутності алергії у пацієнта під час приймання всіх трьох препаратів становить $0{,}9702$.

Відповідь. $0{,}9702$.

Задача 34. Для учнів школи виділили кімнату для відпочинку та поставили 4 комп'ютери для дозвілля та роботи учнів в навчальний час. Як показало статистичне дослідження ймовірність того, що комп'ютер увімкнений у даний момент становить 0,7. Обчислити ймовірність того, що принаймні один із комп'ютерів працює в даний момент.

Розв'язання:

I етап

Нехай A – подія роботи принаймні одного комп'ютера в даний момент часу, A_i – робота конкретного комп'ютера ($i = \overline{1,4}$). При розв'язуванні такого типу завдання необхідно зосередити увагу учнів на сутності слова «принаймні». Після цього перейти до визначення ймовірності за протилежною подією:

$$P(A) = 1 - \left(P(\overline{A_i})\right)^4.$$

II етап

Оскільки $P(A_i) = 0{,}7$, то $P(\overline{A_i}) = 0{,}3$. Тоді $P(A) = 1 - (0{,}3)^4 = 0{,}9919$.

III етап

Отже, ймовірність того, що принаймні один із комп'ютерів буде увімкненим в даний момент часу становить $0{,}9919$.

Відповідь. $0{,}9919$.

Істотним при вивченні математичної статистики є дослідження статистичних рядів. Запропонуємо наступний сюжет

Сюжет 2. У таблиці 4 визначено (в середньому) затрати часу x_i (у годинах), які були витрачені студентом на написання певної кількості сторінок дипломної роботи y_i.

Таблиця 4

Час (години), x_i	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Кіл-сть сторінок, y_i	1	2	4	5	4	6	7	7	6	6

1. У прямокутній системі координат побудуйте множину заданих точок (значення x_i відкладати по осі абсцис, а y_i – по осі ординат).

2. Здійснити лінійне вирівнювання множини, визначивши координати точки A_1 – середини перших п'яти точок та точки A_2 – середини п'яти наступних точок. Визначити рівняння прямої A_1A_2, побудувавши графік.

3. Проаналізуйте за графіком функції ефективність роботи студента (з точністю до цілих) за 6 годин безперервної роботи над дипломною роботою.

Розв'язання:

I етап

Математичною моделлю задачі є визначений у таблиці 4 ряд даних. Його дослідження включає наступні дії: побудова точок ряду значень, визначення середнього значення координат для точок A_1, A_2 та побудова прямої A_1A_2 та визначення функціональної залежності $y(x)$ з визначенням значення функції при заданому значенні аргументу.

II етап

Точка $A_1(\overline{x_1}; \overline{y_1})$ матиме наступні координати.

$$\overline{x_1} = \frac{0{,}5 + 1 + 1{,}5 + 2 + 2{,}5}{5} = 1{,}5;$$

$$\overline{y_1} = \frac{1 + 2 + 4 + 5 + 4}{5} = 3{,}2;$$

Точка $A_2(\overline{x_2}; \overline{y_2})$ матиме наступні координати.

$$\overline{x_2} = \frac{3 + 3{,}5 + 4 + 4{,}5 + 5}{5} = 4;$$

$$\overline{y_2} = \frac{6 + 7 + 7 + 6 + 6}{5} = 6{,}4.$$

Скористаємось формулою для визначення рівняння прямої заданої двома точками: $A(1{,}5; 3{,}2)$, $B(4; 6{,}4)$. Отримаємо наступне рівняння.

$$\frac{x - 1{,}5}{4 - 1{,}5} = \frac{y - 3{,}2}{6{,}4 - 3{,}2};$$

$$\frac{x - 1{,}5}{2{,}5} = \frac{y - 3{,}2}{3{,}2}.$$

Після рівносильних перетворень можна перейти до функції заданої явно.

$$y = 1{,}28x + 1{,}28.$$

Визначені в умови точки ряду і пряму A_1A_2 зобразимо на рис. 2.15. Значення функції у точці $x = 6$ становить: $y(6) = 8{,}96$.

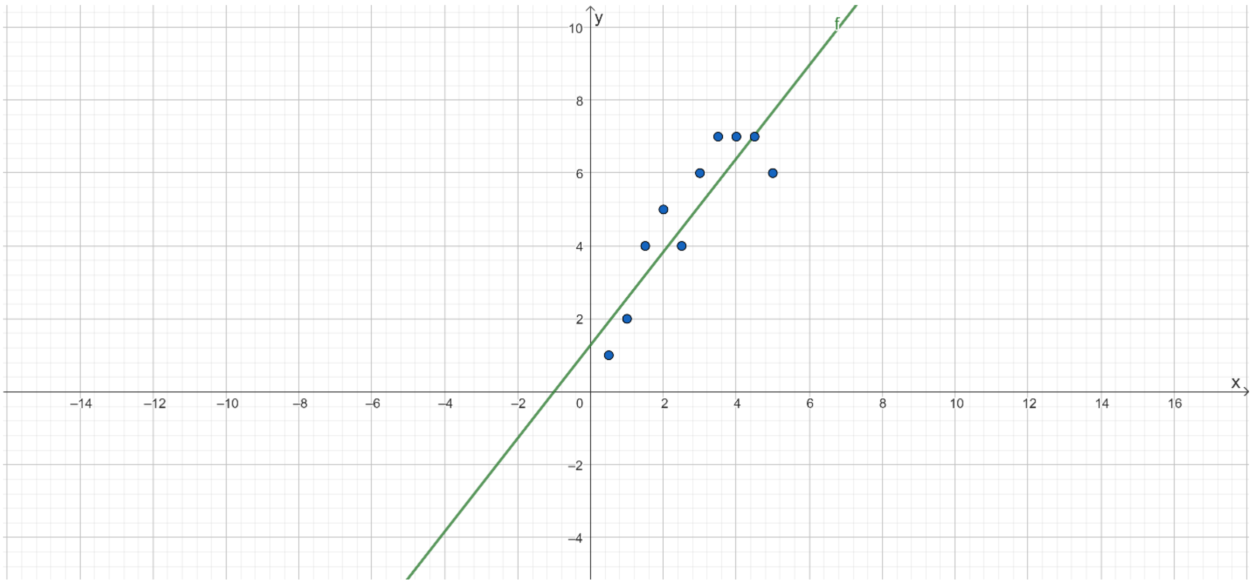

Рис 2.15

<u>ІІІ етап</u>

Отже, при виконанні дипломної роботи впродовж 6 годин студент зможе написати 9 сторінок тексту роботи.

Відповідь. 9 сторінок.

2.5. Методика впровадження та використання системи прикладних задач при вивченні аксіом стереометрії, паралельності та перпендикулярності прямих і площин

Вивчення стереометрії починається із усвідомлення неозначуваних понять простору (точка, пряма, площина) та фундаментальних правил – аксіом, на основі яких вивчається взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Зміст даних тем передує при вивченні інших розділів стереометрії, тому існує необхідність сформувати в учнів правильне уявлення про базові поняття та властивості, для їх подальшого застосування.

Як показав проведений аналіз підручників з математики (пункт 1.3.2), що основна частина задач з даних тем є якісними прикладними задачами. За посібником В.О. Швеця, А.В. Прус [82] зазначено, що до такого класу відносять задачі на обґрунтування процесів дійсності (завдання може включати нескладні обчислення). Запропонуємо методику розв’язування таких задач.

Рис. 2.16

Задача 35. В різних сферах професійної діяльності для обчислювальних пристроїв використовують штатив (рис. 2.16). Чому при конструюванні штативу надається перевага формі триноги?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у поясненні форми конструкції. Наочна ілюстрація дає можливість перейти до постановки математичної задачі. Для цього слід наголосити учням: «Які елементи штативу реалізовують опору?». Після надання відповіді (ніжки штативу) продовжуємо розмову: «За допомогою якого геометричного об'єкту можна описати кінці ніжок штативу, що опираються в підлогу?». Приходимо до трьох точок простору.

II етап

Оскільки задано три точки, то за аксіомами простору завжди знайдеться площина, до того ж тільки єдина, до якої належатимуть всі три точки.

III етап

На третьому етапі слід наголосити, що зношування ніжок штативу не призводить до втрати стійкості за рахунок визначення нової площини, що співпадатиме з площиною підлоги. Отже, штатив задається у формі триноги за рахунок постійної опори.

Відповідь. За рахунок більшої стійкості.

Задача 36. Вважаючи двері кімнати моделлю площини, а петлі, замок чи засув точками, поясніть, чому незамкнені двері відчиняються, а замкнені – нерухомі [36, с. 175].

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у поясненні зміни положення дверей в залежності від того чи зачинені вони, чи ні. Оскільки умова задачі не має ілюстрації, то слід привести приклад (рис. 2.17).

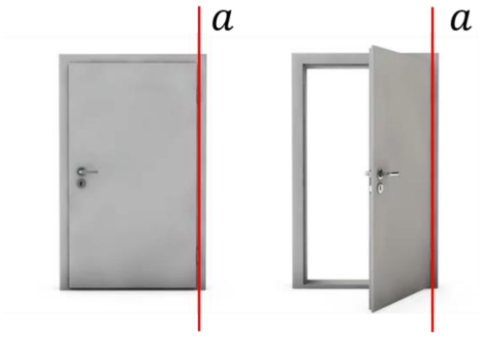

Рис. 2.17

Унаочнення постановки задачі допомагає учням зрозуміти, що завіси, за допомогою яких здійснюється зміна положення абстрагуються до поняття прямої (вісь обертання a), а двері – у площину.

<u>II етап</u>

Доцільно розв’язати математичну задачу: «Скільки площин можна побудувати за прямою a». Визначаємо нескінченну кількість площин. Після цього дати відповідь на питання: «Скільки площин можна побудувати за прямою a та точкою поза нею?» Приходимо до наслідку аксіоми, що визначає єдину площину.

<u>III етап</u>

Отже, зачинені двері є нерухомими за рахунок існування опори (точки), яка визначає це положення однозначно. Відчинені двері на мають точки опори і тим самим положення дверей визначається неоднозначно.

Відповідь. За рахунок відсутності або існування точки опори дверей та наслідку з аксіом стереометрії незамкнені двері відчиняються, а замкнені – ні.

Задача 37. Кирило для запобігання незначних перегрівів ноутбука вирішив придбати підставку (рис. 2.18). Через деякий час підставка почала хитатись. Кирило звернувся за допомогою до тата, який працював столяром. За допомогою двох ниток було визначено, що кінці ніжок підставки не лежать в одній площині. Після чого проблему було усунуто за рахунок коригування кріплень ніжок. Яким чином було визначено, що кінці ніжок підставки лежали не в одній площині?

Рис. 2.18

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначені методу встановлення належності всіх точок до однієї площини. Після цього довести протилежне. При розв'язуванні задачі потрібно встановити математичну модель. Для цього абстрагуючись від реальних об'єктів приходимо до чотирьох точок та двох прямих.

II етап

Доцільно підвести учнів до наслідків з аксіом. Тоді приходять до двох випадків: паралельності і перетинання двох прямих між собою. При перевірці обох варіантів встановлюють, що при перетині двох прямих утворюється єдина площина. Водночас, якщо дві площини не перетинаються, то площини не існує.

III етап

Отже, за допомогою двох ниток, які натягнуті вздовж протилежних кінців ніжок підставки, можна визначити нестійкість підставки (якщо нитки не перетнуться).

Відповідь. За допомогою натягнутих вздовж протилежних кінців ніжок ниток.

Наступні задачі передбаченні при вивченні паралельності та перпендикулярності у просторі.

Задача 38. Чому шухляди шаф або письмових столів іноді рухаються ривками, із зупинками [82, с. 61]?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у дослідженні механізму роботи шафи та визначенні помилок в механізмі. Доцільно проілюструвати реальних об'єкт поєднавши його з геометричними об'єктами (рис. 2.19).

Рис 2.19

Прямі a_1 та a_2 є математичною моделлю напрямних шухляди, за допомогою яких здійснюється її рух. Зосередимо увагу на тому, чому напрямні повинні бути паралельними.

II етап

Слід запитати в учнів: «Якщо прямі b_1 та b_2 є паралельними, то якими будуть відрізки, що лежать між паралельними прямими a_1 та a_2?». Очевидно, рівними. Порушення даної умови приводить до наступного висновку.

III етап

Отже, порушення паралельності напрямних шухляди приводить до збільшення тертя коліщаток (за рахунок зменшення або збільшення відстані між напрямними), що зумовлює заїдання шухляди.

Відповідь. За рахунок паралельності напрямних шухляди.

Розуміння змісту задачі та його переосмислення дають можливість сформувати одну із властивостей для паралельних площин: «Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні» [35, с. 223].

Для більшого усвідомлення паралельності площин можна навести приклад із стаканом води, рівень рідини в якому відповідає площині паралельній площині підлоги, а площина стакана відповідає площині підвіконня. За рахунок такої ситуації відбувається мотивація до наступної властивості: «Якщо дві різні площини паралельні третій, то вони паралельні одна одній» [35, с. 224].

Після цього доцільно перейти до застосування теорії з перпендикулярності у просторі. Запропонуємо методику використання та розв’язування такого типу завдань.

Задача 39. Михайло та Валерій запланували ремонт у будинку. Перше, що необхідно було зробити – перевірити перпендикулярність стін до підлоги. Оскільки при собі вони не мали професійного обладнання, то було прийнято рішення визначити перпендикулярність стін за допомогою нитки з тягарцем. Яким чином вони це зробили?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає в обґрунтуванні методу перевірки. Для цього слід здійснити абстрагування від реальних предметів: стінки кімнати та нитка з тягарцем. Приходимо до поняття площини та прямої.

II етап

Оскільки пряма за умовою задачі є перпендикулярною до поверхні землі (за рахунок сили тяжіння), то при умові, що дана пряма лежить в іншій площині приходимо до перпендикулярності двох площин (за ознакою).

III етап

Отже, за рахунок перпендикулярності нитки до площини підлоги і прилягання її до стіни можна стверджувати про перпендикулярність стіни до підлоги.

Відповідь. За рахунок ознаки перпендикулярності площин.

Задача 40. Квадратну стальну платформу товщиною 0,25 м і площею 4 м^2 підвішено горизонтально на чотирьох тросах. Довжина кожного троса 2 м. Обчислити кути нахилу тросів до платформи. Чи вміститься на цю платформу циліндричний бак, висота якого 0,9 м, діаметр основи 0,6 м [82, с. 64]?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначенні кута нахилу тросів а також порівнянні площ поверхонь платформи та циліндричного баку. Перед розв'язуванням задачі слід побудувати її математичну модель (рис. 2.20).

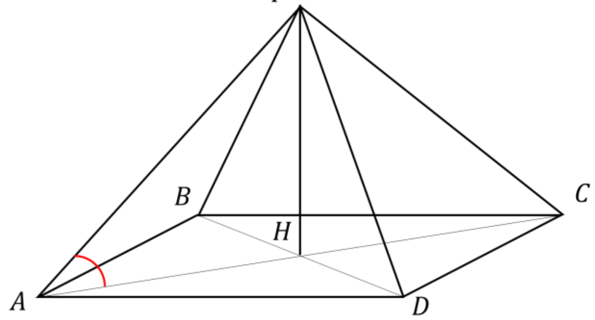

Рис. 2.20

II етап

Для визначення кута нахилу важливо визначити висоту, при цьому необхідно обґрунтувати положення основи висоти. Оскільки точка F рівновіддалена від вершин основи многокутника, то вона проектується в центр кола описаного навколо даного многокутника. З цього приходимо, що точка перетину діагоналей H є основою висоти FH та всі кути між похилими та площиною є рівними.

Зосередимо увагу учнів на визначенні $\angle(AF;(ABC))$. Оскільки FA – похила, а AH – проекція похилої, то $\angle\big(AF;(ABC)\big) = \angle FAH$.

У ΔAHF, $\angle AHF = 90°$, з тригонометричного співвідношення синуса приходимо до рівності: $\sin\angle FAH = \frac{FH}{FA}$. Звідси $\angle FAH = \arcsin\frac{FH}{FA}$, тобто $\angle FAH = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$.

Наступним кроком виконаємо оцінку площ. Оскільки бак має форму циліндра, то $S_{осн} = \pi R^2$, тобто $S_{осн} = 0{,}09\pi \approx 0{,}28$. Очевидно, що $4 > 0{,}28$.

III етап

Отже, кут нахилу тросів до площини платформи становить $45°$; циліндричний бак поміститься на платформі.

Відповідь. $45°$; циліндричний бак поміститься.

Після розв'язання задачі учнями доцільно задати питання: «Якщо троси кріпляться на середині відповідних сторін, то де буде розташована висота, опущена з вершини кріплення тросів?». Очевидно, що в центр кола вписаного в даний квадрат. Тоді можна узагальнити дане твердження аналогічно, як було показано на другому етапі розв'язування задачі.

2.6. Методика впровадження та використання системи прикладних задач при вивченні системи координати, векторів та геометричних перетворень в просторі

Метод координат, вектори та геометричні перетворення у просторі вивчаються вкінці 10 класу. З курсу геометрії базової школи учні мають уявлення про основні поняття теми: система координат, вектор, геометричні перетворення. Тому при проведені уроків з тем передує принцип узагальнення.

Питання використання прикладних задач залишається актуальним, але за рахунок специфіки теоретичного матеріалу частота впровадження таких задач є обмеженою. Запропонуємо методику розв'язування таких завдань.

Задача 41. У торговому центрі, щоб потрапити до взуттєвого відділу, треба пройти від входу десять кроків прямо, шість кроків ліворуч, піднятися ліфтом на третій поверх, пройти чотири кроки праворуч. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте траєкторію руху від входу, до взуттєвого відділу [36, с. 257].

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначені координат точок при переміщенні в торговому центрі. Математичною моделлю задачі є прямокутна декартова система координат. Важливо пригадати, що осі координат є взаємно перпендикулярними, причому прийнятим є права орієнтація системи (рух проти годинникової стрілки).

Після цього не складно встановити, що рух прямо характеризує зміну абсциси в додатному напрямі, рух вліво – зміну ординати в додатному напрямі, рух праворуч – зміну ординати у від'ємному напрямі, рух угору – зміну аплікати в додатному напрямі.

II етап

Враховуючи, точкою відліку початок координат отримаємо ламану (рис. 2.21), яка характеризує траєкторію руху за точками: $O(0;0;0)$, $A(10;0;0)$, $B(10;6;0)$, $C(10;6;3)$, $D(10;2;3)$.

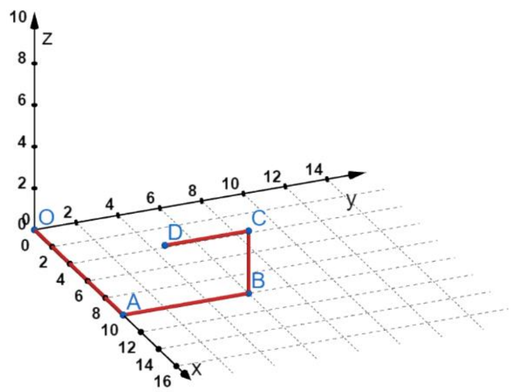

Рис. 2.21

III етап

Отже, ламана $OABCD$ характеризує траєкторію руху по магазину відносно початкової точки відліку – входу.

Відповідь. Ламана $OABCD$.

Окрім вміння побудови точок і методу їх з'єднання важливим залишається питання застосування координатного методу до обчислення відстаней. Розглянемо задачу.

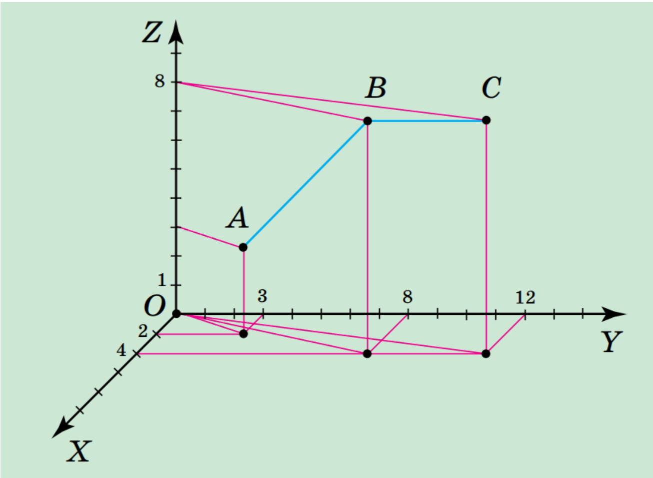

Рис. 2.22

Задача 42. Під час ремонту даху майстер перемістився з точки A в точку C за схемою, зображеною на рисунку 2.22. Знайдіть довжину пройденого шляху та відстань по прямій від точки A до точки C [36, с. 257].

Розв'язання

I етап

Математичною моделлю задачі є ПДСК з визначеними точками. Завдання полягає у визначенні координат точок та обчисленні довжин AB, BC, AC.

II етап

З рисунку 2.22 нескладно визначити координати точок: $A(2;3;3)$, $B(4;8;8)$, $C(4;12;8)$. Після цього слід пригадати формулу обчислення відстані між двома точками: $KL = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, де $K(x_1; y_1; z_1)$, $L(x_2; y_2; z_2)$. Отримаємо наступні значення:

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (8-3)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{54} \approx 7{,}3;$$

$$BC = \sqrt{(4-4)^2 + (12-8)^2 + (8-8)^2} = \sqrt{16} = 4;$$

$$AC = \sqrt{(4-2)^2 + (12-3)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{110} \approx 10{,}5.$$

III етап

Отже, довжина пройденого шляху майстром по даху становить 11,3 м, тоді як довжина по прямій від точки A до точки C становить 10,5 м.

Відповідь. 11,3 м; 10,5 м.

Після засвоєння методу координат в просторі переходять до вивчення векторів у просторі. Запропонуємо методику розв'язування задач, в яких використовується додавання векторів, а також застосування скалярного добутку.

Задача 43. Вантаж спускають на парашуті з висоти 120 м із постійною вертикальною швидкістю 3 м/с. Вітер, який дме горизонтально зі швидкістю 2 м/с, відносить його в бік. Який шлях пролітає вантаж? Дати відповідь із точністю 1 м [82, с. 69].

Розв'язання:

I етап

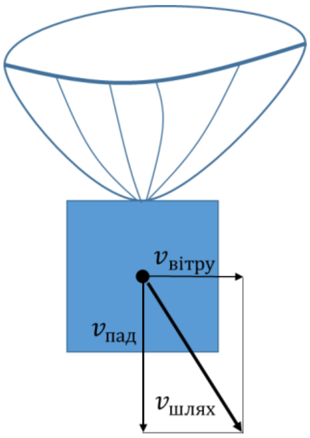

Рис. 2.23

Розв'язування слід почати з питання: «Що необхідно обчислити?» Після визначення сутності поняття шляху можна перейти до його обчислення. Очевидно, що шлях визначається як добуток швидкості на час (приземлення). При цьому варто задати питання: «Якщо напрямок вітру є горизонтальним, чи впливає він на час падіння?». Приходимо до визначення формули часу падіння $t_{\text{пад}} = \frac{H}{v_{\text{пад}}}$.

Після надання допоміжної ілюстрації (рис. 2.23) можна встановити результуючий вектор швидкості двох заданих векторів і визначити пройдений шлях s за формулою: $s = v_{\text{шлях}} \cdot t_{\text{пад}}$.

II етап

За правилом паралелограма: $\vec{v}_{\text{шлях}} = \vec{v}_{\text{пад}} + \vec{v}_{\text{вітру}}$. Оскільки необхідно знайти пройдений шлях, то потрібно визначити довжину вектора $|\vec{v}_{\text{шлях}}|$ за теоремою Піфагора: $|\vec{v}_{\text{шлях}}| = \sqrt{\left(\vec{v}_{\text{пад}}\right)^2 + \left(\vec{v}_{\text{вітру}}\right)^2}$, звідси отримаємо, що $|\vec{v}_{\text{шлях}}| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}$.

Після цього обчислюємо час: $t_{\text{пад}} = \frac{120}{3} = 40$, звідси $s = 40 \cdot \sqrt{13} \approx 144$.

III етап

Отже, вантаж пролітає шлях довжиною 144 м.

Відповідь. 144 м.

Задача 44. Навісну шафу тягнуть рівномірно на санчатах по горизонтальній поверхні (рис. 2.24). Мотузка, за допомогою якої тягнуть санчата, утворює з горизонтом кут $30°$. Сила натягу мотузки 25 Н. Яка робота виконана при переміщенні шафи на 50 м [40, с. 277]?

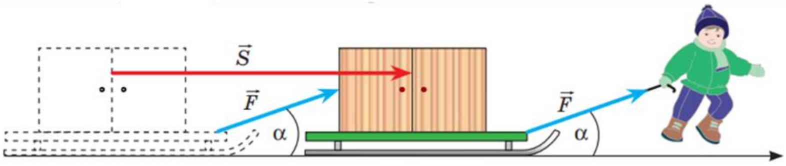

Рис. 2.24

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначенні величині роботи A. Доцільно зосередити увагу учнів на тому, що дана величина є скалярною. Тоді приходимо до поняття скалярного добутку: $A = \left|\vec{F}\right| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$.

II етап

$$A = 25 \cdot 50 \cdot \cos 30° = 25 \cdot 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 625\sqrt{3} = 1082{,}5.$$

III етап

Отже, робота виконана при переміщені шафи становить $1082{,}5$ Дж.

Відповідь. $1082{,}5$ Дж.

Після цього доцільність використання прикладних задач реалізовується при вивчення основних геометричних перетворень у просторі. Найбільш поширеними у використанні є: симетрія та перетворення подібності. Запропонуємо умови задач та методику їх розв'язування.

Задача 45. З метою дозвілля одна туристична компанія вирішила встановити над річкою спускову станцію (рис. 2.25), для цього було споруджено дві вертикальні платформи AB та CD, з який здійснювався спуск до пункту M. Визначте, де саме на острові слід обрати точку M, щоб затрати на виготовлення канатної дороги були найменшими (відповідь обґрунтуйте).

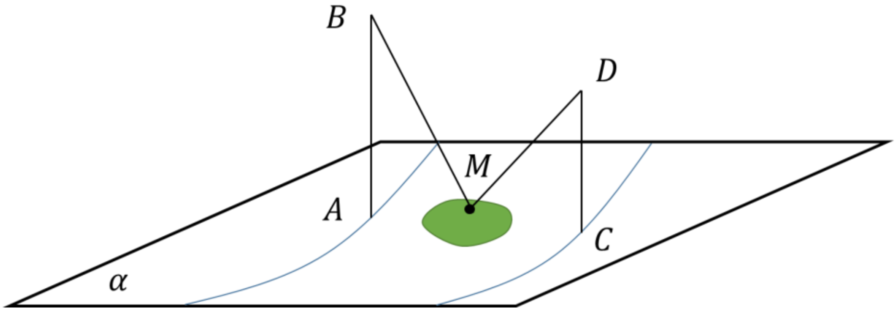

Рис. 2.25

Розв'язування:

<u>I етап</u>

Завдання полягає у визначенні найменшого значення канатної дороги. Необхідно прийти до математичного задання цього значення. Оскільки в умові подана математична модель задачі (рис. 2.25) учні прийдуть до суми $BM + DM$.

<u>II етап</u>

При розв'язуванні математичної задачі слід навести ряд навідних питань: «Чи знаходитимуться прямі AB та CD в одній площині? Чому?» Після заданого питання відбувається процес усвідомлення того, що точка M повинна належати прямій AC. Далі задача зводиться до визначення положення M на прямій.

Наступним кроком запропонувати учням скористатись поняттям симетрії точки відносно площини. Оскільки $AB \perp \alpha$, то продовживши пряму AB вниз відкладемо відрізок AB' (рис. 2.26). Тоді виходячи, що AC – серединний перпендикуляр і $M \in AC$ приходимо, що $BM = B'M$, тобто приходимо до умови $B'M + DM$. Після цього приходимо, що $M = AC \cap B'D$.

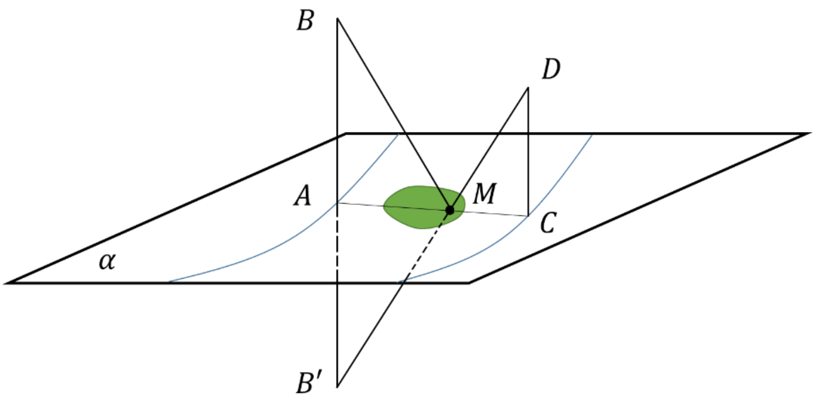

Рис. 2.26

<u>III етап</u>

Отже, найбільш оптимальним з точки зору затрат є розташування спускового пункту в точці M зображеної на рисунку 2.26.

Відповідь. Рис. 2.26.

Задача 46. Достатньо часто в професійній діяльності використовують моделювання реальних об’єктів у зменшеному масштабі. Наприклад, при створенні сувенірів Ейфелевої вежі. Пояснити за допомогою якого поняття стереометрії здійснюється такий процес?

Розв’язання:

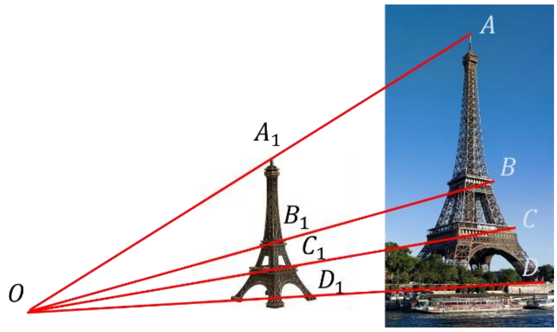

Рис. 2.27

I етап

Такого типу завдання слід використовувати для колективного обговорення. Доцільним є наведення ілюстрації двох об’єктів – копії та оригіналу (рис. 2.27).

II етап

Позначивши відповідні пари точок (рис. 2.27) можна прийти до рівності: $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA}$, яка розкриває суть перетворення подібності – гомотетії. Слід зазначити, що має місце пропорційність відповідних відрізків: $|\alpha| = \frac{A_1B_1}{AB}$. Точка O – центр гомотетії, α – коефіцієнт гомотетії.

III етап

Отже, при створенні матеріальних моделей реальних об’єктів використовується поняття гомотетії. При цьому враховується пропорційність відповідних відрізків до постійного значення коефіцієнта гомотетії.

Відповідь. Поняття гомотетії.

Важливо зосередити увагу учнів на те, що коефіцієнт гомотетії має пряме застосування до обчислення площ та об’ємів подібних фігур. Якщо відомо, що лінійні розміри гомотетичних фігур є пропорційними, то квадрат та куб такого відношення пропорційний відношенню площ та об’ємів відповідно.

2.7. Методика впровадження та використання системи прикладних задач при вивченні основних геометричних тіл, їх комбінації та властивостей

2.7.1. Прикладні задачі на знаходження площ поверхонь геометричних тіл

Особливістю завдань такого типу є застосування формул обчислення площ многогранників та тіл обертання, переважно рівень складності таких завдань є середнім або достатнім. Запропонуємо методику розв’язування окремих задач.

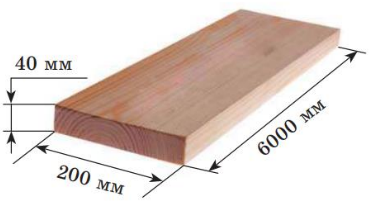

Рис. 2.28

Задача 47. Для проведення змагань з настільних ігор у таборі відпочинку вирішили виготовити довгий дерев’яний стіл. Для стільниці придбали 5 обрізних дошок (рис. 2.28). Скільки лаку знадобиться для того, щоб один раз покрити ним кожну дошку, якщо на 1 м^2 витрачається 100 г лаку [41, с. 156]?

Розв’язання:

I етап

Завдання полягає у визначені кількості лаку для покриття п’яти дерев’яних дошок. Математичною моделлю задачі є прямокутний паралелепіпед, площа якого обчислюється за формулою: $S_{\text{дошки}} = P_{\text{осн}} \cdot H$. Суттєвим є визначення лінійний розмірів дошки та їх зведення до одних одиниць виміру (у метрах). Після цього обчислення загальної маси зводиться до формули: $m = 500 \cdot S_{\text{дошки}}$

II етап

$$S_{\text{дошки}} = (2 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 6) \cdot 0{,}04 = 0{,}496;$$

$$m = 500 \cdot 0{,}496 = 248.$$

III етап

Отже, для покриття дошок знадобиться 248 г лаку.

Відповідь. 248 г лаку.

Задача 48. Підприємець, який спеціалізується на заготовці екологічно чистих лікувальних трав, вирішив випускати набори трав для покращення стану шкіри обличчя. Кожна трава упаковується в одноразовий пакетик (виготовлений з екологічного матеріалу), що має форму тетраедра, кожне ребро якого дорівнює 4 см (рис. 2.29). В одній картонній упаковці мають міститися: череди — 10 пакетів, календули — 8 пакетів і мати-й-мачухи — 7 пакетів. У підприємця є 7 м^2 екологічного матеріалу для одноразових пакетиків і відповідно підготовлені трави. Скільки упаковок (рис. 2.30) лікувальних трав він може підготувати до продажу [41, с. 164-165]?

Рис. 2.29

Рис. 2.30

Розв'язання:

<u>I етап</u>

Завдання полягає у визначенні кількості упаковок з лікувальними травами. Математичною моделлю задачі є правильний тетраедр, площу якого можна обчислити як суму правильних трикутників, тобто $S_{\text{тетр}} = 4S_{\Delta}$. Звідси, враховуючи, що кількість пакетів в одному наборі становить 25, приходимо до обчислення кількості упаковок: $N = \frac{70000}{25 \cdot S_{\text{тетр}}}$ (переведено в сантиметри).

<u>II етап</u>

$$S_{\text{тетр}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4^2 \cdot \sin 60° = 16 \cdot \sqrt{3};$$

$$N = \frac{70000}{25 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}} \approx 101.$$

<u>III етап</u>

Отже, підприємець може приготувати до продажу 101 упаковку трав.

Відповідь. 101 упоковку.

Задача 49. Шліфувальний круг діаметром 350 мм і товщиною 60 мм за час роботи зменшився в діаметрі на 4,5 мм. На скільки при цьому зменшилася його робоча (циліндрична) поверхня [82, с. 129]?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає в обчисленні зміни робочої поверхні шліфувального круга. Перед побудовою математичної моделі доцільно показати учням ілюстрацію реального об'єкта (рис. 2.31) наголосивши на тому, що процес шліфування здійснюється за рахунок обертання диску навколо осі. Приходимо до поняття циліндра. На рисунку 2.32 показано, яким чином відбулось зменшення радіусу циліндра ($O_2R_1 > O_2R_2$). Після визначення площі бічної поверхні циліндра приходимо до формули зміни площі: $\Delta S = S_{\text{бічне1}} - S_{\text{бічне2}}$.

Рис. 2.31

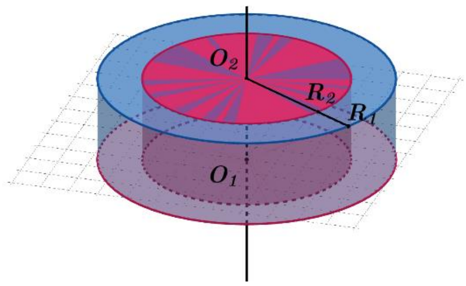

Рис. 2.32

II етап

$$\Delta S = 2\pi \cdot O_2R_1 \cdot O_1O_2 - 2\pi \cdot (O_2R_1 - 4{,}5) \cdot O_1O_2 =$$

$$= 2\pi \cdot O_1O_2 \cdot \big(O_2R_1 - (O_2R_1 - 2{,}25)\big) = 4{,}5\pi \cdot O_1O_2.$$

$$\Delta S = 4{,}5\pi \cdot 60 \approx 850.$$

III етап

Отже, за процесом роботи шліфування робоча поверхня насадки зменшиться на 850 мм^2.

Відповідь. На 850 мм^2.

Задача 50. Дах башти має форму конуса, висота якого 10 м, а радіус основи 4,5 м. Цю поверхню треба покрити листовим цинком. Для цього беруть прямокутні листи довжиною 60 см та шириною 40 см. Скільки потрібно таких листів, якщо на з'єднання та крій потрібно додати 25 % [82, с. 135]?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначенні кількості листів для покрівлі даху. Математичною моделлю задачі є конус з віссю OO_1, причому доцільно наводити приклад з реальним об'єктом (рис. 2.33).

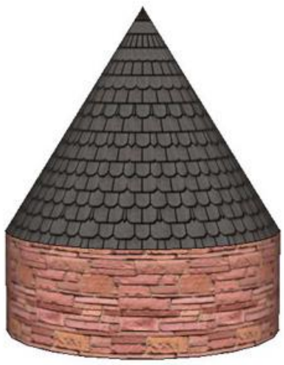

Рис. 2.33

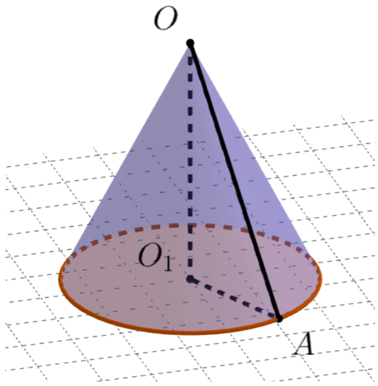

Рис. 2.34

II етап

Площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою: $S_{\text{бічне}} = \pi R l$, де R – радіус основи, l – твірна конуса, тобто $S_{\text{бічне}} = \pi \cdot O_1A \cdot OA$. Приходимо, що $S_{\text{бічне}} = \pi \cdot 4{,}5 \cdot \sqrt{10^2 + (4{,}5)^2} \approx 155$. Тоді кількість листів обчислимо за формулою: $N_{\text{покрив}} = \frac{S_{\text{бічне}}}{0{,}6 \cdot 0{,}4}$, $N_{\text{покрив}} = \frac{155}{0{,}24} \approx 646$, враховуючи додатковий крій отримаємо, що $N = 646 \cdot 1{,}25 = 807{,}5 \approx 808$.

III етап

Отже, для покриву даху конусної форми необхідно 808 листів.

Відповідь. 808 листів.

Задача 51. На кожен квадратний сантиметр земної поверхні спирається стовп атмосфери масою 1 кг. Яку масу має вся земна атмосфера? Радіус Землі – 6370 км [82, с. 84].

Розв'язання:

I етап

Аналогічно до попередніх прикладів завдання зводиться до математичної моделі – поверхні сфери, площу якої необхідно знайти.

II етап

Площа сфери обчислюється за формулою: : $S_{\text{сфери}} = 4\pi R^2$, звідси:

$$S_{\text{сфери}} = 4\pi(637000000)^2 \approx 5{,}1 \cdot 10^{18}.$$

III етап

Отже, враховуючи, що площа землі була обчислена в см^2, то маса атмосфери Землі становить $5{,}1 \cdot 10^{18}$ кг.

Відповідь. $5{,}1 \cdot 10^{18}$ кг.

2.7.2. Прикладні задачі на знаходження об'ємів геометричних тіл

Як показує аналіз підручників з математики [35], [41] та геометрії [13] 11 класу вивчення об'єму геометричних тіл можна структурувати наступним чином: «Об'єм призми та циліндра», «Об'єм піраміди, конуса та кулі». Важливо при цьому зосередити увагу на практичних застосуваннях об'єму геометричних тіл. Запропонуємо наступну задачу з методичними особливостями її розв'язування.

Задача 52. У циліндричну посудину з рідиною, діаметр якої дорівнює 8 см, занурена деталь. При цьому рівень рідини в посудині піднявся на 10 см. Чому дорівнює об'єм деталі [13, с. 155]?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначенні об'єму деталі. Доцільно з учнями пригадати закон Архімеда, який стверджує, що на занурене тіло діє виштовхувальна сила рідини. З цього закону слідує, що об'єм зануреного тіла та зміна рівня рідини мають рівні значення. Приходимо до обчислення об'єму циліндра з висотою, що відповідає піднятому рівню рідини в посудині.

II етап

Формула обчислення об'єму циліндра має вигляд: $V_{\text{цил}} = \pi R^2 H$. Звідси, отримаємо: $V_{\text{цил}} = \pi(4)^2 \cdot 10 = 160\pi \approx 503$.

<u>III етап</u>

Отже, об’єм деталі становить $503\ \text{см}^3$. Для кращого сприймання отриманої величини рекомендовано здійснити переведення в дм^3: $503\ \text{см}^3 = 0{,}503\ \text{дм}^3$. Тобто об’єм деталі становить пів літра.

Відповідь. $503\ \text{см}^3$.

Умова даної задачі може бути змінена за рахунок математичної моделі: замість посудини циліндричної форми можна запропонувати учням розглянути посудину у вигляді прямокутного паралелепіпеда, при цьому ідея розв’язування задачі не зміниться.

Після цього доцільно розглянути задачі на обчислення об’ємів реальних тіл, які мають форму піраміди та конуса, причому вводяться формули поняття об’ємів зрізаної піраміди та зрізаного конуса. Оскільки задачі мають подібну схему розв’язування запропонуємо наступну.

Рис. 2.35

Задача 53. Пакетик для томатної пасти (рис. 2.35) має форму піраміди, в основі якої рівнобедрений трикутник із рівними сторонами 12 см і кутом між ними 30°. Висота піраміди дорівнює 6 см. Обчисліть об’єм пакетика [13, ст. 167].

Розв’язання:

<u>I етап</u>

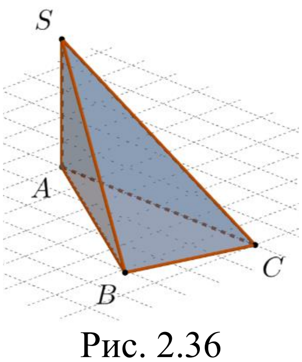

Рис. 2.36

Завдання полягає у визначенні об’єму пакетика томатної пасти. Оскільки пакетик має форму піраміди (рис. 2.36), то приходимо до формули обчислення її об’єму: $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot H$, де $S_{\text{осн}}$ – площа трикутника ABC, H – висота SA.

<u>II етап</u>

$$S_{\text{осн}} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC\,;$$

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot SA \cdot \sin \angle BAC\,;$$

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \sin 30° = 72.$$

III етап

Отже, об'єм пакетику томатної пасти становить 72 см^3 (72 мл).

Відповідь. 72 см^3.

Далі розглядається формула для обчислення кулі. При вивченні теми доцільно використовувати задачі на комбінацію геометричних тіл. Продемонструємо це за допомогою розв'язування наступної задачі.

Задача 54. Мішечок з морозивом має циліндричну форму. Його висота – 15 см, а площа основи – 154 см^2. У кав'ярні морозиво до кави подають оформленим у вигляді кульок. Скільки приблизно таких кульок морозива радіусом 2,5 см можна сформувати з морозива, що міститься в одному мішечку [82, с. 82]?

Розв'язання:

I етап

Завдання полягає у визначенні кількості кульок морозива, що можна зробити з одного мішечку морозива. Задача зводиться до обчислення об'ємів циліндра та кулі, які є математичними моделями заданих в умові предметів.

II етап

За формулами обчислення об'ємів циліндра ($V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} H$) та кулі ($V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3$) отримаємо:

$$V_{\text{цил}} = 154 \cdot 15 = 2310;$$

$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi(2{,}5)^3 = \frac{125\pi}{6} \approx 65{,}4.$$

Виходячи, що кількість кульок $N = \frac{V_{\text{цил}}}{V_{\text{кулі}}}$ отримаємо: $N = \frac{2310}{65{,}4} \approx 35.$

III етап

Отже, з мішечку морозива можна сформувати 35 кульок.

Відповідь. 35 кульок.

Слід зазначити, що в підручниках профільного рівня з геометрії [13], [14] 11 класу вводяться поняття кульового сектору та сегменту з формулами обчислення їх об’ємів. В пункті 2.3.4 було запропоновано сюжет 2, в якому розкривались особливості розв’язування задачі на обчислення об’єму кульового сегменту. Застосування формули обчислення об’єму кульового сектора є аналогічним.

2.8. Особливості використання інформаційно-комунікаційних технологій під час розв’язування прикладних задач

Наразі набуває популярності нова технологія навчання STEM, яка передбачає підготовку учнів до подальшої професійної діяльності. В науковій роботі [11] Т.І. Вовчанчина виділяє традиційні та сучасні засоби навчання STEM-освіти. До традиційних засобів навчання можна віднести дидактичні матеріали, які включають прикладні задачі. Водночас до розв’язування прикладних задач можуть бути використанні сучасні технології навчання – ІКТ.

Як показало дослідження, при створенні методики розв’язування прикладних задач інформаційно-комунікаційні технології навчання можуть бути використанні до побудови та дослідженні математичної моделі. Серед програмних засобів виділимо наступні: GeoGebra, Wolfram, PowerPoint. Наведемо приклад їх використання.

При розв’язуванні задачі 15 за допомогою розділу «Графічний калькулятор» було розроблено схематичний рисунок до задачі (рис. 2.4) за допомогою поля введення функції.

Слід зазначити, що даний розділ має список «Інструмент», який дозволяє досліджувати задані функції. Для перевірки правильності результату задачі 18 отримана цільова функція $S(x) = 72x + \frac{12800}{x} + 2704$ була досліджена на екстремум. На рисунку 2.37 отримали точку B, абсциса якої відповідає шуканій точці мінімуму отримані при розв’язуванні математичної задачі.

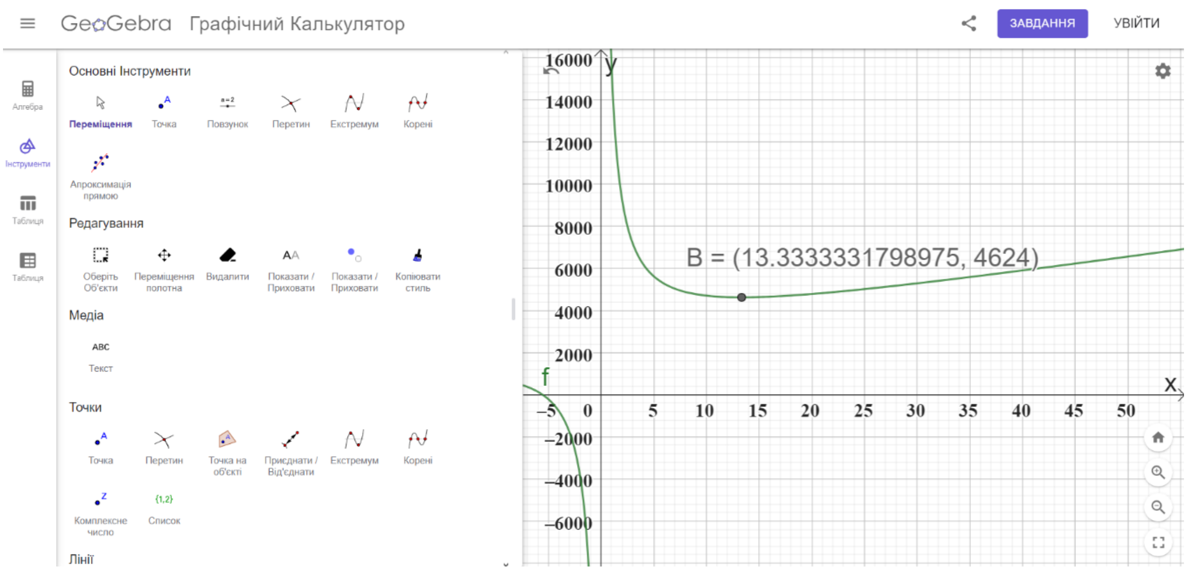

Рис. 2.37

Даний програмний компонент також має розділ «3D калькулятор». Даний розділ програми було використано при розв’язуванні прикладних задач зі стереометрії. За допомогою запропонованого інструментарію було виконано побудову точок та геометричних тіл в системі координат.

Програма Wolfram була використана для перевірки обчислень визначеного інтегралу в сюжеті 1. Отриманий результат співпадав із відповіддю отриманою під час розв’язування (рис. 2.38).

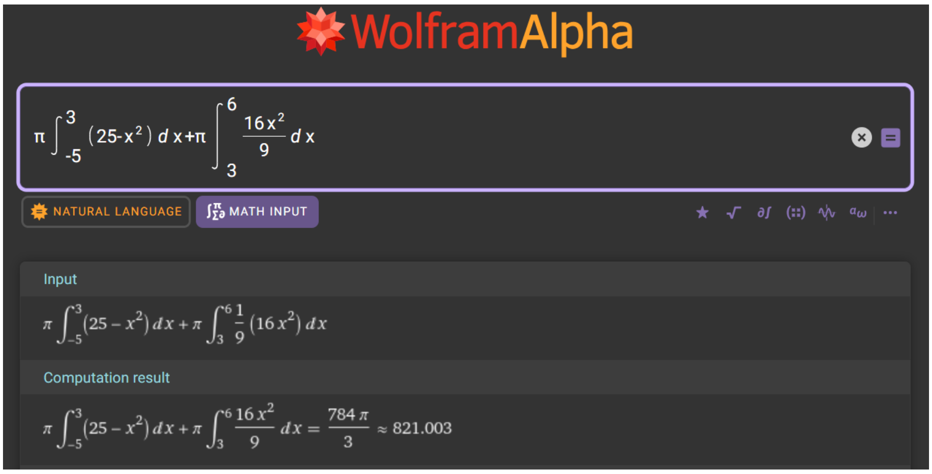

Рис. 2.38

Додатково до побудови ілюстрацій було використано функціонал програми для створення презентацій Microsoft PowerPoint. На рисунку 2.39 наведено перелік інструментів для створення рисунків до задач. Одним із прикладом створення такої ілюстрації є рисунок 2.12 до сюжету 1.

Рис. 2.39

2.9. Експериментальна перевірка окремих результатів дослідження

З метою створення системи прикладних задач та методики їх розв'язування було здійснено педагогічний експеримент, який можна поділити на три логічні етапи: аналіз стану проблеми в шкільній практиці (визначення ставлення учнів прикладних задач та труднощів які виникають під час їх розв'язування), розробка системи прикладних задач та впровадження її в навчальний процес, перевірка отриманих результатів навчання.

В пункті 1.3.3 було розкрито стан проблеми дослідження в шкільній практиці на основі опитування учнів ЗСО та студентів перших курсів ЗФПО до основних результатів можна віднести: нерозуміння понятійного апарату математичного моделювання, відсутність інтересу до розв'язування прикладних задач, складність розв'язування прикладних задач на всіх його етапах.

При цьому опитування дало можливість встановити вподобання учнів щодо тематики прикладних задач. До пріоритетних галузей знань було віднесено: інформатику, біологію, хімію та фізику.

Після результатів опитування було розроблено наступну стратегію до підбору та розробки прикладних задач системи та їх розв'язання: уподобання тематики задач, чітке виокремлення етапів математичного моделювання та підведення до наступного етапу за рахунок евристичних питань.

На посаді викладача математики у відокремленому структурному підрозділі «Фаховий коледж транспорту та комп'ютерних технологій» було продовження експерименту. Апробація та подальша розробка методичних матеріалі проводилась під час занять з математики у групі КН-2301.

Під час проведення експерименту було проведено заняття з наступних розділів алгебри і початків аналізу: «Похідна та її застосування», «Інтеграл та його застосування», «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики». До початку експерименти рівень навчальних досягнень студентів був розподілений наступним чином: середній рівень – 11 студентів, достатній – 15 студентів, високий – 4 студенти. Доцільно подати у вигляді діаграми (рис. 2.40). Слід зазначити, що початковий рівень навчальних досягнень не розглядається за того, оскільки правила навчання коледжу вимагають отримання принаймні оцінки 4.

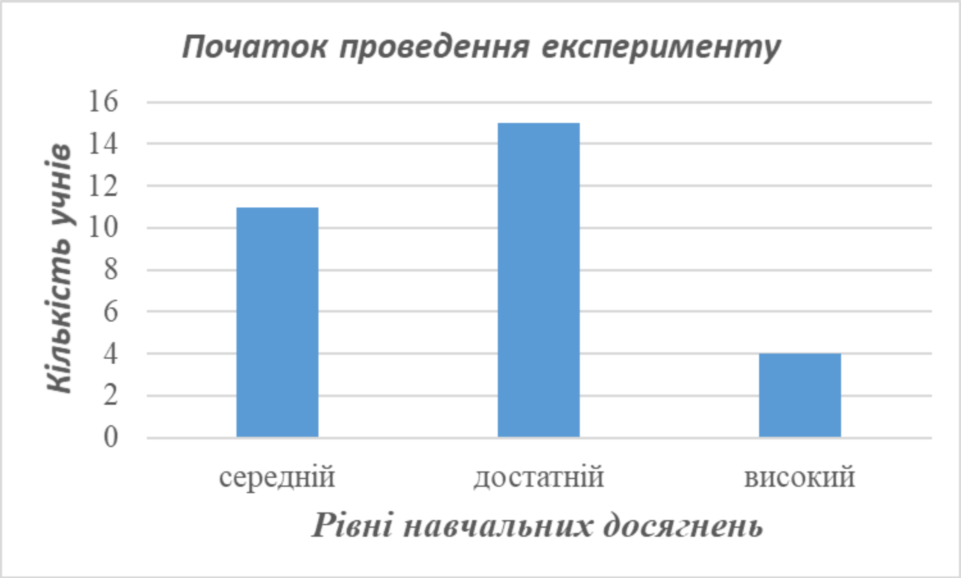

Рис. 2.40

Після встановлення рівня навчальних досягнень студентів групи відбувалось поступове впровадження в навчальний процес прикладних задач (в залежності від вивченого розділу) та проводилось спостереження за роботою групи.

Вивчення розділу «Похідна і її застосування» почалось із введення задач, що приводять до поняття похідної. Слід зазначити, що усвідомлення сутті даного поняття студентами сприймалось в більшості випадків формально, тому для досягнення більшого рівня розуміння було запропоновано до увагу інші застосування похідної, продемонстровані у таблиці 2, після цього було організовано колективне розв’язування задачі 12, що привело до кращого розуміння понять «похідна» та «границя функції в точці».

Розв’язування прикладних задач, в яких похідна відіграє першочергову роль для студентів було посильним завданням, водночас усвідомлення геометричного змісту похідної бажало кращого, тому доцільним було використання задачі 15 на обчислення кута провисання мосту. При цьому складними для студентів виявились обчислення, оскільки шукані значення необхідно визначити наближено.

Суттєвим при вивченні зв’язку неперервності та диференційовності виявилось наведення графіків функції, які демонструють прямий та обернений зв’язок даного твердження. Це зумовило створення задачі 16 на визначення кількості та дослідження метрометричних пульсацій.

Завершення даного розділу передбачало дослідження функцій за допомогою похідної та побудови їх графіків. Як показало розв’язування прикладної задачі (подібної до задачі 18) у більшості студентів групи виникають труднощі на етапі створення цільової функції. Водночас дослідження функції на екстремум або найбільше та найменше значення на проміжку є для студентів цілком посильними.

Далі вивчення алгебри і початки аналізу було зосереджено на розділі «Інтеграл та його застосування». Основна складність теми на перших заняттях полягала в усвідомленні поняття первісної. Тому для кращого засвоєння для студентів були запропоновані задачі подібні до задачі 19 на визначення закону фізичного процесу з переліком початкових умов.

Для більшої значимості даного розділу було введено поняття визначеного інтегралу. Крім обчислення площі криволінійної трапеції, було запропоновано розв’язування задачі на обчислення роботи (задача 20), яка пояснювала суть визначеного інтегралу. Закріплення вивченого матеріалу включало задачі прикладного змісту на обчислення: пройденої відстані, кількості електрики та інших. Отриманий запас знань був доцільно використаний при розв’язуванні задач на обчислення площі плоских поверхонь. Слід зазначити, що при розв’язуванні прикладної задачі 24 в студентів виникали труднощі при зведені до одних одиниць виміру.

При вивченні розділу «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» складність полягала у первинному усвідомленні сутності основних комбінаторних сполук, але після розв’язування ряду прикладних задач (подібних до запропонованих у роботі) ситуація покращилась. Більша складність виникала при вивченні теорії ймовірностей, оскільки частина студентів не могли описати подію, яка була задана в задачі. При розв’язуванні задач зі статистики переважно труднощі були пов’язанні із обчисленнями, ніж з усвідомлюванням основних характеристик.

На основі роботи студентів результати навчання були розподілені наступним чином: середній рівень – 5 студентів, достатній – 18 студентів, високий – 7 студентів. Унаочнимо результати за допомогою діаграми (рис. 2.41).

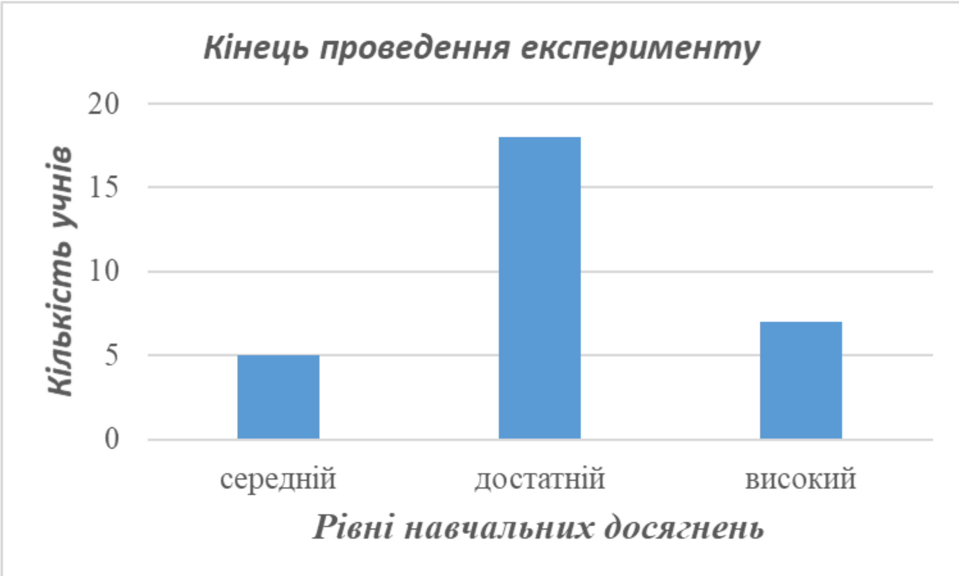

Рис. 2.41

Отримані результати експерименту свідчать про позитивну динаміку результатів навчання з дисципліни. Мотиваційний аспект визначений неоднозначно. Цікавість до подальшого вивчення математики була зумовлена введенням прикладних задач середнього та достатнього рівня складності. Водночас при розв’язуванні задач підвищеного рівня складності виникали труднощі, які були усунуті за рахунок поетапного розв’язування та навідних питань, які описані у другому розділі роботи.

ВИСНОВКИ

Сучасна траєкторія освіти передбачає набуття ключових компетентностей в процесі вивчення шкільних предметів. Це є можливим за реалізації прикладної спрямованості. В теоретичній частині дослідження було розкрито суть поняття «прикладна спрямованість курсу математики» та встановлено методичні рекомендації щодо її реалізації. Означені поняття прикладна задача та математичне моделювання, вказано вимоги до підбору та створення і розв’язування завдань прикладних задач.

Проблема використання прикладних задач була поставлена на основі аналізу чинних підручників та програм з математики. Було встановлено, що кількість прикладних задач для більшості розділів є невеликою. Додатково було проведено опитування учасників навчального процесу у ЗСО та ЗФПО, яке продемонструвало труднощі при розв’язуванні прикладних задач.

Отримані результати опитування та сформована теоретична частина дослідження зумовили створення методики доцільного використання та розв’язування прикладних задач з курсів математики. Система налічує 54 прикладних задач (34 з алгебри і 20 з геометрії), серед яких 17 є авторськими, та доповнена двома математичними сюжетами, які сприяють реалізації прикладної спрямованості освіти у Франції.

Ефективним при розв’язуванні прикладних задач є метод математичного моделювання.

Було здійснено апробацію підібраної системи прикладних задач з алгебри і початків аналізу та методики їх розв’язання. Дослідження показало, що для ефективного навчання учнів розв’язуванню прикладних задач із позитивною динамікою вивчення математики потрібно враховувати наступне: 1) дотримання всіх етапів математичного моделювання при розв’язуванні задач; 2) вподобання учнів до тематики завдань; 3) раціональний підбір прикладних задач до ведення та безпосереднього застосування математичних понять з врахуванням рівня складності; 4) використання інформаційно-комунікаційних технологій при розв’язуванні задач.

Запропонована в роботі методика розв’язування прикладних задач дозволяє реалізувати прикладну спрямованість навчання курсу математики старшої школи систематично, орієнтуючи учнів на використаня математичних знань в практичні діяльності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Алгебра і початки аналізу (профільний 0рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П.Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 272 с.: іл.
2. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019. — 240 с.
3. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. — Київ : Генеза, 2018. — 448 с. : іл.
4. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 11 -го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. — Київ : Генеза, 2019. — 416 с. : іл.
5. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.
6. Ачкан В. В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної в курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів //Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Сер: Педагогічні науки. – 2014. – №. 1. – С. 13-23.
7. Бевз В. Г. Методичні основи побудови системи задач і вправ у сучасних підручниках математики //Науковий вісник Миколаївського національного університету імені ВО Сухомлинського. Педагогічні науки. – 2017. – №. 2. – С. 43-49.
8. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. – К. : Вища шк., 1989. – 367 с.: іл.
9. Бурда М. І. та ін. Концепція математичної освіти 12-річної школи //Математика в рідній школі. – 2018. – №. 9. – С. 3-8.
10. Бурда М. І. та ін. Навчання математики в старшій школі на профільному рівні. – 2016. [Електронний ресурс] URL:

https://lib.iitta.gov.ua/712224/1/Metod%20recomend.pdf (дата звернення: 16.04.2024).

11. Вовчанчина Т. І. Впровадження елементів STEM-освіти у навчанні математики. Кваліфікаційна робота (проєкт) на здобуття ступеня вищої освіти «магістр». Херсон: Херсонський державний університет, 2021. – 78 с.
12. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П.Нелін. – Харків : Вид-во «Ранок», 2018. – 240 с. : іл.
13. Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019. – 208 с.
14. Геометрія : (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. – Київ : Генеза, 2019. – 288 с. : іл.
15. Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владіміров, Н. Г. Владімірова. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. – 272 с. : іл.
16. Геометрія: (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти / О.С. Істер, О.В. Єргіна. – Київ : Генеза, 2018. – 368 с. : іл.
17. Гребельна М. Ю. Розв’язування прикладних задач методом математичного моделювання. – 2011. [Електронний ресурс] URL: https://fizmatsspu.sumy.ua/Konferencii/sbor/itm/ITM-2011-t1.pdf#page=39 (дата звернення: 09.10.2024).
18. Гриб’юк О., Юнчик В. Розв’язування евристичних задач у контексті STEM-освіти з використанням системи динамічної математики GeoGebra //Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training Methodology Theory Experience Problems. – 2015. – №. 43. – С. 207-219.
19. Грицик Т. А. Прикладна спрямованість змісту тригонометричного матеріалу. – 2011. [Електронний ресурс] URL: https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/10746/1/Hrytsyk.pdf (дата звернення: 14. 04.2024).

20. Громяк М.І., Качурівський Р.І. Методичні аспекти використання прикладних задач при вивченні математики. «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи». Збірник тез за матеріалами ІІ Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції з нагоди святкування 30-річчя кафедри інформатики та методики її навчання (м, Тернопіль 8-9 листопада 2018)- Тернопіль Осадца Ю.В. 2018. – С. 179–181.
21. Дейніченко Т. І. Розв’язування прикладних задач в курсі математики профільної школи / Т. І. Дейніченко, Л. В. Ричкова, А. О. Кондратенко // Наумовські читання : зб. тез доп. учасників XX Всеукр. наук.-метод. конф. здобувачів вищ. освіти та молодих вчених, присвяч. 300-річчю з дня народж. Г. С. Сковороди, Харків, 3–4 листоп. 2022 р. / Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди ; [за заг. ред. О. А. Жерновникової]. – Харків : [б. в.], 2022. – С. 97–99.
22. Державний стандарт профільної середньої освіти // URL: https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennia-derzhavnoho-standartu-profilnoi-serednoi-osvity-851-250724 (дата звернення: 12.09.2024).
23. Дмитрієнко О.О. Місце прикладних задач в шкільному курсі алгебри і початків аналізу //Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики. – 2015. – С. 158–160.
24. Дюженкова Л.І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі/ Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с. (Альма-матер).
25. Жалоба М. Т., Ізюмченко Л. В. Використання задач прикладного змісту при вивченні математики у старшій школі //Наукові записки молодих учених. – 2018. – №. 2. [Електронний ресурс] URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1497/pdf (дата звернення: 14.04.2024).
26. Жерновникова О. А. Особливості впровадження прикладних задач у шкільний курс математики / О. А. Жерновникова, Е. Д. Хомік // Наумовські

читання : зб. тез доп. учасників XX Всеукр. наук.-метод. конф. здобувачів вищ. освіти та молодих вчених, присвяч. 300-річчю з дня народж. Г. С. Сковороди, Харків, 3–4 листоп. 2022 р. / Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди ; [за заг. ред. О. А. Жерновникової]. – Харків : [б. в.], 2022. – С. 72–76.

27. Жерновникова О. и др. Методичні особливості організації профільного навчання з математики в закладах загальної середньої освіти //Наукові записки кафедри педагогіки. – 2022. – №. 51. – С. 21–29.

28. Задачі прикладного змісту з фізики у старшій школі / Ю.С. Мельник // Навчально-методичний посібник. – К.: Педагогічна думка, 2013. – 120 с.

29. Зіненко І. М. Формування математичної компетентності учнів суспільно-гуманітарного профілю навчання на уроках алгебри та початків аналізу засобами задач практичного та прикладного змісту / І. М. Зіненко // Методика навчання природничих дисциплін у вищій та середній школі. XX Каришинські читання : матеріали міжнар. наук.-практ. конф., (Полтава, 29-30 трав. 2013 р.) / за заг. ред. М. В. Гриньової ; Полтав. нац. пед. ун-т імені В. Г. Короленка, Ін-т педагогіки НАПН України, Полтавська міська рада та ін. – Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2013. – С. 132–134.

30. Катеринюк Г. Д. Психолого-педагогічні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів старшої школи // Фізико-математична освіта. – 2018. – №. 1 (15). – С. 52–56.

31. Кислий В.В., Соколенко Л.О. Використання динамічного середовища GeoGebra для побудови математичних моделей під час розв’язування прикладних задач у курсі математики старшої школи. Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених (7 грудня 2023 р., м. Чернігів). Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2023. с. 134-135.

32. Кислий В.В., Соколенко Л.О. Засоби реалізації прикладної спрямованості навчання математики в школі на різних ступенях навчання. Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених (20 листопада 2024 р., м. Чернігів). Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2024. с. 106.

33. Кульчицька Н.В. Вивчення стереометрії в старшій школі в умовах використання нової інформаційної технології: Дис. … канд. пед. наук: 13.00.02.- К., 1993. -208 с.

34. Лов'янова І.В. Професійно-спрямоване навчання математики у профільній школі: теоретичний аспект: монографія /І.В. Лов'янова.- Черкаси: Видавець Чабаненко Ю.А., 2014. -368 с.

35. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є.П.Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 328 с.

36. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю.І. Мальований, Н. А. Тарасенкова. – К.: УОВЦ «Оріон», 2018. – 288 с.: іл.

37. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019. — 304 с. : іл.

38. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. Київ : Генеза, 2018. – 384 с. : іл.

39. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2019. — 304 с. : іл.

40. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 288 с. : іл
41. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2019. — 272 с. : іл.
42. Маценко В.Г. Математичне моделювання: навчальний посібник / В.Г. Маценко. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. – 519 с.
43. Міністерство освіти і науки України – нова українська школа// mon.gov.ua.
44. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту // URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalnaserednyaosvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення: 17.04.2024).
45. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення: 17.04.2024).
46. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalnaserednyaosvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення: 18.04.2024).
47. Насадюк Т.О. Методика реалізації прикладної спрямованості навчання математики учнів 5-6 класів: дис … канд. пед. наук: 13.00.02 / УДУ імені Михайла Драгоманова. Київ, 2023. 257 с.
48. Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи : метод. матеріали / за заг. ред. М. Грищенко. - Київ : МОН Укр., 2016. – 40 с.

49. Панченко, Л. Л. Про понятійний апарат математичного моделювання в загальноосвітній школі та педагогічному вузі / Л. Л. Панченко // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3 : Фізика і математика у вищій і середній школі : зб. наук. праць. – Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. - Вип. 1. – С. 89-97.
50. Панчук І.І. Прикладні задачі на уроках геометрії. Дипломна робота. Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2022. 44 с.
51. Першина Н. О. Прикладні задачі з математики: визначення, види, призначення //Освіта і наука. – 2021. – №. 1. [Електронний ресурс] URL: https://e-journals.udu.edu.ua/index.php/on/article/download/1169/1176 (дата звернення: 19.04.2024).
52. Прикладна спрямованість курсу "Математика для економістів та економічне моделювання" / Л. Л. Ройко, О. О. Ройко // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. - 2018. - № 30-31. - С. 263-268.
53. Прикладна спрямованість навчання математики в гімназії : Методичний посібник / Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Вашуленко О. П., Тарасенкова Н. А. [Електронне видання]. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2024. — 161 с.
54. Прикладна спрямованість стереометрії: 10— 11 кл. / А. Прус, В. Швець. — К.: Шк. світ, 2007. — 128 с. — (Б-ка «Шк. світу»). — Бібліогр. :с. 124— 127.
55. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії, методична збірка, м. Торецьк, 2018, 37 с.
56. Прилипко О., Королюк О. М. Використання прикладних задач у курсі математики старшої школи //Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів/за ред. ОМ Королюк. – 2010. – №. 3. – С. 71–75.
57. Прилипко, Ольга, О. М. Королюк. "Використання прикладних задач у курсі математики старшої школи". Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів/за ред. ОМ Королюк. 3 (2010): 71-75.

58. Професійна компетентність вчителя математики профільної школи: Навчальний посібник для студентів природничо-математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ. – Харків : ХНПУ, 2014. – 267 с.
59. Прус А. В. Про прикладну спрямованість шкільного курсу стереометрії //Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – 2003. – №. 13. – С. 45–47.
60. Прус, А. В. "Загальні питання прикладної спрямованості шкільного курсу математики." ВІСНИК Житомирського державного університету імені Івана Франка 34 (2007): 67-71.
61. Прус, А. В. "Математичне моделювання як лінза реального світу." Фізико-математична освіта 38.4 (2023): 56-61.
62. Прус, А. В. "Про математичне моделювання та його завдання." (2023): 125-127.
63. Прус, А. В. (2005) Про прикладні задачі шкільного курсу стереометрії. Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти». [Електронний ресурс] URL: http://eprints.zu.edu.ua/20176/1/Prus_Pro_prykladni_zadachi.pdf (дата звернення: 17.04.2024).
64. Прус, Алла Володимирівна. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 – теорія та методика навчання математики / Прус Алла Володимирівна ; наук. керівник Швець Василь Олександрович ; Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. - Київ, 2007. – 283 с.
65. Соколенко Л. О. Про необхідність створення системи прикладних задач природничого характеру для профільного навчання математики. Евристичне навчання математики //Тезиси доповідей. – с. 112.
66. Соколенко Л. О. Про підготовку вчителів до навчання математики у старшій профільній школі / Л. О. Соколенко // Вісник Черкаського університету / Черкас. нац. ун-т. ім. Б. Хмельницького. – Черкаси, 2010. – Вип. 191. – С. 111–121.

67. Соколенко Л.О. Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу. Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук. Київ: УДПУ імені М.П. Драгоманова, 1997.- 21 с.
68. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002. – 128 с.
69. Соколенко Л.О. Система прикладних задач природничого характеру як засіб формування евристичної діяльності учнів // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний зб. наук. робіт. – Донецьк, 2009. – Вип.32. – С.24-28.
70. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – 128 с.
71. Соколенко Л.О., Швець В.О. Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій в курсі алгебри і початків аналізу. – Математика в сучасній школі. – 2013, № 12. – С. 32-41.
72. Соколенко Л.О., Швець В.О. Прикладні задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції в курсі алгебри і початків аналізу. – Математика в рідній школі. – 2014, № 12. – С. 25-32.
73. Соколенко Л.О., Швець В.О. Прикладні задачі, призначені для вивчення логарифмічної функції в курсі алгебри і початків аналізу. - Математика в рідній школі.-2014, №4.- С. 34-40.
74. Соколенко Л.О., Швець В.О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу.- Математика в рідній школі.-2014, №9.-С. 2-10.
75. Соколенко Л.О., Швець В.О. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення інтеграла та його застосувань у курсі алгебри і початків аналізу. – Математика в рідній школі. – 2015, № 1-2.- С.20-29.
76. Соколенко О.І., Соколенко Л.О. Сюжети як засіб реалізації прикладної спрямованості навчання математики у французькій середній школі. - Вісник

Чернігівського державного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів, 2001. – Вип.4. – С. 149-154.

77. Соколенко, Л. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосування у курсі алгебри і початків аналізу / Л. Соколенко, В. Швець // Математика в рідній шк. - 2014. - № 9. - С. 2–10.

78. Соляник Н. В. Задачі з прикладним змістом при вивченні курсу стереометрії, як засіб профільної підготовки. Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступення «магістр». Ніжин: Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, 2019. – 42 с.

79. Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, З. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. – 216 с.

80. Швець В.О., Соколенко Л.О. Екзамен з математики на ступінь бакалавра у Франції// Матем. в шк.-1999.-№3.-С.37-40.

81. Швець В. О. Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі: курс лекцій. – Київ.: Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024. – 504 с.

82. Швець В.О., Прус А.В. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник.- Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007.-156 с.

83. Шендрик А. Використання прикладних задач у курсі математики старшої школи //Збірник наукових праць. – 2021. – С. 85-86.

84. Шиян Н.І. Дидактичні засади профільного навчання у загальноосвітній школі сільської місцевості: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук: спец. 13.00.09 / Надія Іванівна Шиян. – Харків, 2005.-40 с.

85. Шляховий О. О. STEM-освіта як інноваційний підхід у вивченні математики // Наукові записки молодих учених. – 2019. – №. 4. [Електронний ресурс] URL: https://core.ac.uk/download/pdf/270151231.pdf (дата звернення: 28.04.2024).

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

ВИМОГИ

до обов'язкових результатів навчання здобувачів профільної середньої освіти в математичній освітній галузі

Загальні результати	**конкретні результати**
1. Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв’язати із застосуванням математичних методів	
Вирізняє серед ситуацій із повсякденного життя ті, що розв’язуються математичними методами [МАО 1.1]	вирізняє серед комплексних та/або специфічних проблемних ситуацій ті, що розв’язуються математичними методами [12 МАО 1.1.1] самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює групу комплексних проблемних ситуацій, для розв’язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2]
Досліджує, аналізує дані та зв’язки між ними, оцінює їх достовірність і доцільність використання [МАО 1.2]	досліджує проблемну ситуацію, вишукуючи та долучаючи різноманітні джерела інформації, оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1] інтерпретує, аналізує, систематизує дані і зв’язки між ними, оцінює достовірність і доцільність використання даних, подає дані і зв’язки між ними в різних формах [12 МАО 1.2.2] добирає дані, потрібні для розв’язання проблемної ситуації, визначає межі даних, формулює припущення щодо даних [12 МАО 1.2.3]
Прогнозує результат розв’язання проблемної ситуації [МАО 1.3]	визначає, що саме може бути результатом розв’язання проблемної ситуації [12 МАО 1.3.1] пропонує шляхи досягнення результатів розв’язання проблемної ситуації [12 МАО 1.3.2]

2. Моделювання процесів і ситуацій, розроблення стратегій, планів дій для розв’язання проблемних ситуацій	
Сприймає і перетворює інформацію математичного змісту [МАО 2.1]	сприймає інформацію математичного змісту в різних формах [12 МАО 2.1.1] вишукує додаткову інформацію, зокрема з різних галузей знань [12 МАО 2.1.2] перетворює інформацію математичного змісту з однієї форми в іншу [12 МАО 2.1.3]
Розробляє стратегії розв’язання проблемних ситуацій [МАО 2.2]	розробляє стратегії розв’язування комплексних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1] вибирає серед декількох різних стратегій розв’язання проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2] планує дії, спрямовані на розв’язання проблемної ситуації [12 МАО 2.2.3]
Створює математичну модель проблемної ситуації [МАО 2.3]	визначає компоненти математичної моделі комплексної проблемної ситуації, взаємозв’язки між ними [12 МАО 2.3.1] створює різні математичні моделі проблемних ситуацій [12 МАО 2.3.2] змінює модель відповідно до особливостей проблемної ситуації [12 МАО 2.3.3]
Представляє результати розв’язання проблемної ситуації та конструктивно обговорює їх [МАО 2.4]	представляє результати розв’язання проблемної ситуації [12 МАО 2.4.1] конструктивно обговорює результати розв’язання проблемної ситуації [12 МАО 2.4.2]
3. Критичне оцінювання процесу та результату розв’язання проблемних ситуацій	

Оцінює дані проблемної ситуації, необхідні і достатні для її розв'язання [МАО 3.1]	оцінює необхідність, достатність і значущість даних для розв'язання комплексної та/або специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.1] визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання складної та/або специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2]
Критично оцінює спосіб розв'язання та різні моделі проблемної ситуації, обирає раціональний шлях її розв'язання [МАО 3.2]	аналізує та оцінює різні способи розв'язання і різні моделі комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1] обґрунтовано добирає відповідну математичну модель до складної та/або специфічної проблемної ситуації з кількох можливих [12 МАО 3.2.2] застосовує математичну модель проблемної ситуації, критично оцінює отриманий результат і за потреби змінює модель та/або спосіб розв'язання [12 МАО 3.2.3]
4. Розвиток математичного мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіння математичною мовою	
Мислить математично [МАО 4.1]	визначає зв'язки між математичними об'єктами та об'єктами реального світу [12 МАО 4.1.1] класифікує і структурує визначену множину математичних понять і фактів, робить висновки щодо можливого застосування їх, досліджує та доводить математичні твердження [12 МАО 4.1.2] визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях [12 МАО 4.1.3]
Застосовує математичні поняття, факти і послідовність дій для	добирає і застосовує доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1]

розв’язання проблемних ситуацій [МАО 4.2]	оперує математичними об’єктами і використовує різні форми подання їх у процесі розв’язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2] використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології [12 МАО 4.2.3]
Володіє математичною термінологією, ефективно використовує її [МАО 4.3]	читає та розуміє тексти математичного змісту, формулює математичні поняття і факти, описує математичні процедури, доцільно та правильно використовує математичну термінологію і символіку [12 МАО 4.3.1] висловлюється математично грамотно, змістовно, точно, лаконічно; чітко структурує власне мовлення, обґрунтовано пояснює хід своїх міркувань [12 МАО 4.3.2]