НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЧЕРНІГІВСЬКИЙ КОЛЕГІУМ» ІМЕНІ Т.Г. ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
ПРОФЕСІЙНОЇ ОСВІТИ ТА ТЕХНОЛОГІЙ

Т. А. Газука, О. В. Плуток

ВИЩА МАТЕМАТИКА

***Навчально-методичний посібник
для студентів освітнього рівня «бакалавр»
техніко-технологічних та економічних
спеціальностей***

Чернігів – 2024

УДК 517(072)
Г 13

Р е ц е н з е н т и :
Лавров Р.В., доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економіки та управляння Національного університету «Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка;

Кайдаш М.Д., кандидат технічних наук, професор кафедри технологій зварювання та будівництва Національного університету «Чернігівська політехніка»

Газука Т.А., Плутокг О В.

Г 13 Вища математика : навчально-методичний посібник для студентів освітнього рівня «бакалавр» техніко-технологічних та економічних спеціальностей. Чернігів: НУЧК, 2024. 104 с.

УДК 517(072)

Навчально-методичний посібник розроблено на допомогу студентам освітнього рівня «бакалавр», які здобувають техніко-технологічні та економічні спеціальності.

У змісті навально-методичного посібника, відповідно до тематики навчальної програми курсу «Вища математика», систематизовано теоретичні відомості, наведені типові приклади та рекомендовані методичні прийоми вирішення практичних завдань методами вищої математики. Посібник містять варіанти завдань самостійного та індивідуального вирішення.

Затверджено до друку вченою радою
Навчально-наукового інституту професійної освіти та технологій
Національного університету
«Чернігівський колегіум» імені Т. Г. Шевченка
(Протокол № 5 від 26.12.2024 р.)

ЗМІСТ

ВСТУП

Освітній компонент «Вища математика» входить до циклу загальноосвітньої підготовки здобувачів І рівня вищої освіти за освітніми програмами економічного, техніко-технологічного профілів. Вивчення математики розвиває логічне мислення, привчає людину до точності, до вміння виділяти головне, повідомляє необхідні відомості для розуміння найскладніших задач, які виникають в різних областях діяльності сучасної людини.

Практичні заняття з вищої математики сприяють студентам у оволодінні математичними знаннями та навичками, навчають застосовувати їх при вивченні інших суміжних навчальних дисциплін та в подальшій професійній діяльності.

Пропонований навчально-методичний посібник розроблений відповідно до навчальної програми з «Вищої математики» для бакалаврів, що навчаються за спеціальностями: «Професійна освіта (Аграрне виробництво переробка с/г продукції та харчові технології)»; «Професійна освіта (Транспорт)»; «Професійна освіта (Цифрові технології)»; «Професійна освіта (Технологія виробів легкої промисловості)»; «Середня освіта (Технології)»; «Менеджмент»; «Підприємництво та торгівля»; «Лісове господарство»; «Агрономія» та охоплюють три змістові модулю у розрізі 11 тем.

У змісті навчально-методичного посібника наведено систематизовані теоретичні відомості за кожною темою, описана методика практичного вирішення типових завдань вищої математики на конкретних прикладах, сформовані варіанти завдань для самостійного та індивідуального вирішення. Приведений список літературних джерел інформації.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

ТЕМА 1. ПОНЯТТЯ МАТРИЦІ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Теоретичні відомості

Матрицею розміру $m \times n$ (m-на-n, або mn-матрицею) називається множина з mn елементів, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців, а m і n – її розмірністю.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При альтернативному позначенні використовуються великі круглі дужки:

Горизонтальні лінії в матриці звуть **рядками**, вертикальні – **стовпчиками** або **стовпцями**.

Елемент матриці A, що знаходиться на перетині i-го рядка з j-им стовпчиком, називають i,j-им елементом або (i,j)-им елементом A.

Часто пишуть для означення матриці A розмірності n х m, де кожен елемент матриці A[i,j] позначають як a_{ij} для всіх $1 \le i \le n$ та $1 \le j \le m$.

Приклад:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$ Матриця є матрицею 4×3. Елемент A[2,3], або дорівнює 7.

Розмір матриці визначає кількість рядків і стовпців, які вона містить. Матрицю із m рядками і n стовпцями називають матрицею $m \times n$ або m на n матрицею, а самі m і n називають розмірами матриці.

Матриці, які мають лише один рядок називаються *векторами-рядками*, $A = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1m})$, а ті що мають один стовпець називаються *векторами-стовпцями*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \cdots \\ a_{1m} \end{pmatrix}$$ матриця стовпець.

Матриця з однаковою кількістю рядків і стовпців називається *квадратною матрицею*. Матриця з нескінченною кількістю рядків або стовпців (або їх обох) називається *нескінченною матрицею*. Наприклад, в комп'ютерних програмах, іноді зручно розглядати таку матрицю, що не містить рядків чи стовпців, що називається *порожньою матрицею*.

Дії над матрицями

Операція порівняння.

Дві матриці називаються рівними, якщо рівні їх відповідні елементи.

Додавання

Якщо дано дві матриці m-на-n A і B, можемо визначити їх **суму** $A + B$ як матрицю m-на-n, що утворюється додаванням відповідних елементів, тобто, $(A + B)[i, j] = A[i, j] + B[i, j]$.

Наприклад:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Основні властивості операцій додавання матриць:

A + B = B + A (комутативність).

A + (B + C) = (A + B) + C (асоціативність).

A + 0 = A, для будь-якої матриці. Також, для будь-якої матриці A існує протилежна матриця (–A), така, що A + (–A) = 0.

Множення на скаляр

Якщо дано матрицю A і число c, можемо означити **множення на скаляр** cA як $(cA)[i, j] = cA[i, j]$.

Наприклад:

$$2\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3 \\ 2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Множення матриць

Множення двох матриць має сенс лише тоді, коли число стовпчиків першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці.

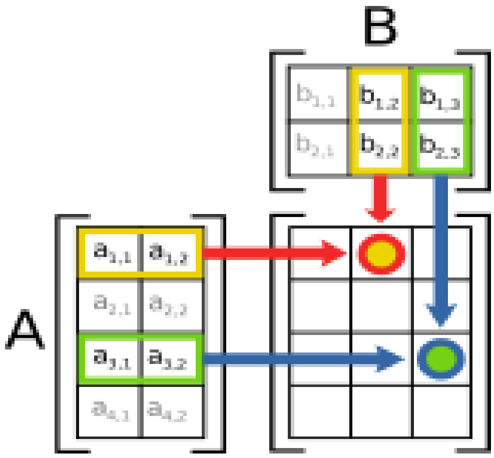
Якщо A – матриця m-на-n (m рядків, n стовпчиків), а B – матриця n-на-p (n рядків, p стовпчиків), їх **добуток** AB є матрицею m-на-p (m рядків, p стовпчиків), що розраховується за формулою:

$(AB)[i, j] = A[i, 1] \cdot B[1, j] + A[i, 2] \cdot B[2, j] + \ldots + A[i, n] \cdot B[n, j]$ для кожної пари i та j.

Добуток матриць

Добуток матриці A на матрицю B визначають, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. При виконанні цієї умови, добутком матриць A×B (розмір матриці A – m×k , матриці B – k ×n) називається така матриця C (розмір якої – m×n), кожен елемент якої ij с дорівнює сумі добутків елементів i – того рядку матриці A на відповідні елементи j – того стовпця матриці B. Наприклад:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 3+0\times 2+2\times 1) & (1\times 1+0\times 1+2\times 0) \\ (-1\times 3+3\times 2+1\times 1) & (-1\times 1+3\times 1+1\times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$



Схематичне зображення множення

Це множення має такі властивості:

$(AB)C = A(BC)$ для всіх матриць A розмірності k-на-m, B розмірності m-на-n і C розмірності n-на-р (асоціативність).

$(A + B)C = AC + BC$ для всіх матриць A і B розмірності m-на-n і матриць C розмірності n-на-k (дистрибутивність).

$C(A + B) = CA + CB$ для всіх матриць A і B розмірності m-на-n і матриць C розмірності k-на-m (дистрибутивність).

C(*A* + *B*) = *CA* + *CB* для всіх матриць *A* і *B* розмірності *m*-на-*n* і матриць *C* розмірності *k*-на-*m* (дистрибутивність).

Зауваження: комутативність має місце не завжди: для добутку певних матриць *A* і *B* може бути $AB \neq BA$. Якщо ж, $A \cdot B = B \cdot A$, то матриці *A* та *B* називаються переставними.

Якщо $A \cdot B = 0$, то це не означає, що $A = 0$, або $B = 0$. Наприклад:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Транспонування матриць

Матриця A^T називається транспонованою до матриці *A*, якщо її рядки дорівнюють стовпцям матриці *A*.

ТЕМА 2. ВИЗНАЧНИКИ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКІВ

Обчислення визначників

Числовою характеристикою матриці є визначник. Поняття визначника вводиться лише для квадратної матриці і позначають:

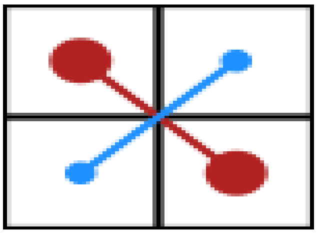
$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ *n* – порядок визначника.

Визначник – це число, яке дорівнює сумі добутків елементів взятих по одному з кожного рядка та стовпця з відповідним знаком (+ або –). У даній сумі доданків буде $n!$, а кількість множників у кожному добутку дорівнює *n*. Знак «+» перед добутком буде в випадку парної кількості інверсій, а «–» – в випадку непарної.

Визначник *першого* порядку дорівнює самому елементу: $|a_{11}| = a_{11}$.

Визначник *другого* порядку дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів бічної діагоналі $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Схематичне зображення обчислення визначника другого порядку:

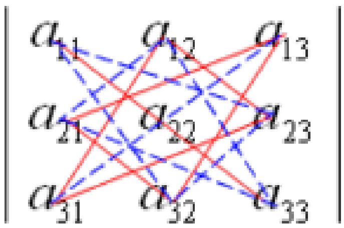


Визначник *третього* порядку обчислюють за правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

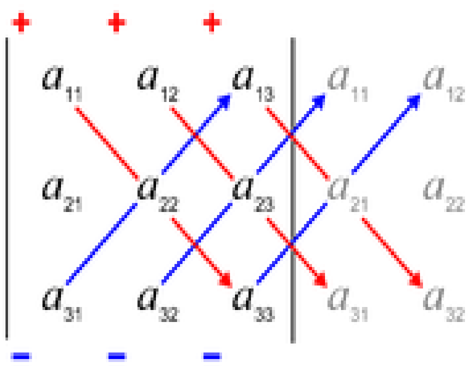
Перші три доданки в правій частині формули є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

Схематичне зображення обчислення визначника *третього* порядку:



Визначник третього порядку можна обчислити **дописуванням перших двох стовпців** визначника з правої його сторони за такими обчислення: добутки елементів на головній діагоналі й паралелях до неї (вони беруться зі своїми знаками), добутки побічної діагоналі та паралелях до неї (беруться з протилежними знаками), алгебраїчна сума цих добутків являє собою визначник.

Схематичне зображення обчислення визначника третього порядку способом дописування стовпців



Властивості визначників

Властивість 1. Якщо у визначнику поміняти місцями рядки на стовпці, то величина визначника не зміниться.

Властивість 2. Якщо у визначнику поміняти місцями 2 рядки (або 2 стовпці) то він змінить лише знак на протилежний не змінюючи абсолютного значення

Властивість 3. Якщо у визначнику всі елементи довільного стовпця (або рядка) дорівнюють 0, то визначник дорівнює 0.

Властивість 4. Якщо у визначнику є 2 однакові рядки (стовпці), то визначник дорівнює 0.

Властивість 5. Якщо всі елементи довільного рядка (або стовпчика) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Наслідок. Якщо довільний рядок (або стовпчик) помножити на число n, то визначник зміниться в n раз.

Властивість 6. Якщо у визначнику елементи одного рдка (або стовпчика) пропорційні відповідним елементам іншого, то визначник дорівнює 0.

Властивість 7. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів довільного рядка (стовпчика) додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпчика) помножені на одне і теж саме число.

Мінор визначника

Мінором Mij до елементу aij визначника n-го порядку називається визначник (n–1)-го порядку, отриманий із початкового визначника викреслюванням і-того рядка та j-того стовпця.

Наприклад: запишемо мінори визначника $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 3;$ $M_{12} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = -12;$

$M_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2;$ $M_{21} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 21;$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 13;$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 2 \cdot 7 = -14;$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1;$ $M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 1 \cdot -4 = 4;$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 7 \cdot -4 = 33$

Алгебраїчне доповнення

Алгебраїчним доповненням Aij до елемента aij визначника n-го порядку називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Наприклад: Знайти алгебраїчне доповнення матриці *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 3 - -0 = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 = -(-4 \cdot 3 - 0 \cdot 2) = -(-12 - 0) = 12$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 = -4 \cdot 0 - -1 \cdot 2 = 0 - 2 = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 = -(7 \cdot 3 - - 1 \cdot 0) = -(21 - -0) = -21$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 15 - 2 = 13$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 = -(5 \cdot 0 - 7 \cdot 2) = -(0 - 14) = 14$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 = 7 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0 - 1 = -1$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 = -(5 \cdot 0 - 1 \cdot (-4)) = -(0 + 4) = -4$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 = 5 \cdot 1 - 7 \cdot (-4) = 5 + 28 = 33$

Визначники вищих порядків

На основі вище згаданих означень та властивостей можна дати наступне визначення визначника *n* порядку: *визначником n порядку*, що відповідає квадратній матриці порядку *n*, називається число, яке дорівнює сумі добутків довільного рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Для обчислення визначників вищих порядків використовують наступні методи:

І. Пониження порядку визначника, за допомогою розкладу за елементами рядка чи стовпця.

Якщо *n* велике, то понижати порядок визначника доведеться багатократно. На практиці, за допомогою властивості 6 визначник перетворюють так, щоб у деякому рядку (стовпці) всі елементи крім одного дорівнювали нулю.

II. Зведення визначника до трикутного виду.

Трикутний вид: всі елементи визначника, що знаходяться нижче (нижній трикутний вид) або вище (верхній трикутний вид) головної діагоналі дорівнюють нулю. Визначник трикутного виду дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33}$$

Наприклад. Обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

1) за правилом трикутника;

2) за допомогою розкладання його за елементами: а) першого рядка; б) третього стовпця;

3) за допомогою розкладання його за елементами деякого рядка або стовпця з попереднім застосуванням методу утворення нулів.

Розв'язання:

1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-2) + 2\cdot 4\cdot 2 + 0\cdot(-5)\cdot 1 - (0\cdot 3\cdot 2 +$$

$$+2\cdot(-5)\cdot(-2) + 1\cdot 4\cdot 1) = (-6+16+0) - (0+4+20) = 10-24 = -14.$$

2) а)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6-4) - 2\cdot(10-8) + 0\cdot(-5-6) =$$

$$= -10-4 = -14$$

б)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$-2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 4\cdot(-3) - 2\cdot 13 = 12-26 = -14$$

3) Утворимо нулі в першому рядку.

Для цього домножимо перший стовпець на (-2) і додамо його до другого стовпця:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&0\\-5&3&4\\2&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-5&13&4\\2&-3&-2\end{vmatrix}$$

Розкладаємо за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\-5&13&4\\2&-3&-2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}13&4\\-3&-2\end{vmatrix}=-26+12=-14$$

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&2&3&2\\1&2&1&2\\-2&4&2&3\\2&-2&1&3\end{vmatrix}$$

Розв'язання. Розкладемо визначник за елементами першого стовпця, попередньо утворимо в ньому максимальну кількість нулів:

– до першого рядка додамо другий рядок;

– до третього рядка додамо другий рядок, помножений на 2;

– до четвертого рядка додамо другий рядок, помножений на –2.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&2&3&2\\1&2&1&2\\-2&4&2&3\\2&-2&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4&4&4\\1&2&1&2\\0&8&4&7\\0&-6&-1&-1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4&4&4\\8&4&7\\-6&-1&-1\end{vmatrix}=$$

$$=-4\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\8&4&7\\-6&-1&-1\end{vmatrix}=-4\cdot(-4-42-8+24+7+8)=-4\cdot(-15)=60$$

.

Ранг матриці

Рангом матриці A називають найвищий порядок мінору даної матриці, відмінного від нуля. Позначають: $rangA$, $r(A)$, $R(A)$, $Rg(A)$.

Наприклад . Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Зводимо матрицю до ступінчастого виду: помножимо перший рядок на 2 і додамо до другого рядка; одночасно помножимо перший рядок на -1 і додамо до третього рядка. Тоді

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 10 \\ 0 & -5 & 3 & -10 \end{pmatrix}.$$

Додамо другий рядок одержаної матриці до третього рядка. Тоді

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r_A = 2$.

Обернена матриця

Обернену матрицю можна одержати лише для матриці визначник якої відмінний від 0, тобто невиродженої матриці.

Добуток матриці на обернену до неї матрицю є одинична матриця.

Позначають обернену матрицю:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} \; A_{21} \; A_{31} \cdots\cdots A_{n1} \\ A_{12} \; A_{22} \; A_{32} \cdots\cdots A_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n} \; A_{2n} \; A_{3n} \cdots\cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Алгоритм одержання оберненої матриці заданій матриці.

1. Знайти визначник заданої матриці.
2. Якщо визначник відмінний від 0, задана матриця не вироджена, існує обернена матриця.
3. Знайти алгебраїчні доповнення заданої матриці.
4. Побудувати обернену матрицю за формулою.

Перевірити обернену матрицю, помноживши обернену матрицю на задану, якщо у добутку вийде одинична матриця, то обернена матриця визначена вірно

Наприклад: Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, перевірити правильність обертання.

1) Обчислюємо визначник матриці A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 0 - 18 - 0 + 4 = -10 \neq 0$$

Визначник відмінній від нуля, у такому випадку матриця має обернену матрицю.

2) Обчислюємо алгебраїчні доповнення:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$;

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$.

3) Записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -5 & 10 & 5 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 & -0.4 \\ 0.5 & -1 & -0.5 \\ 0.6 & -0.6 & -0.2 \end{pmatrix}$$

4) Перевіряємо $A^{-1}\cdot A$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 1\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.2 & -0.2 & -0.4\\ 0.5 & -1 & -0.5\\ 0.6 & -0.6 & -0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2-1+1.8 & -0.2+2-1.8 & -0.4+1-0.6\\ 0.4-1+0.6 & -0.4+2-0.6 & -0.8+1-0.2\\ -0.6+0+0.6 & 0.6+0-0.6 & 1.2+0-0.2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

ТЕМА 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ НЕОДНОРІДНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Теоретичні відомості

Розглянемо систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \text{-----------------------------------}\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\qquad(1)$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі змінні, що знаходяться в першій степені (лінійні). Коефіцієнти при невідомих a_{ij} утворюють головну матрицю системи, яку позначають

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ldots a_{2n}\\ \text{----------------------}\\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}$$

Невідомі змінні складають матрицю-стовпець невідомих:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Коефіцієнти $b_1, b_2, \ldots, b_m$ утворюють матрицю-стовпець вільних членів:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Дану систему (1) можна записати в матричній формі: $A \cdot X = B$.

Якщо матриця B є нульовою, то система називається *однорідною*.

Якщо матриця B не нульова, то система називається *неоднорідною*.

Числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ є розв'язком системи (1), якщо при підстановці $x_i = c_i$ всі рівняння системи перетворюються в тотожності. Розв'язати систему означає знайти всі її розв'язки.

Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має один розв'язок і *невизначеною* – коли безліч.

Матричний спосіб розв'язування системи рівнянь

Нехай задана система в матричній формі $A \cdot X = B$, тоді розв'язок матричного рівняння шукаємо в вигляді:

$$X = A^{-1} \cdot B .$$

Отже, щоб розв'язати систему матричним способом, необхідно знайти обернену матрицю до головної матриці системи A^{-1} і помножити її на стовпець вільних членів, в результаті отримаємо матрицю-стовпець невідомих.

Наприклад:

Розв'язати систему рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Знаходимо обернену матрицю до матриці *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

де матриця A^{-1} має вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення

$A_{11}=\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=5-21=-16$ $\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=-(-2-7)=9$

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-(-3-6)=9$ $\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-2=-3$

$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=21+10=31$ $\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=-(7-4)=-3$

$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}=6+5=11$ $\quad \mathrm{A}_{33}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-5-6=-11$

$$A^{-1}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{9}{33} & \frac{11}{33} \\ \frac{9}{33} & -\frac{3}{33} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{3}{33} & -\frac{11}{33} \end{pmatrix}$$

Розв’язки системи знаходимо, використовуючи формулу: $X=A^{-1}\cdot B$, де

$$B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{16}{33} & \frac{9}{33} & \frac{11}{33} \\ \frac{9}{33} & -\frac{3}{33} & 0 \\ \frac{31}{33} & -\frac{3}{33} & -\frac{11}{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-64+9+88}{33} \\ \frac{36-3+0}{33} \\ \frac{124-3-88}{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

отже $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ розв’язок даної системи

Розв′язування системи неоднорідних лінійних рівнянь методом Крамера

Метод Крамера.

Використаємо рівняння $X = A^{-1} \cdot B$. Тоді

Чисельники отриманих дробів є розкладами визначників Δ_i за елементами i-стовпців вільних членів, підставлених у головний визначник системи.

Отже, обчислюємо додатково визначники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Δ_i – це визначник, отриманий з головного визначника Δ заміною відповідного i стовпця стовпцем вільних членів

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 \ a_{12} \ a_{13} \ldots a_{1n} \\ b_2 \ a_{22} \ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \text{--------------------} \\ b_n \ a_{n2} \ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} \ b_1 \ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ b_2 \ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \text{--------------------} \\ a_{n1} \ b_n \ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Знаходимо невідомі змінні x_i за формулами Крамера: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

Наприклад :

Розв’язати систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12, \\ 4x_1 - 5x_2 = 2 \ . \end{cases}$$

Із системи рівнянь маємо головну матрицю $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ та матрицю вільних членів $\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}$, обчислюємо визначники: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22$ – головний визначник, замінивши перший стовпець матриці стовпцем вільних членів обраховуємо визначник: $\Delta1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -66$ – перший визначник, замінивши другий стовпець матриці на стовпець вільних членів обраховуємо визначник: $\Delta2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -44$ – другий визначник, визначаємо невідомі:

$$x_1 = \frac{-66}{-22} = 3, \qquad x_2 = \frac{-44}{-22} = 2$$ – розв’язки системи.

Розв′язування системи лінійних неоднорідних рівнянь методом Гауса

Теоретичні відомості

Метод Гауса (метод виключення змінних).

Метод Крамера та матричний спосіб не є зручним для випадку великого значення n, а також не застосовні для випадку виродженої та прямокутної головної матриці системи. Тому розглянемо універсальний метод розв'язання систем лінійних рівнянь, а саме метод Гауса.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{------------------------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи, яку дістаємо з головної матриці A приєднанням стовпця вільних членів:

$$A|B = \left(\begin{array}{l|l} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\text{------}a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\text{------}a_{2n} & b_2 \\ \text{----------------------} & \text{---} \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\text{---}a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Прямий хід методу Гауса. Зводимо розширену матрицю системи до східчастого вигляду за допомогою еквівалентних перетворень. Можливі наступні випадки:

$$A|B = \left(\begin{array}{l|l} a'_{11}\ a'_{12}\ a'_{13}\text{------}a'_{1n} & b'_1 \\ 0\quad a'_{22}\ a'_{23}\text{------}a'_{2n} & b'_2 \\ \text{----------------------} & \text{---} \\ 0\quad 0\quad 0\text{-----}\ a'_{nn} & b'_n \end{array}\right) \tag{1}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{l|l} a'_{11}\ a'_{12}\ a'_{13}\text{------}a'_{1n} & b'_1 \\ 0\quad a'_{22}\ a'_{23}\text{------}a'_{2n} & b'_2 \\ \text{----------------------} & \text{---} \\ 0\quad 0\quad 0\text{------}0 & b'_m \end{array}\right) \tag{2}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{l|l} a'_{11}\ a'_{12}\ a'_{13}\text{------}a'_{1n} & b'_1 \\ 0\quad a'_{22}\ a'_{23}\text{------}a'_{2n} & b'_2 \\ \text{----------------------} & \text{---} \\ 0\quad 0\text{----}a'_{m(n-1)}\ a'_{mn} & b'_m \end{array}\right) \tag{3}$$

Зворотний хід методу Гауса. За отриманою матрицею східчастого виду записуємо відповідну систему.

Для випадку (1) з останнього рівняння системи знаходимо невідому змінну x_n підставляємо її значення в попереднє рівняння та знаходимо x_{n-1} і т.д. Таким чином отримуємо єдиний розв'язок системи.

У випадку (2) система розв'язків немає ($b'_m \neq 0$).

Для випадку (3) з останнього рівняння системи неможливо однозначно знайти змінну x_n чи x_{n-1} , x_{n-2} …У цьому випадку система має безліч розв'язків.

Наприклад:

Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса: $\begin{cases} 2x + y + 3z = -9 \\ 8x + 3y + 5z = -13 \\ 2x + 5y - z = -5 \end{cases}$

Запишемо розширену матрицю системи, яку дістаємо з головної матриці приєднанням стовпця вільних членів

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -9 \\ 8 & 3 & 5 & -13 \\ 2 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

Зводимо розширену матрицю системи до східчастого вигляду за допомогою еквівалентних перетворень. Для цього усі елементи першого рядка помножимо на – 1 та додамо до відповідних елементів третього рядка, одержимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -9 \\ 8 & 3 & 5 & -13 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

Наступним перетворенням усі елементи першого рядка помножимо на –4 і додамо до відповідних елементів другого рядка, одержимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -7 & 23 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

За наступним перетворенням усі елементи другого рядка помножимо на 4 і додамо до відповідних елементів третього рядка, одержимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & -7 & 23 \\ 0 & 0 & 32 & 96 \end{array}\right)$$

За значеннями у третьому рядку запишемо рівняння:

$32\,z = 96$, відповідно $z = 3$, із другого рядка маємо:
$-1\,y - 7\,z = 23$, тоді $y = -44$, із першого рядка маємо:
$2x + y + 3\,z = -9$, тоді $x = 13$.

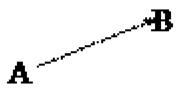
Розв'язки системи: $z = 3$; $y = -44$; $x = 13$, правильність яких можна перевірити підставивши значення змінних у будь-яке рівняння системи.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.
ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

ТЕМА 4. ВЕКТОРИ І ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Теоретичні відомості

Геометричним вектором називається напрямлений відрізок. Позначають вектори: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, або графічно



Віддаль від початку вектора до його кінця називається довжиною вектора або модулем вектора: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\bar{a}|$.

Вектор, у якого початок та кінець співпадають, називається нульовим вектором або нуль-вектором: $|\bar{0}|$. Довжина нуль-вектора дорівнює нулю $|\bar{0}| = 0$, а напрям вибирають довільно.

Два вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній або паралельних прямих.

Крім того, колінеарні вектори, що мають однаковий напрям, називаються співнапрямленими, і протилежно напрямленими, якщо мають протилежний напрям.

Два вектори називаються рівним*и*, якщо вони колінеарні співнапрямлені і мають однакову довжину:

Вектори рівні, якщо при паралельному переносі вони накладаються. Тобто, щоб задати вектор, потрібно знати його напрям і довжину, а за точку прикладання може бути обрана довільна точка площини чи простору (вектори вільні).

Два вектори називаються протилежними, якщо вони колінеарні протилежно напрямлені і мають однакову довжину.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним.

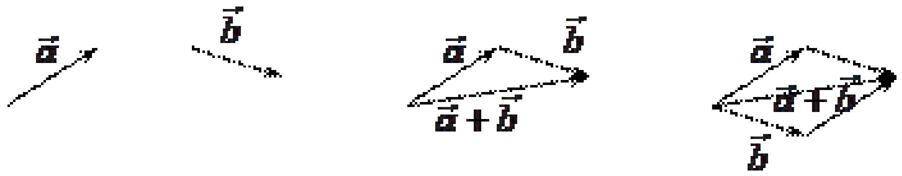
Одиничний вектор однакового напрямку з вектором: $\bar{a}$ називається ортом даного вектора.

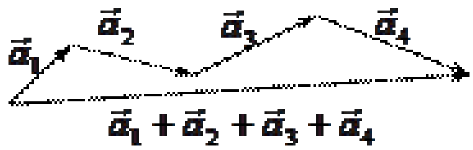
Вектори, які лежать в одній або паралельних площинах, називаються компланарними.

Нульовий вектор колінеарний довільному вектору та компланарний будь-яким двом векторам.

Лінійні операції над векторами

1. Сумою векторів: $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, початок якого співпадає з початком вектора $\bar{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\bar{b}$, за умови, що початок вектора $\bar{b}$ прикладений до кінця вектора $\bar{a}$ (правило трикутника). Додавання векторів можна здійснювати для трьох і більше векторів. Також вектори можна додавати за правилом паралелограма.





2. Різницею двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається вектор $\bar{d}$, такий, що $\bar{b}+\bar{d}=\bar{a}$, тобто $\bar{d}=\bar{a}+(-\bar{b})$.

Отже, в паралелограмі, побудованому на векторах $\overrightarrow{AB}=\bar{a}$ та $\overrightarrow{AD}=\bar{b}$, одна діагональ $\overrightarrow{AC}=\bar{a}+\bar{b}$, а інша $\overrightarrow{DB}=\bar{a}-\bar{b}$.

3. Добутком вектора $\bar{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\bar{a}$,довжина якого $|\lambda a|=|\lambda||a|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda>0$, і протилежний, якщо $\lambda<0$.

Властивості лінійних операцій над векторами

1) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;
2) $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{\bar{b}}+\bar{c})$;
3) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$;
4) $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$;
5) $\lambda(\mu\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a}$;
6) $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$;
7) $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$;
8) $1\bar{a}=\bar{a}$

Проекція вектора на вісь

Віссю назвемо напрямлену пряму $\bar{j}$.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* $\bar{j}$ є число, що дорівнює $\overrightarrow{AB}$ із знаком «+», якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ та вісь $\bar{j}$ мають однаковий напрям, із знаком «-», якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ та вісь $\bar{j}$ протилежно напрямлені. Точки $A\bar{j}$ і $B\bar{j}$ – це проекції точок А та В на вісь $\bar{j}$.

Властивості проекції

1) $\text{пр}_{\bar{j}}\ \bar{a} = |a| \cos\varphi$, де φ – кут між віссю та вектором;

2) рівні вектори мають однакові проекції:
$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \text{пр}_{\bar{j}}\ \bar{a} = \text{пр}_{\bar{j}}\bar{b}$;

3) проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій цих векторів:
$\text{пр}_{\bar{j}}\left(\bar{a} + \overline{b + \bar{c}}\right) = \text{пр}_{\bar{j}}\ \bar{a} + \text{пр}_{\bar{j}}\ \bar{b} = \text{пр}_{\bar{j}}\ \bar{c}$;

4) проекція добутку числа на вектор дорівнює добутку числа на проекцію цього вектора $\text{пр}_{\bar{j}}\ \lambda\,\bar{a} = \lambda\text{пр}_{\bar{j}}\ \bar{a}$.

Наприклад. Знайти координати вектора $\bar{d} = 2\,\bar{a} - 3\,\bar{b} + \bar{c}$, якщо
$\bar{a} = (-2; 1; 0)$, $\bar{b} = (3;4;-2)$, $\bar{c} = (0;-1;3)$

Розв'язання:

$$\vec{d} = 2(-2;1;0) - 3(3;4;-2) + (0;-1;3) = (-4;2;0) + (-9;-12;6) + (0;-1;3) =$$
$$= (-13;-10;6) + (0;-1;3) = (-13;-11;9);$$
$$\vec{d} = (-13;-11;9)$$

Поняття базису

Якщо $\bar{a} = a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 + \dots + a_n\bar{a}_n$, то вектор $\bar{a}$ називається лінійною комбінацією векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots\dots \bar{a}_n$, де $a_1 a_2 \dots\dots \bar{a}_n$ – деякі дійсні числа.

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots\dots \bar{a}_n$ називаються лінійно незалежними, якщо лінійна комбінація $a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 + \dots + a_n\bar{a}_n$,= 0 тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти дорівнюють нулю: $a_1 a_2 \dots\dots \bar{a}_n = 0$.

Якщо хоча б один з коефіцієнтів a_i відмінний від нуля, то вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots\dots \bar{a}_n$ будуть лінійно залежними.

Лінійно незалежні вектори можуть утворювати базис.

Базисом на прямій називається довільний ненульовий вектор $\bar{e}$, тоді довільний вектор, що лежить на цій прямій, можна однозначно розкласти за цим базисом: $\bar{a} = a\bar{e}$.

Звідси отримуємо умову колінеарності векторів:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Базисом на площині називається довільна впорядкована пара не колінеарних векторів ($\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$), тоді будь-який вектор, що належить цій площині можна однозначно розкласти за цим базисом: $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$.

Базисом в просторі називається довільна впорядкована трійка не компланарних векторів ($\bar{e}_1$,$\bar{e}_2$,$\bar{e}_3$), тоді будь-який вектор, що належить простору можна однозначно розкласти за цим базисом: $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$.

Коефіцієнти біля базисних векторів є координати вектора відповідно на прямій – $\bar{a}$ (a) , на площині – $\bar{a}$ (a_1, a_2) та в просторі – $\bar{a}$ (a_1, a_2, a_3)

Зауваження: рівні вектори мають однакові координати в одному і тому ж базисі.

Наприклад.

Дано вектори:

$\bar{a}$ =(3;-5;2), $\bar{b}$=(4;5;1), $\bar{c}$ =(3;0;4), $\bar{d} = (-4; 5; -16)$ в деякому базисі.

Показати, що вектори $\bar{a}$, $\bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\bar{d}$ в цьому базисі.

Розв'язання. Розглянемо лінійну комбінацію векторів $\bar{a}$, $\bar{b}, \bar{c}$:

$\bar{n}$ =$a_1\bar{a} + a_2\bar{b} + a_3\bar{c}$, де a_1, a_2, a_3 – коефіцієнти цієї комбінації.

Якщо $\bar{n} \equiv 0$ тільки при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$,

то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}, \bar{c}$ є лінійно незалежними, тобто утворюють базис.

Знайдемо координати вектора $\bar{n}$:

$a_1\bar{a}$ = ($3a_1$; $–5a_1$;$2a_1$), $a_2\bar{b}$ = ($4a_2$;$5a_2$; a_2), $a_3\bar{c}$ =($–3a_3$; 0; $–4a_3$)

Тому $\bar{n}$ = ($3a_1 + 4a_2 – 3a_3$; $–5a_1 + 5a_2$ + 0; $2a_1 + a_2 – 4a_3$) $\bar{n} \equiv 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -5\alpha_1 + 5\alpha_2 \qquad = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3 \;\; = 0 \end{cases}$$

Система має тривіальний розв'язок $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, якщо її головний детермінант $\Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \left(-1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \right) =$$
$$= 5(-13 - 6) = -95 \neq 0$$

Цим доведено, що $\bar{a}$, $\bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис. Для розкладу вектора $\bar{d}$ за цим базисом ($\bar{d} = a_1\bar{a} + a_2\bar{b} + a_3\bar{c}$) досить в системі справа поставити координати вектора $\bar{d}$ $(-4;\ 5; -16)$, тобто розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 3\alpha_3 = -4 \\ -5\alpha_1 + 5\alpha_2 = 5 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3 = -16 \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 \\ 5 & 5 & 0 \\ -16 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -16 & -4 \end{vmatrix} = -95$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -5 & 5 & 0 \\ 2 & -16 & -4 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -16 & -4 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -190$$

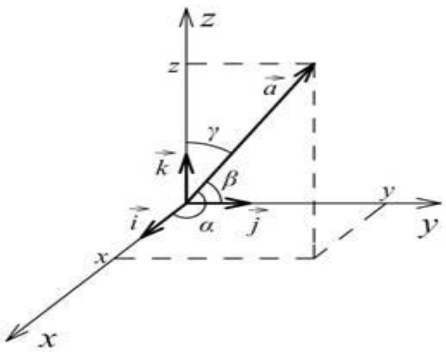
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -16 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -16 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -475$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5$$

Отже, $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}$.

Прямокутна декартова система координат

Трійка одиничних попарно взаємно перпендикулярних впорядкованих векторів утворює *ортонормований базис* у просторі. Ортонормований базис позначають: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тоді $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{j}$. Трійка векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називається правою, якщо з кінця вектора $\vec{k}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ видно проти годинникової стрілки, в іншому випадку трійка векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називається лівою.



Прямокутною декартовою системою координат називається ортонормований базис з правої трійки векторів, прив'язаний до точки простору *O*.

Точка *O* – початок координат. Вектор $\vec{i}$ є напрямним вектором осі абсцис Ox, вектор $\vec{j}$ є напрямним вектором осі ординат Oy, вектор $\vec{k}$ є напрямним вектором осі аплікат Oz.

Довільний вектор $\overline{OM}$, який ще називають радіус-вектором, можна подати в вигляді $\overline{OM} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}$, тобто $\overline{OM}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. З іншого боку дані числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є проекціями вектора $\overline{OM}$ на осі координат, тому $\overline{OM}(x, y, z)$. Координати точки M в цьому випадку співпадають з координатами радіус-вектора $\overline{OM}$.

Нехай задано координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо координати вектора $\overline{AB}$.

$$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \ \overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

тоді

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

отже, координати вектора: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Довжина вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ є довжиною діагоналі прямокутного паралелепіпеда, сторони якого дорівнюють $|a_x|$, $|a_y|$, $|a_z|$, тому

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Якщо вектор заданий двома точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, то довжину вектора $\overline{AB}$ знаходимо, використовуючи формули:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Дії над векторами в координатній формі

1. Нехай вектори задані координатами: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, тоді сумою цих векторів є вектор, координати якого дорівнюють сумі відповідних координат векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z).$$

Якщо λ – дійсне число, то $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$.

2. Умова колінеарності векторів.

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

3. Рівність векторів: $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Поділ відрізка в заданому відношенні

Нехай задано координати кінців відрізка $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ і точка M ділить даний відрізок у відношенні λ, тобто $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Потрібно знайти координати точки $M(x, y, z)$.

Введемо радіус-вектори, що відповідають цим точкам, тоді $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}$; $\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM}$.

Оскільки $\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}$, то $\overline{OM} - \overline{OA} = \lambda\left(\overline{OB} - \overline{OM}\right)$ і визначаємо радіус-вектор $\overline{OM}$: $\overline{OM} = \dfrac{\overline{OA} + \lambda\overline{OB}}{1+\lambda}$.

Рівні вектори мають відповідні рівні координати, тому

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Зауваження: якщо точка M є серединою відрізка AB, тобто $\frac{AM}{MB} = 1$, $\lambda = 1$ то маємо:

$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$ – координати середини відрізка.

Напрямні косинуси вектора

Вектор $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ утворює з додатнім напрямком осей координат відповідно кути α (з віссю Ox), β (з віссю Oy) та γ (з віссю Oz). Дані кути називаються напрямними кутами вектора, а відповідно їх косинуси – напрямними косинусами вектора:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

З іншого боку координати орта вектора $\vec{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$:

$\vec{a}^0 = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$, тобто напрямні косинуси вектора є координатами орта даного вектора $\vec{a}^0 = \left(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\right)$.

З формули отримуємо наступне співвідношення:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1$, тобто

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\cdot$$

Приклад. Дано точки $M_1(4;5;6)$ та $M_2(5;7;2)$. Знайти:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) координати точки M, якщо $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| : \left|\overrightarrow{MM_2}\right| = 2:1$;

в) координати точки M_3, якщо $\overrightarrow{M_1M_3} = 4\overrightarrow{M_1M_2}$.

Розв'язання.

а) $\overrightarrow{M_1M_2} = (5-4; 7-5; 2-6) = (1; 2; -4)$;

$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$ – довжина вектора;

$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{21}}$, $\cos\beta = \frac{y}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \frac{2}{\sqrt{21}}$,

$\cos\gamma = \frac{z}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \frac{-4}{\sqrt{21}}$ – напрямні косинуси;

$\overrightarrow{M_1M_2}^o = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}; \frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{-4}{\sqrt{21}}\right)$ – орт вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

б) Координати точки M:

$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot 5}{1+2} = \frac{14}{3}$; $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{5 + 2\cdot 7}{1+2} = \frac{19}{3}$; $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{6 + 2\cdot 2}{1+2} = \frac{10}{3}$

Отже, $M\left(\frac{14}{3}; \frac{19}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

в) Нехай $M_3(x; y; z)$, тоді $\overrightarrow{M_1M_3} = (x-4; y-5; z-6)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = 4\cdot(1; 2; -4) = (4; 8; -16)$

З рівності векторів випливає рівність відповідних координат:

$$\begin{cases} x-4=4, \\ y-5=8, \\ z-6=-16, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8, \\ y=13, \\ z=-10. \end{cases}$$

Отже, $M_3(8;13;-10)$.

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Якщо хоча б один із векторів у є нульовим, то скалярний добуток дорівнює нулю.

Оскільки $np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$; $np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Формула виражає геометричний зміст скалярного добутку.

Робота A сили $\vec{F}$, прикладеної до матеріальної точки, по переміщенню даної точки вздовж вектора $\vec{S}$, що утворює з вектором $\vec{F}$ кут φ, дорівнює

$$A=|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi, \text{ або } A=\vec{F}\cdot\vec{S}.$$

Остання формула виражає *механічний зміст* скалярного добутку.

Властивості скалярного добутку

Алгебраїчні*:*

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;
3. $(\alpha\vec{a})\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Зауваження: скалярно можна множити лише два вектори.

Геометричні:

1. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не нульові, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, якщо кут φ між векторами гострий; $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, якщо кут φ між векторами тупий.

2. Скалярний добуток двох не нульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні. Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярн*і* тоді й тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2$, тобто $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Скалярний добуток у координатній формі

Нехай задано вектори своїми координатами: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, тоді скалярний добуток цих векторів буде:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$
$$= a_x b_x\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right) + a_y b_y\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right) + a_z b_z\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right) + \left(a_x b_y + a_y b_x\right)\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right) +$$
$$+\left(a_x b_z + a_z b_x\right)\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right) + \left(a_y b_z + a_z b_y\right)\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)$$

Оскільки: $\vec{i}\cdot\vec{i} = \left|\vec{i}\right|^2 = 1$, $\vec{j}\cdot\vec{j} = \left|\vec{j}\right|^2 = 1$, $\vec{k}\cdot\vec{k} = \left|\vec{k}\right|^2 = 1$ та $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k}$,

тоді $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ – скалярний добуток у координатній формі.

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\perp\vec{b}$ якщо $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Кут φ між векторами $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ шукаємо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}\sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2} + b_z^{\,2}}}.$$

Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ (рис. 1), який:

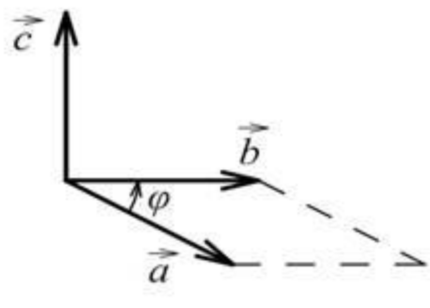


Рис. 1

1) перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
2) якщо $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні, то разом з векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворює праву трійку;
3) має довжину, що дорівнює добутку довжини векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ на синус кута між ними, тобто $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$.

Векторний добуток позначають одним із символів: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$.

З означення векторного добутку випливає його *геометричний зміст*: модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi = S_{парал}$.

Властивості векторного добутку

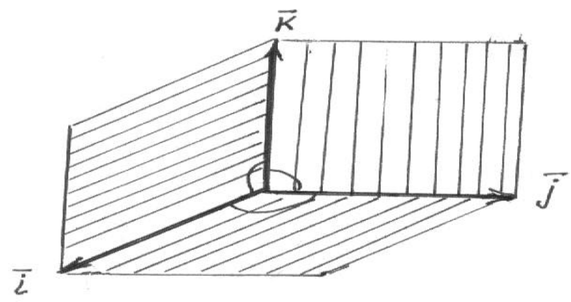
Алгебраїчні:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$;
3. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Геометричні:

1. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi = S_{парал}$, а площа трикутника $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарн*і* тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нулю.



Таблиця векторного добутку ортів:

векторний добуток	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	**0**	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	**0**	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	**0**

Векторний добуток одноіменних ортів дорівнює $\vec{\boldsymbol{o}}$. При найкоротшому повороті від одного орта до іншого проти годинникової стрілки отримуємо третій орт, за годинниковою стрілкою – третій орт зі знаком « – ».

Векторний добуток у координатній формі

Нехай задано вектори своїми координатами: $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$, тоді векторний добуток векторів у координатній формі буде:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$
$$= a_xb_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right) + a_yb_y\left(\vec{j}\times\vec{j}\right) + a_zb_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right) + \left(a_xb_y - a_yb_x\right)\left(\vec{i}\times\vec{j}\right) +$$
$$+\left(a_xb_z - a_zb_x\right)\left(\vec{i}\times\vec{k}\right) + \left(a_yb_z - a_zb_y\right)\left(\vec{j}\times\vec{k}\right) =$$
$$= \left(a_yb_z - a_zb_y\right)\vec{i} - \left(a_xb_z - a_zb_x\right)\vec{j} + \left(a_xb_y - a_yb_x\right)\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Отже, векторний добуток у координатній формі:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається скаляр $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, тобто скалярний добуток вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Властивості мішаного добутку

1. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = -\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$, якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то добуток змінить знак;

2. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$, при циклічній перестановці множників мішаний добуток не зміниться;

3. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$;

4. Модуль мішаного добутку дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах (рис. 2):

$$V_{парал} = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$$

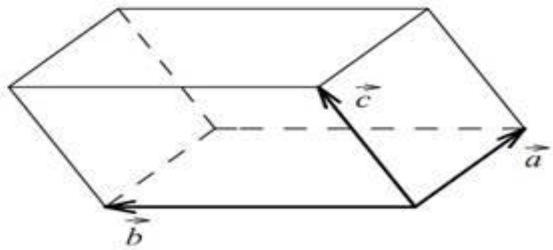


Рис. 2

А об'єм піраміди: $V_{пір.} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

5. Вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$.

6. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}>0$, якщо вектори утворюють праву трійку; $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}<0$, якщо вектори утворюють ліву трійку.

Мішаний добуток у координатній формі

Якщо вектори задані своїми координатами $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ та $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$, то мішаний добуток буде:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Висновок:

1) скалярний добуток – це число, за допомогою скалярного добутку знаходять кути;
2) векторний добуток – це вектор, за допомогою векторного добутку знаходимо площі паралелограма та трикутника;
3) мішаний добуток – це число, за допомогою мішаного добутку знаходимо об'єми паралелепіпеда та піраміди.

Приклад. Знайти внутрішній кут A трикутника з вершинами $A(-1;3;2)$, $B(3;5;-2)$ і $C(3;3;-1)$.

Розв'язання. Кут шукаємо як кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ за формулою $\cos\angle A = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$.

Знаходимо: $\overline{AB}=(4;2;-4)$; $\overline{AC}=(4;0;-3)$;
$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=4\cdot4+2\cdot0+(-4)\cdot(-3)=16+12=28$;

$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$;

$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{16+0+9} = \sqrt{25} = 5$.

Отже, $\cos\angle A = \dfrac{28}{5\cdot 6} \approx 0{,}93$; $\quad \angle A \approx \arccos 0{,}93 \approx 20^\circ 50'$.

Приклад. Дано вектор $\vec{a} = 4\vec{m} - 3\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори, а кут між ними дорівнює 120°. Знайти кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{n}$.

Розв'язання.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{(4\vec{m}-3\vec{n})\vec{n}}{\sqrt{(4\vec{m}-3\vec{n})^2}\cdot 1} = \frac{4\vec{m}\cdot\vec{n} - 3\vec{n}\cdot\vec{n}}{\sqrt{16\vec{m}^2 - 24\vec{m}\vec{n} + 9\vec{n}^2}} =$$

$$= \frac{4\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 120^\circ - 3\cdot 1}{\sqrt{16 - 24\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 120^\circ + 9}} = \frac{-5}{\sqrt{37}};$$

$$\cos\varphi = -\frac{5}{\sqrt{37}} = -0{,}82; \quad \varphi \approx 180^\circ - \arccos 0{,}82 \approx 180^\circ - 34^\circ 40' = 145^\circ 20'.$$

Відповідь: $\varphi \approx 145^\circ 20'$

Приклад. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Розв'язання.

Тут $\vec{a} = (2;-3;4)$; $\vec{b}(1;-2;5)$

Спочатку знаходимо векторний добуток

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = i\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -7\vec{i} - 6\vec{j} - k = (-7;-6;-1).$$

Модуль векторного добутку, який чисельно дорівнює площі паралелограма:

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+36+1} = \sqrt{86} \text{ (кв.од.).}$$

Приклад. Знайти площу трикутника з вершинами $A(-1;2;3)$, $B(2;1;4)$ і $C(0;-3;4)$

Розв'язання. Трикутник побудований на векторах

$$\overline{AB}(2-(-1);1-2;4-3) = \overline{AB}(3;-1;1) \text{ і } \overline{AC}(0-(-1);-3-2;4-3) = \overline{AC}(1;-5;1).$$

Спочатку знаходимо векторний добуток:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & -5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -5 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -5\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$=4\vec{i}-2\vec{j}-14\vec{k}=(4;-2;-14).$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+196}=\frac{1}{2}\sqrt{216}=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{6}=3\sqrt{6}\ (кв.од.)$$

Приклад. Знайти об'єм піраміди з вершинами: $O(0;0;0)$, $A(2;3;0)$, $B(3;0;4)$ і $C(0;4;5)$.

Розв'язання.

Знайдемо вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ які виходять із спільної вершини O:

$\overline{OA}=(2;3;0)$; $\overline{OB}=(3;0;4)$; $\overline{OC}=(0;4;5)$.

Об'єм піраміди:

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 5\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-32-45\right|=\frac{1}{6}\left|-77\right|=\frac{77}{6}$$

Отже, $V_{OABC}=\dfrac{77}{6}$ куб. од.

Приклад. Перевірити, чи компланарні вектори:

$$\vec{a}=(2;0;-1),\ \vec{b}=(4;3;1),\ \vec{c}=(2;1;0).$$

Розв'язання. Вектори компланарні, якщо їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Знайдемо $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-4+6-2=0$$

Отже, задані вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, тобто лежать на одній чи паралельних площинах.

ТЕМА 5. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Теоретичні відомості

Аналітична геометрія – розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат, з допомогою якого одержується взаємно-однозначна відповідність між геометричними образами – точками та алгебраїчними об'єктами, тобто кожній точці, наприклад, площини в певній системі координат відповідає пара чисел (її координати) і, навпаки, кожній парі чисел відповідає єдина точка. Така відповідність дозволяє вивчення геометричних властивостей різних об'єктів звести до вивчення аналітичних співвідношень між координатами точок множини, що задають певний геометричний об'єкт.

Лінією на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), що мають спільну властивість.

Рівнянням лінії в ПДСК (прямокутній декартовій системі координат) називається рівняння виду:

F (x, y) – неявне задання лінії;
y = f (x) – явне задання лінії.

Розглядають дві основні задачі аналітичної геометрії:
1) за відомими властивостями скласти рівняння лінії;
2) за відомим рівнянням лінії знайти її геометричний образ.

Рівняння лінії в полярній системі координат

Вибираємо точку O на площині, яку називаємо полюсом, з даної точки проводимо промінь $O\rho$, який називаємо *полярною віссю*. Візьмемо довільну точку на площині M, тоді вектор $\overrightarrow{OM}$ є полярним радіусом. Позначимо $\rho=\overrightarrow{OM}$, через φ позначимо кут, на який потрібно повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб вона сумістилась з вектором $\overrightarrow{OM}$.

Кут φ – полярний кут. Числа ρ та φ називають полярними координатами точки $M(\rho;\ \varphi)$: $0\leq \rho\leq$, $0\leq \varphi\leq 2\pi$.

Рівнянням лінії в полярних координатах є рівняння виду: $\Phi(\rho\ ;\ \varphi) = 0$.
Зв'язок між полярними та декартовими координатами:

$$x=\rho\cos\varphi\ ;\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad y=\rho\sin\varphi\ ;\ \varphi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Параметричне задання лінії на площині

Якщо в кожен момент часу t (t € T) координати точки M (x, y) € L в ПДСК задовольняють рівняння: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то дане співвідношення задає параметричне рівняння лінії L, при цьому функції $x(t)$ та $y(t)$ мають спільну область визначення $t \in T$ і для кожного параметра t з області визначення ставиться у відповідність єдина точка M лінії L. А також кожній точці $M \in L$ відповідатиме єдине значення параметра $t \in T$.

Зауваження: параметр t не завжди час. Якщо візьмемо за параметр t кут φ, що змінюється в межах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, то можна отримати параметричне рівняння кола: $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\ \sin\varphi \end{cases}$

Щоб знайти точку перетину ліній L_1: F_1 (x, y) = 0, та L_2: F_2 (x, y)=0, потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} F_1\ (x, y) = 0 \\ F_2\ (x, y) = 0 \end{cases}$$

Рівнянням поверхні S в ПДСК називається рівняння виду: $F(x,y,z)=0$ або $z = f\ (x,y)$, яке справджується лише для тих точок, що належать поверхні.

Щоб знайти лінію перетину двох поверхонь, потрібно розв'язати наступну систему: $\begin{cases} F_1\ (x, y, z) = 0 \\ F_2\ (x, y, z) = 0 \end{cases}$

Пряма на площині

Рівняння прямої на площині: $Ax + By + C = 0$.

A,B,C – коефіцієнти рівняння, причому $A^2 + B^2 \neq 0$; x ,y – змінні.

Знайдемо різні види рівнянь прямої на площині. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до ненульового вектора $\overline{n}$ (A,B) .

$$A(x - x_0) + B\ (y - y_0) = 0.$$

Розглянемо окремі випадки не повного рівняння:

1) Якщо C=0, то пряма проходить через початок координат.
2) Якщо A=0, то пряма паралельна осі Ox.
3) Якщо B=0, то пряма паралельна осі O y.
4) Якщо A=C=0, то пряма співпадає з віссю Ox .
5) Якщо B=C=0, то пряма співпадає з віссюOy .

2. Рівняння *прямої у відрізках*, що відтинаються нею на координатних осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

3. Якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до вектора $\bar{s}$, $(l,\ m)$, що називається її напрямним вектором, тоді маємо канонічне рівняння прямої на площині: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$.

4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$:
$\frac{x-x_1}{x_{1-x_1}} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$.

5. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0)$ з заданим кутовим коефіцієнтом $k = \tan\alpha$, де α – кут, що утворює пряма з додатнім напрямком осі Ох: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

6. Рівняння з кутовим коефіцієнтом. Коефіцієнт b – це ордината точки перетину прямої L з віссю Ох: $y = kx + b$.

7. Нормальне рівнянням прямої: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$, де $\bar{n}(\cos\alpha; \sin\alpha)$ нормальний орт, p - віддаль прямої від початку координат.

8. Віддаль від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

9. Якщо у канонічному рівнянні прямої прирівняємо кожну частину до параметра t

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = t,$$

тоді отримаємо параметричне рівняння прямої на площині:

$$\begin{cases} x = l\,t + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}.$$

Взаємне розташування прямих на площині

Якщо дві прямі задані рівняннями через кутові коефіцієнти $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, то для знаходження кута між прямими зручно користуватись наступною формулою:

$$\tan\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Звідси умови перпендикулярності і паралельності двох прямих будуть відповідно:

$$k_1 = \frac{1}{k_2}, \quad k_1 = k_2.$$

Якщо прямі задані загальними рівняннями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ та $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то точку перетину даних прямих шукаємо з системи:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Маємо такі випадки:

1. Прямі перетинаються. Система має один розв'язок, якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

2. Прямі не перетинаються (паралельні). Система немає розв'язків, якщо:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

3. Прямі співпадають. Система має безліч розв’язків, якщо:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Зведена таблиця взаємного розташування прямих на площині:

Вид прямих	$A_1x+B_1y+C_1$ $A_2x+B_2y+C_2$	$y=k_1x+b_1$ $y=k_2x+b_2$	$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$ $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$
$L_1//L_2$	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	$k_1=k_2,\ b_1\neq b_2$	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$
$L_1\perp L_2$	$A_1A_2+B_1B_2=0$	$k_2=\frac{1}{k_1}\quad k_1k_2=-1$	$l_1l_2+m_1m_2$
Кут між прямими φ	$\cos\varphi=$ $=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	$\tan\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$	$\cos\varphi=$ $=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$

Приклад. Скласти рівняння прямої що проходить через точку $A(2;5)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b=7$.

Розв’язання. Запишемо рівняння зазначеної прямої у вигляді $y=kx+7$, звідки знайдемо $k=-1$. Шукане рівняння прямої запишем у вигляді $y=-x+7$ або $x+y-7=0$.

Приклад.

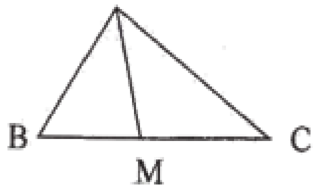
Визначити площу трикутника утвореного прямою $4x+3y-36=0$ та осями координат.

Розв’язання. Шукана площа $S=\frac{1}{2}|a||b|$, де a,b – відрізки, що відтинаються прямою на осях координат.

Переписавши дане рівняння у вигляді $\frac{x}{9}+\frac{y}{12}=1$, знаходимо, що $a=9$, $b=12$. Звідси $S=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=54$ (кв. од.)

Приклад. Дано вершини трикутника $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$. Скласти рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

Розв'язання.



Відомо, що бісектриса внутрішнього кута A трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні довжинам прилеглих сторін. Тоді $\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}$ і точка M перетину бісектриси AM з стороною BC ділить відрізок BC у відношенні $\lambda=\frac{AB}{AC}$.

Знайдемо відстань між точками *A* і *B* і точками *B* і *C*:

$$AB=\sqrt{(5-1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{52},\ AC=\sqrt{(-2-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{13},$$
$$\lambda=\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{52}{13}}=2.$$

Знайдемо координати x, y точки M: $x\frac{5+2(-2)}{1+2}=\frac{1}{3}$ $y=\frac{4+2\cdot 0}{1+2}=\frac{4}{3}$. $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ і запишемо рівняння бісектриси:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{y+2}{\frac{4}{3}+2} \qquad \text{або} \qquad 5x+y-3=0.$$

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-8;1)$ паралельно до прямої $2x-y-3=0$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння даної прямої в рівняння з кутовим коефіцієнтом $x=2x+7$.

Оскільки шукана пряма паралельна до даної прямої, отже $k=2$. Шукана пряма проходить через точку $(-8;1)$, значить її рівняння: $y-1=2(x+8)$ або $2x-y+17=0$.

Приклад 4. Звести до нормального вигляду рівняння прямих:

1) $2x-3y-10=0$, 2) $3x+4y=0$.

Розв'язання. В першому рівнянні $C=-10$, отже, нормуючий множник M слід взяти з знаком плюс $M=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$.

Помноживши всі члени рівняння на цей множник, одержимо рівняння прямої нормального вигляду: $\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{10}{\sqrt{13}}=0$.

В другому рівнянні $C=0$, отже нормуючий множник можна взяти з довільним знаком, наприклад із знаком плюс: $M=\frac{1}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{5}$.

Помноживши всі члени даного рівняння на цей множник, одержимо рівняння нормального вигляду: $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=0$.

Приклад. Знайти відстань між паралельними прямими $3x+4y-18=0$ та $3x+4y+43=0$.

Розв'язання. Візьмемо на першій прямій довільну точку, наприклад точку $(6;0)$ і за формулою відстані від точки до прямої знайдемо:

$$d=\frac{|3\cdot 6+4\cdot 0+43|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{61}{5}$$

Ця відстань і є відстанню між даними паралельними прямими.

Приклад. Пряма перетинає вісь OX в деякій точці M і проходить через точки $A(-2;5)$ і $B(3;-3)$. Знайти координати точки M.

Розв'язання. Точки $A(-2;5)$, $B(3;-3)$, $M(x;0)$ лежать на одній прямій, отже, повинна виконуватись умова

$$\frac{0-5}{-3-5}=\frac{x-(-2)}{3-(-2)} \qquad \text{або} \qquad \frac{5}{8}=\frac{x+2}{5}.$$

Звідси $x=\frac{9}{8}=1{,}125$. Точка $M(1{,}125;0)$ шукана.

Приклад. Дано координати вершин трикутника ABC $A(4;3)$; $B(16;-6)$; $C(20;16)$.

Знайти:

1) довжину сторони AB;

2) рівняння сторін AB і BC і їх кутові коефіцієнти;

3) кут B в радіанах з точністю до двох знаків;

4) рівняння висоти CD і її довжину;

5) рівняння медіани AE і координати точки K перетину цієї медіани з висотою CD;

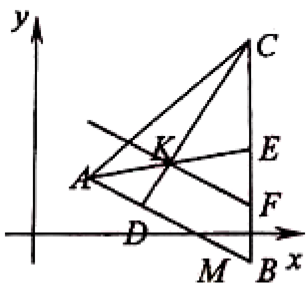
6) координати точки M розміщеної симетрично точці A відносно прямої CD;

7) рівняння прямої, що проходить через т. K паралельно стороні AB.

Розв'язання.

1) Відстань d між точками $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2 y_2)$ визначається за формулою:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



В нашому випадку:

$$AB = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144+81} = 15.$$

2) Рівняння прямої, що проходить через дві точки та $B(x_2 y_2)$ має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Підставляючи в (2) координати точок A і B, одержимо рівняння AB:

$$\frac{y-3}{-6-3} = \frac{x-4}{16-4}; \qquad \frac{y-3}{-9} = \frac{x-4}{12}; \qquad \frac{y-3}{-3} = \frac{x-4}{4};$$

$4y - 12 = -3x + 12$

$3x + 4y - 24 = 0 \qquad (AB)$

Розв'яжемо останнє рівняння відносно y, одержимо:

$y = -\frac{3}{4}x + 6$ звідси $k_{AB} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$.

Підставивши в (2) координати точок B і C, одержимо рівняння прямої BC:

$$\frac{y+6}{16+6} = \frac{x-16}{20-16}; \qquad \frac{y+6}{22} = \frac{x-16}{4}; \qquad \frac{y+6}{11} = \frac{x-16}{2}.$$

$11x - 2y - 188 = 0 \qquad (BC)$

або

$y = 5{,}5x - 94$, звідки $k_{BC}\, 5{,}5$.

3) Відомо, що тангенс куга φ між двома прямими, кутові коефіцієнти яких відповідно дорівнюють k_1 і k_2 обчислюється за формулою:

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

$$tgB = \left| \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} \right| = \left| \frac{-0{,}75 - 5{,}5}{1 + (-0{,}75) \cdot 5{,}5} \right| = \left| \frac{-25}{4 - 16{,}5} \right| = 2;$$

$\angle B = 63^\circ 26'$, або $\angle B = 1{,}11$ рад.

4) Рівняння прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямку має вигляд: $y - y_1 = k(x - x_1)$.

$CD \perp AB$ $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, коефіцієнт $k_{CD} = \frac{4}{3}$. Підставляючи в координати точки C і знайдений кутовий коефіцієнт висоти, одержимо

$$y - 16 = \frac{4}{3}(x - 20)$$
$$3y - 48 = 4x - 80$$
$$4x - 3y - 32 = 0 \qquad (CD)$$

Щоб знайти довжину висоти CD, визначимо спочатку координати точки D – точки перетину прямих AB і CD. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 3x + 4x - 24 = 0 \\ 4x - 3y - 32 = 0, \end{cases}$$

знайдемо $x = 8$; $y = 0$, тобто $D(8;0)$. Знайдемо довжину висоти CD.

$$CD = \sqrt{(20-8)^2 + (16-0)^2} = 20.$$

5) Щоб знайти рівняння медіани AE, визначимо спочатку координати точки E, яка є серединою сторони BC, використовуючи формули поділу відрізка на дві рівні частини: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ значить $x_E = \frac{16 + 20}{2} = 18$, $y_E = \frac{-6 + 16}{2} = 5$ $E(18;5)$.

Підставивши координати точок A і E, знайдемо рівняння медіани

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x-4}{18-4} \qquad \frac{y-3}{2} = \frac{x-4}{14} \quad x - 7y + 17 = 0 \qquad (AE).$$

Щоб знайти координати точок перетину висоти CD і медіани AE розв’яжемо систему

$$\begin{cases} 4x - 3y - 32 = 0 \\ x - 7y + 17 = 0 \end{cases} \qquad x = 11, \ y = 4 \quad K(11;4)$$

6) Оскільки пряма $AB \perp CD$, то шукана точка M, розміщена симетрично точці A відносно прямої CD лежить на прямій AB. Крім того, точка D є серединою відрізка AM. Використовуючи формули (5), знайдемо координати точки $M: 8 = \frac{4 + x_M}{2}$ $\quad x_M = 12 \quad 0 = \frac{3 + y_M}{2} \quad y_M = -3$; $M(12;-3)$.

7) Оскільки шукана площина паралельна стороні AB, то її кутовий коефіцієнт дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB. Підставивши, координати знайденої точки K і кутовий коефіцієнт $k = -\frac{3}{4}$, одержимо

$$y - 4 = \frac{3}{4}(x - 11) \qquad 4y - 16 = -3x + 33$$
$$3x + 4y - 49 = 0 \qquad (KF).$$

ТЕМА 6. РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Теоретичні дані

Рівнянням поверхні в ПДСК називається рівняння $F(x,y,z)=0$ з трьома невідомими, яке задовольняють координати кожної точки, що лежить на поверхні і не задовольняють, що не належать поверхні.

Рівняння лінії в просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Основні задачі:

1) задана поверхня як геометричне місце точок, потрібно знайти її рівняння;

2) задано рівняння поверхні, потрібно дослідити геометричні властивості та форму.

Загальне рівняння площини

Довільне рівняння першого порядку відносно змінних x, y, z є рівнянням площини: $Ax+By+Cz+D=0$. Коефіцієнти A,B,C,D – довільні числа, причому $A^2+B^2+C^2>0$ (одночасно не дорівнюють нулю). Площини позначають латинськими буквами α,β,γ.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) називається *рівнянням площини, що проходить через задану точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *перпендикулярно до вектора* $\vec{n}(A,B,C)$.

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається *загальним рівнянням площини*. Загальне рівняння називається повним, якщо всі коефіцієнти у рівнянні відмінні від нуля. В іншому випадку рівняння є неповним.

Класифікація неповних рівнянь площини

1) $D=0$, $Ax+By+Cz=0$ – площина проходить через початок координат;

2) $A=0$, $By+Cz+D=0$ – площина паралельна до осі Ox;

3) $B=0$, $Ax+Cz+D=0$ – площина паралельна до осі Oy;

4) $C=0$, $Ax+By+D=0$ – площина паралельна до осі Oz;

5) $A=0$, $D=0$, $By+Cz=0$ – площина містить вісь Ox;

6) $B=0$, $D=0$, $Ax+Cz=0$ – площина містить вісь Oy;

7) $C=0$, $D=0$, $Ax+By=0$ – площина містить вісь Oz;

8) $A=0$, $B=0$, $Cz+D=0$ – площина паралельна до координатної площини Oxy;

9) $A=0$, $C=0$, $By+D=0$ – площина паралельна до координатної площини Oxz;

10) $C=0$, $B=0$, $Ax+D=0$ – площина паралельна до координатної площини Oyz;

11) $A=0$, $B=0$, $D=0$, $Cz=0$ ($z=0$) – координатна площина Oxy;

12) $B=0$, $C=0$, $D=0$, $Ax=0$ ($x=0$) –координатна площина Oyz;

13) $A=0$, $C=0$, $D=0$, $By=0$ ($y=0$) –координатна площина Oxz.

Рівняння площини в відрізках, що відтинаються площиною на координатних осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Через три точки можна провести площину і до того ж тільки одну.

Оскільки ці вектори компланарні, то їхній мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

Рівняння (3) є рівнянням площини через три точки.

Нехай $\vec{n}^0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – орт нормального вектора площини, а p – віддаль від початку координат до площини, тоді рівняння

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (4)$$

Рівняння (4) є *нормальним рівнянням площини*.

Від загального рівняння площини можна перейти до нормального рівняння, помноживши на нормуючий множник $\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; знак μ слід вибрати протилежним до знаку коефіцієнта D.

Віддаль від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини α, заданої загальним рівнянням шукаємо за формулою: $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Пряма в просторі

1. Нехай дві площини задано загальними рівняннями:

$\alpha_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+D=0$, $\alpha_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+D=0$.

Якщо площини α_1 та α_2 перетинаються , то лінією їх перетину є пряма L:

$$L: \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Рівняння (1) є *загальним рівнянням прямої в просторі*, або рівняння прямої заданої як перетин двох площин.

Нехай задано точку $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$ та вектор $\bar{s}\ (l, m, p)$ паралельний до прямої L.

Довільний вектор паралельний до прямої називається *напрямним вектором* прямої.

Якщо $M(x; y; z)$ – біжуча точка прямої L, то

$\overrightarrow{\mathrm{M_0M}}\ (\mathrm{x} - \mathrm{x_0}), (y - y_0), (z - z_0\ 0)$ паралельний $\bar{s}$

За умовою колінеарності цих векторів:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається канонічним рівнянням прямої в просторі. Якщо в канонічному рівнянні прирівняти кожну частину до параметра t, то отримаємо *параметричне рівняння (3)прямої* в просторі:

$$\begin{cases} x = l \cdot t + x_0, \\ y = m \cdot t + y_0, \\ z = p \cdot t + z_0. \end{cases} \qquad (3)$$

4. Через дві точки завжди можна провести пряму і до того ж тільки одну. Нехай $M_1(x_1; y_1; z_1) \in L$ та $M_2(x_2; y_2; z_2) \in L$. Скористаємося канонічним рівнянням прямої. В якості точки M_0 візьмемо точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, а за напрямний вектор $\bar{s}$ беремо вектор $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, тоді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (4)$$

Рівняння (4) є *рівнянням прямої через дві точки*.

Взаємне розташування площин та прямих в просторі.
Взаємне розташування площин

Нехай дві площини задані загальними рівняннями $\alpha_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+D=0$ та $\alpha_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+D=0$.

1) Умова паралельності площин: $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ якщо $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$, тобто $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

2) Площини суміщаються: $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

3) Умова перпендикулярності площин: $\alpha_1 \perp \alpha_2$ якщо $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, тобто $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

4) Кут φ між площинами: $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

5) Пряма перетину площин: $L: \quad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D=0. \end{cases}$

Взаємне розташування прямих в просторі

Нехай дві прямі задані канонічними рівняннями

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{та} \quad L_2: \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Умова паралельності прямих у просторі: $L_1 \parallel L_2$ якщо $\overline{s_1} \parallel \overline{s_2}$,

1) тобто $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

2) Умова перпендикулярності прямих у просторі: $L_1 \perp L_2$ якщо $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$, тобто $l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2=0$.

3) Кут φ між прямими в просторі:

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+p_1p_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+p_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+p_2^2}}.$$

4) Прямі лежать у одній площині: $\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$.

Взаємне розташування прямої та площини в просторі

Нехай дано $\alpha: \; Ax+By+Cz+D=0$ – площина, $L: \; \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ – пряма.

Вектор $\vec{n}(A, B, C)$ – нормальний вектор площини, $\vec{s}(l, m, p)$ – напрямний вектор прямої.

1. Нехай φ – кут між прямою та площиною, а ψ – кут між векторами, тоді

$$\sin\varphi=\cos\psi=\frac{Al+Bm+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+p^2}}.$$

Формула знаходження *кута між прямою та площиною* в просторі.

2. Умова паралельності прямої та площини $L \parallel \alpha$, якщо $\vec{s}\perp\vec{n}$, тобто $Al+Bm+Cp=0$.

3. Умова перпендикулярності прямої та площини $L\perp\alpha$, якщо $\bar{s} \parallel \bar{n}$ тобто $\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{p}{C}$.

4. Нехай точка $M(x, y, z)$ – точка перетину прямої L та площини α. Тоді координати точки M одночасно задовольняють рівняння прямої та площини, тобто є розв'язком системи: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}. \end{cases}$

Перейдемо до параметричного рівняння прямої $\begin{cases} x=l\cdot t+x_0, \\ y=m\cdot t+y_0, \\ z=p\cdot t+z_0. \end{cases}$

Підставимо в останнє рівняння системи значення x, y, z через параметр t: $A(lt+x_0)+B(mt+y_0)+C(pt+z_0)+D=0$.

Знаходимо значення параметра t: $\quad t=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Al+Bm+Cp}$.

Підставляючи значення параметра в параметричне рівняння прямої, знаходимо координати точки перетину.

5. Пряма належить площині, якщо $\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \\ Al+Bm+Cp=0. \end{cases}$

Приклад. Як розміщені точки: $A(3;-2;0)$, $B(1;1;1)$, $C(1;-2;1)$ відносно площини $3x+5y-2z+1=0$.

Розв'язання. Підставимо координати точок A, B, C в рівняння площини $A(3;-2;0)$: $\;3\cdot3-5\cdot2-2\cdot0+1=0$.

$B(1;1;1)$: $\;3\cdot1+5\cdot1-2\cdot1+1>0$; $C(1;-2;1)$: $\;3\cdot1+5\cdot(-2)-2\cdot1+1<0$.

Отже, точка A належить площині, а точки B і C лежать в різних півплощинах відносно заданої площини.

*Приклад***.** Знайти рівняння площини, що проходить через точку $A(0;2;3)$ паралельно векторам $\vec{a}_1$ (1;0;1) $\vec{a}_2$ (1;0;1).

Розв'язання. Оскільки площина паралельна векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ то вона перпендикулярна до їхнього векторного добутку $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, який можна взяти за нормальний вектор $\vec{N}$ площини. Векторний добуток

$$\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

Отже, $\vec{N}(-1;-1;1)$. Шукане рівняння площини запишемо у вигляді:

$-1(x-0)-1(y-2)+1(z-3)=0$ або $x+y-z+1=0$.

Приклад. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;-1;2)$ і $M_2(3;0;-3)$ паралельно вектору $\vec{a}(2;1;-1)$.

Розв'язання. В якості нормального вектора шуканої площини візьмемо вектор $\vec{N} = \overline{M_1M_2} \times a$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 0\vec{k} \quad \vec{N}(4;-8;0)$$

Знаючи нормальний вектор площини і точку, що їй належить (наприклад, точку $M_1(1;-1;2)$) запишемо рівняння шуканої площини

$$4(x-1)-8(y+1)=0$$
$$x-2y-3=0.$$

Приклад. Обчислити відстань між паралельними площинами:

$$2x-y+2z+9=0 \text{ і } 4x-2y+4z-21=0.$$

Розв'язання. На одній з площин, наприклад, на першій, візьмемо яку-небудь точку, наприклад $M_0(0;9;0)$, і за формулою $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$ знайдемо відстань від цієї точки до другої площини:

$$d = \left| \frac{4 \cdot 0 - 2 \cdot 9 + 4 \cdot 0 - 21}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} \right| = \left| -\frac{39}{6} \right| = \frac{13}{2} = 6,5$$

Приклад. Скласти рівняння прямої:

1) що проходить через дві точки $M_1(1;-1;3)$ та $M_2(1;1;-1)$;

2) що проходить через точку $M(2;-1;0)$ і паралельна вектору $\bar{S}(3;-5;1)$.

Розв'язання.

1) Рівняння прямої, що проходить через дві точки мають вигляд

$$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z-3}{-1-3}$$
$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-4}$$
$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}$$

У якості напрямного вектора $\bar{a}$ візьмемо вектор $\bar{S}(3;-5;1)$ запишемо канонічне рівняння прямої

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z}{1}.$$

Приклад. Обчислити величину кута між прямими

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$$

Розв'язання.

Напрямний вектор $\overline{a_1}$ має координати $\overline{a_1}(1;-2;3)$. Знайдемо координати напрямного вектора другої прямої: $a_2\left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -8 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right)=(7;14;7)$.

Для подальших обчислень зручно брати не вектор $\overline{a_2}$, а йому колінеарний $\vec{a}_2'=(1;2;1)$.

За формулою:

$$\cos\varphi=\left|\frac{k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{k_1^2+l_1^2+m_1^2}\sqrt{k_2^2+l_2^2+m_2^2}}\right|,$$

де $\vec{a}_1(k_1;l_1;m_1)$ і $\vec{a}_2(k_2;l_2;m_2)$ – напрямні вектори відповідних прямих, одержимо $\cos\varphi=\left|\frac{1\cdot1-2\cdot2+1\cdot3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right|=0$, звідси $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Приклад. Встановити взаємне розміщення прямих $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}$ та $\frac{x-6}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$.

Розв'язання: Координати напрямних векторів: $\vec{a}_1(2;1;4)$ і $\vec{a}_2(3;-2;1)$ даних прямих не пропорційні, значить дані прямі або перетинаються, або мимобіжні. Вони будуть перетинатися, якщо вектори $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$, де M_1, M_2 – будь які точки, що належать відповідно першій і другій даним прямим, компланарні і будуть мимобіжними, якщо ці вектори не компланарні. В якості точок M_1 і M_2 візьмемо відомі точки $M_1(1;7;3)$ і $M_2(6;-1;-2)$.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$: $\overrightarrow{M_1M_2}(5;-8;-5)$ і знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\cdot M_1M_2=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\\ 5 & -8 & -5\end{vmatrix}=0.$$

Отже, дані вектори є компланарні, а тому відповідні прямі перетинаються.

Приклад. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$ і паралельної осі OX.

Розв'язання. Запишемо рівняння всіх площин, що проходять через задану пряму:

$$\alpha(3x-y+2z+9)+\beta(x+z-3)=0$$

або

$$(3\alpha+\beta)x-\alpha y+(2\alpha+\beta)z+(9\alpha-3\beta)=0$$

Рівняння площини паралельної осі OX, має вигляд $Bx+Cz+D=0$. Тоді якщо шукана площина належить пучку площин, то $3\alpha+\beta=0$, звідси $\beta=-3\alpha$. Підставляючи $\beta=-3\alpha$ в рівняння пучка площин $\alpha(3x-y+2z+9)+\beta(x+z-3)=0$ і скоротивши на $\alpha\neq 0$, одержимо шукане рівняння $y+z-18=0$.

Приклад. Скласти рівняння площини, знаючи три її точки $A(1;-3;2)$, $B(5;1;-4)$, $C(2;0;3)$.

Розв'язання. Оскільки рівняння площини, що проходить через три точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ має вигляд

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

то шукане рівняння площини

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 5-1 & 1+3 & -4-2 \\ 2-1 & 0+3 & 3-2 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 4 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x-1)\cdot 22 - (y+3)\cdot 10 + (z-2)\cdot 8 = 0$$
$$(x-1)\cdot 11 - (y+3)\cdot 5 + (z-2)\cdot 4 = 0$$
$$11x - 5y + 4z - 34 = 0.$$

Приклад. Знайти відстань від точки $M(2;3;1)$ до прямої $\frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$.

Розв'язання. Через дану точку M проведемо площину P, перпендикулярну до цієї прямої. Далі знайдемо точку перетину N цієї площини з прямою. Відрізок MN буде лежати в площині P, що перпендикулярна до прямої, отже він буде перпендикуляром, що опушений з точки M на дану пряму, основою якого є точка N найкоротша відстань від т. M до даної прямої буде довжина перпендикуляра MN, проведеного з т. M на пряму.

Запишемо рівняння площини, що проходить через т. M:
$A(x-2) + B(y-3) + C(z-1) = 0$.

Визначимо коефіцієнти A, B, C так щоб площина була перпендикулярною до прямої.

Використаємо умову перпендикулярності прямої і площини $\frac{A}{1} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{-2}$.

Покладемо $A = 1$; $B = -3$; $C = -2$, одержимо $x - 2 - 3(y-3) - 2(z-1) = 0$ або $x - 3y - 2z + 9 = 0$.

Далі знайдемо точку перетину цієї площини з даною прямою

$$\frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2} = t.$$

Звідси $x = t - 5$, $y = -3t + 4$, $z = -2 + 3 = 1$.

Відстань між точками M і N: $MN = \sqrt{(2+4)^2 + (3-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3.
ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ТЕМА 7. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Теоретичні відомості

Коли існує є залежність чогось від чогось, то таку залежність називають функцією. Змінна від якої залежить щось називають не залежною змінною, а змінна яка залежить від чогось називається залежною змінною.

Функції часто позначають як «y» або як «$f(x)$», де в дужках записують незалежну змінну наприклад «x».

Наприклад:

$y = 2x - 3$; «y» – функція (залежна змінна), «x» – не залежна змінна.

$f(x) = x^2 - 8x$; «$f(x)$» – функція (залежна змінна), «x» – не залежна змінна.

Область визначення функції

Значення які може набувати незалежна змінна (аргумент) «x» називають областю визначення функції. Область визначення функції ще називають областю допустимих значень функції. Область визначення функції позначають «$D(y)$». Область визначення кожної функції відразу (за замовчуванням) є «$(-\infty; +\infty)$» але часто доводиться викидати ті значення при яких функція не має змісту, тобто, коли є якісь обмеження.

Найчастіше зустрічаються такі обмеження як: «ділення на нуль» та «під коренем парного степеня не може бути від'ємного числа».

Наприклад: Знайдіть область визначення функції: $y = \frac{x}{|x|-7}$

У наведеному прикладі є в знаменнику змінна «x» і нам необхідно з області визначення викинути значення при яких знаменник перетвориться у нуль. Тобто, необхідно розв'язати таку нерівність:

$$|x| - 7 \neq 0\ ;\quad |x| \neq 7;\quad x \neq 7 \text{ або } x \neq -7.$$

Тобто, числа 7 та –7 не входять до області визначення функції.

Область визначення запишеться наступним чином:

$$D(y) = (-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty).$$

Приклад. Знайти область визначення функції: $y = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} + \frac{4x-3}{\sqrt{x^2-7+6}}$.

У цьому прикладі ми маємо такі обмеження: «під коренем парного степеня не може бути від'ємного числа» і «знаменник не може бути рівний нулеві».

Отже, з виразу $\sqrt{x-4}$ будемо мати обмеження $x - 4 \geq 0$, бо під коренем парного степеня може бути додатне число або нуль. З виразу $\sqrt{x+2}$ обмеження буде $x + 2 > 0$, бо під коренем парного степеня може бути додатне число, а враховуючи, що цей вираз є у знаменнику, то має ще не дорівнювати нулеві. З виразу $\frac{4x-3}{\sqrt{x^2-7+6}}$ маємо обмеження $x^2 - 7x + 6 \neq 0$, бо знаменник не може бути рівний нулю (на нуль ділити не можна).

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \neq 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність $x^2 - 7x + 6 \neq 0$:

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$

$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2} = 6$, $x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{25}}{2} = 1$

$x \neq 1$; $x \neq 6$

Розв'яжемо нерівність: $x - 4 \geq 0$, $x \geq 4$, $x + 2 > 0$, $x > -2$.
Отже, область визначення у цьому прикладі буде така: $D(y) \in [4; 6) \cup (6; +\infty)$.

Область значень функції

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція: «y» чи «f(*x*)»), утворюють область значень функції. Область значення функції позначають «E(*y*)».

Для того щоб знайти область значення функції використовують дослідження функції або використовують графік функції (достатньо ескізу).

Приклад: Знайти область значення функції «$y = 2|x| + 3$».
Врахуємо, що вираз «$|x|$» є не від'ємним, тобто: «$|x| \geq 0$».
Після чого нам необхідно у нерівності «$|x| \geq 0$» перетворити вираз «$|x|$» у «$2|x| + 3$».
В першу чергу помножимо все на 2:
$|x| \geq 0 \mid \cdot 2$, $2|x| \geq 0$
Тепер необхідно додати 3:
$2|x| \geq 0 \mid + 3$ $2|x| + 3 \geq 3$

Отже, область значення функції буде: $y \geq 3$, Тобто: $E(y) \in [3; +\infty)$
Мінімальне значення яке набуває вираз $|x|$ буде 0. А при $|x| = 0$ матимемо: $y = 2 \cdot 0 + 3$, $y = 3$ функція набуває всіх значень від 3 включно та більше.

Приклад 2: Знайти область значення функції $y = -x^2 + 4x - 5$.
Для того щоб знайти область значення ми можемо прирівняти функцію до параметру а, де а - довільне число. Матимемо: $-x^2 + 4x - -5 = a$
Якщо ми перенесемо параметр а до всієї функції, то отримаємо квадратне рівняння: $-x^2 + 4x - 5 - a = 0$.

Квадратне рівняння буде мати розв'язки лише за умови: $D \geq 0$, тобто:
$4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5 - a) \geq 0$

Розв'яжемо цю нерівність:
$16 - 20 --4a \geq 0$, $-4 \ -4a \geq 0$, $-4a \geq 4 \mid : (-4)$, $a \leq -1$
Виходить, що функція набуватиме значень: $y \leq -1$
Отже, область значення функції буде: $E(y) \in (-\infty; -1]$

Точки перетину з осями координат

Для того щоб знайти точку перетину з віссю Оx, то нам необхідно прирівняти до нуля у або f(x) (залежить як позначена функція). Після чого розв'язати отримане рівняння та знайти координату перетину по х, а координата по у буде рівна нулю (оскільки ми відразу прирівняли її до нуля).

Для того щоб знайти точку перетину з віссю Оy, то нам необхідно прирівняти до нуля х. Після чого розв'язати отримане рівняння та знайти координату перетину по у, а координата по х буде рівна нулю (оскільки ми відразу прирівняли її до нуля).

Приклад: Знайти точки перетину функції $y = -x^2 + 4x - 8$ з осями координат.

Знайдемо точки перетину з віссю Ох. Для цього прирівняємо у до нуля. Будемо мати: $0 = -x^2 + 4x - 8$.

Розв'яжемо отримане рівняння:
$-x^2 + 4x - 8 = 0$, $D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = 16 - 32 = -16$

Дискримінант менший за нуль, тому рівняння розв'язків не має. Це означає, що точок перетину з віссю Ох не має.

Знайдемо точки перетину з віссю Оy. Для цього прирівняємо х до нуля. Будемо мати: $y = -0^2 + 4 \cdot 0 - 8$, $y = -8$.

Отже, точка перетину з віссю Оy буде мати координати: (0; –8).

Приклад 2: Знайти точки перетину функції $y = x^2 - 6x + 8$ з осями координат.

Знайдемо точки перетину з віссю Ох. Для цього прирівняємо у до нуля. Будемо мати:

$0 = x^2 - 6x + 8$, $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$,

$$x_1 = \frac{-(-6)+\sqrt{4}}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{-(-6)-\sqrt{4}}{2} = 2.$$

Точка перетину з віссю Ох будуть мати координати (2; 0) і (4; 0).

Знайдемо точки перетину з віссю Оy. Для цього прирівняємо х до нуля. Будемо мати: $y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8$, $y = 8$

Точка перетину з віссю «*Оу*» будуть мати координати: (0; 8)

Відповідь: *Ох*: (2; 0) і (4; 0); Оу: (0; 8).

Нулі функції

Нуль функції це значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю.

Для того щоб знайти нулі функції нам необхідно прирівняти функцію до нуля (тобто, замінити у чи f*(x)* на нуль).

Приклад: Знайти нулі функції $y = 12 - x - x^2$.

Для того щоб знайти нуль функції необхідно прирівняти функцію до нуля ($y = 0$).

Матимемо: $12 - x - x^2 = 0$, $D = (-1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 12 = 1 + 48 = 49$,

$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2(-1)} = 4$, $x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2(-1)} = 3$.

Отже, $x = -4$, $x = 3$ – нулі функції.

Якщо функція задана графічно, то нулями функції буде абсциса координат точки перетину.

Проміжки зростання та спадання функції.
Точки максимуму та мінімуму функції.
Максимуми та мінімуми функції

Функція може бути зростаючою або спадною на всій області визначення або на певному проміжку.

Функцію f*(x)* називають зростаючою на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу функції з цього проміжку відповідає більше значення функції. Тобто, коли ми маємо деякий проміжок [a; b] (a < b) і маємо деякі аргументи x_1, x_2 які належать цьому проміжку ($x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$), де $x_1 < x_2$ та виконується умова: $f(x_1) < f(x_2)$. То така функція є зростаючою на цьому проміжку.

Функцію $f(x)$ називають спадаючою на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу функції з цього проміжку відповідає менше значення функції. Тобто, коли ми маємо деякий проміжок [a; b] (a < b) і маємо деякі аргументи x_1, x_2 які належать цьому проміжку ($x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$), де

$x_1 < x_2$ та виконується умова: $f(x_1) > f(x_2)$. То така функція є спадаючою на цьому проміжку.

Завдання такого типу можна розв’язувати декількома способами:

1. Використовуючи похідну.
2. Побудувавши графік функції.

Розглянемо як визначати проміжки зростання та спадання функції за допомогою графіка.

Координати по *x* точок які знаходяться на межі зростання та спадання функції є точками максимуму або мінімуму функції (Важливо! Координати *x* це є ТОЧКИ максимуму або мінімуму функції). Точка, що знаходиться на переході від зростання до спадання є точкою максимуму, а точка, що знаходиться на межі від спадання до зростання є точкою мінімуму.

Значення функції в цих точках (координати по y) є максимум або мінімум функції (Важливо! Це є мінімум або максимум функції не плутайте з ТОЧКАМИ максимуму або мінімуму функції). Відповідно значення функції в точці максимуму функції буде максимум функції.

Обернена функція

Функція, що набуває своє значення лише один раз на всій області визначення, називають оборотною.

Наприклад, функція $y = 2x - 3$ є оборотною, бо кожне значення функції набувається лише раз. А функція $y = |x|$ не є оборотною, бо наприклад значення функції 2 набувається при двох значеннях параметру –2 і 2.

Якщо функція є оборотною, то ми можемо поміняти місцями залежну та незалежну змінну. Тобто, якщо функція $y = f(x)$ - оборотна, то функція $x = g(y)$ – обернена до функції $f(x)$.

Оскільки функцію прийнято позначати через y, а аргумент через x, то після того як знайшли обернену функцію $x = g(y)$ її переписують як $y = g(x)$.

Приклад: Знайти функцію, обернену до функції $y = \frac{2x-1}{6x-7}$.

Для цього нам необхідно виразити x з функції:

$(6x - 7)y = 2x - 1$, $6xy - 7y = 2x - 1$, $6xy - 2x = 7y - 1$, $x(6y - 2) = 7y - 1$

$$x = \frac{7y-1}{6y-2}.$$

Ми отримали обернену функцію. Тепер необхідно перевизначити обернену функцію. Після чого остаточний запис буде такий:

$$y = \frac{7x-1}{6x-2}.$$

Парність і непарність функції

Функція може бути: «парною», «непарною» або «ні парною ні не парною».

Функція є парною тоді, коли виконується умова: $f(x) = f(-x)$.

Область визначення парної функції є симетрична відносно нуля. Графік парної функції є симетричним відносно осі Oy.

Якщо не виконалася умова $f(x) = f(-x)$, то необхідно перевірити чи функція є непарною.

Функція є непарною тоді, виконується умова:

$$\begin{cases} f(x) \neq f(-x) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Часто перевіряють лише умову: $f(-x) = -f(x)$. Якщо вона виконується, то кажуть, що функція є непарною.

Область визначення непарної функції є симетрична відносно нуля. Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат.

Якщо не виконується жодна з цих умов, то функція є ні парна ні непарна. Таку функцію ще називають функцією загального виду.

Також варто зауважити, що є функції які одночасно і парні, і непарні. До таких функцій можна віднести функцію: $y = 0$

Приклад: Дослідити на парність функцію $f(x) = x^3 + x$.

Перевіримо функцію на парність. Для цього має виконуватися умова: $f(x) = f–x)$.

Для того щоб знайти $f(–x)$ нам необхідно замінити x на $–x$:

$f(–x) = (–x)^3 + – x) – x^3 – x$

Як помітно у нас не виконалася умова парності функції, бо, $f(x) \neq f(–x)$.

Перевіримо на непарність функції. Для цього має виконатися умова: $f(–x) = –f(x)$.

Для того щоб знайти f(–x) нам необхідно функцію $f(x)$ помножити на –1 або просто написати перед всією функцією знак «–».

$$–f(x) = –(x^3 + x) = –x^3 – x.$$

Як помітно умова $f(–x) = –f(x)$ виконалася, тому функція $f(x) = x^3 + x$ є непарною.

Приклад 2: Дослідити на парність функцію $f(x) = x^2 + |x|$.

Перевіримо функцію на парність. Для цього має виконуватися умова: $f(x) = f(–x)$.

Для того щоб знайти f(–x) нам необхідно замінити x на –x:

$$f(–x) = (–x)^2 + |–x| = x^2 + |x|$$

Як помітно умова f(x) = f(–x) виконалася, тому функція $f(x) = x^2 + |x|$ є парною.

Знаходження значення функції та аргументу функції

Часто доводиться зустрічати завдання такого типу:

1. Знайти значення функції, якщо значення аргументу є таким.
2. Знайти при якому значенні аргументу функція буде мати таке значення.

Кожне з цих завдань може розв'язуватися декількома способами які відрізняються методом задання функції.

Функція може бути задана:

1. Виразом.
2. Графічно.
3. Таблицею.

Розглянемо на прикладах випадки, коли функція задана виразом.

Приклад: Знайти значення функції $y = 3x^2 - 4$, якщо значення аргументу $x = -2$.

Для того щоб знайти значення функції маючи значення аргументу нам необхідно підставити це число у сам вираз функції та знайти її значення. Тобто, необхідно замість х у виразі $y = 3x^2 - 4$ поставити –2.

Будемо мати: $y = 3\cdot(-2)^2 - 4 = 3\cdot 4 - 4 = 12 - 4 = 8$.

Тобто значення функції буде рівне 8, коли значення аргументу дорівнює –2.

ТЕМА 8. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Теоретичні відомості

Практичне обчислення границь функцій базується на наступних теоремах та формулах:

Нехай $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = A$, $= \lim\limits_{x \to a} \beta(x) = B$.

Тоді:

1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, C − const;
2. $\lim\limits_{x \to a}(\alpha(x) \pm \beta(x)) = A \pm B$;
3. $\lim\limits_{x \to a}(\alpha(x)\,\beta(x)) = A\ B$;
4. $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) / \beta(x) = A / B$;

$\lim\limits_{x \to \infty} \sin x / x = 1$ – перша визначна границя

$\lim\limits_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$, $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{1/x} = e$ – друга визначна границя

У найпростіших випадках знаходження границі функції зводиться до підстановки у функцію граничного значення аргументу. Але досить часто така підстановка приводить до невизначеностей виду: $\frac{\infty}{\infty}$; $0/0$, $\infty - \infty$, $0\ \infty$, 1^{∞}.

Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо деякі окремі випадки.

1. Невизначеність виду ∞/∞ задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти: $\mathop{lim}\limits_{x\to\infty} \frac{x^4+2x-3}{5x^4+x^2+10x+4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду ∞/∞. Щоб розкрити невизначеність виду ∞/∞, задану відношенням двох многочленів, потрібно поділити чисельник і знаменник дробу на найвищий степінь *x*, тобто на x^4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x-3}{5x^4+x^2+10x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x^3-3/x^4}{5+1/x^2+10/x^3+4/x^4} = 1/5$$

2. Невизначеність виду 0/ 0 задана відношенням двох многочленів.

Приклад 2. Знайти: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}$

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x\to 1} (x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 3x - 4) = 0$, то маємо невизначеність виду 0/0.

Щоб розкрити невизначеність виду 0/ 0 потрібно розкласти чисельник і знаменник дробу на множники:

$$(x^3 + 2x^2 - x - 2) = (x^2 - 3x+2)(x-1) ; x^2 + 3x - 4) = (x+4)(x–1).$$

Маємо: $\lim\limits_{ї\to 1} \frac{(x^2 - 3x+2)(x-1)}{(x+4)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2 - 3x+2)}{(x+4)} = 6/5.$

3. Невизначеність виду 0/ 0 задана ірраціональними виразом.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 0/0. Щоб розкрити невизначеність виду 0/0 потрібно позбутися від ірраціональності, в даному прикладі в чисельнику. Для цього домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = 2/3.$$

4. Невизначеність виду ∞ − ∞ задана ірраціональними виразами.

Приклад 4. Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4x} - x)$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду ∞ − ∞, яку розкриємо, домноживши чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+4/x}+1} = 2.$$

5. Невизначеність виду 0/ 0 задана виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої визначної границі.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 0/0 яку розкриємо за допомогою першої визначеної границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{\sin 3x}5x}{\frac{\sin 3x}{3x}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 5x}{5x}}{3x\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{3x}}=5/3.$$

6. Невизначеність виду1^{∞} розкривають за допомогою другої визначної границі.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+3}\right)^{1-5x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 1^{∞}, яку розкриємо за допомогою другої визначної границі

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x+3}-1\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x-3}{2x+3}\right)^{1-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{2x+3}\right)^{1-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{2x+3}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1\frac{-3}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-3}}\right)^{\frac{-3(1-5x)}{2x+3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3(1-5x)}{2x+3}}=\sqrt{e^{15}}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Розкриємо невизначеність 1^{∞} за допомогою другої визначної границі.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{\cos x-1}{(\cos x-1)x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією при $x\to a$ ($x\to\infty$), якщо $\lim\alpha_1(x)=0$ ($\lim\alpha_2(x)=0$) . Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to a$, тоді, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$, тоді $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ є еквівалентними нескінченно малими: $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

$\sin x\sim x,\ x\to 0$	$e^x-1\sim x,\ x\to 0$
$tgx\sim x,\ x\to 0$	$\log_a(1+x)\sim x\log_a e,\ a\to 0$
$\arcsin x\sim x,\ x\to 0$	$a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0$
$arctgx\sim x,\ x\to 0$	$\lg(1+x)\sim x\lg e,\ x\to 0$
$\cos x\sim\frac{x^2}{2},-x\to 0$	$(1+x)^{\kappa}-1\sim kx,\ x\to 0,\ k>0$

Використовуючи таблицю еквівалентних нескінченно малих функцій, зручно обчислювати границі функцій.

Приклад 8. Знайти а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan^{-1}(x-1)}{x^2-4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{6x}-1}{\sin^{-1}3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\ln(1+2x)}$.

Розв'язання.

а) Оскільки $\sin 2x \sim 2x$, $tg 4x \sim 4x$, при $x \to 0$, то дістанемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}$

б) Оскільки $arctg(x-1) \sim x-1$ при $x \to 1$, то $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan^{-1}(x-1)}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}=$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{2}$

в) Оскільки $3^{6x} \sim 6x\ln 3$, $\arcsin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$,

то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{6x}-1}{\sin^{-1}3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x\ln 3}{3x}=2\ln 3$

г) Оскільки $\cos 5x - \cos 3x = -2\sin 4x \sin x$, $\sin 4x \sim 4x$, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, то дістанемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-8xx}{x^2}=-8$.

д) Оскільки $\sin 7x \sim 7x$, $\ln(1+2x) \sim 2x$ при $x \to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{2x}=\frac{7}{2}$.

ТЕМА 9. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Теоретичні відомості

Функція $y=f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 , якщо:

1) вона визначена в цій точці і в деякому її околі;

2) нескінченно малому приростові аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції: $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$, або $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y=\cos x$ в точці x_0.

Розв'язання.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\cos(x_0+\Delta x)-\cos(x_0)=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\sin\frac{\Delta x}{2}\to 0$; $\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)$ величина обмежена, тому, при $\Delta y \to 0$. Отже, $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$, і тому, за означенням, функція $y=\cos x$ неперервна в точці x_0.

Неперервність функції в точці можна означити і по-іншому.

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо вона має в цій точці границю, яка дорівнює значенню функції в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Рівність можна деталізувати: границя зліва в точці x_0 має дорівнювати границі справа і дорівнювати значенню функції в цій точці: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Арифметичні операції над неперервними функціями приводять знову до неперервних функцій. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є неперервними в точці x_0, тоді неперервними в цій точці будуть також функції:

1) $y_1(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$;

2) $y_2(x) = f(x) \cdot g(x)$;

3) $y_3(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ за додаткової умови $g(x_0) \neq 0$.

Неперервність складеної функції

Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $f(\varphi(x)) = F(x)$ неперервна в точці x_0.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона:

1) обмежена на цьому відрізку;

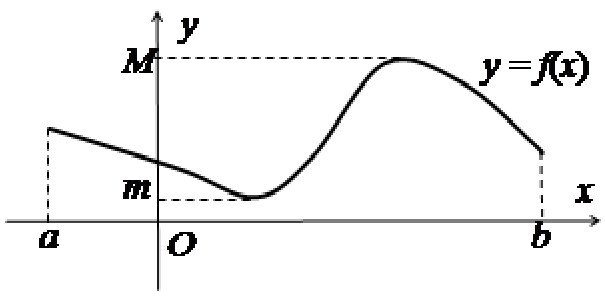


Рис. 1. Неперервна функція

2) досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значень.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $f(a) < C < f(b)$, то всередині відрізка існує принаймні одна точка *c*, в якій функція набуває рівного *C* значення.

$$f(a) < C < f(b) \Rightarrow \exists c \in [a,b],\ f(c) = C.$$

Наслідок. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і в його кінцевих точках набуває різних за знаком значень, то всередині відрізка існує принаймні одна точка, в якій значення функції дорівнює нулю

$$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists x_1 \in [a,b],\ f(x_1)=0\,.$$

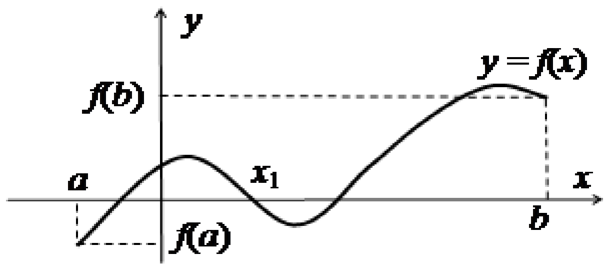


Рис. 2. Неперервна функція на відрізку $[a,b]$

Точки розриву функції та їх класифікація

Якщо функція $y=f(x)$ в точці x_0 не є неперервною, то точка $x=x_0$ називається *точкою розриву* функції.

Зауваження. Елементарна функція не може мати розривів у внутрішніх точках своєї області визначення.

Точки розриву функції можна поділити на види.

Точки розриву першого роду

Точка $x=x_0$ називається *точкою розриву* функції $y=f(x)$ *першого роду*, якщо існують скінченні односторонні границі при $x\to x_0$, але вони не рівні між собою. $\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)=b_1$; $\lim\limits_{x\to x_{0+0}} f(x)=b_2$; $b_1 \neq b_2$, x_0 – точка розриву першого роду.

Приклад. Дослідити на розрив функцію $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$.

Розв'язання. Оскільки $f(-2)$ не існує, то $x=-2$ є точка розриву функції.

Обчислимо односторонні границі функції в точці $x=-2$:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0}\frac{-(x+2)}{x+2}=-1,\qquad \lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0}\frac{x+2}{x+2}=1\,.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -2-0} f(x)$, то точка $x=-2$ є точкою розриву першого роду.

Графік даної функції подано на рисунку:

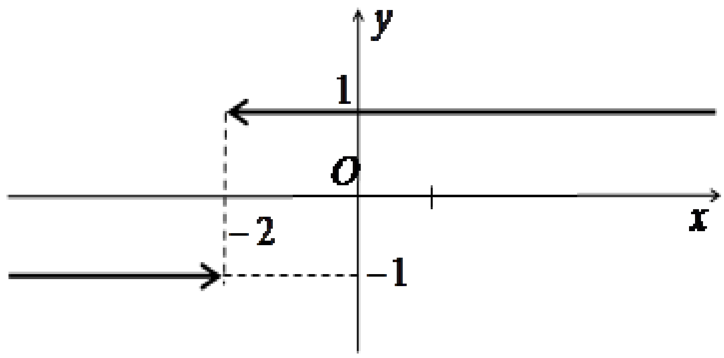


Рис. 3. Точки розриву першого роду.

Точки розриву другого роду

Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву* функції $y = f(x)$ *другого роду*, якщо хоч би одна з односторонніх границь (зліва чи справа) при $x \to x_0$ не існує зокрема, дорівнює нескінченності.

Приклад. Дослідити на розрив функцію $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x = 1$ є точка розриву функції.

Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \text{ (оскільки } x \to 1-0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \to 0\text{);}$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty, \text{ (оскільки } x \to 1+0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty\text{).}$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x)$ не існує, то точка $x = 1$ є точкою розриву другого роду.

Для схематичної побудови графіка функції, окрім односторонніх границь в точці $x = 1$, знайдемо границю при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1 \qquad \text{(оскільки } x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{x-1} \to 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \to 1\text{)}$$

А це означає, що пряма $y = 1$ є одночасно лівою і правою горизонтальною асимптотою.

Графік даної функції подано на рисунку:

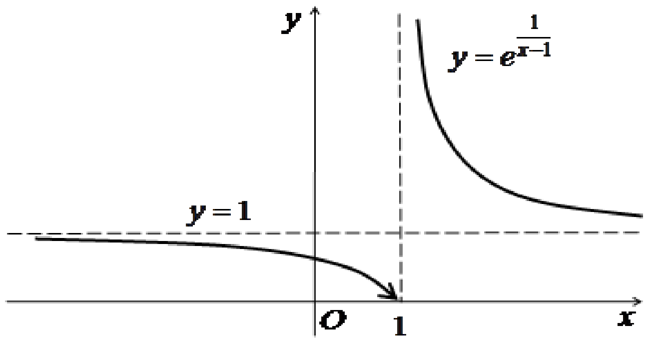


Рис. 4. Точки розриву другого роду

Точки усувного розриву

Точка $x = x_0$ називається *точкою усувного розриву* функції $y = f(x)$, якщо в цій точці виконується умова $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$, але або $b \neq f(a)$, або $f(a)$ не існує.

Приклад. Дослідити на розрив функцію $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Розв'язання. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x = 1$ є точка розриву функції. Обчислимо границі зліва і справа в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} (x+1) = 2$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 2$, то точка $x = 1$ є точкою усувного розриву. Отже маємо: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Схематичний графік зображено на рисунку

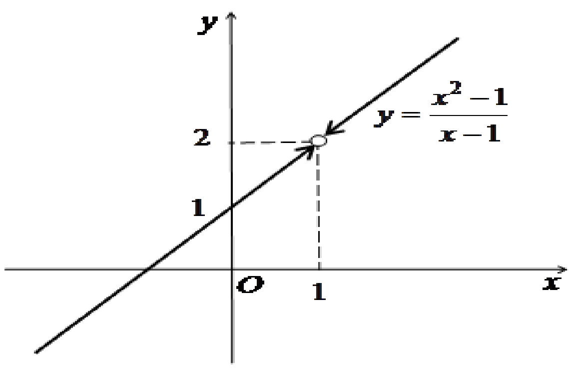


Рис. 5. Усувний розрив функції

Приклад. Дослідити функцію $f(x)=\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ і визначити вид точок розриву, якщо вони є. Зробити схематичний рисунок.

Розв'язання. Дана функція визначена для всіх $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x=1$ є точка розриву функції.

Обчислимо односторонні границі в точці $x=1$:

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=2, \text{ (т. як } x\to1-0\Rightarrow\frac{1}{x-1}\to-\infty\Rightarrow2^{\frac{1}{x-1}}\to0\text{);}$$

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0, \text{ (т. як } \frac{1}{x-1}\to+\infty\Rightarrow2^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty\text{).}$$

Оскільки границі $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)$ існують, проте $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-0}f(x)$, то точка $x=1$ є точкою розриву першого роду.

У точці $x=1$ функція має стрибок, що дорівнює різниці $f(1+0)-f(1-0)=0-2=-2$.

Для схематичної побудови графіка функції знайдемо її границю при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1, \text{ (т. як } x\to\pm\infty\Rightarrow\frac{1}{x-1}\to0\Rightarrow2^{\frac{1}{x-1}}\to1\text{).}$$

А це означає, що пряма $y=1$ є горизонтальною асимптотою.

Схематичний графік даної функції зображено на рисунку

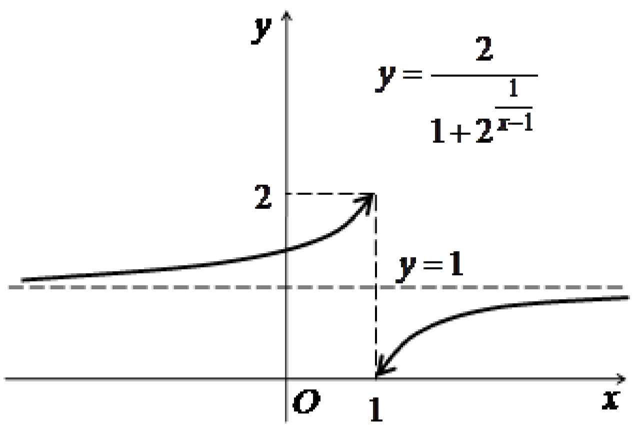


Рис. 6. Усувний розрив

Приклад. Дослідити задану функцію на неперервність і визначити рід точок розриву, якщо вони є. Зробити схематичний рисунок.

$$f(x)=\begin{cases}-x-2, & x<-1,\\ 1-x^2, & -1\le x\le 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$$

***Розв'язання*.** Маємо неелементарну функцію, що неперервна на кожному з інтервалів: $(-\infty,-1), [-1,1], (1,+\infty)$. Очевидно, що вона може бути розривною лише в точках $x=-1$, $x=1$, в яких змінюється аналітичний вираз, що задає функцію. Перевіримо умови неперервності в цих точках.

1) Розглянемо точку $x=-1$. Функція визначена в цій точці і $f(-1)=1-(-1)^2=0$.

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}(-x-2)=-1\,,\ \lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0}\left(1-x^2\right)=0\,.$$

Отже, існують односторонні границі функції в точці $x=-1$, але вони не рівні між собою. А це означає, що дана точка є точкою розриву першого роду.

2) Розглянемо точку $x=1$. Функція визначена в цій точці і $f(1)=1-1^2=0$.

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}\left(1-x^2\right)=0,\ \lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}(x-1)=0\,.$$

Отже, існують односторонні границі функції в точці $x=1$, вони рівні між собою і дорівнюють значенню функції в цій точці: $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=f(1)$. Це означає, що в даній точці функція неперервна.

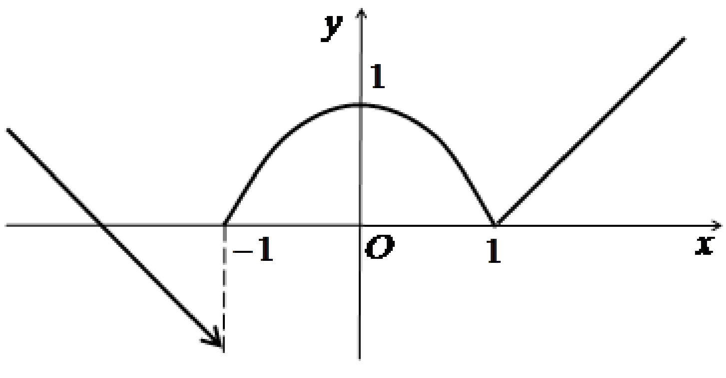


Рис. 7. Схематичне зображення функції.

ТЕМА 10. ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ, ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ

Наведемо основні правила, що найчастіше використовуються обчислюючи похідні.

Нехай C – стала величина, а u(x) і v(x) – функції, які мають похідні в точці x, тоді:

1. $C' = 0$;
2. $(C\,f(x))' = C\,(f(x))'$;
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
4. $(u\,v)' = u'v + u\,v'$;
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$
6. $(f(u(x)))' = f'(u) \cdot u'(x)'$, де $(f(u(x)))'$ − складена функція від x.

Таблиця похідних

1. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$
2. $x' = 1$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
6. $(\ln x) = \frac{1}{x}$;
7. $(\cos x)' = -\sin x'$;
8. $(\sin x)' = \cos x'$;
9. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(ctgx)' = \frac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
14. $(arcctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

Приклад 1. Знайти похідні функції а) $y = 4x^3 - 2x + 6$;

б) $5\sqrt[4]{x^5}\, x + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{3}{x^4}$; в) $y = (\sin x - 1)\cdot(x^2 - 5)$; г) $y = \frac{x^7}{\cos x}$.

Розв'язання. а) Скориставшись правилами диференціювання 1, 2, 3 і табличною формулою 1, будемо мати:

$$(y)' = 4x^3 - 2x + 6 = (4x^3)' - (2x)' + 6' =$$

$$= 4(x^3)' - 2(x)' + 0 = 4 \times 3x^2 - 2 = 12x^2 - 2.$$

б) Обчислюючи похідну, доцільно всі корені записати у вигляді степеневої функції:

$$y = 5x^{\frac{5}{4}} + (2x)^{\frac{-1}{2}} - 3X^{-4},$$

$$y' = (5x^{\frac{5}{4}})' + ((2x)^{\frac{-1}{2}})' - (3X^{-4})' =$$

$$= 5\,\frac{5}{4}\,X^{\frac{5}{4}-1} + 2\,(-\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} - 3(-4)x^{-4-1} = \frac{25}{4}\,x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{-3}{2}} + 12x^{-5}.$$

в) Скористаємось формулою похідної добутку $(u\,v)' = u'v + uv'$.

$$(y)' = (\sin x - 1)' \cdot (x^2 - 5) + (\sin x - 1)\cdot(x^2 - 5)' =$$

$$= \cos x\,(x^2 - 5) + 2x(\sin x - 1)$$

г) Для знаходження похідної даної функції $y = \frac{x^7}{\cos x}$ скористаємось правилом диференціювання частки $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

Маємо

$$(y)' = (\frac{x^7}{\cos x})' = \frac{(x^7)'\cos X - x^7(\cos X)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{7x^6\cos X + x^7(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{7x^6\cos X + x^7\sin x}{(\cos x)^2}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функцій:

а) $y = \sin(4x + 5)$; б) $\sin\, 2\, y = \sin^2 x$; в) $y = \arccos\sqrt{x}$.

Розв'язання.

а) Дана функція є складеною, а саме: $y = \sin(u)$, де $u = 4x + 5$; $y'_u = \cos u$, $u_x{}' = 4$.

Використовуючи правило 6 маємо: $y' = \cos u \cdot 4 = 4\cos(4x + 5)$.

б) Ця функція sin 2 y $=\sin^2 x$ є також складеною.

Останньою дією є піднесення до квадрату. Отже $y = u^2$, де $u = \sin x$.

Тоді $(y)' = 2u\, u' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cdot \cos x = \sin 2x$.

в) $y = \arccos\sqrt{x}$: $(y)' = \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}(\sqrt{x})' = \frac{-1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

Щоб продиференціювати неявно задану функцію F(x, y) = 0, потрібно взяти похідну по *x* від обох частин рівності, вважаючи *y* функцією від *x*, і одержане рівняння розв'язати відносно *y*′. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну *x* і саму функцію *y*.

Приклад 3. Знайти похідну y′(x) функцій заданих неявно:

а) $x^3 - e^y - x^3 \ln y = 6$; б) $x^2\cos y + y^2\sin x + 3x - 2y + 2 = 0$.

Розв'язання. а) Продиференціюємо почленно задане рівняння, пам'ятаючи, що y є функцією змінної x: $x^3 - e^y - x^3 \ln y = 6$

$$3x^2 + e^y y' - 3x^2 \ln y - x^3\frac{1}{y}\cdot y' = 0.$$

Виразимо з цього рівняння y′. $e^y y' - x^3\frac{1}{y}\cdot y' = 3x^2 \ln y - 3x^2$;

$$(e^y - x^3\frac{1}{y})\cdot y' = 3x^2(\ln y - 1);\quad y' = \frac{3x^2 y(\ln y - 1);}{ye^y - x^3}$$

б) Диференціюємо задане рівняння $x^2\cos y + y^2\sin x + 3x - 2y + 2 = 0$ по змінній x, вважаючи y = y(x),

$$2x\cos y - x^2\sin y\, y' + 2y\, y'\sin x + y^2\cos x + 3 - 2y' = 0$$

Виразимо з цього рівняння y′

$$(2y\sin x - x^2\sin y - 2)\cdot y' = -2x\cos y - y^2\cos x - 3.$$

$$y' = \frac{-2x\cos y - y^2\cos x - 3}{2y\sin x - x^2\sin y - 2}.$$

Якщо функція y від x задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t\ T,$$

то похідна $\frac{dy}{dx}$ визначається теж параметричними рівняннями, а саме:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \end{cases} \quad x = x'(t) \quad \text{за умови, що } y'(t),\ x'(t) \text{ існують і } x'(t) \neq 0.$$

Приклад 4. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої параметричними рівняннями

$$x = 3\,(t - \cos t)$$

$$y = 3\,(1 - \sin t),$$

Розв'язання $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3\,(1-\sin t)'}{3\,(t-\cos t)'} = \frac{-\cos t}{(1+\sin t)}.$

Логарифмічною похідною функції $y = y(x)$ називають похідну від логарифма цієї функції, тобто $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, $y' = y(\ln y)'$. Застосування попереднього логарифмування іноді спрощує обчислення, оскільки $y' = y(\ln y)$.

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \sqrt[3]{\frac{x^2\,(x+1)}{x-3}}$.

Розв'язання. Логарифмуючи задану рівність, дістанемо:

$$\ln y = \frac{1}{3}\,(2\ln x + \ln(x+1) - \ln(x-3)).$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}\Big) = \frac{2}{3}\,\frac{x^2-4x-3}{x(x+1)(x-3)}$$

Звідки $y' = y(\ln y)' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2\,(x+1)}{x-3}}\;\frac{x^2-4x-3}{x(x+1)(x-3)} =$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{x^2-4x-3}{\sqrt[3]{x(x+1)(x-3)^4}}.$$

Зауважимо, що похідна від функції $f(x)$ називається похідною першого порядку. Похідна від першої похідної функції $f'(x)$ називається похідною другого порядку і позначається $f''(x)$ і т.д.

Приклад 6. Знайти похідну другого порядку функції $f(x) = \sin 3x$

Розв'язання. Знаходимо першу похідну

$$f'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x.$$

Від цієї функції ще раз візьмемо похідну

$$f''(x) = (3\cos 3x)' = -9\sin 3x$$

ТЕМА 11. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЇ

Дослідження функцій методами диференціального числення та побудова їх графіків.

Актуальним та перспективним є використання апарату диференціального числення при дослідженні різноманітних функцій з кінцевою метою побудови їх графіків. Ця схема досліджень базується на послідовному використанні наступних кроків алгоритму:

1) знайти область визначення функції, тобто вказати такі значення аргументу досліджуваної функції, при яких існують значення функції (точки кривої графіка).

2) Знайти точки перетину графіка функції з координатними осями. Такі точки графіка дозволяють правильно орієнтуватись на кінцевому етапі досліджень, зокрема, при побудові графіка кривої.

3) Дослідити функцію на парність та непарність, періодичність. Даний пункт досліджень може бути використаний також при побудові графіка: для парної функції (умова парності $f(-x) = f(x)$) її графік симетричний відносно осі OY, для непарної (умова непарності $f(-x) = -f(x)$) – графік симетричний відносно початку координат.

Властивість періодичності, яка характерна лише для тригонометричних функцій, також може бути використана аналогічно: при наявності періоду функція досліджується тільки на періоді (умова періодичності функції з періодом $T > 0 : f(x + T) = f(x)$).

4) Знайти точки розриву функції. Дані точки використовують при побудові вертикальних асимптот графіка функції.

5) Знайти інтервали монотонності, точки екстремуму та значення функції в цих точках. Даний пункт досліджень є найважливішим при побудові графіка функції, він базується на обчисленні та застосуванні результатів першої похідної функції. Необхідна умова екстремуму: $f'(x) = 0$. Достатня умова екстремуму: якщо при переході через підозрілу на екстремум точку перша похідна змінює свій знак з плюса на мінус, то це точка максимуму, якщо – з мінуса на плюс, то це точка мінімуму. Необхідна та достатня умова зростання функції на деякому інтервалі $(a; b)$ – додатній знак першої похідної, умова спадання – від’ємний знак першої похідної.

6) Знайти інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину. Даний пункт уточнює поведінку графіка функції. Він базується на обчисленні та застосуванні результатів другої похідної досліджуваної функції.

Необхідна умова екстремуму: $f''(x) = 0$. Достатня умова перегину: якщо при переході через підозрілу на перегин точку друга похідна функції змінює свій знак, то це є точка перегину. Необхідна та достатня умова опуклості функції на деякому інтервалі $(a; b)$ – від’ємний знак другої похідної, а для вгнутості – додатній знак другої похідної.

7) Знайти асимптоти кривої. Даний пункт є важливим при побудові графіка функції. Розрізняють три види асимптот: вертикальні, похилі (права та ліва),

горизонтальні. Рівняння вертикальної асимптоти: x = C, C − const. Рівняння похилої асимптоти y = kx + b, де $k=\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm 0}(f(x)kx)$).

Якщо в рівнянні похилої асимптоти k=0, то відповідна похила асимптота стане горизонтальною.

8) Використовуючи результати дослідження, побудувати графік функції.

Приклад 1. Виконати повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$y=\frac{x^2}{2(x-1)}.$$

1) Область визначення функції. У дробовій функції знаменник повинен приймати додатні значення. З цієї умови маємо: x–1 ≠0, тобто маємо два інтервали визначеності функції: x € (–∞; 1) ᴗ (1; + ∞).

2) Знайдемо точки перетину графіка з осями координат при x= 0, y =0.

Графік заданої функції перетинає осі координат в точці (0; 0).

3) Дослідити функцію на парність та непарність, періодичність. Підставимо від'ємний аргумент та перевіримо, що отримаємо:

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=\frac{x^2}{-2(x+1)}\neq y(x),$$

функція не є парною, ні непарна очевидно, що функція не періодична.

4) Знайти точки розриву функції. Дані точки використовують при побудові вертикальних асимптот графіка функції. Похідна функції за правилом частки рівна:

$$y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{2(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}$$

Прирівняємо похідну до нуля $y'=0$, знаходимо точки підозрілі на екстремум: $x(x-2)=0$, звідси $x_{1,}=0$, $x_2=2$ – маємо критичні точки.

5) Інтервали зростання та спадання, точки *max* і *min* функції. Вибираємо довільні точки з області визначення, що лежать між критичними точками та перевіряємо знак похідної:

$$y'(-1)>0;\ y'(0{,}5)<0\ ;\ y'(1{,}5)<0;\ y'(3)>0,$$

Важливо у даному випадку визначити знак похідної, що дає можливість визначити досягає функція максимуму чи мінімуму у критичній точці.

y = y (0) = 0 – локальний максимум функції;
y = y (2) = 2 – локальний мінімум функції.

Систематизуємо дані у вигляді таблиці

	(–∞; 0)	0	(0;1)	1	(1;2)	2	(2;+∞)
y′	+	0	-		-	0	+
y	зростає	0	спадає		спадає	2	зростає

6) Знаходимо інтервали опуклості, вгнутості, точки перегину. Необхідна умова екстремуму: $f''(x) = 0$

$$y'' = \left(\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}\right)' = \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Похідна $y'' \neq 0$ і не існує при $x = 1$. Точка $x = 1$ ділить область визначення функції на два інтервали: $(-\infty; 1)$ та $(1; +\infty)$.

Маємо: якщо $x \in (-\infty; 1)$, то $y'' < 0$ – крива опукла; якщо $x \in (1; +\infty)$, то $y'' > 0$ – крива вгнута. Точок перегину немає.

Знаходимо асимптоти графіка функції. Оскільки $x = 1$ точка розриву функції, то пряма $x = 1$ – вертикальна асимптота кривої. Перевіримо, чи має ця функція похилі асимптоти.

Вертикальну асимптоту маємо з умови, що границя в точці рівна нескінченності: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{2(x-1)} = \frac{1}{2(1-1)} = \frac{1}{0} = +\infty$.

Таким чином x=1 вертикальна асимптома.

Похилу асимптоту $y = kx + b$ отримаємо після обчислення границь при змінній прямуючій до безмежності:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} == \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2(1-1/x)} = \frac{1}{2(1-0)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+x}{2(x-1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2(x-1)}\right) = \frac{1}{2}.$$

Кінцеве рівняння похилої асимптоми $y = (x + 1)/2$. удємо графік функції.

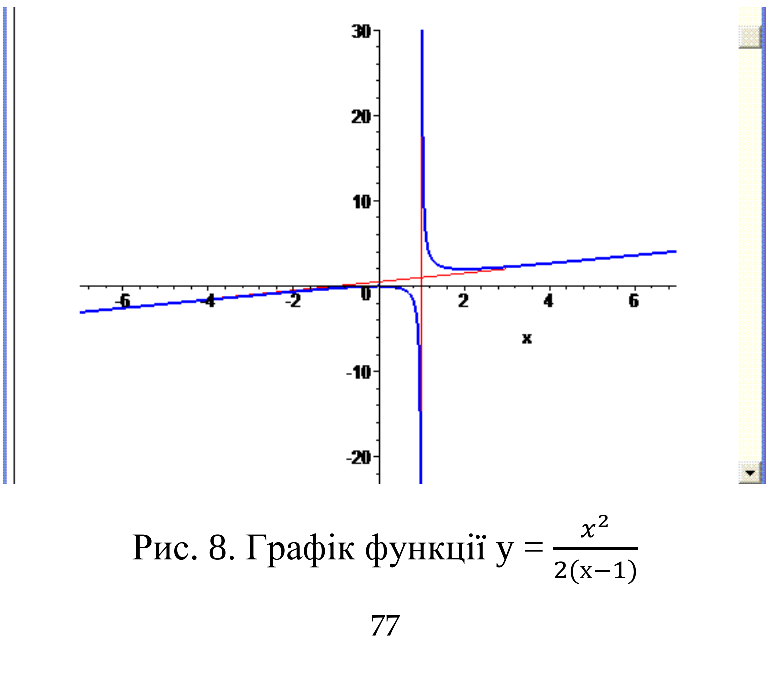


Рис. 8. Графік функції $y = \frac{x^2}{2(x-1)}$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Тема 1. Матриці. Дії над матрицями

I.1. Обчислити:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -2 & 5 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

I.2. Виконати дії:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 12 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -7 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & -7 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 5 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

I.3. Обчислити:

1) $-3\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $4\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; 4) $5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;

5) $-2\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ -3 & -6 & 0 \\ 15 & -18 & 3 \end{pmatrix}$.

I.4. Виконати дії:

1) $2\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 10 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

Знайти елементи матриці D = A – BC + A + n· E 2 –1 (n – номер варіанта, E – одинична матриця).

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ n & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} n & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} n & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 4 & n & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ n & 4 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ n & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} n & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ n & 4 & -1 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 4 & n & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} n & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Тема 2. Визначники другого та третього порядків

1. Знайти значення параметра а, при якому визначник дорівнює нулю (n – номер варіанта).

1. $\begin{vmatrix} \mathrm{a} & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & n \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{a} & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & n & 4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & \mathrm{a} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & n \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & n \\ 2 & 3 & 4 \\ \mathrm{a} & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} \mathrm{a} & 1 & 2 \\ 3 & n & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & n & 5 \\ 2 & 1 & \mathrm{a} \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

2. Обчислити визначник третього порядку:

а) за правилом трикутника;

б) за допомогою розкладання його за елементами: а) першого рядка; б) третього стовпця; (n – номер варіанта).

1. $\begin{vmatrix} n & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & n \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ = 1 & 3 \\ 0 & n \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & n \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & n \end{vmatrix}.$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & n \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & n & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & n \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & n \\ -4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 0 & n \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ n & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ n & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & n & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ n & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & n \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ n & 3 & 6 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 2 & n & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & n \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 9 & n & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Тема 3. Розв′язування системи лінійних рівнянь

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера, матричним та методом Гаусса (n – номер варіанта).

1. A=$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ B =$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. A=$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ n & 1 & -6 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ B =$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$

3. A=$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & n \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ B =$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

4. A= $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & n \end{pmatrix}$ B =$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

5. A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & n & 7 \end{pmatrix}$ B =$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$

6. A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & n & 7 \end{pmatrix}$ B =$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тема 4. Вектори і операції над ними

1. Задано вектори:

$\bar{a} = m_1\overline{e_1} + (m+1)\overline{e_2} + (m+2)\,\overline{e_3}$;

$\bar{b} = n\,\overline{e_2} + (n+1)\,\overline{e_3}$;

$c = \overline{e_2} + n\overline{e_3}$, $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$; .

Перевірити, чи вектори a, b, c є лінійно незалежними. Якщо вектори a, b, c є лінійно незалежними, знайти координати вектора: $d = n\bar{e} - e_2 + e_3$ в базисі a, b, c. (Число m =1, 2, ..., 6 – задається викладачем, n - номер варіанта).

2. Задано вершини піраміди своїми координатами в ортонормованому базисі: $A_1(x_1, y_1, z_1)$; $A_2(x_2, y_2, z_2)$; $A_3(x_3, y_3, z_3)$; $A_4(x_4, y_4, z_4)$.

Знайти:

1. Довжину ребра A_1A_2;
2. Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;
3. Площу грані $A_1A_2A_3$;
4. Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
5. Рівняння площини$A_1A_2A_3$;
6. Рівняння площини, що проходить через точки A_1A_4, перпендикулярно до площини $A_1A_2A_3$;
7. Рівняння висоти, опущеної з точкиA_4 на площину грані $A_1A_2A_3$;
8. Координати точки A_5, що симетрична точці A_4(відносно грані $A_1A_2A_3$;
9. Рівняння площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_4.

Координати точок визначати таким чином:

1. A_1 (1, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (1, n, n).
2. A_1 (2, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (n, 2, n).
3. A_1 (3, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (n, n, 3).
4. A_1 (4, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (1, n, n).
5. A_1 (5, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (n, 2, n).
6. A_1 (6, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (n, 1, n).

Тема 5. Пряма на площині

Скласти рівняння прямих, що проходять через точку перетину прямих: $nx - (n+1)y + 1 = 0$, $(n+1)x - y - 2 = 0$ паралельно та перпендикулярно прямій: $y = \frac{1}{m+1}x + 1$. (Число m =1, 2, ..., 6 – задається викладачем, n – номер варіанта.

Тема 6. Рівняння площини

Задано вершини піраміди своїми координатами в ортонормованому базисі:

$$A_1\ (x_1, y_{1,}\ z_1)\ ;\ A_2\ (x_2, y_{2,}\ z_2);\ \ A_3\ (x_3, y_{3,}\ z_3)\ ;\ \ A_4(x_4, y_{4,}\ z_4).$$

Знайти:

1. Довжину ребра A_1A_2.

2. Кут між ребрами A_1A_2 та $A_1\ A_3$.

3. Площу грані $A_1\ A_2\ A_3$.

4. Об'єм піраміди $A_1\ A_2\ A_3A_4$.

5. Рівняння площини$A_1\ A_2\ A_3$.

6. Рівняння площини, що проходить через точки A_1A_4, перпендикулярно до площини $A_1\ A_2\ \ A_3$.

7. Рівняння висоти, опущеної з точкиA_4 на площину грані $A_1\ A_2\ A_3$.

8. Координати точки A_5, що симетрична точці A_4 відносно грані $A_1\ A_2\ A_3$.

9. Рівняння площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої $A_1\ A_4$.

Координати точок визначати таким чином:

1. A_1 (1, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (1, n, n).

2. A_1 (2, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (n, 2, n).

3. A_1 (3, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (n, n, 3).

4. A_1 (4, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (1, n, n).

5. A_1 (5, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (n, 2, n).

6. A_1 (6, n, 0); A_2 (0, n, 0); A_3 (n, 0, 0) n; A_4 (n, 1, n).

Тема 7. Функції та їх властивості

Дослідити функцію, визначивши:

а) область визначення функції;

б) область значень функції;

в) точки перетину осей координат графіком функції;

г) нулі функції:

1.	$y=\frac{x}{x+1}$;	$y=\frac{1}{2}\sin(3x+1)$.
2.	$y=\frac{x-1}{x+1}$;	$y=2\sin(2x+1)$.
3.	$y=\frac{x+3}{x-1}$;	$y=1+\sin(3x+2)$.
4.	$y=\frac{x-2}{x+2}$;	$y=3\sin(2x)$.
5.	$y=\frac{x-3}{x+1}$;	$y=3\sin(2x+1)$.
6.	$y=\frac{x}{x+4}$;	$y=5\sin(\frac{x}{2}+1)$.
7.	$y=\frac{x}{2x+1}$;	$y=1{,}5\cos(2x)$.
8.	$y=\frac{-x}{x+3}$;	$y=2\cos(\frac{x}{2}+1)$.
9.	$y=\frac{1-x}{x-2}$;	$y=2\cos(\frac{x}{3})$.
10.	$y=\frac{2x}{x+2}$;	$y=-3\cos(2x+1)$.
11.	$y=\frac{-3x}{x+1}$;	$y=2\cos(\frac{x}{3}+2)$.
12.	$y=\frac{2-x}{3x-1}$;	$y=\sin(2x+1)$.
13.	$y=\frac{x}{3x+2}$;	$y=-5\sin(\frac{x}{2}+1)$.
14.	$y=\frac{-3x}{2x+4}$;	$y=3\sin(\frac{x}{3}+3)$.
15.	$y=\frac{3+x}{4-x}$;	$y=\cos(\frac{x}{3}+1)$.

16.	$y=\dfrac{x}{3x-2}$;	$y=\sin(\dfrac{2x}{3}+1)$.
17.	$y=\dfrac{-3x}{2x+1}$;	$y=\cos(\dfrac{x}{2}+2)$.
18.	$y=\dfrac{2x+1}{3x-4}$;	$y=2\cos(3x+2)$.
19.	$y=\dfrac{x-2}{3x+1}$;	$y=-3\sin(2x+1)$.
20.	$y=\dfrac{3x-1}{2x+4}$;	$y=2\cos(2x+3)$.
21.	$y=\dfrac{2-3x}{2x+3}$;	$y=-4\cos(\dfrac{x}{3}+4)$.
22.	$y=\dfrac{x-2}{3x+1}$;	$y=-3\cos(\dfrac{x}{2}+2)$.
23.	$y=\dfrac{1+x}{4x-2}$;	$y=\sin(\dfrac{x}{2}+1)$.
24.	$y=\dfrac{2-x}{2x+3}$;	$y=5\cos(\dfrac{x}{2}+2)$.
25.	$y=\dfrac{2x}{x+5}$;	$y=-3\sin(\dfrac{x}{3}-1)$.
26.	$y=\dfrac{x-4}{2x+5}$;	$y=-5\sin(\dfrac{x}{3}+2)$.
27.	$y=\dfrac{3x}{5x-1}$;	$y=5\sin(3x+2)$.
28.	$y=\dfrac{2x}{x+2}$;	$y=\dfrac{1}{3}\cos(3x+2)$.
29.	$y=\dfrac{2x-1}{x+2}$;	$y=3\sin(2x+1)$.
30.	$y=\dfrac{2x-3}{x+1}$;	$y=1+\cos(3x+1)$.

Тема 8. Границя функції

Знайти границю функції

1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+3x^2-4}{\sqrt{9x^6+4x}}$	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x}{x^3+x^2-x-1}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{5x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}5x}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-5^{2x}}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+2x}\right)$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x}{x+1}-2x\right)$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$
	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}x\left[\ln x-\ln(x+1)\right]$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}$	$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{x+1}{3x-3}}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^8+3x+4}}{3x^4-2}\right)$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\cdot\ln\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)$	$\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{3x}{x-2}}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x+3}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x-4}\right)^{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x-2}\right)$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{3x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-8}+x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}}{\ln(1+2x)}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{3x}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)\ln\dfrac{x}{x+1}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2-\right.$	$\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\frac{x}{3x+3}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{\operatorname{arctg}^2 2x}$

5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-8}+x}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{3x}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-1}{4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-1}{\ln(1+2x)}$
	$\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\frac{x}{3x+3}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+3x+1}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{\sqrt{4x^4+5x^3}}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-8}$	$\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{2x}{x-2}}$
	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2(x/3)}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^x$
	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x-2)-\ln x\right]$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x+3}{x^4-12x+1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{2x^2}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to -2}(3+x)^{\frac{3x}{x+2}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32x^5-x^8}}{e^{5x}-1}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{2x}$
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{9x^2-x+3}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{6x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$	$\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\frac{x-1}{x+1}}$
	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln x-\ln(4x-3)\right]$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\mathrm{arctg}\,3x}{\ln(1-2x)}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^3-8}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^2}{3x^4+1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{5x^2}$

	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{3x+2}{x-1}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{2x}$
	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x+\sin 5x}{x}$
10	$\lim\limits_{x\to0}\frac{7^x-1}{4x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+5x-6}{x^3-x}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$
	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{\mathrm{tg}^2 2x}$	$\lim\limits_{x\to-3}(4+x)^{\frac{x-2}{x+3}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{x+5}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{e^{3x}-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2+3x}\right)$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+x}\right)$
	$\lim\limits_{x\to0}\frac{8^x-1}{5x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-2}{\sqrt{2-x}-1}$
	$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{3x+2}{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{\ln(1+3x)}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{-4x}$
12	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+5}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{6^x-1}{4x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{3x-3}$
	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-1}{x\sin x}$	$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{3x+4}{x-1}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}\, 3x}{e^{7x}-1}$
	$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x^3}-\frac{1}{x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4}{2x-1}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-\sqrt{4x^2+2x+5}\right)$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+4}{4x^3+3x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{9^x-1}{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-1}\right)$
	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{16x^4-x^8}}{e^{8x}-1}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{2x-4}$	$\lim\limits_{x\to0}(x+1)^{\frac{2x-3}{x}}$
	$\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2+4x-5}{x^2+5x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$

14	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{4x+3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{2^x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 2x}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x}$	$\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5x-3}{x-2}}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+4x+5}$
	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{e^{\sin x}-1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(2x-3)-\ln(x+1)\right]$
15	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x-1}-1}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-1}{8x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1}$
	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(3x+5)-\ln 3x\right]$
16	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-3x+1}{2x^5+3x^4+1}$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x+4}{x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{5-x}-2}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3\sin^2 2x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{5x}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{4-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)$
17	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+1}{2x+\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^3+x^2-2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 10x}{\sin^2 2x}$
	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{10-x}-3}{2x-2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 3x}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x-\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$
18	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x-6}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sqrt{x+4}-2}$

	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{5x}$
	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{2}{\sin x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\operatorname{arctg}3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$
19	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+14}+x}{3x+5}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(3x+2)-\ln x\right]$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$
	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^3-3x^2-50}$	$\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{4-\sqrt[3]{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x^2)}{5x}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{\sin^2(x/4)}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{1-\cos x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{x-1}$
20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^2x}{5x^3+2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln x^2-\ln(x-1)\right]$
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{\sin 4x}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-1}{3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-1}{\arcsin 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^{2x-1}$
21	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-\sqrt{3x}}{x-3}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{\operatorname{tg}x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 6x}-1}{2x}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{3}{x-1}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)$
22	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+2}}{4x+1}$	$\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{\sin 2x}$
	$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{2^x-1}$

	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+6\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(6x-1)\left[\ln x-\ln(x-2)\right]$
23	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{3x},\ a>0,\ a\neq1$	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-2x-15}{x^2+3x}$
	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-5x)}{6x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{3\sin^2 2x}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$
	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{2x^2+x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)$
24	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3+2}{\sqrt{4x^8+2x^2+4}}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos6x}{3\,\mathrm{tg}^2x}$
	$\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-2x-8}{x^3-16x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+3x)}{\sin2x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{e^{x-1}-1}$
	$\lim\limits_{x\to3}(4-x)^{\frac{2}{x-3}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x}\right)^{2x+1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3}\right)$
25	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x+1}{3x^3+2x-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^2-3x}{2x^2-9x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{e^{x^2}-1}$
	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos3x}{1-\cos x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{2x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{3^x-1}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-5}\right)$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{2-x}$	$\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{\frac{3}{x+1}}$
26	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x+1}{\sqrt{x^4-x+2}}$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x^3+1}$
	$\lim\limits_{x\to-2}(3+x)^{\frac{5}{x+2}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin2x}{\sin3x+\sin7x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{2x-2}$
	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{x-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-3x)}{\mathrm{tg}\,4x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-5}\right)$
27	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x^2+3x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}\right)$

	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 7x}{3\sin^2 2x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{x^3-1}$	$\lim\limits_{x\to -3}(4+x)^{\frac{6}{x+3}}$
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\mathrm{tg}\,\pi x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sin\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{2x}$
28	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x-3}}{x+2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6}\right)$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{\sin^2 3x}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{x^3-8}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3x+6}{x}}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,x}-1}{x(x-1)}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{8^x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{x+4}$
29	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2+2x}{3x+1}\right)$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{x^2-3x}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\mathrm{arctg}\,x^2}$	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi-x}{\mathrm{tg}\,2x}$
	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{6^x-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x}-\sqrt{x^2-8}\right)$
30	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{\sqrt{x^2+x-1}}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+6\sqrt{x}}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$
	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2\sin^2 x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{\mathrm{arctg}\,x^2}$

Тема 9. Неперервність функції

Дослідити функцію на неперервність, змінити характер її точок розриву.

1.	$y=\dfrac{-6}{(x+3)^2};$	$y=e^{\frac{x}{x+2}};$	$y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x-2};$	$y=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x\le 1, \\ 2x, & x>1. \end{cases}$
2.	$y=\dfrac{3}{(x+1)^3};$	$y=2^{\frac{2x}{3-x}};$	$y=\dfrac{x^2-9}{x-3};$	$y=\begin{cases} x+2, & x\le -1, \\ x^2+1, & -1<x\le 1, \\ 3-x, & x>1. \end{cases}$
3.	$y=\dfrac{5}{(x-2)^4}$	$y=3^{\frac{1}{2x+1}};$	$y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}+3;$	$y=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ -(x-1)^2, & 0\le x\le 2, \\ x-3, & x>2. \end{cases}$
4.	$y=\dfrac{2}{x-1};$	$y=e^{\frac{x+1}{x-2}};$	$y=\dfrac{x^2-4}{x+2};$	$y=\begin{cases} \cos x, & x\le 0, \\ x^2+1, & 0<x\le 1, \\ x, & x>1. \end{cases}$
5.	$y=\dfrac{-2}{(x-3)^2}$	$y=4^{\frac{2x}{x-1}};$	$y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1};$	$y=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x\le 2, \\ x+1, & x>2. \end{cases}$
6.	$y=\dfrac{3}{(x-3)^3};$	$y=5^{\frac{2x+1}{x-3}};$	$y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x-1};$	$y=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x\le \pi, \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$
7.	$y=\dfrac{4}{(x+1)^5};$	$y=2^{\frac{1}{2x+2}};$	$y=\dfrac{x^2+x-6}{x+2};$	$y=\begin{cases} -(x+1), & x\le 0, \\ (x-1)^2, & 0<x\le 1, \\ x-1, & x>1. \end{cases}$
8.	$y=\dfrac{-3}{(x+5)^2}$	$y=3^{\frac{1}{2-2x}}$	$y=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x+1};$	$y=\begin{cases} -x^2, & x\le 0, \\ \operatorname{tg}x, & 0<x\le \pi/4, \\ 2, & x>\pi/4. \end{cases}$
9.	$y=\dfrac{-2}{x-4};$	$y=e^{\frac{1}{6-3x}}$	$y=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4};$	$y=\begin{cases} -2x, & x\le 0, \\ \sqrt{x}, & 0<x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$
10.	$y=\dfrac{-5}{(x+3)^3}$	$y=6^{\frac{4+x}{3-x}};$	$y=\dfrac{x^3-1}{x-1}+2;$	$y=\begin{cases} -2x, & x\le 0, \\ \sqrt{x}, & 0<x\le 4, \\ 1, & x>4. \end{cases}$

11.	$y=\dfrac{1}{(x-5)^4}$	$y=2^{\frac{1}{4-2x}}$;	$y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x-2}$;	$y=\begin{cases}\sin x, & x\le 0,\\ 0.5x, & 0<x\le 2,\\ 3, & x>2.\end{cases}$
12.	$y=\dfrac{2}{(x-4)^5}$;	$y=5^{\frac{1+2x}{1-x}}$;	$y=\dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$;	$y=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ -2x+3, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$
13.	$y=\dfrac{4}{x+2}$;	$y=4^{\frac{1}{3-3x}}$;	$y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$;	$y=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1,\\ 2x, & 1<x\le 3,\\ x+2, & x>3.\end{cases}$
14.	$y=\dfrac{-1}{(x-4)^2}$;	$y=3^{\frac{3x}{2-x}}$;	$y=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x+2}$;	$y=\begin{cases}-x, & x\le -1,\\ 2-x^2, & -1<x\le 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$
15.	$y=\dfrac{3}{(x+4)^3}$;	$y=e^{\frac{1+2x}{3-x}}$;	$y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$;	$y=\begin{cases}x-3, & x\le 0,\\ x+1, & 0<x\le 4,\\ 3+\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$
16.	$y=\dfrac{-6}{(x+1)^4}$;	$y=2^{\frac{1+x}{x-3}}$;	$y=\dfrac{x^3+8}{x+2}$;	$y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$
17.	$y=\dfrac{5}{(x-1)^5}$;	$y=7^{\frac{1-x}{x-2}}$;	$y=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$;	$y=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$
18.	$y=\dfrac{2+x}{(x-6)^2}$;	$y=9^{\frac{1+2x}{1-x}}$;	$y=\dfrac{x^3+1}{x+1}$;	$y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$
19.	$y=\dfrac{6+x}{(x-3)^2}$;	$y=e^{\frac{1}{8-4x}}$;	$y=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$;	$y=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$
20.	$y=\dfrac{7}{(x+1)^3}$;	$y=4^{\frac{1}{2x+2}}$;	$y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{2}$;	$y=\begin{cases}\cos x, & x\le \pi/2,\\ 0, & \pi/2<x\le \pi,\\ x, & x>\pi.\end{cases}$
21.	$y=\dfrac{4-x}{(x+5)^2}$;	$y=7^{\frac{4x}{x+1}}$;	$y=\dfrac{x^3-8}{x-2}$;	$y=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\pi/2,\\ x, & x\ge \pi/2.\end{cases}$

22.	$y=\dfrac{3}{(x+6)^3};$	$y=10^{\frac{4-x}{x+2}};$	$y=\dfrac{x^2-x-12}{x+3};$	$y=\begin{cases}3x+1, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$
23.	$y=\dfrac{-7+x}{(x-2)^4};$	$y=9^{\frac{1+3x}{x-3}};$	$y=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{1-x};$	$y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$
24.	$y=\dfrac{6}{(x-4)^5};$	$y=3^{\frac{5-x}{1-x}};$	$y=\dfrac{x^3-x}{x-1};$	$y=\begin{cases}2, & x\le -\pi/4,\\ \operatorname{tg}x, & -\pi/4<x<0,\\ 3x, & x\ge 0.\end{cases}$
25.	$y=\dfrac{-2-x}{(x+1)^2};$	$y=6^{\frac{1}{2x+2}};$	$y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2};$	$y=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \sqrt{x+2}, & -2\le x<2,\\ x+1, & x\ge 2.\end{cases}$
26.	$y=\dfrac{3x+3}{x-2};$	$y=2^{\frac{2x}{3-3x}};$	$y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2}{x+3};$	$y=\begin{cases}-0.5x, & x<-2,\\ x^2+1, & 0\le x<1,\\ 2, & x\ge 1.\end{cases}$
27.	$y=\dfrac{2x}{(x-7)^2};$	$y=5^{\frac{1}{4-2x}};$	$y=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1};$	$y=\begin{cases}x-2, & x<-1,\\ -x^2, & -1\le x<1,\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$
28.	$y=\dfrac{-3}{(2x+6)^3};$	$y=4^{\frac{3x}{3+x}};$	$y=\dfrac{x^3-4x}{x-2};$	$y=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ -\cos x, & 0<x\le \pi,\\ 3, & x>\pi.\end{cases}$
29.	$y=\dfrac{-5}{(x+7)^4};$	$y=3^{\frac{x+1}{8-x}};$	$y=\dfrac{x^2-5x-6}{x+1};$	$y=\begin{cases}-0.5x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \dfrac{3\pi}{2},\\ 2, & x>\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$
30.	$y=\dfrac{4x}{(x-1)^2};$	$y=6^{\frac{-3}{4+4x}};$	$y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-3};$	$y=\begin{cases}2, & x\le -1,\\ 3-x^2, & -1<x\le 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

Тема 10. Похідна функції

Знайти похідну

1.	$y=3xe^{-3x^2}+2$	$y=\frac{5x}{\sin 3x+2}$	$y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$	$y=2xe^{\sin 5x}$
	$y=\sin(\ln(1+e^{\sqrt{x}}))$	$y=\mathrm{arctg}^3 5x$	$y=\cos^4(1+\sqrt{x})$	$y=x^{\mathrm{tg}\,x}$
	$y=x^{\mathrm{tg}\,x}$	$x\sin 2y+y^2=4$		
2	$y=(4-x^2)e^{\sqrt{x}}+\pi$	$y=\frac{1-3x^2}{\cos 5x+4}$	$y=\frac{\sqrt[3]{1-3x^2}}{5x+4}$	$y=\ln(x+\frac{1}{x+4})$
	$y=(3+x^5)\cdot e^{\sin x}$	$y=\mathrm{arctg}\left(\ln(\frac{1}{\sqrt{x}}+x)\right.$	$y=\arcsin^4(1-x)$	$y=\sin^3(e^x+3)$
	$y=(\mathrm{tg}\,x)^{\sqrt{x}}$	$\cos(x+y)=\sqrt[3]{y}$		
3	$y=x^2 2^{-x}+5$	$y=\frac{7x}{\sin 5x+2}$	$y=\frac{\sqrt{1-x}}{x^2+3}$	$y=\ln(3x-\sqrt{1-x})$
	$y=3x\cdot e^{\cos 4x}$	$y=\sin\ln(1-3^{x^2})$	$y=\arcsin^5 3x$	$y=\sin^8(1+\sqrt[3]{x})$
	$y=x^{\sin x}$	$x\sin 2y=y^3$		
4	$y=5x^3\cdot 3^{2-x}+4$	$y=\frac{3-x}{\sin 2x-4}$	$y=\frac{\sqrt{1-2x^3}}{4-x}$	$y=\ln(\sqrt[3]{1-x^2}+3)$
	$y=x^2e^{-\cos 3x}$	$y=\ln\sin(4+e^{-x})$	$y=\mathrm{arctg}^5(1-3x)$	$y=x^{\cos(1-x)}$
	$y=\cos^3(1-e^{3x})$	$y=x\,\mathrm{tg}\,(xy)-e^{-y}=$		
5	$y=(1-4x)e^{-x^3}+\ln 2$	$y=\frac{\arcsin(1-5x^2)}{1-x}$	$y=(1-x^2)\cdot 2^{\cos(1+}$	$y=\sin\ln(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$
	$y=\frac{x^3+2}{\sqrt{x-x^2}}$	$y=\ln\frac{1}{x^2+\sqrt{x+3}}$	$y=\arccos^3 7x$	$y=\sin^5(e^x+x)$
	$y=(x+7)^{\cos x}$	$\cos(x+y)+\frac{x}{y}=3$		
6	$y=(x+4)e^{1-x^2}+\sqrt{2}$	$y=\frac{3x+1}{\arcsin(1-x)}$	$y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{3-x^3}$	$y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1-x}}$
	$y=(3+x^2)\cdot e^{\arccos 2x}$	$y=\mathrm{arctg}\left(\ln(e^{\frac{1}{x}}+5)\right)$	$y=\sin^3(1-e^{2x})$	$y=(x+\sin x)^x$
	$y=\cos(1-y)+\frac{x^3}{y}=$			
7	$y=(x-1)\arccos x+\ln 2$	$y=\frac{\cos(1-x)+5}{x^4}$	$y=\frac{\sqrt{x^5+4}}{3x+2}$	$y=x^3e^{\mathrm{arctg}\,3x}$

	$y=\ln(x^2-\sqrt[3]{1-x})$	$y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt[5]{x}$	$y=\sin^8 3x$	$y=\ln^7(9x)-e^{-x}$
	$y=x^{\ln(1-e^x)}$	$y^3e^{xy}+\cos x=3$		
8	$y=x^2 4^{1-x^2}+\pi$	$y=\dfrac{1+3x^2}{1+3\cos 5x}$	$y=\dfrac{5-x}{\sqrt{1-3x^3}}$	$y=x^3e^{\operatorname{arctg}3x}$
	$y=\ln(\sqrt[3]{5-x}+x^2)$	$y=\cos\operatorname{tg}(\sqrt{x}-x^2)$	$y=\arcsin^5(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$y=\operatorname{arctg}^3(1-x)$
	$y=(1-x)^{\cos 3x}$	$x\arccos y+y^2=3$		
9	$y=x^4e^{1-\sqrt{x}}+4$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{(1+x)^3}$	$y=\dfrac{\cos(1-5x)}{4+x^2}$	$y=\ln(\sqrt[3]{4+x^2}+1)$
	$y=x^5 2^{\operatorname{tg}x}$	$y=\arccos\left(\ln(e^{-x}+x)\right)$	$y=\operatorname{arctg}^7(1-x)$	$y=(\arcsin x)^{-x^2}$
	$y=\sin^8(1+2^{\sqrt{x}})$	$y\sqrt{x}+\cos(3x+y)=$		
10	$y=3x\cdot e^{-3+2x^3}+2$	$y=\dfrac{5x}{\sin 3x+2}$	$y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$	$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
	$y=2xe^{\sin 5x}$	$y=\sin\ln(1+e^{\sqrt{x}})$	$y=\operatorname{arctg}^3 5x$	$y=\cos^4(1+\sqrt{x})$
	$y=x^{\operatorname{tg}3x}$	$x\sin 2y+y^2=4$		
11	$y=3x^5 4^{-7x}$	$y=\dfrac{1-3x}{\sqrt[5]{(2x+4)^3}}$	$y=\ln(x+e^{-x^3})$	$y=2^{\ln 3x}(1-3x^2)$
	$y=\operatorname{arctg}\left(\ln(e^{2x}-4)\right)$	$y=\arcsin^3(1-\dfrac{1}{x})$	$y=\cos^6(1-x)$	$(3\sin x)^{\sqrt{x}}=y$
	$y\ln x-x\ln y=x+y$			
12	$y=2x^5e^{1-7x}$	$y=\dfrac{1-7x^2}{\arccos 3x+4}$	$y=\dfrac{\sqrt{3-4x^2}}{1-5x}$	$y=\ln\dfrac{1}{4+\sqrt[3]{4+2x}}$
	$y=5^{\cos 4x}(1+4x^3)$	$y=\cos^3(4+e^{\sqrt{x}})$	$y=x^6\cdot 2^{\operatorname{tg}x}$	$y=\operatorname{arcctg}\left(\ln(1+4e^{4x-5})\right)$
	$y=(\sqrt{x})^{\sin(1-x)}$	$y=(\sqrt{x})^{\sin(1-x)}$	$y=\ln(x+y)+x^2$	
13	$y=4^{3-x}(1-7x^3)+e^2$	$y=\dfrac{2x+7}{\cos(5-x^2)}$	$y=\dfrac{\sqrt[7]{2x-x^3}}{x-7}$	$y=\ln(x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}})$
	$y=(4x-7)e^{\sin(1-x)}$	$y=\arcsin\ln(2^{\sqrt{1-x}}+4)$	$y=\operatorname{tg}^7(1-3x^2)$	$y=\sin^5(1-e^{-x})$
	$y=x^{\operatorname{arctg}5x}$	$y=\sqrt{x^2+y^2}+\ln\dfrac{x}{y}$		
14	$y=(1-3x)\cdot 4^{2x}+7$	$y=\dfrac{3+2x}{\sin(1-x)}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{4-5x}}{x^3+4}$	$y=x^2e^{\sin(1-2x)}$
	$y=\ln(\sqrt[4]{1-x}+4x)$	$y=\arccos^2(1+3x)$	$y=\operatorname{tg}\ln\left(1-e^{x^2}\right)$	$y=\operatorname{arctg}^3(3^{\sqrt{x}}+x)$
	$y=(4-7x^3)^{\ln x}$	$\cos(x+y^2)+xy=3$		

15	$y=(x-1)^2e^{x^3}+7$	$y=\frac{1+\sqrt[3]{x-x^2}}{1+4x^3}$	$y=\ln(\frac{1}{x+4}+\sqrt{x})$	$y=3^{\sin 8x}(4+7x^4)$
	$y=\cos^5(x^2-7x)$	$y=\ln^7(e^{\sqrt[3]{x}}+x)$	$y=\ln\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x}+$	$y=(\sqrt{x}+1)^{2x^2+3}$
	$\arcsin(x+y)=\frac{y}{x}$			
16	$y=(\sqrt{x}+3)e^{x^2}+7$	$y=\frac{(3x-4)^2}{\sqrt{x}+7}$	$y=\frac{1+\sqrt[3]{x-x^2}}{1+4x^3}$	$y=\ln(\sqrt[5]{1-x^3+2})$
	$y=x^3 3^{\operatorname{arctg} 5x}$	$y=\arcsin\ln(e^{\sqrt{x}}+3$	$y=\operatorname{arcctg}^6(5-3x)$	$y=\sin^6(e^{\sqrt[3]{x}}+x)$
	$y=(\arcsin x)^{\sqrt{x}}$	$xy+\ln(x+5y)=3$		
17	$y=2x^3 4^{1-x^3}$	$y=\frac{\operatorname{arctg}\left(5x-3x^3\right)}{\sqrt{x}+4}$	$y=\frac{5-3x^2}{\sqrt{3x^3+4}}$	$y=x^5 2^{\ln(1-9x)}$
	$y=\ln\left(x+3^{-\sqrt{x}+4}\right)$	$y=\arccos\left(\ln\left(e^{-\sqrt{x^2+4}}\right)\right)$	$y=\sin^7(3-8x)$	$y=\arcsin^4(1+x^2)$
	$y=(5\operatorname{tg} x)^{1-\sqrt{x}}$	$\cos(x^2-y)+\frac{3x+1}{y}=$		
18	$y=\sqrt[3]{x^2}e^{1-3x^3}$	$y=\frac{x-7x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$	$y=\frac{\sin(3x-4x^2)}{5+x^3}$	$y=\operatorname{tg}^7(3-7x)$
	$y=\ln\left(\sqrt[3]{1-2x^2}+1\right)$	$y=x^4 2^{\arcsin\sqrt{x}}$	$y=\operatorname{arctg}\ln\left(e^{\sqrt[3]{x^2-x}}+3\right)$	$y=\sin^4(e^{-x^3}+x^2)$
	$y=(\arccos x)^{\sqrt[3]{x}}$	$\ln(x^2+y)+\frac{y}{x^2}=3$		
19	$y=(2-7x^2)\cdot 3^{-3x}+\sqrt{2}$	$y=\frac{1-5x}{\cos(3-2x^3)}$	$y=\frac{1-4x^4}{\sqrt[3]{5-x}}$	$y=(1-4x^2)^{\sqrt{x}}$
	$y=\ln(3x-\sqrt[3]{x^2})$	$y=(3x-4)e^{\sin 4x}$	$y=\arccos^5(1-4x^2)$	$y=\operatorname{arctg}^4(e^{5x}+3)$
	$y=\operatorname{tg}\ln(5^{\sqrt{x}}+4)$	$\cos(x^3-y)+\frac{y}{x}=1$		
20	$y=(1+7x)\cdot e^{3x+x^2}+7$	$y=\frac{\arcsin(1-7x)}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\frac{\sqrt{x+4}}{x^5+4x^3}$	$7=\ln\left(x+\sqrt[3]{1-x}\right)$
	$y=\left(4-x^3\right)\cdot 3^{\sin(1-3x)}$	$y=\ln\left(\sqrt[3]{x}-\frac{4}{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}^2 3x$	$y=\sin^3\left(e^{-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
	$y=(\cos x)^{1-\sqrt{x}}$	$\ln(x^3-y^3)=x$		
21	$y=\left(1-x^2\right)\cdot 2^{1-\sqrt{x}}+4$	$y=\frac{1-7x}{1-2\sin x}$	$y=\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{3-4x}$	$y=x^4e^{\cos 5x}$
	$y=\ln\left(\sqrt[3]{1-4x}+x\right)$	$y=\sin\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x}+4\right)$	$y=\operatorname{arctg}^5(1-x)$	$y=\ln^7\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

	$y=\left(1-4x^2\right)^{\sin 3x}$	$x^3\arccos y-y^4=\sqrt{e}$		
22	$y=(5-3x)3^{x^2}+7$	$y=\frac{\sin(5x-x^2)}{1-x}$	$y=\frac{5x+4}{\sqrt[3]{x}+4x}$	$y=\cos^3(e^{\sqrt{x}}+4)$
	$y=\ln\left(5x-\sqrt[3]{x^2-7x}\right)$	$y=\ln\sin(5-e^{-\sqrt{x}})$	$y=x^5e^{\operatorname{arctg}x}$	$y=\arccos^7(1-5x)$
	$y=\left(\sqrt{x}\right)^{\ln x}$	$\frac{x}{y^2}+\operatorname{arctg}xy=1$		
23	$y=5xe^{x^3+4}+\pi$	$y=\frac{15+x^3}{\sqrt{x-7x^2}}$	$y=\ln\frac{x}{1-\sqrt[3]{x}}$	$y=\arccos\left(\ln\left(7-\sqrt[3]{x}\right)\right)$
	$y=x^4 2^{\cos\sqrt{x}}$	$y=\operatorname{arcctg}^4 5x$	$y=\sin^9(3-e^{\sqrt{x}})$	$y=(x+\cos 3x)^{x^2}$
	$\sin(x-y)+x^3y=3$			
24	$y=(1-x^3)e^{5x}+7$	$y=\frac{\operatorname{tg}(1-3x)}{x^3+4}$	$y=\frac{\cos\sqrt{x}+4}{\sqrt[3]{x}+x}$	$y=\sin^7(1-x^2)$
	$y=x^7 7^{\arcsin 5x}$	$y=\ln\frac{x}{\sqrt[6]{1+5x}-x}$	$y=\ln\cos(x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$y=\ln^4(1+e^{5x})$
	$y=\left(\operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{x}\right)\right)^x$	$x^3e^{x+y}-y=4$		
25	$y=(5x-4)e^{\frac{1}{\sqrt{x}}+3}$	$y=\frac{(2x+4)^5}{\sqrt[4]{x^3}}$	$y=\frac{5+4x^3}{\operatorname{tg}(1-7x)}$	$y=x^3 5^{\cos(1-x)}$
	$y=\ln(\sqrt[3]{1-x^2}-x)$	$y=\arcsin\ln\left(e^{1-5x}-\frac{1}{x}\right)$	$y=\cos^7(e^{\sqrt{x}}+3x)$	$y=\sin^9(1+3^{\sqrt{x}})$
	$y=[\cos(1-x)]^x$	$\sqrt{yx}-\sin(5y-x)=$		
26	$y=(3+2x^2)\cdot e^{\sqrt{3-x}}+4$	$y=\frac{\sqrt[3]{4-7x}}{3x^2+7}$	$y=(4-x^3)e^{\sin(2+4x}$	$y=\ln\left(5x-\frac{1}{1-x}\right)$
	$y=\sin\ln(1-2^{5x})$	$y=\arcsin^3(2+3x)$	$y=\sin^4(e^{3x}-1)$	$y=(\operatorname{tg}x)^{3-\sqrt{x}}$
	$\cos(x+y)+\sqrt[4]{y}=0$			
27	$y=x^7 2^{5x}+7\pi$	$y=\frac{4x^2}{\cos(1-x)+4}$	$y=\frac{\sqrt{1-8x}}{x^3+1}$	$y=\ln\left(7x+\sqrt[3]{x^2}\right)$
	$y=4xe^{\cos 9x}$	$y=\cos\ln(1-3^{x^4})$	$y=\arcsin^3(1-7x)$	$y=\sin^4(1-5x^2)$
	$y=(4-5x)^{\sin 2x}$	$y^2\sin 5x+xy=4$		
28	$y=3x^5 3^{-x^2}-\pi^3$	$y=\frac{\sqrt{1-3x^2}}{3-2x}$	$y=3x^3\cos^{4x}$	$y=\ln\left(\sqrt[3]{1-5x^2}-x\right)$
	$y=\ln\sin(5-e^{3x})$	$y=\operatorname{arctg}^3(1+4x)$	$y=\cos^5(4+e^{2x})$	$y=x^{\cos(5-2x)}$
	$(x+1)\cdot\operatorname{tg}(y^2x)+e^4$			

29	$y=(3-2x)e^{-x^3}+\sqrt{3}$	$y=\dfrac{\arcsin(3+4x^2)}{1+3x}$	$y=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}$	$y=\dfrac{3x^3+4}{\sqrt{2x+x^2}}$
	$y=(1-5x^2)\cdot 2^{\cos(1-x)}$	$y=\sin\ln\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$y=\arcsin^3(e^{-x}+2x)$	$y=(1-x)^{\cos 3x}$
	$\cos(x-y)+\dfrac{y^3}{x}=3$			
30	$y=\dfrac{\sin(1-7x)}{5-x^2}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{1+5x}}{3x^2-2}$	$y=\ln\left(5x-\sqrt[3]{x^2}\right)$	$y=x^4\cdot e^{\arcsin 2x}$
	$y=\ln\cos\left(3-e^{\sqrt{x}}\right)$	$y=(\mathrm{tg}\,3x)^{x^2}$	$y=\arccos^8 5x$	$y=\sin^4\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$
	$\dfrac{x}{y^2}+\mathrm{arctg}(x+y)=\pi^2$			

Тема 11. Застосування похідної до дослідження властивостей функції

Провести повне дослідження функцій і накреслити їх графіки.

1.	$y=\dfrac{x+1}{x^3};$	$y=xe^{-x}+1;$	$x=3t^2$, $y=3t-t^3$.
2.	$y=\dfrac{x^2}{x-1};$	$y=(2+x)e^{x}-1;$	$x=\dfrac{t}{t-1}$; $y=\dfrac{t}{t+1}$.
3.	$y=\dfrac{x^3}{x^3-2};$	$y=(x-1)e^{-2x}+2;$	$x=\dfrac{1}{3}t^3$, $y=4-\dfrac{1}{2}t^2$.
4.	$y=\dfrac{-x}{x^3-1};$	$y=(3x-1)e^{2x}-3;$	$x=\dfrac{t-1}{t}$, $y=\dfrac{t+1}{t-1}$.
5.	$y=\left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)^2;$	$y=(2x+1)e^{2x}+1;$	$x=2t-t^3$, $y=2t^2-3$.
6.	$y=\dfrac{3x^3}{x^3+6};$	$y=2xe^{x}-1;$	$x=\dfrac{t-1}{t+1}$, $y=\dfrac{t}{t-1}$.
7.	$y=\dfrac{x^2+1}{2x+3};$	$y=(3-x)e^{-x}+3;$	$x=t^2-1$, $y=t^3-t$.
8.	$y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3};$	$y=(3x+1)e^{-x}+2;$	$x=\dfrac{t+1}{t}$, $y=\dfrac{t-1}{t+1}$.
9.	$y=\dfrac{16}{x^2(x-4)};$	$y=(1-x)e^{-x}+1;$	$x=\dfrac{1}{3}t(3-t^2)$, $y=t^2$.
10.	$y=\dfrac{x^2+1}{x-1};$	$y=(2x+1)e^{x}-1;$	$x=\dfrac{t}{t-1}$, $y=\dfrac{t-1}{t+1}$.
11.	$y=\dfrac{x^4}{x^3-1};$	$y=(6-3x)e^{2x}+2;$	$x=t^2+1$, $y=t^3-3t$.
12.	$y=\dfrac{x^3}{x^2+1};$	$y=3xe^{-x}+1;$	$x=\dfrac{2t}{t+1}$, $y=\dfrac{t}{t-1}$.
13.	$y=\dfrac{-x^2}{(x-2)^2};$	$y=(5x-2)e^{-x}+3;$	$x=\dfrac{1}{6}t^6$, $y=2-\dfrac{1}{4}t^4$.
14.	$y=\dfrac{x}{x^3-2};$	$y=(2x-1)e^{2x}+3;$	$x=\dfrac{t}{t+1}$, $y=\dfrac{2t}{t-1}$.
15.	$y=\dfrac{4x^3}{x^3-1};$	$y=(4-2x)e^{x}-2;$	$x=t^2$, $y=t-\dfrac{1}{3}t^3$.
16.	$y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x};$	$y=(x+3)e^{-2x}+1;$	$x=\dfrac{2t}{t-1}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$.

17.	$y=\dfrac{x+3}{x^3};$	$y=-xe^x+2;$	$x=\dfrac{1}{3}t^3-t$, $y=t^2+2$.
18.	$y=\dfrac{4x^3+5}{x};$	$y=(2x+5)e^{2x}+1;$	$x=\dfrac{t}{t-2}$, $y=\dfrac{t}{t+2}$.
19.	$y=\dfrac{x^2}{x^3+1};$	$y=(1-x)e^x+1;$	$x=\sqrt{3}\cdot t^2$, $y=t^3-t$.
20.	$y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2};$	$y=(x+1)e^{-x}+3;$	$x=\dfrac{t}{t+2}$, $y=\dfrac{t}{t-1}$.
21.	$y=\dfrac{x}{2-x^3};$	$y=(2x+3)e^x+2;$	$x=t^3$, $y=t^2-2$.
22.	$y=\dfrac{x}{x^2-4};$	$y=(x-3)e^{-2x}+4;$	$x=\dfrac{t-2}{t}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$.
23.	$y=\dfrac{4x^3}{x^3-1};$	$y=2xe^{-x}-1;$	$x=3t-t^3$, $y=t^2-1$.
24.	$y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2};$	$y=(2x-1)e^{-x}-2;$	$x=\dfrac{t}{t+2}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$.
25.	$y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1};$	$y=(x-2)e^{2x}-3;$	$x=t^2-1$, $y=\dfrac{t}{3}(t^2-3)$.
26.	$y=\dfrac{-x}{x^3+3};$	$y=(2x-3)e^{-3x}+1;$	$x=\dfrac{t+2}{t}$, $y=\dfrac{t}{t-1}$.
27.	$y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2;$	$y=-xe^{2x}+2;$	$x=8t^3$, $y=3(2t^2-t^4)$.
28.	$y=\dfrac{x}{x^3-4};$	$y=(5-2x)e^{-x}+3;$	$x=\dfrac{t-1}{t+1}$, $y=\dfrac{t+1}{t}$.
29.	$y=\dfrac{x-2}{(x+1)^2};$	$y=(2x+4)e^x-1;$	$x=t^2$, $y=t^4+t^5$.
30.	$y=\dfrac{x}{x^2-4x+3};$	$y=(2x-3)e^x-1;$	$x=\dfrac{t-1}{t}$, $y=\dfrac{t+1}{t-1}$.

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Абрамчук І.В., Сачанюк-Кавецька Н.В., Педорченко Л.І. Вступ до математичного аналізу: диференціальне числення функцій однієї змінної : навч. посібн. Режим доступу: https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fmib/8abramchukvstup_matemat_analizu_diferen_chislennya/zmist.htm.

2. Бабенко В.В., Зіневич А.Г., Кічура С.М. , Тріщ Б.М., Цаповська Ж.Я. Збірник задач з вищої математики. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. 256 с.

3. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою). Ч. 1: навчальний посібник / І.В. Хом'юк, Н.В. Сачанюк-Кавецька, В.В. Хом'юк, М.Б. Ковальчук. Вінниця : ВНТУ, 2017. 206.

4. Дубчак В.М. Вища математика в прикладах та задачах: навч. посібн. / В.М. Дубчак, В.М. Пришляк, Л.І. Новицька. Вінниця: ВНАУ, 2018. 254 с.

5. Збірник задач з вищої математики для розрахункових робіт та модульних контрольних робіт для студентів технічних напрямів підготовки / Уклад.: О.В. Кузьма, В.В. Листопадова, Т.О. Рудик, Н.П. Селезньова, О.В. Суліма. К.: НТУУ «КПІ», 2012. 58 с.

6. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Практикум з вищої математики : навчальний посібник. 3-тє видання. Тернопіль: Економічна думка, 2010. 204 с.

7. Сачанюк-Кавецька Н.В., Ковальчук М.Б. Збірник тестових завдань для систематизації та узагальнення знань з вищої математики. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2014. 137 с.

Електронні ресурси:

1. Електронний навчальний посібник з дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». https://elib.lntu.edu.ua/sites/default/files/elib_upload/%D0%93%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D0%B9%20%D0%9A%D1%80%D0%B0%D0%B4%D1%96%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B0/page3.html

2. Дослідження функції, побудова графіка. https://yukhym.com/uk/doslidzhennya-funktsiji/doslidzhennya-funktsiji-pobudova-grafika.htm

Навчально-методичне видання

Т. А. Газука, О. В. Плуток

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для студентів освітнього рівня «бакалавр»
техніко-технологічних та економічних спеціальностей

Технічний редактор ***О. Клімова***

Комп'ютерна верстка
та макетування ***О. Клімова***

Комп'ютерний набір ***О. Плуток***

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
серія КВ № 17500-6250 ПР від 16.11.2010 р.

Підписано до друку 30.01.2025 р. Формат 60 х 86 1/16.
Папір офсетний. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 6,04. Обл.-вид. арк. 4,91. Зам. № 046.
Редакційно-видавничий відділ ЧНПУ імені Т.Г. Шевченка.
14013, вул. Гетьмана Полуботка, 53, к. 208.
chnpu.tipograf@gmail.com