Національний університет „Чернігівський колегіум”
імені Т. Г. Шевченка
Природничо-математичний факультет
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітнього ступеня „магістр”
на тему:

„Елементи векторної алгебри в шкільному курсі математики”

Виконала:
студентка 2 курсу 51фмт групи
спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)
Віктор Вікторія Валеріївна

Науковий керівник:
доцент кафедри, канд. ф.-м.н.
Балюнов Олексій Олександрович

Чернігів – 2024

Роботу подано до розгляду “____” _____________________ 20__ року

Студентка ____________ ___________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Науковий керівник ____________ ___________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Рецензент ____________ ___________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота розглянута на засіданні кафедри математики

протокол № _____ від “____” ___________________ 20___ року.

Студентка допускається до захисту даної роботи в екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри ____________ _________________________

(підпис) (прізвище та ініціали)

АНОТАЦІЯ

Віктор В.В. Елементи векторної алгебри в шкільному курсі математики. Кваліфікаційна робота освітнього ступеня „магістр”. На правах рукопису. Спеціальність – 014 Середня освіта (Математика). – Чернігів, 2024 рік.

У кваліфікаційній роботі розглянуто науково-методичні засади вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики, проведено аналіз педагогічних досліджень щодо вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики, визначено роль і місце вивчення елементів векторної алгебри у шкільному курсі математики, охарактеризовано можливості використання елементів векторної алгебри у процесі розв’язання шкільних задач з математики, визначено зміст шкільного курсу математики на прикладі вивчення елементів векторної алгебри, досліджено методичні аспекти вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики.

Результатом проведеного дослідження стало внесення пропозицій щодо методики вивчення теми „Елементи векторної алгебри” в шкільному курсі математики та розробка системи вправ по темі „Елементи векторної алгебри”.

Ключові слова: векторна алгебра, математика, алгебра, геометрія, векторний метод, координатний метод, розв’язання задач.

SUMMARY

Victor V.V. Elements of Vector Algebra in the School Mathematics Curriculum. Qualification work of the educational degree „master”. On the rights of the manuscript. Specialty – 014 Secondary Education (Mathematics). – 2024, year.

The qualifying work examines the scientific and methodological foundations of studying the elements of vector algebra in the school mathematics curriculum. An analysis of pedagogical studies regarding the teaching of vector algebra elements in school mathematics has been conducted. The role and place of studying vector algebra in the school mathematics curriculum have been determined. The potential use of vector algebra elements in solving school-level mathematical problems is characterized. The content of the school mathematics curriculum is defined through the example of teaching vector algebra elements. Methodological aspects of studying vector algebra in the school mathematics curriculum are explored.

The result of the research, proposals were made on the methodology of teaching the topic „Elements of Vector Algebra” in the school mathematics curriculum, and a system of exercises on the topic „Elements of Vector Algebra” was developed.

Keywords: vector algebra, mathematics, algebra, geometry, vector method, coordinate method, problem-solving.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Шкільна програма з математики передбачає вивчення основ векторної алгебри і її застосування для доведення теорем і розв'язання задач. Зокрема, векторний метод є важливим інструментом в геометрії, який дозволяє вирішувати широкий спектр завдань завдяки універсальності та ефективності цього підходу. Виконання спеціально підготовлених завдань сприяє формуванню в учнів не тільки теоретичних знань, а й практичних навичок аналізу, логічного мислення та пошуку оптимальних рішень. Систематичне формування в учнів умінь і навичок у процесі вивчення елементів векторної алгебри, повинні привести до більш успішного засвоєння школярами даного розділу математики, підвищить їх загальну математичну підготовку забезпечить досягнення мінімуму основної освітньої програми з математики.

Актуальність теми обумовлена тим, що, незважаючи на очевидну значимість вивчення елементів векторної алгебри в навчальному процесі, методика викладання даного розділу математики недостатньо опрацьована в навчально-методичній літературі. У багатьох підручниках і додаткових матеріалах завдання з використанням векторів подаються стисло, часто без належного пояснення, що обмежує можливість їх глибокого засвоєння. Крім того, питання організації навчання і розробка ефективних методичних рекомендацій необхідні для вдосконалення математичної освіти. Це дозволить підвищити якість навчання, розширити математичну компетентність учнів і підготувати їх до вирішення складних завдань в майбутньому у процесі подальшого навчання та здійснення професійній діяльності.

Слід зазначити, що окремі питання, пов'язані з вивченням елементів векторної алгебри у шкільному курсі математики розкрито у працях таких авторів як В. В. Ачкан, Г. П. Бевз, Г. В. Бібік, Н. М. Клюка, О. М. Королюк, Л. Л. Креш, М. В. Працьовитий, О. В. Мартиненко, О. П. Маслов, О. О. Пацановська, І. Г. Ключник та інших. Разом з тим, складність даного розділу математики та його важливість для розвитку математичного та логічного мислення, подальшого навчання та засвоєння інших розділів математики обумовлюють необхідність подальших наукових пошуків у напрямку удосконалення викладання елементів векторної алгебри у шкільному курсі математики.

Метою роботи є дослідження теоретичних та практичних аспектів вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики.

Об'єкт дослідження – процес вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики.

Предмет дослідження – теоретичні та методичні аспекти вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики.

У відповідності до поставленої мети були визначені основні **завдання** дослідження:

1) провести аналіз педагогічних досліджень щодо вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики;

2) охарактеризувати роль і місце вивчення елементів векторної алгебри у шкільному курсі математики;

3) з'ясувати можливості використання елементів векторної алгебри у процесі розв'язання шкільних задач з математики;

4) визначити зміст курсу математики (на прикладі вивчення елементів векторної алгебри);

5) обґрунтувати методику вивчення теми „Елементи векторної алгебри" в шкільному курсі математики;

6) розробити систему вправ по темі „Елементи векторної алгебри".

Мета і завдання дослідження визначили вибір **методів**: вивчення та аналіз психолого-педагогічної, навчально-методичної та спеціальної літератури з проблеми дослідження; системно-структурний та логічний методи; метод контент-аналізу, а також методи систематизації та наукового узагальнення.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що розроблена методика вивчення теми „Елементи векторної алгебри" може бути впроваджена в практику вчителів, при викладанні теорії і методики вивчення даного розділу математики, а також отримані результати можуть бути використані авторами навчальних посібників при оновленні їх змісту.

Структура кваліфікаційної роботи. Кваліфікаційна робота складається з анотації, вступу, двох розділів, висновків, списку використаних літературних джерел. Основний зміст роботи викладено на 68 сторінках друкованого тексту. Робота містить 9 рисунків. Список використаних літературних джерел налічує 63 найменування.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Аналіз педагогічних досліджень щодо вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики

Поняття вектора є одним із ключових елементів сучасної математики, яке широко застосовується у багатьох її галузях. Ще у працях Г. Бесселя, Ж. Аргана та К. Гаусса, присвячених теорії комплексних чисел, було встановлено зв'язок між арифметичними операціями над векторами у двовимірному просторі. Згодом дослідження В. Гамільтона, Г. Грассмана та Ф. Мебіуса розширили застосування цього поняття, особливо у вивченні тривимірного простору. Значення векторів у геометрії стало очевидним завдяки Герману Вейлю, який у 1918 році запропонував векторну аксіоматику евклідової геометрії.

Сьогодні векторний підхід є основою для вивчення таких дисциплін, як лінійна алгебра, аналітична та диференціальна геометрія, функціональний аналіз. Завдання механіки, теорії пружності чи електромагнітних полів нерідко зводяться до оперування векторами, що робить їх незамінним інструментом у фізиці та інших науках.

Методика вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики широко висвітлюється у методичній літературі, яка орієнтована на підготовку майбутніх педагогів. Ця тема часто пов'язана з інтерактивними технологіями, що активно застосовуються у навчальному процесі, і є важливим елементом професійного становлення вчителів математики.

У сучасній методичній літературі зазначається, що вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики має декілька особливостей, що роблять цей процес унікальним, а саме:

1) прикладний характер. Вектори широко застосовуються у сучасній науці та техніці. Відповідно до вимог сьогодення, учні повинні вміти використовувати набуті теоретичні знання у практичній діяльності. Вектори надають чудову

можливість для розв'язання завдань прикладного спрямування [17, с.47];

2) абстрактність поняття. Вектор є одним із фундаментальних елементів сучасної математики [24, с.117];

3) недосконаліcть методики. На сьогоднішній день у шкільній програмі відсутній підхід до вивчення векторів, який повністю відповідав би сучасним освітнім вимогам [31, с.22]. Це частково зумовлено тим, що вектори були включені до шкільного курсу математики порівняно нещодавно.

За сучасною шкільною програмою поняття „вектор" і „векторна величина" вивчаються у курсах фізики і математики основної школи. В математиці вектором називають напрямлений відрізок, тобто відрізок, в якому виділено початок і кінець [6, с.256].

Слід зазначити, що традиційно вектор визначався як спрямований відрізок. Так, за визначенням О. С. Істера, вектором називають відрізок, для якого визначено напрям [27, с.54]. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір приводять наступне визначення: величини, які визначаються не тільки числовим значенням, але й напрямом, називають векторними величинами або векторами [51, с.106]. Аналогічне визначення наводиться у підручнику Г. П. Бевз: вектор – значення величин, які характеризуються не лише числовими значеннями, а й напрямами [11, с.61].

Проте під час реформування шкільної математичної освіти було запропоновано новий підхід: трактувати вектор як паралельне перенесення. Цей метод дозволив логічно та природно вводити операції над векторами й використовувати їх у теоретичному матеріалі, але ускладнив їх прикладне застосування.

Існують і інші трактування векторів, такі як:

1) вектор як елемент векторного простору [14, с.132];

2) вектор як клас еквівалентних спрямованих відрізків [19, с.78].

Кожен із цих підходів має свої переваги й недоліки. Однак традиційне уявлення про вектор як спрямований відрізок залишається найбільш наочним і зрозумілим для учнів.

Координатний підхід до операцій з векторами відіграє важливу роль у сучасній математиці та її практичному застосуванні. Ця інтерпретація векторів є ключовою для лінійного програмування, аналізу багатозмінних функцій та лінійної алгебри. У шкільному курсі математики вектори, представлені як спрямовані відрізки, зазвичай одразу пов'язують із координатами, що робить необхідним ознайомлення учнів із координатною формою векторів.

З огляду на важливість практичної та прикладної спрямованості шкільної математики, найбільш ефективним є представлення вектора як спрямованого відрізка, тісно пов'язаного з його координатним вираженням. Цей підхід узгоджується з концепціями, викладеними в підручниках таких авторів як А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір [51], О. С. Істер [27], Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова [11], що використовується у шкільному навчанні.

У методичній літературі виділяють декілька методичних підходів до введення поняття вектора та виконання дій з векторами в закладах загальної середньої освіти (ЗЗСО) (І. В. Лов'янова [43], Г. П. Бевз [8], З. І. Слєпкань [60]). Основна роль векторів при цьому полягає у використанні алгебраїчного апарату для розв'язання геометричних задач. Однак багато фахівців відзначають, що викладачам, студентам і, тим більше, школярам часто складно застосовувати цей метод для вирішення складних завдань.

На сьогодні векторний і координатний методи є одними з найефективніших у розв'язуванні математичних задач [9, с.11]. Вони дозволяють знаходити розв'язання майже всіх типів задач у математиці, фізиці, астрономії та техніці. Проте в межах шкільної програми ці методи використовуються недостатньо повно.

Вивчення векторів і координат є важливою складовою шкільного курсу геометрії, а відповідні теми включені до програми НМТ з математики. Тому учнів слід знайомити з цими темами докладно. До того ж, вивчення елементів векторної алгебри часто допомагає школярам ефективно вирішувати складні завдання на НМТ, що сприяє отриманню високих результатів [20, с.111].

Процес вивчення елементів векторної алгебри має значний потенціал для створення міжпредметних зв'язків і вирізняється практичною орієнтованістю [22, с.106]. Різноманітні підходи до навчання, зокрема метод проектів, кейс-метод тощо, сприяють глибшому опануванню цієї теми учнями як у школі, так і у вищих навчальних закладах.

З. І. Слєпкань вважає, що особливу увагу необхідно звернути на те, що при вивченні векторної алгебри в математиці докладно розглядається додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів [60, с.172].

Ю. Погодіна зауважує, що з метою активізації пізнавальної діяльності учнів при вивченні елементів векторної алгебри обов'язково розглядається теоретична і практична значимість цієї теми. З теоретичної точки зору використання векторного запису дозволяє істотно спростити формули, з якими учні будуть зустрічатися при вивченні математики та фізики, а можливо, у подальшому, і загальнотехнічних дисциплінах. З практичної точки зору в даній темі описуються величини, які характеризуються двома параметрами: числовим значенням і напрямком. Приклади таких величин учням вже знайомі зі шкільного курсу фізики. Виклад теоретичного матеріалу теми необхідно ілюструвати завданнями з курсу геометрії, фізики, механіки та електротехніки [56, с.343].

При введенні понять векторного і змішаного добутків векторів також використовуються прикладні задачі. При цьому звертається увага на їх фізичний і геометричний сенс. Необхідно звернути увагу учнів на велику різноманітність вправ, які вирішуються із застосуванням векторів:

1) завдання аналітичного характеру на обчислення, часто з використанням прямокутних координат точки або вектора;

2) задачі геометричного характеру (обчислювальні або на доказ);

3) завдання прикладного характеру.

На думку О. В. Мартиненко, О. П. Маслова, для покращення засвоєння учнями тем, які передбачають вивчення елементів векторної алгебри, доцільно застосовувати методику навчання, засновану на принципі наочності. Це дозволить зробити навчальний процес більш ефективним та доступним. Наочність є важливою складовою освітнього процесу, що допомагає учням краще зрозуміти матеріал та досягти глибшого осмислення вивченого [48, с.142]. Математика, як дисципліна, особливо виграє від використання принципу наочності. Завдяки різноманітним засобам наочності учні розвивають образне, абстрактне та просторове мислення, що спрощує процес сприйняття складних понять. Цей підхід дозволяє більш ефективно засвоювати матеріал, перетворюючи його на конкретні уявлення, що відповідають суті вивчених явищ.

Застосування принципу наочності у процесі вивчення елементів векторної алгебри включає в себе різні методи та засоби. Серед них:

1) креслення вчителя на дошці, яке здійснюється під час пояснення матеріалу. Це дозволяє учням візуально спостерігати процес створення малюнка та супроводжувати його поясненнями. Такий підхід є дуже ефективним, оскільки учні можуть слідкувати за етапами виконання завдання;

2) використання наочних просторових моделей, які допомагають учням краще уявити абстрактні математичні об’єкти;

3) використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) дозволяє візуалізувати як плоскі, так і тривимірні математичні об’єкти, надаючи нові можливості для навчання.

З огляду на те, що вивчення елементів векторної алгебри передбачає ознайомлення з великим обсягом візуальних матеріалів, застосування принципу наочності є важливим та необхідним. Впровадження комп’ютерних технологій, таких як інтерактивні посібники та програми, значно підвищує ефективність навчання, дозволяючи учням краще розуміти матеріал і виконувати завдання.

Сучасні інформаційні технології дають змогу використовувати комп’ютерні програми для створення ілюстрацій, вирішення творчих задач, проведення тестувань та інтерактивних вправ [26, с.78]. Серед таких програм, що можуть бути корисними при вивченні елементів векторної алгебри, є AdvancedGrapher, GeoGebra, Gran-2D, Gran-3D, Wolfram Mathematica та інші [57, с.263]. Робота в них інтуїтивно зрозуміла й ідентична – будуються базові об'єкти, які потім можна динамічно змінювати і спостерігати за певними якісними властивостями і кількісними характеристиками. Кожна із зазначених вище програм підтримує вивчення геометричних перетворень, але містить власні інструменти їх реалізації [59, с.25]. Використання цих інструментів у навчальному процесі допомагає забезпечити наочність та зробити вивчення математичних понять більш захоплюючим та доступним для учнів.

Також К. А. Медведєва, О. М. Гришко пропонують для активізації пізнавальної діяльності учнів при вивченні елементів векторної алгебри виконувати реферативні роботи з використанням історичних фактів [49, с.367]. Учні можуть підгодовувати невеликі повідомлення з історії розвитку векторного числення, біографії вчених, таких як У. Гамільтон (1805-1865), Дж. Гіббс (1839-1903), Хевисайд (1850-1925) які зробили чималий внесок у розробку теорії і векторів.

У підсумку зазначимо, що проблема вдосконалення змісту та методів навчання математики в основній школі є однією з ключових у сучасних педагогічних дослідженнях. Суттєвий вплив на цей процес мають перехід на компетентнісну освіту, запровадження нових критеріїв якості навчання та активне використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні.

1.2. Роль і місце вивчення елементів векторної алгебри у шкільному курсі математики

Розвиток математичної компетентності є важливим аспектом освіти, що відповідає положенням Закону України „Про освіту”. У цьому законі закладені ключові принципи та цілі освітнього процесу, які спрямовані на формування компетентностей, необхідних для успішного життя, зокрема математичної [1].

Розвиток математичної компетентності в українській системі освіти є одним із ключових завдань, закріплених у Законі України „Про повну загальну середню освіту”. Ця компетентність визначається як здатність учня застосовувати математичні знання, навички та способи мислення для розв'язання проблем у різних сферах життя [2].

Основна мета вивчення елементів векторної алгебри у шкільному курсі математики полягає в кількох ключових аспектах. По-перше, це дослідження цілей застосування векторного методу в шкільному курсі. По-друге, виділення основних етапів розв’язання задач, а також аналіз понятійно-термінологічного апарату, необхідного для роботи з векторним методом [39, с.35].

Вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі пояснюється тим, що векторний метод є універсальним математичним інструментом для вирішення великого класу завдань, як безпосередньо математичних, так і прикладних, що дуже затребуване в системі професійної освіти при вивченні дисциплін математичного і природничого циклу [36, с.42]. Матеріалу, безпосередньо пов’язаному з вивченням векторів на площині, відводиться недостатньо часу в шкільній програмі з математики. Хоча, варто зауважити, що курс геометрії в старших класах середньої школи будується саме на основі векторних уявлень.

Дана тема, при раціональному її поєднанні з іншим програмним матеріалом з математики сприяє підвищенню якості знань та інтелектуального рівня особистості, формуванню в учнів системних знань, що в свою чергу стає джерелом для розширення наявних знань і застосування їх на практиці.

Разом з тим слід зазначити, що курс вивчення елементів векторної алгебри в цілому для основної маси учнів, на думку багатьох методистів, психологів, вчителів, є досить складним. У зв’язку з цим в науковій літературі зазначається, що вивчення даного розділу має бути цікавим, а головне життєвим [46, с.96]. Причина особливих труднощів при вивченні елементів векторної алгебри для більшості учнів і швидкого її забуття по залишенню школи криється в тому, що при навчанні математики відсутні обидві умови успішного засвоєння (чітке розуміння змісту навчального предмета і міцне закріплення його в пам’яті): викладання зазвичай ведеться так, що в учнів не підтримується живий інтерес до предмета і не створюються міцні і різнорідні асоціації досліджуваного матеріалу з іншими елементами їх розумової діяльності [40, с.216].

Основні завдання вивчення елементів векторної алгебри в середній школі:

1) ознайомити учнів з ефективним способом розв'язання різноманітних геометричних задач (як афінних, так і метричних) та доведення теорем;

2) продемонструвати широке застосування векторного апарату в інших сферах знань, таких як фізика, хімія, технічні науки [41, с.908];

3) формування у школярів цілісного світогляду, заснованого на діалектико-матеріалістичному підході [61, с.15].

Окрім цього, використання елементів векторної алгебри у навчанні сприяє розвитку навичок узагальнення та конкретизації, формує в учнів гнучкість мислення, цілеспрямованість, раціональність та критичність. Таким чином, поняття вектора не лише допомагає вирішувати задачі, але й розвиває важливі когнітивні якості.

Таким чином, вивчення елементів векторної алгебри не лише поглиблює знання геометрії, а й розвиває універсальні навички, необхідні для подальшого навчання і практичного застосування.

Відомо, що важливим завданням навчання математики є розвиток в учнів активного самостійного і творчого мислення так, щоб поступово формувати в учнів здатність самонавчатися. Така можливість здійснюється тільки тоді, коли поєднуються такі важливі розумові операції, як аналіз і синтез, узагальнення тощо, користуючись аналогією і інтуїцією, що і робиться при вивченні елементів векторної алгебри, поєднуючи інтуїцію з геометричним уявленням, узагальненням і практичним застосуванням цього уявлення на прикладах з фізики та практичної діяльності [42, с.54].

Перед загальноосвітньою школою стоїть завдання – формування в учнів умінь і навичок самостійної навчальної роботи. Для того, щоб реалізувати це завдання, потрібно розвивати ті навички, які необхідні для самостійної навчальної роботи, для формування в учнів розвитку їх розумових здібностей. У змістовному плані поняття „вектор" виступає як засіб, воно дає можливість вести спостереження і порівняння (зіставлення), абстрагування і конкретизацію, аналіз і синтез тощо. Наприклад, розглядаються властивості середньої лінії трикутника: вона паралельна третій стороні трикутника і дорівнює її половині. Якщо міркування при доказі цієї теореми вести на основі векторів, то міркування стають доступними більшості учнів при активній навчальній діяльності (рис.1.1).

Рис.1.1.

Вектор $\overrightarrow{ДЕ}$, що представляє середню лінію трикутника, можна виразити через інші вектори двома способами, причому відомо, що точка Д служить серединою сторони АС , а точка Е – серединою сторони СВ. Вектор $\overrightarrow{АВ}$ представляє суму трьох векторів: $\overrightarrow{АВ} = \overrightarrow{АД} + \overrightarrow{ДЕ} + \overrightarrow{ЕВ}$. Звідси слідує: $\overrightarrow{ДЕ} = \overrightarrow{АВ} - \overrightarrow{АД} - \overrightarrow{ЕВ}$ (1).

З іншого боку, вектор $\overrightarrow{ДЕ}$ можна виразити через вектори $\overrightarrow{ДС}$ і $\overrightarrow{СЕ}$, які за побудовою є рівними відповідно векторам $\overrightarrow{АД}$ і $\overrightarrow{ЕВ}$, тобто $\overrightarrow{ДЕ} = \overrightarrow{АД} + \overrightarrow{ЕВ}$.

Останню рівність складемо з рівністю (1) і отримаємо:

$$\overrightarrow{ДЕ} = \overrightarrow{АД} + \overrightarrow{ЕВ} + \frac{\overrightarrow{ДЕ} = \overrightarrow{АВ} - \overrightarrow{АД} - \overrightarrow{ЕВ}}{2 \cdot \overrightarrow{ДЕ} = \overrightarrow{АВ}} \quad (2)$$

Отримана рівність $2 \cdot \overrightarrow{ДЕ} = \overrightarrow{АВ}$ свідчить про те, що вектори $\overrightarrow{ДЕ}$ і $\overrightarrow{АВ}$ паралельні, причому $\overrightarrow{ДЕ}$ в два рази коротше вектора $\overrightarrow{АВ}$. Що і потрібно було довести. Такі міркування, з одного боку, доступні учням 9-11 класів, а з іншого, – сприяють осмисленню внутрішньо-предметних зв’язків, зв’язків з алгеброю і геометрією, доведенням теорем, спираючись на вектори, а також, демонструються раціональність, усвідомленість і елементи самостійності в розумових операціях учнів.

Спостереження та порівняння дозволяють вгадати загальні закономірності у використанні вектора для доведення теорем. Наприклад, теорема про властивості середньої лінії трапеції: середня лінія трапеції паралельна її основанням і дорівнює їх півсумі. Учні, які довели теорему про середню лінію трикутника, легко приходять до думки про використання вектора як засобу в міркуваннях, і намагаються середню лінію трапеції висловити через інші елементи мовою векторів (див.рис.1.1, (б)).

$\overrightarrow{АВ} = \overrightarrow{АЕ} + \overrightarrow{ЕР} + \overrightarrow{РВ}$, звідси і випливає: $\overrightarrow{ЕР} = \overrightarrow{АВ} - \overrightarrow{АЕ} - \overrightarrow{РВ}$ (3)

$\overrightarrow{ЕР} = \overrightarrow{ЕД} + \overrightarrow{ДС} + \overrightarrow{СР}$, де за умовою $\overrightarrow{АЕ} = \overrightarrow{ЕД}$ і $\overrightarrow{СР} = \overrightarrow{РВ}$, значить:

$\overrightarrow{ЕР} = \overrightarrow{ДС} + \overrightarrow{АЕ} + \overrightarrow{РВ}$ (4).

Склавши рівності (3) і (4), отримаємо:

$2.\ \overrightarrow{ЕР} = \overrightarrow{АВ} + \overrightarrow{ДС}$ (5).

Права частина рівності складається з суми двох паралельних векторів, а ліва частина складається з добутку числа на вектор, отже, з цієї рівності випливає те, що потрібно довести: по-перше, вектор $\overrightarrow{ЕР}$ паралельний векторам $\overrightarrow{АВ}$ і $\overrightarrow{ДС}$, по-друге, вектор $\overrightarrow{ЕР}$ в два рази менше вектора, що є сумою векторів $\overrightarrow{АВ}$ і $\overrightarrow{ДС}$.

Ці конкретні приклади демонструють, що самостійна розумова операція породжується системністю формування знань, де логічні зв'язки, відпрацьовані на доступних простих прикладах, трансформуються при вирішенні інших завдань. Таке тренування у вгадуванні зв'язків закономірності корисне і повинне супроводжуватися конкретними прикладами в міркуваннях. У цьому плані добре сказано Д. Брунером про те, що учень, який опанував раніше зрозумілими і доступними йому способами дії у вигляді „інтуїтивної геометрії", здатний більш глибоко засвоїти сенс доказових міркувань [12, с.145].

Коли ми маємо дві точки, то говоримо, що заданий відрізок, кінцями якого служать ці точки, і більше того, задається і вектор, якщо з цих точок виділена та, яка є початком відрізка, а інша – кінцем. Проте, вектор, заданий цими двома точками породжує два інших вектора, які є його проекціями на координатні прямі, а всі ці вектори утворюють прямокутний трикутник, де в якості гіпотенузи виступає заданий вектор, а в якості катетів – проекції вектора на осі координат. Такий взаємозв'язок одних понять з іншими поняттями, де вектор грає роль головного елемента в системі знань, стає базою правильних усвідомлених міркувань, базою розвитку розумових операцій при активній навчальній діяльності школярів [44, с.75]. При цьому порівняння, як один з методів пізнання дійсності, стає провідною розумовою операцією, переходячи від конкретного до більш абстрактного (дві точки – відрізок – вектор – проекції відрізка – трикутник тощо). Значить, проекція на вісь $0X$ і його довжина виражаються величиною першої координати, а проекція на вісь $0У$ – величиною другої координати, тобто $\overrightarrow{OM}$ $(x;\ y)$ виступає в ролі гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами x і y, і може бути записано: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а це дає можливість для перетворення відрізка в вектор і обчислення відстані між двома заданими точками своїми координатами, тобто довжина такого відрізка обчислюється як довжина вектора. Наприклад, дано точки $A\ (-1; 4)$ і $B\ (3;\ 7)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати: $\overrightarrow{AB}\ (4;\ 3)$, довжина якого дорівнює: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (рис.1.2.)

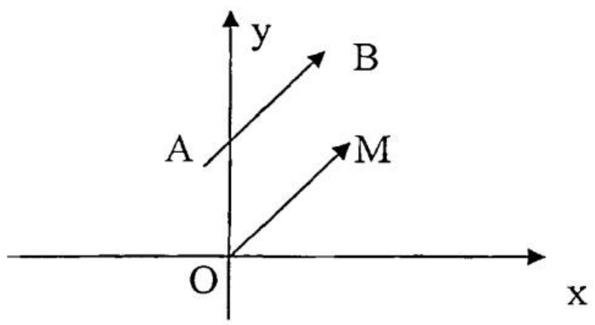

Рис.1.2

Таким чином, спостереження, порівняння поступово призводять до узагальнення, абстрагування, при цьому ступінь активності учнів зростає бажанням пізнати ще глибше. Якщо алгебраїчна форма запису прямої (як $Ax + By + C = 0$) знайома учням набагато раніше, ніж поняття „вектор", то тепер, у зв'язку із ознайомленням учнів з даним поняттям, замість цієї прямої можна взяти вектор, який супроводжує цю пряму, або ж перпендикулярний цій прямій. Цей зв'язок пояснюється дуже просто на підставі поняття скалярного добутку двох векторів: $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ де x і y – відповідно координати двох векторів. Якщо з рівняння прямої візьмемо ту його частину, яка відповідає паралельній прямій, що проходить через початок координат, то рівняння такої прямої записується наступним чином: $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} = 0$. Якщо подивитися на це рівняння як на скалярний добуток двох векторів, то ми маємо два вектори, координати яких відповідно рівні $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ $(\mathrm{x}; \mathrm{y})$ і $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ $(\mathrm{A}; \mathrm{B})$. Вираз $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{B} \cdot \mathrm{y})$ – це скалярний добуток двох векторів, один з яких належить даній прямій, а інший вектор має координати $(\mathrm{A}; \mathrm{B})$, якщо цей вектор перпендикулярний даній прямій, то цей вираз дорівнює нулю, тобто вектор $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ $(\mathrm{A}; \mathrm{B})$ перпендикулярний даній прямій. Таким чином, якщо дано рівняння прямої $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} = 0$, то і автоматично заданий вектор, який перпендикулярний цій прямій: $\overrightarrow{\mathrm{OK}}(\mathrm{A}; \mathrm{B})$. З іншого боку, вираз $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} = 0$ перетворюється в пропорцію: $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} = 0 \Rightarrow$ $\mathrm{x}/\mathrm{B} = \mathrm{y}/(-\mathrm{A})$ або ж $\mathrm{x}/(-\mathrm{B}) = y/\mathrm{A}$. Така пропорція свідчить про наявність двох колінеарних векторів, один з яких має координати $(\mathrm{x}; \mathrm{y})$, а інший – $(-\mathrm{B}; \mathrm{A})$. Отже, ми отримаємо вектор, який паралельний даній прямій, це вектор $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ $(-\mathrm{B};\ \mathrm{A})$. Наприклад, задано рівняння прямої: $7\mathrm{x} - 2\mathrm{y} + 5 = 0$. Візьмемо ту частину цього рівняння, яка відповідає прямій, що проходить через початок координат і паралельна даній прямій – це $7\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 0$. Звідси, ми маємо два вектори, один з яких перпендикулярний даній прямій – це $\overrightarrow{\mathrm{OK}}(7; -2)$, і вектор $\overrightarrow{\mathrm{OP}}(2; 7)$, який є паралельним даній прямій. Таким чином, із завданням рівняння прямої задаються два вектори, через які можна характеризувати дану пряму.

Виявлення вектора в рівнянні прямої і є результатом усвідомлених логічних міркувань, і на цій основі самостійна розумова операція спонукає учнів шукати зв'язки між поняттями і темами, учбовим матеріалом і практикою. Якщо дані прямі своїми рівняннями ($3\mathrm{x} + 5\mathrm{y} + 7 = 0$ і $2\mathrm{x} + \mathrm{y} + 6 = 0$), то і задані два вектора (перпендикулярних) відповідно кожної з цих прямих: $\overrightarrow{\mathrm{OK}}(3; 5)$ і $\overrightarrow{\mathrm{OP}}(2; 1)$. Кут між даними прямими дорівнює куту між цими векторами, тобто величина такого кута легко обчислюється як величина кута між векторами, як кут між векторами, перпендикулярними цим прямим:

$$\cos\alpha = \frac{|3\cdot(-2)+1\cdot 5|}{\sqrt{9+25}\cdot\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{170}} \approx 0{,}07669 \Rightarrow \alpha \approx 85^0 36^1$$

У модулі чисельника нами під кутом між прямими прийнятий гострий кут.

Однією з найважливіших навичок, які повинні винести учні з курсу математики – це потреба в самоконтролі і ретельній перевірці результатів своїх дії. Практика показує, що навіть в старших класах багато школярів не в змозі знайти допущену помилку як в доказі теореми, так і у розв’язанні задачі [45, с.48]. Причиною такого становища в основному є те, що в засвоєних знаннях відсутня системність, а поняття „вектор” створює базу формування системності знань – тим самим варіативність мислення стає гарантом самоконтролю, наприклад, в наведеному вище прикладі щодо обчислення величини кута між прямими, заданими рівняннями. Знайдену відповідь можна перевірити побудовою цих прямих на координатної площині або ж обчисленням величини кута між векторами, паралельними цим прямим. Учні набувають навичок самоконтролю тільки в тому випадку, якщо вони в змозі мислити варіативно, а „вектор” в цьому плані виступає як засіб варіативного мислення та як засіб усвідомлених міркувань.

Послідовно працюючи на прищеплення умінь, пов’язаних з контролем і самоконтролем в математичній діяльності учнів, вектор при цьому виступає як засіб викладу ряду тем не тільки з алгебри, а й з геометрії. Отже, в процесі використання вивчення елементів векторної алгебри чітко проявляється розвиваюча функція навчання математики, що є, з іншого боку, гуманітаризацією математичної освіти, яка орієнтує учнів на усвідомлене засвоєння досліджуваного матеріалу.

Реалізація гуманітарного потенціалу на базі вивчення певного навчального матеріалу вимагає і переоцінки ролі конкретних компонентів математичної науки, зокрема посилення ролі вектора в процесі навчання математики дозволяє здійснити ряд можливостей гуманітаризації навчання, учень отримує можливість вести міркування усвідомлено на конкретній базі раніше вивченого матеріалу, при цьому варіативність в підходах до вибору методів отримує широкий розмах як в мотиваційному плані, так і в логічних міркуваннях.

1.3. Можливості використання елементів векторної алгебри у процесі розв'язання шкільних задач з математики

Одним з основних завдань при навчанні математики є навчання розв'язання задач. Різноманітні прийоми, що застосовуються у процесі розв'язання завдань, розвивають логічне мислення, а також вміння вирішувати різні проблеми. Цьому процесу допомагає розвиток міжпредметних зв'язків, а також зв'язків між розділами математики [23, с.27]. Зв'язок алгебри і геометрії явно проглядається в односторонньому порядку: використання алгебраїчного методу при розв'язанні геометричних задач є дуже популярним в шкільному курсі. Застосування геометричних методів при розв'язанні алгебраїчних задач вимагає майстерного володіння матеріалом, і використовується рідко.

Т. І. Безрук зауважує, що методи векторної алгебри надають величезні можливості у процесі розв'язання задач елементарної геометрії. Особливо природньо застосовувати ці методи при розв'язанні завдань, пов'язаних з простим відношенням трьох точок, з обчисленням кутів між прямими, прямою і площиною, двогранних кутів, обчисленням обсягів фігур, відстанню між прямими, що схрещуються тощо. У задачах такого роду традиційні методи розв'язання зазвичай пов'язані зі значними труднощами – досить громіздкими тригонометричними обчисленнями, з необхідністю тонких геометричних побудов, тоді як такі труднощі навіть не виникають при застосуванні методів векторної алгебри [13, с.67]. Але вектори можуть бути успішно застосовані не тільки в геометрії, але і при вивченні деяких питань шкільного курсу алгебри, наприклад, при розв'язанні деяких систем алгебраїчних рівнянь, доведенні нерівностей і розв'язанні завдань на відшукання екстремуму.

Слід зазначити, що розвиток геометрії довгий час ґрунтувався на використанні геометричного методу при розв'язанні задач, тобто докази будь-яких тверджень, і розв'язання найпростіших геометричних задач будувалися на основі аксіом і вже доведених теорем за допомогою логічних міркувань [25, с.134]. Пізніше, у процесі дослідження даного питання, вчені прийшли до висновку, що найрізноманітніші завдання геометрії частіше зводяться до розв'язання алгебраїчних рівнянь і їх систем. Що і відбувається при розв'язанні завдань з геометрії в школі: учні і вчителі використовують обчислювальні методи частіше, ніж логічні міркування геометричного характеру. Сутність обчислювального методу полягає в тому, що для доведення тверджень і обчислення невідомих величин при розв'язання задачі учень зводить її до розв'язання рівняння, нерівності або їх систем [21, с.118]. Щоб скласти рівняння, яке буде описувати взаємозв'язок між даними і невідомими величинами, необхідно використовувати визначення, аксіоми, теореми, які можуть бути описані на алгебраїчній мові. Цей метод повною мірою характеризує впровадження аналітичних методів в геометрію.

Не менш цікавим є метод координат, який зв'язує алгебру і геометрію. Введення прямокутної декартової системи координат на площині (в просторі) дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між точками і впорядкованими парами (трійками) дійсних чисел [18, с.115]. Суть даного методу полягає в тому, що при введенні системи координат координати точок заданої фігури можуть бути визначені за допомогою рівняння, нерівності або їх систем. Метод координат вважається досить зручним для використання в певному типі завдань, проте через це має свої недоліки. Наприклад, при його застосуванні втрачається геометричний сенс задачі, її розв'язання зводиться до знаходження коренів будь-якого рівняння і їх відбору, або подання деяких геометричних фактів в координатах має громіздкий вигляд, обчислення яких може привести до помилок. Щоб уникнути цих помилок, вчені висували ідеї про створення геометричного числення, яке дозволило б поводитися з геометричними фігурами так само, як з числами. Втіленням цієї ідеї став розвиток векторної алгебри, яка дозволяла оперувати спрямованими відрізками. Суть векторного методу полягає в тому, щоб умову геометричної задачі описати мовою векторів, за допомогою яких можна перейти до обчислювального методу. Дуже важливо вміти переходити не тільки від умови завдання до векторів, а й назад, від векторів до інтерпретації знайденого значення [30, с.29].

Представлення задачі означає формулювання задачі мовою деякої теорії, що дозволяє застосовувати для розв'язання задачі у вихідній постановці теореми, операції, алгоритми і методи тієї теорії, в термінах якої вона адекватно представлена [47, с.12]. Треба відзначити, що одна і та ж задача може мати різне представлення в рамках однієї теорії.

Важливим кроком етапу представлення задачі є абстракція, ігнорування несуттєвих для задачі деталей. І, природно, для успішного розв'язання завдання, необхідна вільна орієнтація в тій теорії, в термінах якої представлена задача. У науковій літературі (М. І. Бурда [16], О. С. Дубинчук, Ю. І. Мальований, Н. П. Дичек [21], І. А. Зоріна [24]) зазначається, що геометрична підготовка випускників навіть профільних математичних класів залишає бажати кращого. Однією з причин цього можна назвати, той факт, що учні часто не „бачать" креслення, не помічають на ньому вже відомих теорем і закономірностей. В геометрії розвинути „бачення" дуже важко, цим треба займатися постійно, починаючи ще з початкових класів, коли вводяться елементарні поняття фігур на площині і в просторі [54, с.178]. Тому необхідно більшу увагу приділяти методам, заснованим на наочно-геометричних уявленнях, оскільки такі методи мають яскраво виражений розвиваючий характер і підкреслюють пріоритетність і первинність геометричних уявлень в шкільній математиці.

Векторне представлення геометричних задач в даний час стає одним з провідних методів. Але для учнів цей метод залишається одним з найскладніших. Основною причиною труднощів засвоєння векторного методу розв'язання задач, є те, що школярі недостатньо опановують апарат векторної алгебри. У геометричних задачах, що вирішуються векторним методом, вектори можуть і не входити в умову у явному вигляді. Тому необхідно вміти перевести умову задачі на векторну мову, щоб була можливість застосувати до її розв'язання векторний апарат. Формулювання даної геометричної задачі є векторним представленням задачі або є векторною моделлю задачі [32, с.218]. Аналізуючи метричні та афінні задачі, що мають векторне представлення, можна виділити групу асоціацій, які допомагають складати векторне представлення геометричної задачі. Як правило, ці асоціації потрійні: геометрична умова – векторна умова – аналітичний запис векторної умови.

Перерахуємо основні типи асоціацій:

1. Паралельні прямі $\vec{a}$ і $\overrightarrow{b}$ - колінеарні вектори $\vec{a}, \vec{b}$ – один вектор лінійно виражається через інший $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

2. Перпендикулярні прямі – $a^{\rightarrow}$ і $-b^{\rightarrow}$ ортогональні вектори $\vec{a}, \vec{b}$ – скалярний добуток векторів дорівнює нулю $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$.

3. Обчислити кут між прямими a і b – обчислити кут між векторами $\vec{a}, \vec{b},$ – знайти косинус кута між векторами $\vec{a}, \vec{b}$, за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

4. Знайти довжину відрізка АВ – обчислити довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ $= \vec{a}$ — знайти довжину вектора за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

5. Просте відношення трьох точок *A, B, C* – колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ – обчислення λ: $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$.

6. Завдання на доказ приналежності трьох точок *A, B, C* одній прямій *C* – колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ — обчислення – λ: $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$.

7. Завдання на доказ приналежності чотирьох точок *A, B, C, D* однієї площини – компланарність векторів $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{AD}$ – змішаний добуток векторів $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{AD}$ дорівнює нулю $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

8. Завдання на обчислення площі трикутника (паралелограма) АВС – довжина векторного добутку векторів $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ – обчислення довжини векторного добутку.

9. Завдання на обчислення обсягів призми (тетраедра) – модуль змішаного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ – обчислення змішаного добутку за формулою.

При розв'язанні геометричних задач векторним методом рекомендується користуватися наступною схемою:

1. Проаналізувати умови задачі:

а) з'ясувати в якій системі координат (двовимірній або тривимірній) розглядається дана задача;

б) записати, що нам дано, що потрібно знайти або довести, а також побудувати креслення за умовою задачі.

2. Скласти векторне представлення задачі.

3. Скласти векторні співвідношення в задачі, що відповідають вимогам завдання.

4. Перекласти отриманий результат на геометричну мову.

Довести, що якщо точка O – центр ваги трикутника ABC, то вірною є рівність: $AB^2+BC^2+CA^2 = 3(OA^2+OB^2+OC^2)$.

Розв'язання: Задача є двовимірною. Складемо векторне представлення:

$\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b},$

Тоді $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\left(\vec{c} - \vec{b}\right), \overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{c}), \overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 - 3(OA^2 + OB^2 + OC^2) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = 0$$

Важливість векторного методу полягає в тому, що він дозволяє легко робити узагальнення, роль яких в математиці важко переоцінити.

Для активізації пізнавальної діяльності можна пропонувати учням стандартні задачі, для розв'язування яких використовують нестандартні підходи. Так, наприклад, рівняння легко можна розв'язати, ввівши вектори $\overline{m} = (\overline{2; x})$і $\overline{n} = (\overline{\sqrt{x-1}; 5}$ та оцінивши ліву частину рівняння $\overline{m} \cdot \overline{n} \leq |\overline{m}||\overline{n}|$. Подібні завдання вимагають від учнів нестандартного мислення, відкривають широкі можливості для їх інтелектуального розвитку, підвищують інтерес до навчання [31, с.23]. Але через малу кількість годин в рамках шкільної програми вектори використовуються обмежено і неповно, тому не залишається часу на розкриття їх практичного значення. Рівень вивчення векторів у шкільному курсі математики недостатній.

У підсумку зазначимо, що при вивченні елементів векторної алгебри важливо дотримуватися балансу між наочно-геометричним і координатним підходами. Перший надає більшу візуальність і краще відповідає традиційній подачі геометричного матеріалу, тоді як координатний підхід спрощує багато доведень і робить виклад стислим та чітким.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Визначення змісту курсу математики (на прикладі вивчення елементів векторної алгебри)

У 2023/2024 навчальному році шкільний курс математики викладається за оновленими у 2017 році навчальними програмами, доступними на сайті Міністерства освіти і науки України [4-5]. У цих програмах головною метою сучасної освіти визначено учня, а не предмет, який він вивчає, що відображає принцип „від предметоцентризму до дитиноцентризму”. У даному аспекті важливий акцент робиться на досягненні результатів навчання, які переважають над простим засвоєнням змісту матеріалу. Зокрема, у програмах детально описані очікувані результати, які включають знаннєву, діяльнісну та ціннісну складові ключових компетентностей.

Навчальні програми також підкреслюють важливість збалансованого підходу до знаннєвих та компетентнісних компонентів освіти. Ці документи є важливими орієнтирами для учнів, батьків і вчителів, оскільки допомагають відповісти на запитання: „Навіщо вивчати певну тему?”. Завдяки цьому програми стають інструментом для впровадження сучасних методик навчання та відповідають викликам сьогодення.

Згідно з Державним стандартом базової середньої освіти [3], випускник закладу загальної середньої освіти (ЗЗСО) повинен упевнено володіти математичною компетентністю. Це включає вміння використовувати математичні знання та методи для розв’язання різноманітних задач у повсякденному житті, моделювати процеси та ситуації з використанням математичних інструментів, а також розуміння значення математики в особистому та суспільному житті [3]. Тому завдання вчителя математики полягає у створенні сприятливих умов для розвитку інтелектуального потенціалу учнів і формування їхніх творчих здібностей.

Для того, щоб учні 9-10 класів могли впевнено застосовувати аналітичні методи для розв’язання геометричних задач, в основній школі (9 клас і молодші) слід закласти базу для вільного використання даних методів [16, с.5].

Відповідно до чинної навчальної програми з математики, перше знайомство учнів із декартовою системою координат відбувається у 5 класі, коли учні на початковому рівні вивчають метод координат: розміщення чисел на координатній прямій, побудову прямокутної системи координат на площині, а також аналіз графіків залежностей між величинами [33, с.85].

Подальше вивчення координат і векторів відбувається у ІІ півріччі дев’ятого класу. Учні розширюють свої знання, вивчаючи рівняння прямої, кола, формули для визначення довжини відрізка та координат його середини. Також вони ознайомлюються з векторними величинами, зокрема рівними, протилежними та колінеарними векторами.

У підручниках геометрії для 9-го класу значну увагу зосереджено на опануванні математичного інструментарію, такого як векторний метод доведення теорем і розв’язання задач. У курсі алгебри основний акцент зроблено на координатному методі та аналізі функцій. Окрім загального рівняння прямої, у дев’ятому класі учні знайомляться з поняттям кутового коефіцієнта. Завдяки цьому вводяться умови для визначення паралельності та перпендикулярності прямих на площині, що є важливими аспектами у геометричних побудовах.

На вивчення векторів у дев’ятому класі заплановано лише 10 годин. Цього часу замало, тому вектори вивчаються лише із загальноосвітньою метою і послуговуються ними лише для розв’язування найпростіших стандартних задач. Не залишається часу для встановлення міжпредметних зв’язків.

У старшій школі, залежно від рівня навчання (профільний, стандартний чи поглиблений) [9, с.11], учні поглиблюють знання про систему координат на площині та переходять до вивчення систем координат і векторів у просторі. Вони опановують рівняння деяких ліній і поверхонь у просторі, що дозволяє їм використовувати метод координат для доведення теорем і розв’язання задач.

У сьомому класі учні починають вивчати базові геометричні задачі, які вирішуються з використанням простих формул. Серед них – обчислення відстані між двома точками, знаходження середини відрізка чи запис рівняння прямої. На цьому етапі задачі здебільшого формулюються у координатній формі, що дозволяє чітко закріпити отримані знання.

Після засвоєння цих основ, у дев’ятому класі вводиться поняття рівняння геометричних фігур на площині. У цей період учні знайомляться з нульовим вектором, колінеарними векторами, модулем вектора (довжиною відрізка), а також вивчають алгебраїчний спосіб завдання векторів через координати.

Основні теми з вивчення елементів векторної алгебри, які представлені у шкільній програмі 9 класу [5], включають:

1. Основні поняття:

1) поняття вектора (що таке вектор: напрямлений відрізок; розрізнення між скалярними величинами (маса, температура) і векторними величинами (швидкість, сила));

2) довжина вектора: Формула для знаходження довжини (модуля) вектора $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ у двовимірному просторі.

3) рівність векторів: два вектори рівні, якщо мають однакову довжину і напрям.

2. Операції з векторами:

1) додавання і віднімання векторів: графічний метод (трикутник або паралелограм); аналітичний метод: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$;

2) множення вектора на число: зміна довжини вектора без зміни його напряму (або зміна напряму на протилежний при множенні на від’ємне число);

3) координати вектора: як знайти координати вектора за початковою та кінцевою точкою: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

3. Скалярний добуток:

1) формула для скалярного добутку:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ або $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$, де α– кут між векторами;

2) застосування скалярного добутку: визначення кута між векторами;

перевірка перпендикулярності ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$)

4. Геометричне застосування: проекція вектора на вісь; рівняння прямої у векторній формі.

5. Приклади задач: знайти довжину вектора за його координатами; розв'язати задачу про рух (додавання векторів швидкості); перевірити, чи є вектори ортогональними.

Ці теми подаються поступово, з великою кількістю практичних прикладів. Для ефективного засвоєння важливо приділяти увагу як графічним методам роботи з векторами, так і обчисленням.

У формі теорем подаються правила дій з векторами, заданими як відрізками, так і координатами.

Наприклад, у підручнику А. Г. Мерзляка представлена лема [51], яку у Г. П. Бевза [11] названо теоремою в рубриці для допитливих. Цю лему часто застосовують у планіметричних задачах, де використання векторів не згадується прямо. Крім того, учні вивчають скалярний добуток векторів. Однак поняття кута між векторами вводиться лише описово, без формального означення. Доцільно було б дати чітке визначення: „Кутом між двома векторами, відкладеними від однієї точки, є найкоротший кут, на який потрібно повернути один вектор, щоб він став співнапрямленим з іншим”. Це полегшує розуміння і зменшує ризик помилок у задачах.

У підручнику А. Г. Мерзляка [51] скалярний добуток визначають як добуток модулів векторів на косинус кута між ними, але доцільніше було б наголосити, що результатом такого добутку є число, як це зроблено у підручнику Г. П. Бевза [11]. О. С. Істер подає цей факт у вигляді теореми, де також формулюється правило для обчислення кута між векторами [11]. У Г. П. Бевза у рубриці „Для допитливих” [11] згадується поняття косого добутку, векторного та мішаного добутків, але завдання для практичного використання цих понять відсутні.

Цей матеріал нерідко викликає труднощі у школярів, адже для розв'язання таких задач потрібно не лише скласти рівняння, але й зрозуміти, як певна лінія описується як геометричне місце точок із заданими властивостями. Виклики також пов’язані з вибором умов для формулювання задачі, введенням системи координат, яка спростить рівняння, і створенням естетичного вигляду математичного запису [55].

У шкільній програмі з геометрії вивчаються два основних рівняння ліній: кола і прямої [7, с.182]. У 10 класі до цього додаються рівняння сфери, а також прямої і площини у просторі (у класах із профільним або поглибленим вивченням математики) [10].

Вивчення елементів векторної алгебри в 10 класі [4] охоплює такі основні теми:

1. Основні поняття: вектор: визначення, позначення, приклади (геометричний і фізичний сенс); довжина вектора (модуль вектора); колінеарні та рівні вектори; нульовий вектор та його властивості.

2. Операції з векторами:

1) додавання та віднімання векторів (правило трикутника; правило паралелограма);

2) множення вектора на число (зміна довжини вектора, напрямок при множенні на від’ємне число).

3. Координати векторів:

1) перехід від геометричного представлення до координатного: вектор у декартовій системі координат; обчислення довжини вектора через його координати;

2) рівність векторів через їх координати.

4. Скалярний добуток векторів:

1) визначення скалярного добутку;

2) геометрична інтерпретація (кут між векторами);

3) формула для скалярного добутку через координати: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

4) застосування для визначення (перпендикулярності векторів; кутів між векторами).

5. Вектори на площині та в просторі: розрізнення 2D та 3D векторів; поняття базису (орти координатних осей).

6. Розв’язування задач: геометричні задачі з векторами (знаходження довжини, кута, середньої точки); застосування векторів для доведення теорем.

Залежно від вивчення математики, на вивчення векторів у курсі геометрії старшої школи орієнтовно відводиться така кількість годин: 5 годин – рівень стандарту, 8 годин – академічний рівень, приблизно 16 годин – профільний та поглиблений рівень вивчення математики [31, с.22].

У підручниках для 10 класу поняття вектора формулюється по-різному. У А. Г. Мерзляка це „відрізок із зазначенням початкової і кінцевої точок” [52], у О. С. Істера – „відрізок із визначеним напрямом” [28], а у Є. П. Неліна [53] – „напрямлений відрізок”. Також визначається модуль вектора, колінеарні й компланарні вектори. Компланарність пояснюється через належність рівних векторів до однієї площини, хоча формулювання цього поняття у різних авторів дещо відрізняється.

Додавання й віднімання векторів розглядаються як у координатній формі, так і графічно. У деяких підручниках (А. Г. Мерзляк, Г. П. Бевз) поняття „кут між векторами” визначено як кут між відповідними відрізками, що виходять із однієї точки. В інших (О. С. Істер, Є. П. Нелін) це поняття подається через рисунок, без чіткого визначення.

Різниця підходів спостерігається і в означенні скалярного добутку. У А. Г. Мерзляка та Г. П. Бевза його визначають через модулі й косинус кута між векторами, а у Є. П. Неліна та О. С. Істера – як добуток відповідних координат. Скалярний квадрат (добуток вектора на себе) згадується лише в Є. П. Неліна та О. С. Істера.

У підручниках Г. П. Бевз також описуються поняття косого, векторного та мішаного добутків векторів як додаткова інформація, хоча завдань для їх використання немає. Теорія векторів найчастіше застосовується для доведення перпендикулярності чи паралельності прямих, знаходження кута між ними, а також для розв’язування задач геометричним методом. Доцільним є акцент на прикладному застосуванні векторної теорії, а не лише на формальному засвоєнні понять і теорем.

Таким чином, вивчення елементів векторної алгебри в 9 класі формує основу для подальшого навчання. Вивчення елементів векторної алгебри в 10 класі зазвичай включає основні поняття та операції з векторами, які є базовими для подальшого вивчення аналітичної геометрії, фізики та інших дисциплін. На початковому етапі школярі знайомляться з поняттям вектора і лінійними операціями над векторами, з координатами вектора і властивостями координат векторів, а також зі скалярним добутком векторів і його властивостями. У старших класах вивчаються елементи векторної алгебри в просторі.

2.2. Методика вивчення теми „Елементи векторної алгебри” в шкільному курсі математики

Методику вивчення теми „Елементи векторної алгебри” в шкільному курсі математики поділяють на етапи:

1. Підготовчий етап. На даному етапі необхідно освоїти основні поняття та основні дії з векторами.

Відзначимо, що розв’язання змістовних геометричних задач за допомогою векторів не можна починати на перших уроках з вивчення елементів векторної алгебри. До цього учнів необхідно підготувати. Підготовка до сприйняття векторного методу розв’язання задач може проводитися як при викладі теоретичного матеріалу, так і в процесі виконання системи підготовчих вправ і завдань. Очевидно, що першу чергу необхідно провести навик в виконанні афінних операцій над векторами. Тому спочатку слід розглядати завдання, які відносяться тільки до векторної алгебри [63, с.96].

Іншим підготовчим етапом процесу оволодіння векторним методом розв’язання геометричних задач є вироблення навички використання векторної алгебри для запису будь-якого геометричного факту мовою векторів і вироблення навички геометричної інтерпретації даного векторного запису [58, с.20].

Важливо домогтися, щоб учні без особливих утруднень вміли ставити у відповідність геометричному факту певний векторний запис і навпаки. Для цієї мети корисно скласти словник перекладу основних геометричних понять і співвідношень на мову векторної алгебри. Для ілюстрації наведемо декілька формул такого словника, який учні 9 класу починають складати під час вивчення теми „Вектори”.

1. Два вектори називають колінеарними, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих [11, с.62]. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є колінеарними $\Rightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b}, \vec{b} \neq 0$; $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, при $\lambda > 0$; $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, при $\lambda < 0$

2. $AB||CD \Rightarrow \vec{C}D = \lambda\vec{A}B$

3. Даний трикутник ABC, AM – медіана його сторони.

$$BC \Rightarrow \left(\vec{A}M = \frac{1}{2}\left(\vec{A}B + \vec{A}C\right)\right), AB \nparallel AC$$

4. Точка A_1 симетрична точці A відносно точки $O \Rightarrow \vec{O}A = -\vec{O}A_1$.

Точка A_1 симетрична точці A відносно середини відрізка $MN \Rightarrow \vec{A}A_1 = \vec{A}M + \vec{A}N$. Точки O, M, N належать одній прямій $\Rightarrow \vec{O}M = \lambda\vec{O}N$.

5. Дано паралелограм $ABCD \Rightarrow \left(\vec{A}B = \vec{D}C, \left(\vec{A}B\right) \neq \left(\vec{D}C\right)\right)$, або $\left(\vec{A}C = \vec{A}B + \vec{A}D, \vec{A}B\ \vec{A}D\right)$.

6. Точка є точкою перетину медіан трикутника $ABC \Rightarrow \left(\vec{G}A + \vec{G}B + = \vec{0}, AB \nparallel C\right)$.

Список формул пропонованого словника може бути продовжений.

Такий словник, записаний на окремому аркуші в зошиті, повинен мати кожен учень після вивчення теми „Вектори”. Вчителю можна порекомендувати повісити в класі таблицю-словник, яка буде поповнюватися в міру отримання нових формул в процесі розв’язання завдань.

Необхідно домогтися, щоб учні навчилися користуватися словником в двох напрямках, а саме, за допомогою словника могли переводити певний геометричний факт на мову векторів і могли виконати зворотну операцію – дати геометричну інтерпретацію даному векторному запису. Досвід показує, що учням легше перекласти геометричні факти на мову векторів, ніж дати геометричну інтерпретацію отриманого векторного запису. У зв'язку з цим корисно розв'язувати нескладні завдання, основна мета яких – вироблення навички геометричної інтерпретації даного векторного запису. У процесі роботи зі словником слід звернути увагу учнів на те, що запис одного і того ж геометричного факту є неоднозначним (прикладом цього може служити формула 5 із пропонованого словника). Крім того, корисно відзначити, що один і той же векторний запис можна читати по різному, якщо не вказано, які векторні і скалярні величини, що входять в даний запис, є змінними, а які – постійними. Для ілюстрації останнього наведемо такий приклад.

Дайте геометричну інтерпретацію наступному векторному запису: $\vec{O}M = k\vec{O}N + (1-k)\vec{O}L$, знаючи, що точки *O, M, N* та *L* є різними.

Геометрично даний векторний запис можна викласти так:

1. Точки *M, N* та *L* належать одній прямій, якщо точки *N* та *L* є фіксованими.

2. Відношення довжин відрізків LM та LN дорівнює k, якщо точки *L, M* та *N* є фіксованими.

3. Точка M є образом точки N в гомотетії з центром в точці L та коефіцієнтом k, якщо точка L фіксована та $k = const$.

Розв'язок задач підкаже, яка з інтерпретацій, отриманих в процесі розв'язування векторного запису необхідна. Навчити учнів вільно користуватися словником при розв'язуванні завдань, означає навчити їх новій векторній мові.

2. Мотиваційний етап. На цьому етапі потрібно продемонструвати необхідність оволодіння даною методикою розв'язання задач і домогтися усвідомлення того факту, що на наступних етапах діяльність учнів буде спрямована саме на засвоєння цього методу розв'язування завдань [62, с.53].

Так, під час введення поняття вектору, вчитель пояснює, що вектори використовуються у математиці, фізиці, хімії, астрономії та інших природничих науках [11, с.60].

Після отримання попереднього уявлення про дане поняття і геометричну його інтерпретацію, учні вчаться виявляти істотні властивості даного поняття, як відрізка даної довжини, що має напрямок, де виділені початок і кінець, напрямок від початку до кінця. Пошук умов, які дозволяють розкрити зв'язки (відносини) між відомими і невідомими, становить інтерес і є важливою умовою діяльного підходу. При такому підході увага учнів звертається на деталі, наприклад на те, що у двох векторів однакової довжини: І) напрямки протилежні, 2) напрямки однакові, 3) різні, непаралельні. В кожному з цих випадків інтерес учнів супроводжується геометричною інтерпретацією: вектори протилежні, рівні, співнапрямлені, протилежно направлені (рівні, паралельні, непаралельні) [11, с.62].

Розглядаючи всі ці деталі як об'єкти розумової діяльності, важливо супроводжувати дії геометричною ілюстрацією і вимірюванням довжини векторів в потрібному випадку, наприклад, такими вправами, як: перевірити, що дані вектора паралельні; рівні, або ж протилежні, співнапрямлені тощо). Важливим моментом такої діяльності є те, що ці вправи спрямовані на розкриття ще невідомих конкретно-змістовних відносин, через які визначається шуканий об'єкт.

Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова зазначають, що вектори можна задавати різними способами, наприклад, за допомогою координат [11, с.68]. Відображення вектора на координатній площині, де фіксовані координати початку і кінця вектора, дає можливість учням посилити свій інтерес до цього поняття, що точки, задані в різних місцях площини дають можливість для закріплення матеріалу усвідомлено. Наприклад, координати кінця і початку вектора $\overrightarrow{\mathrm{PE}}$, де точка $\mathrm{P}(-3;1)$ – початок, $\mathrm{E}(4;1)$ – кінець; і задані координати початку і кінця іншого вектора $\overrightarrow{\mathrm{KB}}$, де $\mathrm{K}(4;7)$ – початок, $\mathrm{B}(11;7)$ – кінець (див. рис.2.1).

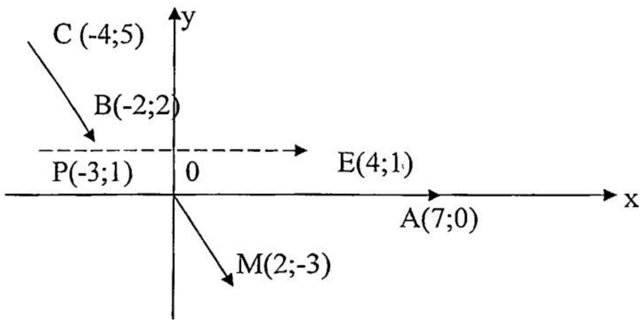

Рис.2.1

Питання: чи будуть рівними ці вектори іншому вектору, у якого початок знаходиться в точці $(0; 0)$ – початок координат, а кінець – в точці $A(7; 0)$. Для відповіді на це питання на початковій стадії потрібно зобразити відрізки по своїх кінцях, а потім порівнювати їх по довжині (на око), і за напрямками (паралельність або відсутність паралельності). На другому етапі, переконавшись, що ці відрізки представляють рівні вектори, потрібно виявити той вектор, у якого координати кінця визначають розташування вектора. Отже, з усіх цих рівних між собою векторів вектор $\overrightarrow{OA}$ характеризується координатами його кінця і ці координати стають координатами самого вектора і робиться запис: $\overrightarrow{OA}(7; 0)$. Для побудови такого вектора на координатній площині потрібно відзначити точку *A* з зазначеними координатами, а потім з'єднати цю точку з точкою на початку координат. Тут набагато спрощується процес побудови вектора, ніж для побудови інших, рівних йому векторів. У процесі такої роботи інтерес учнів посилюється тим, що вони виявляють бажання визначити координати вектора, наприклад, заданого двома точками. На даному етапі вчитель може порадити координати початку вектора замінити координатами $(0; 0)$, тобто числа прибираються і замінюються нулями; це означає, що точку $P(-3; 1)$ ми перенесли в точку $0(0; 0)$, отже, і кінець цього вектора потрібно переміщати на площині на стільки, на таку ж відстань, тобто координати кінця вектора, в даному випадку координати точки $E(4; 1)$ потрібно зменшити відповідно на стільки, скільком дорівнюють координати початку цього вектора. Для цього з першої координати точки E віднімаємо першу координату точки P і з другої координати точки E віднімаємо другу координату точки P. При цьому отримаємо: $4 -$

$(-3) = 7$, (перша координата вектора) і $1 - 1 = 0$ друга координата вектора, тобто $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{OA}\ (7; 0)$. Таким чином, коли ми говоримо, що заданий вектор $\overrightarrow{OM}(2; -3)$, що це вектор утворюється двома точками: точкою $0(0; 0)$ і точкою $M(2; -3)$ (рис.2.1). Якщо потрібно побудувати рівний йому вектор на координатній площині, вказавши координати його початку і кінця, то потрібно взяти будь-які два числа, які стануть координатами початку, наприклад, нехай початок цього вектора буде в точці $C(-4; 5)$. Щоб знайти координати кінця того ж вектора, то ці координати точки C потрібно додати до координат початкового вектора, тобто $2 + (-4)\ = -2;\ -3 + 5 = 2$, кінець цього вектора, наприклад, точка B, матиме координати $B(-2; 2)$. Таким чином, вектор $\overrightarrow{OM}(2; -3)$ і вектор $\overrightarrow{CB}$, де $C(-4; 5)$ і $B(-2; 2)$, рівні між собою. Переконатися в цьому можна зворотною дією: переходом від вектора $\overrightarrow{CB}$ до вектора $\overrightarrow{OM}$.

Наведений приклад яскравіше демонструє той факт, що поняття вектор стає інструментом практичної діяльності на уроці, і повне усвідомлення цього поняття дає учням можливість для подальшого поглиблення знань з цієї теми, а також одночасно реалізує зв’язок з алгебраїчним матеріалом, де додавання і віднімання двох чисел стає базою для додавання і віднімання векторів без їх геометричної інтерпретації, тобто робиться крок для наступної формалізації поняття.

3. Орієнтовний етап – роз’яснення сутності методу і виділення його основних компонентів на прикладі аналізу завдання, що розв’язується цим методом.

Вектори можна задавати різними способами. Розглянемо, як це можна зробити за допомогою координат. Досвід показує, що самі вчителі нерідко відчувають труднощі в тому, з чого почати розв’язування задачі за допомогою векторів. Тому досить часто вибір плану розв’язання завдання виявляється випадковим. Виникає необхідність мати якийсь загальний прийом, користуючись яким можна було б розв’язувати досить широкий клас завдань на вектори. У зв’язку з цим для розв’язування геометричних задач за допомогою векторів доцільно використовувати системи векторних рівнянь (або рівностей).

Можна запропонувати наступний алгоритм розв’язування завдання:

1. Вибрати початок векторів і ввести вектори, необхідні для розв’язування даного завдання.

2. Записати умови задачі у вигляді системи векторних рівностей, що містять невідомі вектори, і відзначити, які вектори і скаляри підлягали обчисленню.

3. Розв’язати отриману систему рівнянь.

4. Дати геометричну інтерпретацію отриманих результатів.

5. Провести дослідження отриманої системи.

Особливої уваги при обговоренні розв’язання задачі вимагає вибір початку векторів. Правильний вибір початку векторів спрощує як запис умови завдання на мові векторів, так і розв’язання самої задачі. Відзначимо, що в одних завданнях початок векторів обирається довільно, а в інших спеціальним чином.

Аналіз умови завдання, як правило, підказує доцільний вибір початку. Крім того, відзначимо, що деякі завдання для свого розв’язання не вимагають вибору початку векторів.

Операція переведення умови задачі на мову векторів є важливою складовою частиною процесу розв’язання, адже ця операція змушує ретельно проаналізувати умови завдання. Далі, система векторних рівнянь, що є записом умови задачі, дозволяє стежити за тим, щоб всі умови задачі були використані. Якщо ж не всі умови завдання використовуються у процесі розв’язання (наприклад, не використовується розмірність), то це дає можливість провести дослідження, тобто з’ясувати, чи не можна розглянути завдання як в двовимірному, так і тривимірному просторах. Крім того, система векторних рівнянь нерідко підказує шлях розв’язування задачі.

Наступним важливим етапом при навчанні розв’язанню задач засобами векторної алгебри є розв’язання отриманих з умов задач систем векторних рівнянь. Розв’язати систему векторних рівнянь – означає відповісти на поставлені в умові задачі питання, які можуть бути різними. В одних задачах потрібно з’ясувати взаємне розташування двох прямих, в інших – приналежність трьох точок до однієї прямої, обчислити відношення колінеарних відрізків, показати рівність якихось відрізків, показати, що якась змінна задовольняє рівняння прямої, кола, сфери тощо. Відповідно до цього з систем рівнянь, отриманих в результаті запису умови задачі на мові векторів, в одних випадках доводиться знаходити коефіцієнти розкладання вектора за двома неколінеарними, або трьома некомпланарними векторами, в інших необхідно виразити невідомий вектор або скаляр через відомі векторні і скалярні величини, порівняти скалярні квадрати векторів, знайти суму якихось векторів, перевірити якусь рівність за допомогою отриманої системи тощо.

Як можна побачити, дати якийсь певний метод розв’язування систем векторних рівнянь практично неможливо. У зв’язку з цим розглянемо деякі системи рівнянь, які можна отримати в процесі розв’язання задач засобами векторної алгебри.

Слід зазначити, що, у разі залучення системи векторних рівнянь для розв’язання задачі, розв’язання набуває алгебраїчного характеру. При цьому слід враховувати і положення геометрії, адже, по-перше, поняття вектора є геометричним поняттям, по-друге, записуючи умову задачі мовою векторної алгебри, учні подумки переводять геометричні факти на мову векторної алгебри, а в процесі розв’язання задачі інтерпретують отримані векторні співвідношення геометрично. Крім того, розв’язуючи задачу, потрібно пам’ятати про деякі залежності між векторними величинами. Наприклад, скалярний добуток визначено лише для двох векторів; якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, то з цього ще не випливає, що один із співмножників є нульовим вектором. У процесі розв’язання системи векторних рівнянь ми отримуємо, як правило, і ряд додаткових залежностей між змінними. Це дозволяє побачити додаткові властивості об’єктів, що розглядаються, сформулювати завдання ширше, а також відкриває шлях до складання нових завдань. Тому необхідно проводити дослідження отриманих систем векторних рівнянь.

Наведемо приклади розв'язання декількох завдань, що дозволяють яскравіше показати сутність запропонованої методики.

Задача 1. Через точку G перетину медіан трикутника проведена січна, що перетинає сторони AC і BC в точках M і N відповідно. Доведіть, що

$$\frac{|CA|}{|CM|}+\frac{|CB|}{|CN|}=3$$

Розв'язання

Згідно з умовою завдання нам необхідно встановити залежність між векторами $\vec{C}A$, $\vec{C}B$, $\vec{C}M$, $\vec{C}N$. Тому доцільно прийняти вершину з трикутника ABC за початок векторів (див. рис.2.2).

Тоді умову завдання в векторній формі запишемо наступним чином.

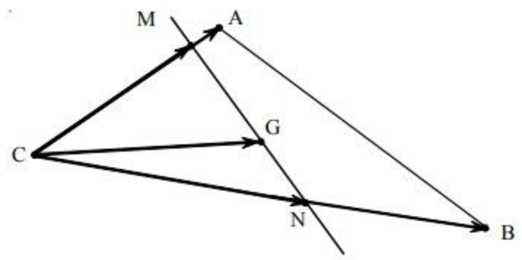

Рис.2.2.

Точка G – точка перетину медіан трикутника.

$$ABC \Rightarrow \vec{C}G=\frac{1}{3}(\vec{C}A+\vec{C}B)$$

Точки M та N належать сторонам CA і CB відповідно

$\Rightarrow \vec{C}M=\alpha\vec{C}A, \Rightarrow \vec{C}N=\beta\vec{C}B, \alpha>0, \beta>0$

Нарешті, точки M, N та G належать прямий

$$M\vec{N} \Rightarrow \vec{C}G=k\vec{C}N+(1-k)\vec{C}M, 0<k<1$$

Доведемо, що змінні скаляри α та β пов'язані співвідношенням

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3$$

Отже, ми маємо наступну систему рівнянь:

$$\vec{C}G=\frac{1}{3}(\vec{C}A+\vec{C}B)$$

$$\vec{C}M=\alpha\vec{C}A, \vec{C}N=\beta\vec{C}B, \alpha>0, \beta>0$$

$$\vec{C}G = k\vec{C}N + (1-k)\vec{C}M, 0 < k < 1$$

Неважко помітити, що в отриманій системі векторних рівнянь маємо двох розкладання вектора $\overrightarrow{\vec{C}G}$ за двома неколінеарними векторами $\overrightarrow{\vec{C}A}$ та $\vec{C}B$.

Справді, враховуючи, що $\vec{C}M = \alpha\vec{C}A, \vec{C}N = \beta\vec{C}B$, інше розкладання вектора $\vec{C}G$ можна записати так:

$$\vec{C}G = k\beta\vec{C}B + (1-k)\alpha\vec{C}A$$

Тоді в силу єдиності розкладення вектора за двома неколінеарними векторами маємо:

$$\frac{1}{3}\vec{C}A + \frac{1}{3}\vec{C}B = \alpha(1-k)\vec{C}A + \beta k\vec{C}B,$$

Звідси $\begin{cases} \alpha(1-k) = \frac{1}{3} \\ \beta k = \frac{1}{3} \end{cases}$

Отримали систему з двох рівнянь з трьома невідомими α, β та k. Виключивши з цієї системи змінну k, отримаємо:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|CA|}{|CM|} + \frac{|CB|}{|CN|} = 3$$

Зауваження. Проаналізувавши розв’язання системи векторних рівнянь для даної задачі, можна зробити наступне узагальнення. Якщо через довільну точку L медіани $\vec{C}G$ трикутнику AВС проведена пряма, що перетинає сторони СА і СВ (або їх продовження) в точках М і N, то має місце рівність

$\frac{\vec{C}A}{\vec{C}M} + \frac{\vec{C}B}{\vec{C}N} = k$, де $k = \frac{2\vec{C}C_1}{\vec{C}L}$

Розглянута задача є афінною планіметричною задачею, у процесі розв’язання якої має сенс порівняти векторне розв’язання з традиційними. Увага учнів звертається на те, що в даному випадку доцільно віддати перевагу векторному розв’язанню.

Далі розглянемо дві метричні задачі планіметрії, у розв’язуванні яких використовуються основні властивості скалярного множення векторів.

Задача 2. На конгруентних сторонах OA і OB рівнобедреного трикутника AOB обрані точки M і N так, що

$|AM| = \frac{1}{3}|AO|$ та $|ON| = \frac{1}{3}|OB|$ (рис.2.3).

Обчисліть довжину сторони AB, якщо $|AN| = n; |BM| = m$.

Розв'язання. Приймемо вершину O трикутника AOB за початок векторів. Для простоти запису позначимо $\vec{O}A = \vec{a}, \vec{O}B = \vec{b}$. Згідно з умовою задачі трикутник AOB є рівнобедреним.

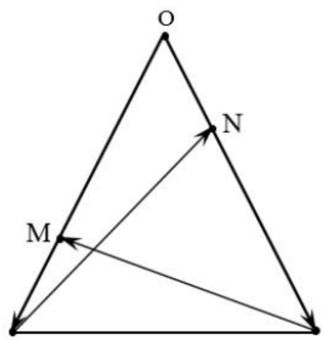

Рис.2.3.

$$|OA| = |OB| \Rightarrow \overrightarrow{a^2} = \overrightarrow{b^2}$$

Далі $|AN| = n \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}\right)^2 = n^2$, $|BN| = m \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = m^2$

Розрахуємо $\vec{A}B^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = 2\overrightarrow{a^2} - 2\vec{a}\,\vec{b}$

Таким чином, умова задачі записана у вигляді системи трьох векторних рівностей, які містять вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і скаляри m, n.

Із системи $\begin{cases} \frac{10}{9}\overrightarrow{a^2} - \frac{2}{3}\vec{a}\vec{b} = m^2 \\ \frac{13}{9}\overrightarrow{a^2} - \frac{4}{3}\vec{a}\vec{b} = n^2 \end{cases}$

Враховуючи, що $\overrightarrow{a^2} = \overrightarrow{b^2}$, можна визначити $2\overrightarrow{a^2}$ та $2\vec{a}\vec{b}$.

$2\overrightarrow{a^2} = \frac{18}{7}(2m^2 - n^2)$;

$2\vec{a}\vec{b} = \frac{3}{7}(13m^2 - 10n^2)$.

Звідси:

$$\vec{A}B^2 = 2\overrightarrow{a^2} - 2\vec{a}\vec{b} = \frac{3}{7}(4n^2 - m^2)$$

Пропонована методика повинна сприяти впровадженню векторної алгебри в шкільну практику розв’язування завдань. Ця методика систематизує знання учнів з векторної алгебри, отримані при вивченні теоретичного матеріалу і розв’язуванні найпростіших завдань на вектори. Крім того, ця методика готує учнів до розв’язування змістовних геометричних задач засобами векторної алгебри.

По праву векторний метод вважається одним з універсальних методів геометрії. Складно переоцінити широкі можливості використання векторного апарату і його значення в нарощуванні математичної культури школярів. Векторний спосіб розв’язування різноманітних геометричних задач значно спрощує їх розв’язання засобами елементарної геометрії. Причиною цього спрощення є те, що при векторному способі розв’язування завдання можна обійтися без додаткових побудов, які підводяться під базу чисто геометричного розв’язання навіть найпростіших завдань. Володіння знаннями, які пов’язані з операціями над векторами, колінеарністю двох векторів і компланарністю трьох векторів, дають можливість школярам розв’язувати афінні завдання стереометрії у векторній формі.

2.3. Розробка системи вправ по темі „Елементи векторної алгебри”

Сучасна дидактика і психологія розглядають навчання як процес управління засвоєнням знань. Саме в цьому плані доцільно розглядати питання про функції задач, які використовують при вивченні тієї чи іншої теми.

Система вправ розуміється як методичний засіб управління процесом навчання. Настільки значна роль системи вправ при навчанні математики визначається декількома положеннями.

По-перше, специфіка математичної науки (математика, як апарат для розв’язування завдань з різних галузей науки і техніки), диктує з усією необхідністю безперервне використання на всіх етапах процесу навчання математики задач на формування умінь і навичок у застосуванні отриманих знань.

По-друге, саме введення нових знань у багатьох випадках є доцільним, а в деяких просто необхідним, безпосередньо через розв'язання задач.

По-третє, задачний матеріал в першу чергу характеризує конкретний рівень вимог до вивчення теоретичного змісту курсу математики (один і той же зміст розглядається на різних рівнях вимог в залежності від відповідного набору завдань) [34, с.18].

Отже, мовою вправ можна задати основні етапи в організації процесу навчання математики. Іншими словами, методична система навчання математики досить повно визначається деякою системою вправ, що і дозволяє говорити про управління навчальним процесом навчання математики за допомогою завдань, через систему вправ.

У 9 класі задачі, розв'язання яких можна побудувати за допомогою використання положень векторної алгебри, поділяються на наступні види: знаходження відстані між прямими, знаходження кута між прямими, знаходження кута між прямою і площиною. Розглянемо особливості розв'язання задач кожного типу.

Знаходження відстані між прямими (у рамках вивчення теми „Координати вектора", 9 клас). Прямі в просторі відносно одна одної мають три варіанти розташування: паралельні, перетинаються або схрещуються.

Для знаходження відстані між двома паралельними прямими, необхідно визначити довжину перпендикулярного відрізка, що з'єднує їх в будь-яких двох точках. Відстань між пересічними прямими, в разі, якщо вони розташовані в різних площинах, можна визначити як довжину відрізка, що належить площині, яка є перпендикулярною їм обом [35, с.245]. Кінцями даного відрізка будуть точки, які є проекціями будь-яких двох точок прямих на цю площину. Таким чином, довжина між прямими – це відстань між паралельними площинами, що містять ці прямі.

Задача 1. Трикутник ABC лежить в основі трикутної піраміди $SABC$, трикутник ABC є правильним, сторона його дорівнює 2. Ребро S є перпендикулярним площині основи і його довжина його дорівнює 1. Серединами ребер CB і SB є точка P і точка Q. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими (прямими, що схрещуються) SP і AQ.

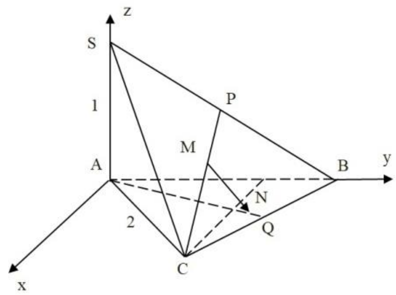

Рис.2.4.

Розв'язання

Будуємо декартову систему координат (рис. 2.4) і в початок координат помістимо точку A трикутника ABC.

1. Знайдемо координати точок, а також векторів в цій системі координат: A$(0;\ 0;\ 0)$, B $(0;\ 2;\ 0)$, C$(\sqrt{3}; 1;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ 1)$

$\overrightarrow{AC}(\sqrt{3}; 1; 0)$, $\overrightarrow{AB}(0; 2; 0)$, $\overrightarrow{CS}(-\sqrt{3}; -1; 1)$, $\overrightarrow{CB}(-\sqrt{3}; 1; 0)$.

З цього отримуємо, що:

$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CB}\right) = \left(-\sqrt{3}; 0; \frac{1}{2}\right)$,

$\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

2. Припустимо MN – загальний перпендикуляр для прямих SP і AQ (рис.2.4). Дотримуючись правила додавання векторів в багатокутнику, отримуємо: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QN}$.

Враховуючи, що

$\overrightarrow{MC}||\overrightarrow{CP} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = x \cdot \overrightarrow{CP} = \left(-\sqrt{3x}; 0; \frac{1}{2}x\right)$,

$\overrightarrow{QN}||\overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = y \cdot \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y; \frac{3}{2}y; 0\right)$.

Отримаємо $\overrightarrow{MN} = \left(-\sqrt{3x} + \frac{\sqrt{3}}{2}y; \frac{1}{2}x\right)$ (1)

3. Слідуючи властивості про загальний перпендикуляр прямих:

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}y=0\\ 12x+6-6y+x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{6}{10}\\ y=-\frac{3}{10}\end{cases} (2)$$

З (1), із співвідношення (2) отримуємо $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{\sqrt{3}}{20},\frac{1}{2},-\frac{6}{20}\right)$. Із цього виходить $MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{1}{20}\cdot\sqrt{3+1+36}=\frac{\sqrt{40}}{20}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Відповідь: $MN=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Знаходження кута між прямими (у рамках вивчення теми „Скалярний добуток векторів", 9 клас). Обчислення градусної величини кута між двома прямими в просторі можливо і в випадку їх не перетину. В даному випадку необхідно поєднати початки їх напрямних векторів і обчислити величину отриманого кута. Існує декілька способів завдання прямої в просторі, наприклад, векторо-параметричний, параметричний і канонічний. Знаючи величини векторів утворюють шуканий кут, який можна визначити по теоремі косинусів з векторної алгебри. Формула косинуса кута між векторами є співвідношенням між їх скалярним добутком і результатом арифметичного множення їх довжин.

Задача 2. У правильній трикутної призмі ABCA1B1C1, всі ребра якої дорівнюють 1, знайдіть косинус кута між прямими $AD1$ і CE1, де $D1$ і E1 – відповідно середини A1C1 і B1C1.

Розв'язання

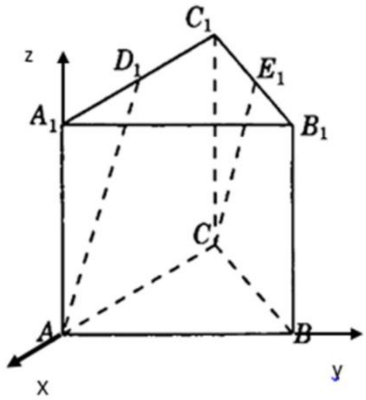

Рис.2.5

Помістимо призму в систему координат рис. 2.5.

1. Координати точок задають прямі, зазначені в умовах задачі $A(0,0,0)$, $D1\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$, $C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, $E1\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$

2. Знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{AD}1\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$ та $\overrightarrow{CE}1\left(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$

3. Знайдемо косинус кута між векторами

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+1\cdot 1}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+1\cdot\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+1}}} = 0{,}7$$

Відповідь: $\cos\alpha = 0{,}7$.

Знаходження кута між прямою і площиною (у рамках вивчення теми „Застосування векторів”, 9 клас). Площина – одна з основних просторових фігур геометрії, яка бере участь у створенні всіх двовимірних і тривимірних форм, таких як трикутник, квадрат, паралелепіпед, призма, коло, еліпс тощо. Для кожного конкретного випадку вона обмежена деяким набором пересічних ліній, які утворюють деяку замкнуту фігуру. Таким чином, можна визначити величину кута між будь-яким вектором і площиною, застосувавши формулу для обчислення косинуса кута між двома векторами.

Задача 3. $SABC$ – правильний тетраедр. Серединами ребер AB і SC є точки M і N відповідно. Знайдіть кут φ між площиною і прямою AB, паралельний прямим SM і BN.

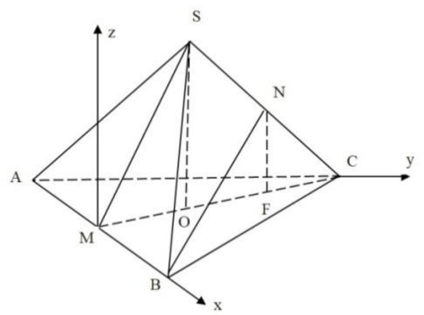

Рис.2.6

Розв’язання

1. Існує нескінченна кількість площин, паралельних прямим SM і BN. Покажемо, що пряма AB перетинає під одним і тим же кутом всі ці площини рис. 2.6.

Припустимо, що ω одна з цих площин і нехай АВ утворює з площиною ω кут φ. Достатньо знати нормальний вектор площини ω і направляючий вектор прямої АВ, щоб обчислити кут φ. Відзначимо, що нормальний вектор площини ω є нормальним вектором для кожної з площин, паралельних площині ω.

2. Помістимо фігуру в декартову систему координат. Кут між площиною і прямою при гомотетії не змінюється. Тому довжину ребра тетраедра вибираємо довільно.

Припустимо АВ $=$ 2. Виконаємо наступні обчислення:

1) з трикутника SMB знаходимо MS, $MS = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{3}$

Звідси $MC = MS = \sqrt{3}$

Враховуючи, що трикутник ABC – правильний і точка O – точка перетину меридіан трикутника АВС, отримуємо $MO = \frac{1}{3}, MC = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) за теоремою Піфагора з трикутника MOS отримуємо:

$SC = \sqrt{MS^2 - MO^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

3) NF – середня лінія трикутника SOC, тому $NF = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Тепер можемо знайти координати векторів і точок щодо обраної системи координат.

$M(0;\ 0;\ 0), B(1;\ 0;\ 0), A(-1;\ 0;\ 0), S(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}), N(0;\ \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3})$,

$\overrightarrow{MS}(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3})$, $\overrightarrow{BN}(-1; 2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{6}}{3})$, $\overrightarrow{AB}(2; 0; 0)$

3. Координати нормального вектора $\vec{n}\ (x;\ y;\ z)$ площині ω знайдемо з умов:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{MS} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BN} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{MS} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{3} y + \dfrac{2\sqrt{6}}{3} z = 0 \\ -x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} y + \dfrac{\sqrt{6}}{3} z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\sqrt{2}z \\ x = -\sqrt{6}z \end{cases}$$

$\vec{n}(-6; 4\sqrt{3}; \sqrt{6}$.

$\vec{p} = \overrightarrow{AB} = (2; 0; 0)$ – даний вектор є напрямним вектором прямої АВ.

Отримуємо: $\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{12}{2\sqrt{36+48+6}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$. Отже, $\varphi = arc\sin\frac{2}{\sqrt{10}}$

Відповідь: $\varphi = arc\sin\frac{2}{\sqrt{10}}$.

Ще одним з видів задач, які можуть бути розв'язані до допомогою використання елементів векторної алгебри, є задачі, які вимагають доказів. Так, учні 9 класу, засвоївши скалярний добуток двох векторів і процес його обчислення двома способами, якщо вектори задані координатами, а також засвоївши визначення тригонометричних функцій через поняття „вектор", можуть використовувати це поняття при доказах ряду тверджень.

Задача 4. Розв'язати тригонометричне рівняння $\sin(5x + 50^0) = -0.5$.

Розв'язання

Переходимо до визначення цієї функції через поняття „вектор" (відношення другої координати вектора до його довжини), $(-1)/2$. Тут друга координата дорівнює -1, отже вектор розташований або в третьому, або ж в четвертому координатних кутах, а кут повороту дорівнює $1800 + 300 = 2100$, або ж $3600 - 300 = 3300$. Отже, рівняння має два розв'язання в одному обороті, в межах 360^0:

$$5x + 50^0 = 210^0 \Rightarrow x = \frac{160}{5} \Rightarrow x = 32^0;$$

$$5x + 50^0 = 330^0 \Rightarrow x = 56^0;$$

Вектор сприяє усвідомленню суті розв'язання і виробленню умінь розв'язувати більш складні рівняння.

Задача 5. Одна з властивостей паралелограма (сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін) часто використовується при розв'язуванні завдань. Обґрунтуйте дану властивість, використовуючи векторний апарат.

Розв'язання. Для того, щоб обґрунтувати міркування при доказі цієї теореми, варто кожен вектор (діагональ) виразити через вектори-сторони:

1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + 2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{DB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Сума цих двох рівностей дає те, що потрібно довести, тобто маємо рівність: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Доступність таких міркувань учням гарантується спрощенням змісту матеріалу при використанні векторного апарату.

У 10 класі у рамках вивчення елементів векторної алгебри, учні вчаться розв'язувати стереометричні задачі. Розглянемо особливості розв'язання таких задач.

Визначення видів чотирикутників і їхніх властивостей (у рамках вивчення теми „Прямокутна система координат", 10 клас).

Задача 6. Визначте вид чотирикутника $MNPK$ та обчисліть його площу, якщо задано координати точок: $M(0;\ -2;\ 0), N(4;\ 1;\ 0), P(4;\ 1;\ 5), K(0;\ -2;\ 5)$

Розв'язання

Перед розв'язанням доцільно пригадати види чотирикутників і їх властивості. Зокрема, учням добре відомо, що діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

Для визначення виду чотирикутника спершу знайдемо середини відрізків MP та NK.

$\left(\frac{0+4}{2}; \frac{-2+1}{2}; \frac{0+5}{2}\right), \left(2; \frac{-1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ – середина MP

$\left(\frac{4+0}{2}; \frac{1-2}{2}; \frac{0+5}{2}\right), \left(2; \frac{-1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ – середина NK

Подальші дії:

1. Перевіримо паралельність і рівність протилежних сторін, щоб визначити вид чотирикутника.

2. Для обчислення площі застосуємо відповідну формулу залежно від встановленого типу фігури (наприклад, якщо це паралелограм, використаємо формулу площі через вектори).

У процесі розв'язання необхідно буде виконати розрахунки для кожної пари координат та обґрунтувати висновок.

Діагоналі чотирикутника $MNPK$, а саме MP і NK, перетинаються й діляться навпіл у точці перетину. Це дозволяє стверджувати, що $MNPK$ є паралелограмом.

Логічним буде поставити учням запитання: чи можемо ми точно визначити, який саме вигляд має цей чотирикутник?

Далі необхідно обчислити довжини діагоналей паралелограма $MNPK$.

$MP = \sqrt{(4-0)^2 + (1+2)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$$NK = \sqrt{(0-4)^2 + (-2-1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Як бачимо, діагоналі паралелограма $MNPK$ - MP та NK є рівними, отже $MNPK$ – прямокутник. Обчислимо довжини суміжних сторін MN та MK.

У процесі вивчення теми „Прямокутна система координат" (10 клас) учням можна запропонувати розв'язати наступну задачу.

Задача 7. В правильній трикутній піраміді $DABC$ сторона основи дорівнює $8\sqrt{3}$ і $DC = 17$. Знайдіть тангенс кута, утвореного площиною основи і прямою AO, де O – точка перетину медіан грані ABC.

Розв'язання

Введемо систему координат з початком в точці A (рис. 2.7).

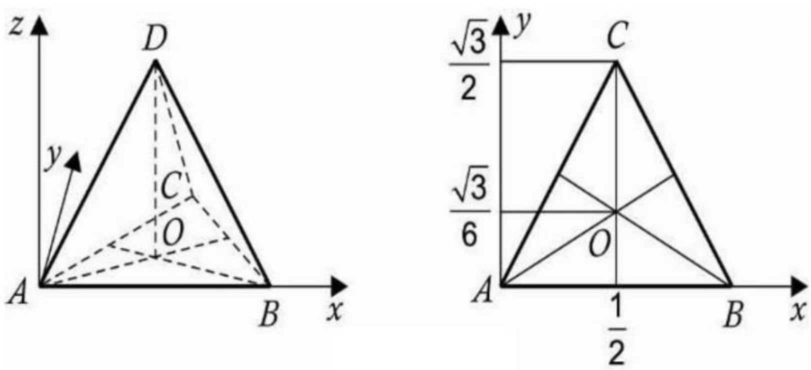

Рис.2.7.

Пригадуємо з учнями, що в основі правильної трикутної піраміди лежить правильний трикутник.

Знайдемо координати точок B, A, C, O. Для того, щоб учням легше було знайти координати точок основи, доцільно разом з учнями зробити додатковий планіметричний рисунок площини xOy (рис. 2.7).

$$B\left(8\sqrt{3};0;0\right), \mathrm{A}(0;0;0), \mathrm{C}\left(4\sqrt{3};12;0\right), \mathrm{O}(4\sqrt{3};4;15)$$

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{\mathrm{AO}}(4\sqrt{3};4;15)$.

Складемо рівняння площини основи (ABC)

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 8\sqrt{3}-0 & 0-0 & 0-0 \\ 4\sqrt{3}-0 & 12-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$96\sqrt{3z} = 0$$

Кут між прямою і площиною знаходимо за формулою:

$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|}$;

$$\sin\varphi = \frac{\left|0\cdot 4\sqrt{3} - 0\cdot 4 + 96\sqrt{3}\cdot 15\right|}{\sqrt{48+16+225}\cdot\sqrt{0+0+(96\sqrt{3})^2}} = \frac{96\sqrt{3}\cdot 15}{96\sqrt{3}\cdot 17} = \frac{15}{17}$$

Тоді $\cos\varphi = \frac{8}{17}$

$tg\varphi = \frac{15}{8}$

Відповідь: $\frac{15}{8}$.

До теми „Застосування координат та векторів” пропонуємо задачу 8.

Задача 8. В одиничному кубі $ABCDAlB1ClD1$ M і N – середини ребер $AlD1$ та BBl відповідно. Знайдіть кут між прямою MN і діагоналлю $BD1$.

Розв’язання

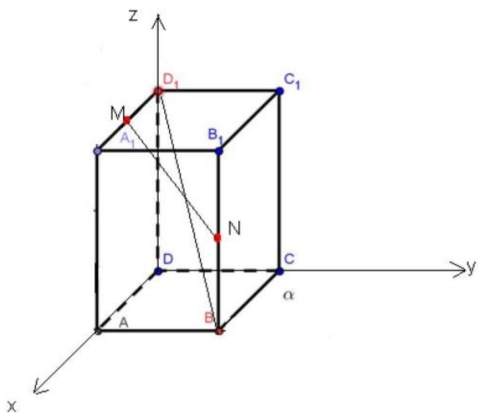

Рис.2.8

Введемо систему координат з початком в точці D так, щоб осі Ox, Oy, Oz були направлені вздовж ребер $DA, DC, DD1$ (рис. 2.8) Знайдемо координати точок $B, D1, M, N$.

$B(1;\ 1;\ 0), D1(0;\ 0;\ 1), M(0{,}5;\ 0;\ 1), N(1;\ 1;\ 0{,}5)$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BD1}$ та $\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{BD1}\,(-1; -1; 1), \overrightarrow{MN}(0{,}5; 1; -0{,}5)$

Кут між прямою MN і діагоналлю $BD1$ знайдемо, як кут між векторами $\overrightarrow{BD1}$ та $\overrightarrow{MN}$.

$$\cos\alpha = \frac{|(-1)\cdot 0{,}5 - 1\cdot 1 + 1\cdot(-0{,}5)|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{0{,}25+1+0{,}25}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Отже, $\alpha = arc\cos\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Відповідь $\alpha = arc\cos\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

При вивчені теми „Колінеарність векторів" (10 клас) пропонуємо наступну задачу.

Задача 9. Знайдіть усі значення а, при яких вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ колінеарні, якщо:

а) $\vec{m} = (-1; 4; -2), \vec{n} = (2; \mathrm{a}; 4)$;

б) $\vec{m} = (\mathrm{a}+1; 2; \mathrm{a}), \vec{n} = (1; \mathrm{a}; 2)$;

в) $\vec{m} = (3; 5-\mathrm{a}; \mathrm{a}), \vec{n} = (5+\mathrm{a}; 7\mathrm{a}+1; 2)$;

Розв'язання

Перед розв'язуванням цієї задачі, доцільно повторити з учнями поняття колінеарності та властивості колінеарних векторів.

а) $\vec{m} = (-1; 4; -2), \vec{n} = (2; \mathrm{a}; 4)$;

$\frac{-1}{2} = \frac{4}{\mathrm{a}} = \frac{-2}{4}$, звідси $\frac{4}{\mathrm{a}} = \frac{-1}{2}$; $\mathrm{a} = -8$

б) $\vec{m} = (\mathrm{a}+1; 2; \mathrm{a}), \vec{n} = (1; \mathrm{a}; 2)$;

$\frac{\mathrm{a}+1}{1} = \frac{2}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{a}}{2}$, $\mathrm{a}^2 = 4$; $\mathrm{a} = 2$ або $\mathrm{a} = -2$

Але $\mathrm{a} = 2$ не задовольняє умові $\frac{\mathrm{a}+1}{1} = \frac{2}{\mathrm{a}}$, тому $\mathrm{a} = 2$ не є розв'язанням.

Дана умова виконується при $\mathrm{a} = -2$. Отже, $\mathrm{a} = -2$

в) $\vec{m} = (3; 5 - a; a), \vec{n} = (5 + a; 7a + 1; 2)$;

$$\frac{5 + a}{3} = \frac{7a + 1}{5 - a} = \frac{2}{a}; \frac{5 + a}{3} = \frac{7a + 1}{5 - a}; a^2 + 5a - 6 = 0; a = -6 \text{ або } a = 1$$

Але $a = -6$ не задовольняє умові $\frac{5+a}{3} = \frac{7a+1}{5-a}$, тому $a = -6$ не є розв’язанням.

Отже, $a = 1$

Знаходження кута між площинами (в рамках вивчення теми „Застосування векторів”, 10 клас).

Враховуючи, що загальне рівняння площини задає координати вектора, перпендикулярного до цієї площини, а канонічне рівняння прямої – координати напрямного вектора, то, використовуючи властивості векторів, можна знаходити кут між прямими, між прямою і площиною та кут між площинами [10, с.222]. Розглянемо півплощини α і β, утворені при перетині двох площин. Кут, утворений прямою а і двома напівплощинами α і β називається двогранним кутом. Для того, щоб виміряти двогранний кут, необхідно на його межі вибрати довільну точку. В обох площинах через цю точку проводяться два променя перпендикулярно ребру перетину площин. Утворений кут називається лінійним та може бути визначений по теоремі косинусів з векторної алгебри.

Таким чином можемо відзначити, що вивчення елементів векторної алгебри займає особливе місце в процесі формуванні у школярів вміння організувати свою навчальну діяльність, тобто сприяють розвитку регулятивних навчальних дій. Учні, в ході розв’язування таких завдань ставлять перед собою мету, планують, за допомогою яких знань будуть знаходити відповідь, вносять корективи в разі розбіжності з еталоном. Такі міркування формують у школярів самоаналіз і самоконтроль. Ці завдання розвивають логічне мислення, геометричну інтуїцію.

ВИСНОВКИ

Таким чином, у процесі написання роботи було досягнута її головна мета, а саме досліджено теоретичні та практичні аспекти вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики, а також вирішені основні завдання, які були поставлені на початку дослідження.

1. Проведено аналіз педагогічних досліджень щодо вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики. У сучасній методичній літературі підкреслюється, що вивчення елементів векторної алгебри у шкільному курсі математики має низку особливостей, які роблять цей процес своєрідним. До них належать прикладний характер теми, абстрактність понять та недосконалість існуючих методик. Останнє частково пояснюється тим, що вектори були включені до шкільної програми математики відносно нещодавно. Методичні джерела виділяють декілька підходів до пояснення поняття вектора та виконання операцій із векторами у закладах загальної середньої освіти. При цьому основне завдання векторів полягає у застосуванні алгебраїчного інструментарію для розв’язання геометричних задач.

2. Охарактеризовано роль і місце вивчення елементів векторної алгебри у шкільному курсі математики. Вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики відбувається по висхідній спіралі, що сприяє формуванню в учнів основ математичної культури, здатності вільно переходити від мови геометрії до мови алгебри, або елементам логіки. Даний матеріал відіграє важливу роль при розв’язанні школярами багатьох геометричних і фізичних завдань, закладає основу для вивчення поняття вектора в просторі. Вивчення елементів векторної алгебри в шкільному курсі математики сприяє розвитку в учнів обчислювальних та графічних навичок, а також просторового мислення та геометричної інтуїції. Це пов’язано з необхідністю вибору відповідної системи координат, обчислення координат точок, а також перекладу рівнянь і нерівностей на геометричну мову та навпаки.

3. З’ясовано можливості використання елементів векторної алгебри у процесі розв’язання шкільних задач з математики. Елементи векторної алгебри мають широкі можливості для використання у розв’язанні шкільних задач із математики, зокрема вони використовуються у процесі розв’язання задач із геометрії, задач на площі та об’єми, задач у системі координат (координатний метод), фізичних задач з математичним змістом. При вивченні основ векторної алгебри важливо знайти оптимальний баланс між використанням наочно-геометричного та координатного підходів. Геометричний підхід забезпечує кращу візуалізацію матеріалу, що є особливо цінним для формування інтуїтивного розуміння та сприйняття просторових взаємозв’язків. Він також гармонійно вписується в традиційний підхід до викладання геометрії. Водночас координатний підхід має свої переваги, оскільки дозволяє суттєво спростити багато доведень, структурувати виклад матеріалу, зробивши його більш лаконічним і формалізованим. Такий підхід сприяє чіткішому математичному аналізу, що є важливим для подальшого поглибленого вивчення алгебри та суміжних дисциплін.

4. Визначений зміст курсу математики (на прикладі вивчення елементів векторної алгебри). Цілі навчання математики (так само, як і в навчанні інших предметів) змінюються, коригуються відповідно до вимог суспільного життя. Базисна і відповідна їй функціональна програми з математики складені в повній відповідності з сучасними вимогами до математичної освіти школярів. Аналіз навчальних програм свідчить, що методика введення систем координат і векторів є логічною та поступовою. Учні спершу знайомляться з координатною прямою, потім з площиною і, нарешті, з простором. Вектори вперше вивчаються у 7-8 класах на уроках фізики, а далі – у 9 класі (на площині) і 10 класі (у просторі) в курсі геометрії. При цьому важливо нагадувати учням попередньо вивчені означення, властивості та формули, звертаючи увагу на подібності й відмінності між різними рівнями складності.

5. Обґрунтовано методику вивчення теми „Елементи векторної алгебри” в шкільному курсі математики. Основні вміння, необхідні для ефективного

застосування координатного методу, включають: перехід від геометричного опису до аналітичного для одних задач і зворотній перехід для інших; побудову точок за заданими координатами; знаходження координат заданих точок; вибір оптимальної системи координат; складання рівнянь для визначених геометричних фігур; ідентифікація геометричних об'єктів за їх рівняннями; операції з алгебраїчними виразами для виконання необхідних перетворень. Цей підхід допомагає створити глибше розуміння зв'язку між геометрією та алгеброю.

6. Розроблено систему вправ з теми „Елементи векторної алгебри". Відповідно до методичних положень, зазначені вміння формуються при навчанні математики в процесі виконання спеціальним чином організованої системи вправ. Ця система повинна забезпечувати основні цілі вивчення розглянутого розділу: формування основних і допоміжних понять, основних властивостей досліджуваних понять і зв'язків між ними, сформованість передбачених програмою умінь, сформованість професійно значущих умінь. Задачі, розв'язання яких можна побудувати за допомогою використання положень векторної алгебри, поділяються на наступні види: знаходження відстані між прямими, знаходження кута між прямими, знаходження кута між прямою і площиною і знаходження кута між площинами. Завданнями цих видів цілком забезпечується процес формування відповідних умінь, і тим самим, забезпечується необхідний рівень вимог в досягненні поставлених цілей навчання математики. Запропоновані вправи показують, що векторна алгебра успішно може застосовуватися як для розв'язання практичних завдань, як і для доказу теореми геометрії. Відзначимо, що в умови цих теорем і прикладів вектори не згадуються і виникають лише при розв'язанні або доказі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Закон України «Про освіту». URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text (дата звернення: 8.09.2024)
2. Закон України «Про повну загальну середню освіту». URL: https://zakon.rada.gov.ua/ laws/show/463-20#Text (дата звернення: 8.09.2024)
3. Постанова КМУ «Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти» від 23 листопада 2011 р. № 1392 URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-п#Text (дата звернення: 12.09.2022).
4. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту). URL: http://mon.gov.ua/activity/education/zagalnaserednya/navchalni-programy.html (дата звернення: 18.10.2024)
5. Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. URL: http:// mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalniprogramy.html (дата звернення: 18.10.2024)
6. Апостолова Г. В. Геометрія: 9 клас: дворів, підруч. для загальноосвіт. навч. закл. К. : Генеза, 2009. 304 с.
7. Ачкан В. В. Формування логічної та дослідницької математичної компетентностей старшокласників у процесі вивчення рівнянь та нерівностей. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. 2011. №1(11). С.178-187.
8. Бевз Г. П. Методика викладання математики : Навчальний посібник. К. : Вища школа, 1989. 367 с.
9. Бевз Г. П. Ще раз про вектори. *Математика в школі*. 2001. №3. С.10-13.

10. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.

11. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.

12. Бевз В. Г. Історія математики. Х.: Основа, 2006. 171 с.

13. Безрук Т. І. Використання STEM-технологій у процесі викладання математики в старшій та середній школі як крок до створення ефективного освітнього середовища в закладі освіти. *Інноваційні практики наукової освіти* : матеріали ІІ Всеукраїнської науково-практичної конференції (Київ, 15-19 грудня 2022 року). К. : Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2022. С.66-69.

14. Бібік Г. В. Реалізація міжпредметних зв'язків математики з фізикою на прикладі вивчення понять «Вектор» і «Векторна величина» в курсі математики основної школи. *Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету. Серія: педагогіка*. 2010. №32. С.132-140.

15. Бондар В. І. Процес навчання. Енциклопедія освіти. К. : Юрінком Інтер, 2008. 745 с.

16. Бурда М. І. Структура і зміст профільного навчання математики. *Математика в школі*. 2007. №7. С. 3-6.

17. Бурда М. І., Васильєва Д. В., Вашуленко О. П. Прикладна спрямованість навчання математики в гімназії : Методичний посібник. К. : Видавничий дім «Освіта», 2024. 161 с.

18. Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І. Математика. Підручник 10 клас. Київ: Оріон. 2018. 288 с.

19. Вибрані питання математики. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії : навч. посіб. / Л. М. Ломонос, В. І. Мамчук, Н. П. Муранова. 2-ге вид., стереотип. К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2010. 128 с.

20. Городецька О. А. Інноваційні підходи до проведення уроків математики в умовах дистанційного навчання. *Механізми розвитку науково-*

технічного потенціалу : тези доп. I Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, 11-12 листопада 2021 р. Дніпро, Україна, 2021. С.110-113

21. Дубинчук О. С., Мальований Ю. І., Дичек Н. П. Методика викладання алгебри в 7-9 класах: Посібник для вчителя. К.: Рад. шк., 1991. 254 с.

22. Жерновникова О. А., Ісаєнко К. В. Забезпечення наступності при вивченні учнями математики та фізики у старшій профільній школі. *Науково-дослідна робота студентів як чинник удосконалення професійної підготовки майбутнього вчителя* : зб. наук. пр./редкол.: Л. І. Білоусова та ін. Х., 2018. Вип.17. С.105-108.

23. Жерновникова О. А., Нелін Є. П., Штонда О. Г., Простакова Ю. С. Методичні особливості організації профільного навчання з математики в закладах загальної середньої освіти. *Наукові записки кафедри педагогіки*. 2022. Т.2, № 51. С. 21-30. URL : https://periodicals.karazin.ua/pedagogy/issue/view/1222. (дата звернення: 04.09.2024)

24. Зоріна І. А. Викладання математики у профільних і непрофільних класах школи. *Педагогічні науки* : Збірник наукових праць. 2011. №1.57. С.116-120.

25. Іванова С., Кушнірук А. Реалізація профільного навчання у контексті сучасного реформування шкільної математичної освіти. Науково-методичні засади формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти : монографія / ДЗ «ПНПУ ім. К. Ушинського»; за ред. К. В. Нєдялкової. Одеса: Видавець ФОП Бойчук А. Б., 2021. С. 128-140.

26. Інтерактивні технології на уроках математики: навч. посіб. / Уклад.: І. С. Маркова, Х. : Вид. група «Основа», 2009. 126 с.

27. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. : Генеза, 2017. 240 с.

28. Істер О. С. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. 10 клас. Рівень стандарту. Київ, Генеза, 2018. 384 с.

29. Істер О. С., Єргіна О. В. Геометрія: підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти. К. : Генеза, 2018. 368 с.

30. Каун В. Особливості організації змішаного навчання на уроках математики в старшій школі. *Педагогічні науки* : Науковий журнал Полтавського національного педагогічного університету імені В. Г. Короленка. 2023. №81. С.28-33.

31. Клюка Н. М. Проблема наступності при вивченні векторів у шкільному курсі математики. *VII Всеукраїнська студентська наукова конференція «Сучасні проблеми фізико-математичних наук та методики їх викладання»* : матеріали конференції. Ніжин : НДУ ім. М. Гоголя, 2012. С.22-23

32. Коваль Л. В. Методика навчання математики: теорія і практика: підр. – 2-ге вид., перероб. та допов. Х. : Принт-Лідер, 2012. 417 с.

33. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: метод. посіб. / О. І. Глобін та ін. К. : Педагогічна думка, 2015. 245 с.

34. Копорх К. М., Собкович Р. І. Задачі та вправи для практичних занять з аналітичної геометрії (Частина 1. Векторна алгебра. Геометричні образи рівнянь першого степеня із двома та трьома змінними): навчальний посібник. Івано-Франківськ : П. П. Бойчук А.Б. 2016. 83с.

35. Королюк О. М. Використання векторів до доведення теорем і розв’язування задач шкільного курсу стереометрії. *Науковий пошук молодих дослідників* : збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів / за ред. О. М. Королюк. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2013. Вип. 6. С.244-248.

36. Королюк О. М., Прус А. В. Методика навчання математики в старшій школі : навчально-методичний посібник. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. 61 с.

37. Короткий словник актуальних педагогічних термінів / упор. Н. М. Флегонтова. К.: КНУТД, 2013. 55 с.

38. Крайчук О. В. Розвиток змісту шкільного курсу математики. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики* : Збірник наукових

праць: В 3-х томах. Кривий Ріг : Видавничий відділ НацМетАУ, 2002. Т. 1: Теорія та методика навчання математики. С.171-176

39. Креш Л. Л., Працьовитий М. В. Векторна алгебра – основа сучасної математичної освіти. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*. 2009. №31. С.34-37.

40. Креш Л. Л., Працьовитий М. В. Елементи векторної алгебри у загальній теорії алгебраїчних кривих та поверхонь. *Єдність навчанні і наукових досліджень* : Видавництво НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2012. С.216-217

41. Крижановський В. Теоретичні аспекти використання інтегрованих уроків при навчанні математики у старшій школі в контексті пізнавальних можливостей учнів. *Актуальні питання у сучасній науці*. 2024. №6. С.902-915

42. Лов'янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Кривий Ріг : Криворізький державний педагогічний університет. 2016. 78 с.

43. Лов'янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Базовий рівень підготовки / І. В. Лов'янова. Кривий Ріг: Криворізький державний педагогічний університет. 3-тє видання, доповнене і перероблене– 2022. – 128 с.

44. Ломонос Л. М., Мамчук В. І., Муранова Н. П. Вибрані питання математики. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посіб. К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2010. 2-ге вид., стер. 128 с.

45. Лосєва Н.М., Ніколаєва О.А. Прикладна спрямованість навчання аналітичної геометрії як основа формування професійної компетентності викладача математики. *Didactics of mathematics: Problems and Investigations.* 2012. № 38. С. 46-50.

46. Лягушин С. Ф., Соколовський О. Й. Опанування математичного апарату як орієнтир фізико-технологічної освіти. *Збірник наукових праць*

Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія: Педагогічна. 2017. №23. С.96-99.

47. Максименко Д. В., Мельничук В. Ф., Соколова Л. В., Чорноіван Ю. О. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії: практичний посібник. К.: КНУБА, 2013. 48 с.

48. Мартиненко О. В., Маслов О. П. Поняття вектора у шкільному курсі математики. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики*. Випуск VI: Т. 1: Теорія та методика навчання математики. 2006. С.142-143.

49. Медведєва К. А., Гришко О. М. Про окремі проблеми підвищення якості викладання математики. *Topical issues of modern science, society and education* : The 2 nd International scientific and practical conference (September 5-7, 2021) SPC. Sciconf.com.ua‖, Kharkiv, Ukraine. 2021. С.364-369

50. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 9клас. Х. : Гімназія, 2017. 160 с.

51. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір. М. С. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х. : Гімназія, 2017. 240 с.

52. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір. М. С. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 240 с.

53. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Х. : Вид-во «Ранок», 2018. 328 с.

54. Організація навчання математики у старшій профільній школі / Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А., Лов'янова І. В., Сердюк З. О. Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. 216 с.

55. Пацановська О. О., Ключник І. Г. Методичні особливості вивчення координат і векторів у старшій профільній школі. *Наукові записки молодих учених*. 2019. №4. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1636 4 (дата звернення: 04.09.2024)

56. Погодіна Ю. Ефективні підходи до викладання математики в старших класах: стратегії та методи. *Перспективи та інновації науки. Серія «Педагогіка», Серія «Психологія», Серія «Медицина*. 2023. № 12(30). С.428-442

57. Різніченко А. О. Використання комп'ютера на уроках математики. *Збірник наукових статей студентів фізико-математичного факультету.* Суми : ФМФ, 2011. Випуск 5. С.263-265

58. Свириденко О. Методичні особливості навчання в класах математичного профілю. Продуктивне навчання математики: з досвіду роботи педагогів Кіровоградщини: метод. посіб. / Упоряд. Л. Ткаченко. Кропивницький: комунальний заклад «Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського», 2021. С.19-26

59. Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г. Геометричні перетворення на площині і комп'ютерні інструментарії їх реалізації. *Комп'ютер у школі та сім'ї.* 2014. №7. С.25-29.

60. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К. : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

61. Тацій Р. М., Кусій М. І., Чмир О. Ю. Елементи лінійної й векторної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посібник. Львів : ЛДУ БЖД, 2017. 126 с.

62. Урум Г. Д., Драгомерецька К. М. Вектори та векторні величини у шкільному курсі математики та фізики. *Адаптивні технології управління навчанням* : збірник матеріалів дев'ятої міжнародної конференції. Одеса-Київ, 25-27 жовтня 2023 р. К. : ІЦО НАПН України, 2023. С.52-54.

63. Філон Л. Г. Координатний і векторний методи у системі математичної освіти профільної школи. *Розвиток інтелектуальних вмінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики* : матеріали Всеукр. наук.-метод. конф. (3-4 грудня 2009 р., м. Суми). Суми: Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2009. С. 96-97